Matolcsi Tamás

ANALÍZIS I.
(Halmazok, számok)

Tartalom

.

ELŐSZÓ

Minden tudomány úgy fejlődik, hogy az emberiség a felgyülemlett tapasztalatok rendszerezésével fogalmakat alakít ki, ezek között összefüggéseket állapít meg; az így nyert ismeretek birtokában új tapasztalatokra tesz szert, új fogalmakat vezet be, új összefüggéseket tár fel, és így tovább. A matematika fejlődése is így indult, azonban e tudomány jellegénél fogva az előrehaladás a közvetlen tapasztalatoktól való rohamos elszakadással járt együtt. Ez azt eredményezte, hogy az új és új fogalmak általában egyre kevesebb és kevesebb szemléletes tartalommal rendelkeztek, egyre kevésbé kézzelfoghatóvá váltak. Eleinte azonban az emberek megragadtak a szokásos szemléletes képeiknél, aminek következtében ellentmondásokra jutottak. Az ellentmondások szaporodása arra késztette a matematikusokat, hogy kritikusan felülvizsgálják a tudományukat. E munka nyomán alakult ki a matematika mai nagyon szigorúan meghatározott szerkezetű épülete.

Most már, visszatekintve, igen egyszerű példán tudjuk bemutatni, milyen problémák merültek fel, és aztán könnyű vázolni, hogyan lehet ezeket elkerülni. Íme az úgynevezett Richard-féle paradoxon: tekintsük azon egész számok összességét, amelyeket magyar nyelven legfeljebb száz karakterrel (betűvel, irásjellel és szóközzel) le tudunk írni. Például: száz, kétmillió háromszázhuszonhétezer, minusz kettő, hatszor hat, tíz a huszonkettediken, stb. Véges sok karakter áll a rendelkezésünkre, ezeknek véges sok legfeljebb száz hosszúságú variációja lehetséges, tehát csak véges sok ilyen szám van. Közöttük nyilván létezik legnagyobb; jelölje ezt n. Legyen m “a magyar nyelven legfeljebb száz karakterrel leírható legnagyobb egész számnál eggyel nagyobb szám”. Meghatározása szerint tehát m nagyobb, mint n. Számoljuk viszont meg az idézőjelen belüli karaktereket: száznál kevesebben vannak. Következésképpen m a kiválasztott tulajdonsággal rendelkezik, így nem lehet nagyobb, mint n.

Egészen addig, amíg nyilvánvalóvá nem vált az ellentmondás, úgy tűnt, értelmes és igaz dolgokat mondtunk. Valahol pedig hiba van. Hiába ismételjük azonban végig, amit mondtunk, nem találunk szembeszökő tévedést.

Az a baj, hogy nincs határozott értelme annak, hogy egy egész szám “magyar nyelven legfeljebb száz karakterrel leírható.” Erről intuitív képünk van, de gondoljuk csak el, hogy valaki nem érti (például mi magunk), miről van szó, és el kell neki magyaráznunk. A száz és a legfeljebb jelentése egyértelmű, a karaktereket felsorolhatjuk, így ezek fogalma világos. Azt kell már csak megmagyaráznunk, mit jelent, hogy magyar nyelven (az adott módon) leírható. Próbálkozzunk: “van olyan magyar szavakból álló (megfelelő hosszúságú) kifejezés, amely meghatározza”. Aki eddig nem értette, ezután sem fogja: megkérdezi, mit jelent a ‘kifejezés’, és mit jelent a ‘meghatározza’. Megpróbáljuk ezt is elmagyarázni, a magyarázatban azonban ismét új szavak jelennek, amelyeknek az értelmét meg lehet kérdezni, így azokat is el kellene magyarázni, és így tovább, és nem látjuk, hogy ez a folyamat megnyugtatóan véget érne: a ‘leírható’ végülis megfoghatatlan fogalom. Egy kicsit kézzelfoghatóbb példával szemléltethetjük ezt a vég nélküli magyarázkodást. Gondojunk egy idegen ajkú emberre, aki megkérdezi tőlünk, mi az esernyő, nem ismeri ennek a szónak a jelentését. Azt válaszoljuk, az, amit a fejünk fölé tartunk, amikor esik az eső. Emberünk ingatja a fejét, nem érti; azt tudja, mi a fej, de azt nem, mi a fölé, mi a tart, és mi az eső. Ezek magyarázatában ismét lehetnek az idegen számára ismeretlen szavak, és így tovább, szinte reménytelenül, hacsak fel nem találjuk magunkat, és mutogatással véget nem vetünk a kínos jelenetnek.

Minthogy a tudományban a gesztikulálásnak nincs helye, a matematikában a pontos meghatározás mellett kell maradnunk, ami azt jelenti, hogy egy ismeretlen (új) fogalmat ismertekkel magyarázunk meg. Az előbbi példában: ha a ‘fej’, ‘fölé’, ‘tart’ és ‘eső’ ismert, akkor az esernyő meg van határozva. Ha nem ismertek, azokat is meg kell határozni más fogalmakkal; ha azok ismertek, minden rendben van, ha nem, új meghatározások kellenek ... és így tovább. Világos, hogy mindent nem tudunk megmagyarázni, mert minden fogalom magyarázata más fogalmakra támaszkodik. Valamit ismerni kell, valahonnan el kell indulni. Így épül fel a matematika: bizonyos **alapfogalmakat** ismertnek veszünk, és ezekre vonatkozóan elfdogadunk bizonyos összefüggéseket, **alapigazságokat** más néven **axiómákat**. Ezek alapján új fogalmakat származtatunk, a fogalmak között új összefüggéseket állapítunk meg, amelyek ismét új fogalmakhoz, közöttük új összefüggésekhez vezetnek, és így tovább...

Az, hogy mit fogadunk el alapfogalomnak és alapigazságnak, függ attól, milyen szinten akarjuk tárgyalni a matematikát. Az alapfogalmak és alapigazságok rendszerének olyannak kell lennie, hogy ne tartalmazzon ellentmondást, sőt ne is vezessen ellentmondáshoz. Ez nagyon szigorú követelmény, és igen nehezen ellenőrizhető (vagy nem is ellenőrizhető), hogy teljesül-e, sokszor csak bízunk abban, hogy a rendszer ellentmondásmentes (ha mégis ellentmondásra jutunk, meg kell változtatni a rendszert).

Természetesen igyekszünk minél kevesebből kiindulni, hogy az alapfogalmak és alapigazságok rendszere áttekinthető legyen, és ezzel a lehető legkisebbre szorítsuk annak az eshetőségét, hogy az alapok ellentmondást tartalmazzanak. Minél szűkebb azonban az alapok rendszere, annál absztraktabb az elmélet. A matematikai logika és az axiomatikus halmazelmélet az alapok ilyen nagyon szigorú felépítését adja. A matematikát alkalmazó tudományoknak azonban nincs szükségük erre az igényes de hosszú megalapozásra. Mi is egy lazább, kötetlenebb felépítést tárgyalunk, amelyet általában naív logika és naív halmazelmélet névvel illetnek.

LOGIKAI BEVEZETŐ

1. A matematikai logika alapvető fogalmai a matematikai **objektumok**, az objektumokkal megfogalmazott **kijelentések** (más néven ítéletek), és a kijelentések **igaz** vagy **hamis** volta (igazság-tartalma).

Most a matematikai objektumok leírását megkerüljük, sőt szemléltető példáinkban éppen nem matematikai, hanem "hétköznapi" objektumokat fogunk használmi.

A kijelentéseket jellemző legegyszerűbb tulajdonság az, hogy kijelentésekből a következő logikai műveletekkel ismét kijelentésekhez jutunk:

tagadás	"nem..."	$(\neg ...)$,
összekapcsolás	"...és..."	$(... \vee ...)$,
szétválasztás	"...vagy..."	$(... \wedge ...)$,
következtetés	"ha..., akkor..."	$(... \Rightarrow ...)$,
egyenértékűsítés	"...akkor és csak akkor, ha..."	$(... \iff ...)$.

Közelebbről: összekapcsolva két kijelentést az 'és' kötőszóval kijelentést kapunk, stb. Általában: kijelentést téve a zárójelben levő formulák kipontozott helyére kijelentést képezünk. Például az "esik az eső" és a "Bodri ugat" kijelentések esetén

"nem esik az eső", "esik az eső és Bodri ugat", "esik az eső vagy Bodri ugat", "ha esik az eső, akkor Bodri ugat", "akkor és csak akkor esik az eső, ha Bodri ugat"

szintén kijelentések. A következtetésre az "abból, hogy .... következik, hogy..." és "...maga után vonja, hogy ..." szinonimákat is használjuk; az egyenértékűsítésre pedig azt, hogy "...pontosan akkor, ha ....". A tagadással egy kicsit vigyáznunk kell, mert a matematikai nyelvvel ellentétben a természetes nyelvek szabályai szerint egy kijelentést nem mindig úgy tagadunk, hogy az egész elé odatesszük a 'nem' szócskát. Például "Bodri ugat" tagadása "Bodri nem ugat". A "nem Bodri ugat" kijelentés a "Bodri az, aki ugat" tagadása.

Absztraktabb módon, ha a kijelentéseket is egy-egy szimbólummal jelöljük, a logikai műveleteket a táblázat második zárójelébe tett jelekkel írjuk le. Például jelölje p az "esik az eső" kijelentést, q a "Bodri ugat" kijelentést: ekkor $p \wedge q$ jelöli az "esik az eső és Bodri ugat" kijelentést.

Kijelentések alkotásának egy másik szabálya már egy kissé nehezebben fogalmazható meg. A **logikai függvények** olyan kijelentésformulák – nem kijelentések!

–, amelyekben egy vagy több úgynevezett változó szerepel, amelyek meghatározott objektumok lehetnek; ha a logikai függvény változóját specifikáljuk azaz rögzítjük egy lehetséges módon, kijelentést kapunk; ezeket a kijelentéseket a logikai függvény értékeinek nevezzük. Más szóval a logikai függvény bizonyos (matematikai) objektumokhoz rendel hozzá kijelentéseket; a logikai függvény változója jelképezi a szóban forgó objektumokat. Példával világítjuk meg: az előbb Bodriról volt szó, egy meghatározott kutyáról; ha 'Bodri' helyett a 'kutya' változót vesszük, logikai függvényt kapunk: "kutya ugat". Ezt a változót Bodrinak, Pajtásnak, Nérónak stb. specifikálva rendre kijelentéseket nyerünk. Igen fontos, hogy logikai függvényekből az eddigiektől eltérő módon is gyárthatunk kijelentést úgy, hogy a változót lekötjük az

univerzális kvantor	(minden)	$(\forall)$
egzisztenciális kvantor	(létezik)	$(\exists)$

egyikével. Példánk szerint: "minden kutya ugat" és "létezik kutya, amelyik ugat" kijelentések.

Absztrakt jelölésekkel: ha P logikai függvény, akkor a kvantorokkal megalkothatjuk belőle a $\forall x : P(x)$ és a $\exists x : P(x)$ kijelentéseket. Jegyezzük meg, hogy a változók jelölésére akármilyen betűt (szimbólumot) használhatunk amit még nem kötöttünk le valaminek a jelölésére; x helyett írhatunk a-t, b-t stb., ha ezek nem jelei P egy változója értékének; és nyilván nem írhatunk x helyett P-t.

2. A kijelentések lehetnek igazak vagy hamisak. Például a "minden alma jó ízű" kijelentés hamis, a "létezik alma, amelyik jó ízű" kijelentés igaz. Alapvető probléma az, hogyan dönthetjük el egy kijentésről, hogy igaz-e vagy sem. Egyszerű szabályok állnak a rendelkezésünkre a logikai műveletek esetén. Legyen p és q egy-egy kijelentés, és jelképezze a kijelentések igaz illetve hamis voltát az i illetve a h betű. Ekkor a következő úgynevezett igazságtáblázatot fogadjuk el, amely megadja a p-ből és q-ból képzett kijelentések igaz illetve hamis voltát a p és a q igaz illetve hamis voltától függően:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \iff q$
i	i	h	i	i	i	i
i	h	h	h	i	h	h
h	i	i	h	i	i	h
h	h	i	h	h	i	i

A táblázat a hétköznapi logika, a "józan ész" egyszerű megállapításait foglalja egybe; talán csak a következtetésre vonatkozó két utolsó megállapodásunk nem nyilvánvaló; e két pontot úgy szokták megfogalmazni, hogy hamisból bármi következik. A következtetés a logika legfontosabb művelete: ha p és $p \Rightarrow q$ is igaz, akkor q is igaz, amint azt a táblázat mutatja. Tehát igaz kijelentésből igaz (azaz helyes) következtetéssel igaz kijelentéshez jutunk. Hamis kijelentésből helyes következtetéssel akár igaz, akár hamis kijelentést levezethetünk.

Logikai műveletekkel szerkesztett kijelentések igazságtartalmát elvileg megállapíthatjuk az eredeti kijelentések igazságtartalmából. Gyakorlatilag azonban egy többszörösen összetett kijeletést – például ilyent: $\neg((p \vee q) \wedge \neg r)$ – már nem olyan egyszerű kiértékelni. Van azonban egyszerűsítési lehetőségünk. Két kijelentést **egyenértékűnek** (**ekvivalensnek**) nevezünk, ha igazságtartalmuk azonos; más szóval p és q egyenértékű, ha $p \iff q$ igaz. Ezt így jelöljük: $p \equiv q$. Egy kijelentés igaz vagy hamis voltának eldöntéséhez a kijelentéssel egyenértékű, könnyebben kiértékelhető kijelentést is vizsgálhatunk. A következő, szinte nyilvánvaló összefüggéseket írhatjuk fel az igazságtáblázat alapján:

$$\neg(\neg p) \equiv p, \quad \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q, \quad \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q, \quad p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p,$$

$$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r), \quad (p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r).$$

Ezek szerint például

$$\neg((p \vee q) \wedge \neg r) \equiv (\neg(p \wedge q)) \vee r \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r \equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r),$$

és a konkrét esetekben a fenti négy kijelentés valmelyike esetleg sokkal könnyebben igazolható vagy cáfolható a többinél.

A kvantorok közötti kapcsolatot a

$$\neg(\forall x : P(x)) \equiv \exists x : \neg P(x)$$

összefüggés jellemzi; ellentétben az előzőekkel, ez nem következik az igazságtáblázatból, ez attól független megállapodásunk.

3. Eddig olyan kijelentések igazságtartalmáról beszéltünk, amelyek ismert igazságtartalmú más kijelentésekből készültek logikai műveletekkel vagy logikai függvényekből kvantorokkal. Mit tudunk viszont olyan kijelentésekről, amelyek nem ilyenek? Miként döntjük el például, igaz-e, hogy esik az eső? Logikai úton sehogy: csakis tapasztalatilag. És itt kell nagyon vigyáznunk: mennyire elegyíthetjük a tapasztalatot a logikával, hogy az előszóban említett ellentmondásokhoz ne jussunk.

A matematika axiomatikus felépítése a mondottakra támaszkodva a következőképpen foglalható össze. Néhány fogalmat – az úgynevezett **alapfogalmakat** – magyarázat nélkül ("tapasztalatilag") ismertnek veszünk. Az alapfogalmakkal megfogalmazott néhány kijelenetést – az úgynevezett **axiómákat** vagy **alapigazságokat** – magyarázat nélkül ("tapasztalatilag") igaznak fogadunk el. Az alapfogalmak és alapigazságok birtokában új fogalmakat vezetünk be, azokkal új kijelentéseket fogalmazunk meg, és a logika segítségével bebizonyítjuk, hogy ezek igazak. A bizonyítás (vagy levezetés) a helyes következtetés szabályaira épül, amelyeknek csak egy része az igazságtáblázat, és amelyeket nem célunk részletezni. A továbbiakban egyszerűen a hétköznapi logikus gondolkodásra hagyatkozunk. Annyit említünk még meg, hogy az igaz kijelentést **állításnak** vagy **tételnek** nevezzük, ezért ezek a szavak jelennek meg általában a matematika tárgyalása során a kijelentés helyett.

I. A HALMAZELMÉLET ALAPJAI

1. Halmazok

1.1. A halmaz a matematika legalapvetőbb fogalma, s bízvást mondhatjuk, hogy az egész matematika a halmazok elméletére épül. Egy kosár gyümölcs, egy egyetemi évfolyam, egy halom tégla olyan példák, amelyek a halmaz fogalmát sugallják és szemléltetik. A gyümölcsök, a hallgatók, a téglák a megfelelő halmazok elemei.

A halmazok elemekből állnak, elemekből épülnek fel. Nehogy azt higgyük azonban, hogy a halmaz és az elem egymást kizáró fogalmak: egy halmaz lehet eleme egy másik halmaznak. Például az egyetemi évfolyamok összességének elemei az egyetemi évfolyamok, amelyek maguk is halmazok. Sőt az egyetemi évfolyamot alkotó bármely elem, egy hallgató, maga is vehető halmaznak: az anyagi és szellemi tulajdonságai összességének. Ezért nem meglepő a matematikának az a célszerű felfogása, hogy csak halmazokat tekint, nem különböztet meg "elem" és "halmaz" fogalmat. Arra a fogalomra viszont természetesen szükség van, hogy az egyik halmaz eleme egy másiknak.

A matematikai **halmaz** fogalmát (definiálatlan) alapfogalomnak tekintjük; szintén alapfogalom egy halmaznak egy másik **halmazhoz való tartozása**. A halmaz szó helyett, vele azonos értelemben, használjuk az összesség, sokaság, rendszer, család elnevezésket is. Azt a kijelentést, hogy x az A halmazhoz tartozik (más kifejezésekkel: x eleme A-nak, x benne van A-ban), így írjuk "$x \in A$". Arról van tehát szó, hogy elfogadjuk: bármely x és A halmazok esetén az "$x \in A$" kijelentés értelmes. Az "$x \in A$" kijelentés tehát lehet igaz vagy hamis. Ha igaz, azt írjuk, hogy $x \in A$, ha hamis, akkor azt, hogy $x \notin A$.

1.2. Halmazok egyenlősége fontos elemi fogalom. Erre vonatkozik a

Meghatározottsági axióma: *két halmaz pontosan akkor egyenlő, ha ugyanazok az elemeik.*

Az A és B halmazok egyenlőségét az $A = B$ szimbólummal jelöljük. Ha A nem egyenlő B-vel, azt írjuk, hogy $A \neq B$.

A meghatározottsági axióma szerint tehát $A = B$ pontosan akkor teljesül, ha az "$x \in A$" és "$x \in B$" kijelentések minden x esetén egyenértékűek, amit egyszerűen így írunk: $x \in A$ pontosan akkor, ha $x \in B$.

A meghatározottsági axióma a mi kereteink között valójában definíció. Ugyanis csak akkor lehet axióma, ha a logikai elmélet, amelyben dolgozunk, tartalmazza az egyenlőség fogalmát. Minthogy a mi naív logikánkban nem esett szó egyenlőségről, definíciónak kell tekintenünk a halmazok egyenlőségét.

Véssük jól eszünkbe, hogy a meghatározottsági axióma nem természetes szükségszerűség, hanem a halmazok tulajdonságára vonatkozó nem triviális megállapodás. Lássuk, miért! Példákat hoztunk halmazokra, és ezekből nyilvánvalónak tűnik, hogy két halmaz csak úgy lehet egyenlő, hogy az elemeik ugyanazok. Igen ám, de a példa csak szemléltetés, amely intuíciót ad a halmaz fogalmához. Az egzakt felépítés első lépéseként egyelőre csak azt fogadtuk el, hogy van egyfajta kijelentésünk, az "$x \in A$", amelyről semmi továbbit nem mondtunk. Nem szabad tehát "beleérteni" a példákból vett tulajdonságot. Tegyük fel, hogy a halmazok helyett most embereket tekintünk, és az "$x \in A$" jelentse azt, hogy "x tartozik A-nak (pénzzel)". Itt nem teljesül a meghatározottsági axióma: attól, hogy ugyanazok tartoznak A-nak és B-nek, még A és B lehet két különböző személy.

1.3. Egy halmazt az elemei határoznak meg, vagyis egy halmaz adott, ha adottak az elemei. Az a fordított kérdés merül fel, bármi módon megadott elemek halmazt alkotna-e. A felelet: nem. Nyilván kikötéseket kell tennünk, hogy ne keveredjünk olyan ellentmondásba, mint amilyennel a "magyar nyelven legfeljebbb száz karakterrel leírható egész számok" megadottnak vélt összességénél találkoztunk. Az első és igen fontos megállapodásunk a

Páraxióma: *ha a és b valamilyen (nem szükségképpen azonos) halmaz elemei, akkor létezik olyan halmaz, amelynek csak a és b az eleme.*

A csak az a és b elemet tartalmazó halmaz jele: $\{a, b\}$.

Természetesen előfordulhat, hogy a szóban forgó elemek megegyeznek; ekkor az $\{a, a\}$ jelölés helyett az $\{a\}$-t használjuk. Az $\{a\}$ halmaznak tehát egyetlen eleme van, az a.

Itt azonnal megragadjuk az alkalmat, hogy felhívjuk a figyelmet arra, egy elem és az a halmaz, amely csak ezt az egyetlen elemet tartalmazza, noha kölcsönösen meghatározzák egymást, különböző dolgok.

1.4. Definíció *Azt mondjuk, hogy az A halmaz a B halmaz **része** (A **részhalmaza** B-nek, B **tartalmazza** A-t, A **szűkebb** B-nél, B **bővebb** A-nál), jelben $A \subset B$ vagy $B \supset A$, ha A minden eleme hozzátartozik B-hez is.*

Más szóval, $A \subset B$ pontosan akkor teljesül, ha az "$x \in A$" kijelentésből következik az "$x \in B$" kijelentés, azaz egyszerűen: ha $x \in A$, akkor $x \in B$. Másképpen ugyanez: minden $x \in A$ esetén $x \in B$.

Könnyű megmutatni, hogy minden A, B és C halmazra

(i) $A \subset A$,
(ii) $A = B$ akkor és csak akkor, ha $A \subset B$ és $B \subset A$,
(iii) ha $A \subset B$ és $B \subset C$, akkor $A \subset C$.
Ezeket sorban a halmazelméleti tartalmazás **reflexív**, **antiszimmetrikus** és **tranzitív** tulajdonságainak nevezzük.

Vegyük észre, hogy az $A \subset B$ összefüggés nem zárja ki az $A = B$ lehetőséget. Ha $A \subset B$ de $A \neq B$, akkor azt mondjuk, hogy A a B **valódi részhalmaza**.

Ha A nem részhalmaza B-nek, azt írjuk, hogy $A \not\subset B$; ez tehát azt jelenti, hogy van olyan $x \in A$, amelyre $x \notin B$.

A részhalmazokra vonatkozik a halmazelmélet egyik alapelve, az

Elkülönítési axióma: *ha A halmaz, és adott egy P logikai függvény, akkor van olyan halmaz, amelynek az elemei pontosan azok az x-ek az A-ból, amelyekre $P(x)$ igaz.*

Az ily módon megadott halmaz szokásos jele:

$$\{x \in A \mid P(x)\}.$$

Ez nyilván az A részhalmaza, amelyet szemléletesen úgy tekinthetünk, mint az A-nak a P által előírt tulajdonságú elemeiből álló halmazt.

1.5. Megjegyzések (i) Matematikai halmazok illusztrálására megelőlegezzük a valós számok ismeretét; a valós számok halmazát $\mathbb{R}$ jelöli.

(ii) Egy halmaz akkor van meghatározva, ha pontosan tudjuk, mik az elemei. Egy halmazt megadhatunk tehát úgy, hogy felsoroljuk az elemeit. Ez természetesen csak akkor lehetséges, ha a halmaznak véges sok eleme van (később látni fogjuk, mit jelent ez pontosan). Ilyenkor a páraxiómánál bevezetett jelölést használjuk: kapcsos zárójel közé beírjuk az elemeket, vesszővel elválasztva egymástól. Például az a, b és c elemekből álló halmaz $\{a, b, c\}$. Figyeljünk a különbségre: itt nem állítjuk azt, hogy az a, b és c elemekből halmaz képezhető; ha tudjuk, hogy egy halmaznak csak ezek az elemei, akkor ezt a halmazt így jelöljük (később látni fogjuk, hogy akárhány véges elemből valóban képezhető halmaz).

Az elemek felsorolásakor egy elem esetleg többször is szerepelhet; az így megadott halmaz a meghatározottsági axióma szerint ugyanaz, mintha minden elem csak egyszer szerepelne. Ugyancsak nem számít a felsorolás sorrendje. Például $\{a, a, b, b, a\} = \{a, b\} = \{b, a\}$.

(ii) Nagyon fontosak a célszerű jelölések. Például valamilyen célból foglalkozni akarunk az $\{1, 2\}$ halmazzal. Hogy ne kelljen mindig hosszadalmasan irkálnunk, egyetlen betűvel is jelölhetünk; elnevezzük, mondjuk A-nak:

$$A := \{1, 2\}.$$

A := illetve a =: szimbólum az **elnevező** vagy **definiáló** egyenlőség jele; az egyenlőségjel oldalán álló már adott halmaznak a kettőspont oldalán álló nevet illetve jelölést adjuk.

Hasonlóképpen például

$$B := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}.$$

Rövid vizsgálódás után rájövünk, hogy az iménti két halmaz egyenlő: $A = B$.

Remélhetőleg a példák eléggé megvilágították a különbséget a definiáló egyenlőség ($:=$ vagy $=:$) és az állító egyenlőség ($=$) között. A tiszta gondolkodás szempontjából fontos, hogy ezeket mindig élesen megkülönböztessük.

(iii) Elengedhetetlen, hogy az elkülönítési axiómában valóban logikai függvény szerepeljen (amelynek az értékei "értelmes kijeltések"). Gyakran olvasni vagy hallami ilyesféle kijelentéseket: "ha a szögsebesség elég nagy, akkor a köringa kilendül", "ha a rácsállandó elég kicsi, akkor interferenciát észlelünk". Valós számokra átfogalmazva ezek ilyen sémákba önthetők: "ha x elég nagy valós szám, akkor...", "ha x elég kis valós szám, akkor...", illetve tovább formálva: "ha x benne van az elég nagy (kis) valós számok halmazában, akkor...". Végül is látjuk, hogy az $\{x \in \mathbb{R}$ |x elég nagy$\}$, $\{x \in \mathbb{R}$ |x elég kicsi$\}$ halmazokról volna szó – ha léteznének ilyen halmazok. Az "x elég nagy" és az "x elég kicsi" kijelentések igazságtartalma meghatározhatatlan. Ilyen nem-egyértelműségre vezethető vissza a "magyar nyelven legfeljebb száz kartakterrel leírható egész számok" paradoxona.

Valami értelme azért csak van a szögsebességre és a rácsállandóra tett szokásos kijelentéseknek, csak másképp kell megfogalmazni: létezik egy szögsebesség, amelynél nagyob szögsebességekre a köringa kilendül; létezik egy távolság, amelynél kisebb rácsállandó esetén interferencia észlelhető. Vagyis az elég nagy, illetve elég kicsi itt azt jelenti, hogy egy meghatározott értéknél nagyobb, illetve kisebb. Azt mindig a szóban forgó körülmények határozzák meg (a köringa hossza, tömege, illetve a fény hullámhossza), mi az a határ, amelytől kezdve elég nagynak, illetve elég kicsinek tekintünk egy mennyiséget.

(iv) Érdemes megemlíteni néhány "furcsaságot", ami ellenkezik azokkal egyszerű képekkel, ahogy a halmazokat egy kosár gyümölcsként stb. szemléltetjük. Noha legtöbbször jelölésben is különbséget teszünk elem és halmaz között, hogy könnyebben átlássuk a dolgokat (például az elemeket kis betű, a halmazokat nagy betű jelöli), mint mondtuk, az elem is halmaz, és csak két halmaz egymáshoz való viszonya az, ami meghatározza, melyiket tekintjük az adott szituációban elemnek. Vegyünk két halmazt, A-t és B-t. Az eddigiek szerint tehát lehetséges, hogy $A \in B$ és lehetséges, hogy $B \in A$. Eddig rendben van; viszont semmi sem zárja ki azt a "furcsaságot", hogy esetleg mindkét lehetőség egyszerre teljesül (ami lehetetlen az egyszerű elképzeléseink szerint: az alma eleme a kosár gyümölcsnek, és a kosár gyümölcs is eleme az almának?). Ugyanilyen "furcsaság" az $A \in A$ lehetőség – egy halmaz eleme önmagának –, amit szintén nem zár ki semmi.

1.6. Feladatok

1. Legyen $A := \{1, 2, 10\}$, $B := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$, $C := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 1\}$. Ekkor $A \subset C$, $A \neq C$, $B \subset C$, $B \neq C$, $A \not\subset B$, $B \not\subset A$.

2. Mutassuk meg, hogy $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = x\} = \{0, 1\}$.

2. A hatványhalmaz

2.1. Minden eddigi és további fáradozásunk hiábavaló volna, ha egyáltalán nem volnának halmazok. Nyilván el kell fogadnunk kiindulásul, hogy létezik legalább egy halmaz. Ennek egyszerű, de érdekes következménye, hogy van egy olyan halmaz, amelynek egyetlen eleme sincs. Valóban, ha A halmaz, akkor $\{x \in A \mid x \neq x\}$ halmaz az elkülönítési axióma szerint, viszont nincs elme. A meghatározottsági axióma szerint egyetlen ilyen halmaz van; **üres halmaznak** hívjuk és $\emptyset$-val jelöljük.

Minden A halmazra $\emptyset \subset A$ teljesül. Valóban, minthogy $\emptyset$-nak nincs eleme, minden elemére igaz, hogy eleme bármely A halmaznak. Noha ez az állítás igaz, az érvelés egy kicsit furcsának tűnhet; fogunk még ilyennel találkozni. Hogy kézenfekvőbben is bebizonyítsuk az $\emptyset \subset A$ összefüggést, így is érvelhetünk: ha ez nem volna igaz, akkor volna az üres halmaznak olyan eleme, amely nem eleme A-nak; mivel $\emptyset$-nak egyáltalnán nincs eleme, ez nem fordulhat elő.

2.2. Van tehát egy legszűkebb halmazunk, amelynek nincs eleme. Van-e legbővebb halmaz, vagyis olyan halmaz, amelynek elme minden? Természetesnek látszik, hogy van. Régen a matematikában is nyilvánvalónak vették, hogy a minden dolgok halmaza, pontosabban az összes halmazok halmaza, az **univerzum** létezik. Igen egyszerűen beláthatjuk az úgynevezett Russel-féle paradoxon segítségével, hogy ez nem igaz.

Tegyük fel ugyanis, hogy ilyen U univerzum létezik, és legyen S azon halmazok összessége, amelyek nem elemei önmaguknak:

$$S := \{X \in U \mid X \notin X\}.$$

Mivel U univerzum, S az eleme. Ezután két eset lehetséges: vagy $S \in S$ vagy $S \notin S$. Ha $S \in S$, akkor az S definíciója szerint $S \notin S$, ami ellentmondás. Ha $S \notin S$, akkor megint az S definíciója szerint $S \in S$, ami ismét ellentmondás. Csak úgy kerülhetjük ki az ellentmondást, ha elvetjük az univerzum létezését.

2.3. Nem létezik tehát az összes halmazok halmaza. Viszont bizonyos halmazok halmaza létezik. Erre vonatkozik a

Hatványhalmaz-axióma: *minden halmazhoz létezik egy halmaz, amelynek az elemei pontosan a szóban forgó halmaz részhalmazai.*

Az A halmaz összes részhalmazaiból álló halmazt az A **hatványhalmazának** nevezzük, és $\mathcal{P}(A)$-val jelöljük.

$\mathcal{P}(A)$-nak két triviális eleme van: $\emptyset$ és A. Általában $\mathcal{P}(A)$ igen "terjedelmes" A-hoz viszonyítva. Lássuk csak, mit is jelent ez. Könnyű ellenőrizni, hogy

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\},$$

vagyis ekkor a két triviális elem egybeesik, továbbá

$$\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\},$$

$$\mathcal{P}(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}.$$

Lehet folytatni, és egyszerű kitalálni, hogy az n elemű halmaz hatványhalmazának 2^n eleme van. Ezt később be is bizonyítjuk (miután értelmeztük az n természetes számot és az n elemű halmaz fogalmát).

Végül megemlítjük azt a fontos tényt, hogy ha A és B halmaz, akkor, lévén mindkettő eleme a saját hatványhalmazának, a páraxióma szerint létezik az $\{A, B\}$ halmaz.

2.4. Feladatok

1. Bizonyítsuk be: $A = B$ egyenértékű azzal, hogy $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$.
2. Bizonyítsuk be: $A \subset B$ egyenértékű azzal, hogy $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

3. Halmazműveletek

3.1. Két kosár gyümölcsöt egyesíthetünk egy nagyobb kosár gyümölccsé; az egyetemi évfolyamok hallgatóit egybefoglalva megkapjuk az egész egyetem hallgatóit; több halom téglát is össze lehet rakni egy nagyobb halommá. Ezek a példák sugallják a halmazok egyesítésének a fogalmát. Persze egy kosár gyümölcsöt és egy halom téglát is össze lehet rakni, és még hozzá egy egyetemi évfolyamot is; csak a szokatlanság miatt furcsálljuk, hogyan alkotnának ezek együtt egy halmazt, de a halmazelméletben nincs – és nem is lehet – semmiféle kikötés, hogy egy halmaznak az elemei "azonos fajtájúak" legyenek. Az eddigiekből nem következik, hogy különféle halmazok "összetevésével" halmazhoz jutunk; ezt az elvárásáunkat biztosítja az

Egyesítési axióma: *halmazok bármely rendszeréhez (azaz halmazához) létezik egy halmaz, amely azokból az elemekből áll, amelyek a halmazrendszer legalább egyik halmazához hozzátartoznak.*

Az $\mathcal{S}$ halmazrendszer esetén erre a halmazra az $\bigcup \mathcal{S}$ vagy

$$\bigcup\{X \mid X \in \mathcal{S}\}$$

jelölést használjuk, és a halmazrendszer **egyesítésének** (**uniójának**) nevezzük.

Az egyesítés megfogalmazása szerint x pontosan akkor eleme az $\bigcup \mathcal{S}$ halmaznak, ha létezik $X \subset \mathcal{S}$ úgy, hogy $x \in X$. Formálisan tehát

$$\bigcup \mathcal{S} = \{x \mid \text{ létezik } X \in \mathcal{S}, x \in X\}.$$

A fenti formula nem fogható fel az elkülönítési axióma szerinti definíciónak, mert nincs megadva az a halmaz, amelynek az x elemeire tesszük a kijelentést; épp az egyesítési axióma rögzíti ezt a halmazt.

Legyen A és B halmaz. Az előző fejezet végén mondottak szerint létezik az $\{A, B\}$ halmazrendszer; ennek egyesítését $A \cup B$ vagy $B \cup A$ jelöli, azaz

$$A \cup B := B \cup A := \bigcup \{A, B\}.$$

x pontosan akkor eleme $A \cup B$-nek, ha A-nak *vagy* B-nek eleme.

Íme az egyesítés néhány elemi tulajdonsága, melyeket igen egyszerű bizonyítani:

$$A \cup \emptyset = A, \qquad A \cup A = A, \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$A \subset B \quad \text{pontosan akkor, ha} \quad A \cup B = B,$$

és ha H olyan halmaz, hogy egy $\mathcal{S}$ halmazrendszer minden X elemére $X \subset H$ teljesül, akkor $\bigcup \mathcal{S} \subset H$.

3.2. Ha a, b és c valamely halmaznak az elemei, akkor a páraxióma szerint létezik az $\{a, b\}$ és a $\{c\}$ halmaz. Az egyesítési axióma miatt pedig létezik $\{a, b\} \cup \{c\}$, az a halmaz, amelynek az elemei éppen a, b és c, vagyis $\{a, b\} \cup \{c\} = \{a, b, c\}$.

Hasonlóan látható be, hogy ha a, b, c és d valamely halmazok elemei, akkor létezik az $\{a, b, c, d\}$ halmaz. Általában véges sok – hogy ez mit jelent, később pontosítjuk – elem esetén mindig létezik a csak a szóban forgó elmeket tartalmazó halmaz.

3.3. Egy elem tartozhat több halmazhoz is. Ez a gondolat vezet el a halmazok közös részének a fogalmához.

Definíció *Az $\mathcal{S}$ halmazrendszer **közös részén** vagy **metszetén** a*

$$\bigcap \mathcal{S} := \bigcap \{X \mid X \in S\} := \{x \in \bigcup \mathcal{S} \mid \text{ minden } X \in \mathcal{S} \text{ esetén } x \in X\}$$

halmazt értjük.

Ellentétben az egyesítés hasonló formájú leírásával, ez jó definíció az elkülönítési axióma és az egyesítési axióma szerint.

Két halmaz esetén most is külön jelölést vezetünk be:

$$A \cap B := B \cap A := \bigcap \{A, B\}.$$

x pontosan akkor eleme $A \cap B$-nek, ha eleme A-nak *és* B-nek.

Íme a metszet néhány elemi tulajdonsága:

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \qquad A \cap A = A, \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

$$A \subset B \quad \text{pontosan akkor, ha} \quad A \cap B = A,$$

és ha H olyan halmaz, hogy egy $\mathcal{S}$ halmazrendszer minden X elemére $H \subset X$ teljesül, akkor $H \subset \bigcap \mathcal{S}$.

Az A és B halmazt **diszjunktnak** nevezzük, ha $A \cap B = \emptyset$. Egy $\mathcal{S}$ halmazrendszer **diszjunkt**, ha benne bármely két különböző halmaz diszjunkt.

Sokszor lényeges hangsúlyoznunk az egyesítéssel kapcsolatban, hogy diszjunkt halmzokról van szó; erre az egyesítés jelének egy kis módosítása hívja fel a figyelmet. Tehát $A \biguplus B$ az $A \cup B$ halmazt jelöli, ha $A \cap B = \emptyset$. Hasonló értelemben használjuk az $\biguplus \mathcal{S}$ jelölést is.

3.4. Az egyesítést és a metszetet az úgynevezett **disztributív** szabályok kötik össze:

Állítás *Bármely A, B és C halmazra*

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Ezeknek az egyenlőségeknek a bizonyítása a "vagy" meg az "és" logikai műveletekre vonatkozó hasonló szabályokon alapszik, amelyek szerint például az "($x \in A$ vagy $x \in B$) és ($x \in C$)" kijelentés egyenértékű az "($x \in A$ és $x \in C$) vagy ($x \in B$ és $x \in C$)" kijelentéssel.

3.5. Az egyesítésen és meteszeten kívül még egy igen fontos halmazművelet van, a kivonás.

Definíció *Az A és B halmazok **különbsége** az*

$$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$$

halmaz.

Íme a kivonás néhány elemi tulajdonsága:

$$A \setminus \emptyset = A, \qquad A \setminus A = \emptyset, \quad A \setminus (A \setminus B) = A \cap B,$$

$$A \subset B \quad \text{pontosan akkor, ha} \quad A \setminus B = \emptyset.$$

3.6. Gyakran előfordul, hogy valamilyen témakörben minden szóba jövő halmaz egy adott halmaz részhalmaza. Más szóval, adott egy H halmaz, és csak a $\mathcal{P}(H)$ elemeivel foglalkozunk. Ekkor az $A \in \mathcal{P}(H)$ (H-ra vonatkozó) **kiegészítőjén** vagy **komplementerén** az

$$A^{\complement} := H \setminus A$$

halmazt értjük. (Nincs egységesen elfogadott jelölés a komplementerre; használatos A', A^c, $\mathcal{C}A$ is.) Óvatosságra intjük az olvasót a komplementerrel kapcsolatban, mert a jelölésben nem jelenik meg az a halmaz, amire vonatkoztatjuk.

Íme a komplemeter néhány elemi tulajdonsága: ha A és B a H részhalmazai, akkor

$$\emptyset^{\flat} = H, \quad H^{\flat} = \emptyset,$$

$$(A^{\flat})^{\flat} = A, \quad A \cap A^{\flat} = \emptyset, \quad A \cup A^{\flat} = H,$$

$$A \setminus B = A \cap B^{\flat},$$

$$A \subset B \quad \text{pontosan akkor, ha} \quad B^{\flat} \subset A^{\flat}.$$

Végezetül álljanak itt az igen fontos úgynevezett **de Morgan-féle azonosságok**.

Állítás *Legyen $\mathcal{S}$ a H halmaz részhalmazainak nem üres rendszre. Ekkor*

$$\left(\bigcup\{X \mid X \in \mathcal{S}\}\right)^{\flat} = \bigcap\{X^{\flat} \mid X \in \mathcal{S}\},$$

$$\left(\bigcap\{X \mid X \in \mathcal{S}\}\right)^{\flat} = \bigcup\{X^{\flat} \mid X \in \mathcal{S}\}.$$

A bizonyítás a "létezik" meg a "minden" kvantoroknak a LOGIKAI BEVEZETŐ 2. pontjában kimondott tulajdonságain alapszik, amelyek szerint például a "nem létezik X úgy, hogy $x \in X$" kijelentés egyenértékű a "minden X esetén $x \notin X$" kijelentéssel.

Két halmazra a de Morgan-azonosságok így szólnak:

$$(A \cup B)^{\flat} = A^{\flat} \cap B^{\flat}, \qquad (A \cap B)^{\flat} = A^{\flat} \cup B^{\flat}.$$

3.7. Feladatok

Bizonyítsuk be a következő összefüggéseket:

1. $\cup\emptyset = \emptyset$.
2. $\cup\{A\} = A$.
3. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
4. $\mathcal{P}(A \cup B) \subset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
5. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.
6. $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$.
7. $(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$.
8. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.
9. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.

4. Descartes-szorzat

4.1. Meg kell szoknunk a matematikában, hogy csak a halmazelmélet alapfogalmaiból és alapigazságaiból logikailag levezetett összefüggéseket tekintsük igaznak, és csak a belőlük logikailag szabatosan származtatott fogalmakat használjuk. Azt mondtuk például, egy (véges) halmaz elemeinek felsorolosánál nem számít a sorrend: $\{a, b\}$ egyenlő $\{b, a\}$-val. Jelöléseink általában használják a hétköznapi sorrendet (jobbra, balra, lenn, fönn, elöl, hátul), azonban ez – egyelőre – nem matematikai fogalom, tehát matematikai kijelentésekben nem használhatjuk. Most éppen az a célunk, hogy a sorrendet – legalábbis bizonyos vonatkozásban – a matematika nyelvén definiáljuk.

A pontos definíció előtt ejtsünk egy-két szót arról, mit is várunk el egy sorrendtől. Az a és b elem adott sorrendű elrendezése – jelölje ezt (a, b) – azt jelenti, hogy bármely x és y elem ugyanolyan sorendű elrendezése – ami (x, y) – pontosan akkor egyezik meg (a, b)-vel, ha $x = a$ és $y = b$. Ezek alapján egy megfelelő meghatározás a következő.

Definíció *Legyen a és b két elem (nem feltétlenül azonos halmazból). Az*

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

halmazt ***rendezett párnak*** *nevezzük, amelynek* ***első tagja*** *a ,* ***második tagja*** *b. (Tag helyett használatos a komponens elnevezés is.)*

Vegyük észre azt az egyszerű tényt, hogy a rendezett pár pontosan akkor egy elemű halmaz, ha a két tagja megegyezik. Valóban, ha $a = b$, akkor $\{a, b\} = \{a\}$, és $(a, b) = \{\{a\}\}$. Ha viszont (a, b) egy elemű, akkor $\{a\} = \{a, b\}$, azaz $b \in \{a\}$, tehát $b = a$.

Állítás *$(x, y) = (a, b)$ akkor és csak akkor, ha $x = a$ és $y = b$.*

Bizonyítás Nyilván $x = a$ és $y = b$ maga után vonja, hogy $(x, y) = (a, b)$.

Tegyük most fel, hogy $(x, y) = (a, b)$. Két esetet kell megkülönböztetnünk. Először: ha $a = b$, akkor az előző észrevételünk alapján $x = y$ és $\{\{a\}\} = \{\{x\}\}$, tehát $x = a = b = y$. Másodszor: ha $a \neq b$, akkor ismét az állítás előtti megjegyzésünk szerint $x \neq y$; továbbá, mivel egy elemű halmaz nem lehet egyenlő két eleművel, $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ csak úgy állhat fönn, hogy $\{x\} = \{a\}$ és $\{a, b\} = \{x, y\}$. Ebből egyrészt $x = a$, másrészt $b \in \{a, y\}$ következik; mivel $b \neq a$, annak kell teljesülnie, hogy $b = y$.

4.2. Ha $a \in A$ és $b \in B$, akkor $\{a\} \subset A \subset A \cup B$ és $\{a, b\} \subset A \cup B$, tehát mind $\{a\}$, mind $\{a, b\}$ a $\mathcal{P}(A \cup B)$ eleme; így $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$. Ezt a kis körülményeskedést csak azért tettük, hogy lássuk, az elkülönítési axióma szerint értelmezhető az A és B elemeiből összes lehetséges módon képzett rendezett párok halmaza.

Definíció *Az*

$$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

halmazt az A és B halmazok ***Descartes-szorzatának*** *hívjuk.*

Igen egyszerűen bizonyíthatók – ajánljuk az olvasónak, bizonyítsa is be – a következők.

Állítás *(i) $A \times B = \emptyset$ akkor és csak akkor, ha $A = \emptyset$ vagy $B = \emptyset$,*

(ii) ha $A \neq \emptyset$ és $A \times B = A \times C$, akor $B = C$,

(iii) ha $E \subset A$ és $F \subset B$, akkor $E \times F \subset A \times B$; ha $E \times F \neq \emptyset$ és $E \times F \subset A \times B$, akkor $E \subset A$ és $F \subset B$,

(iv) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$,

(v) $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha $A = C$ vagy $B = D$.

4.3. Feladatok

1. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.
2. Ha $A \times B = B \times A \neq \emptyset$, akkor $A = B$.
3. $(A \times B) \cap (C \times D) = \emptyset$ akkor és csak akkor, ha $A \cap C = \emptyset$ vagy $B \cap D = \emptyset$.
4. $(A \times B) \cup (C \times D) = \big(A \times (B \setminus D)\big) \cup \big((A \setminus C) \times (B \cap D)\big) \cup (C \times D)$.
5. $(A \cup C) \times (B \cup D) = (A \times B) \cup (A \times D) \cup (C \times B) \cup (C \times D)$.
6. Ha $E \subset A$ és $F \subset B$, akkor az $E \times F$-et – amely az $A \times B$ részhalmaza – **téglának** nevezzük. Adjunk meg olyan A-t és B-t, hogy $A \times B$-nek legyen nem-tégla részhalmaza is.

II. RELÁCIÓK

5. A reláció fogalma

5.1. A reláció (viszony, összefüggés) fogalmát a hétköznapi életben is sokat használják, a metematikában pedig rendkívüli fontosságú. Pontos értelmezésének a lényegét az alábbi példával világítjuk meg.

Vegyünk egy egyetemi évfolyamot, amelyben a hallgatók közötti rokonszenvet mint viszonyt akarjuk leírni. Két hallgató lehet kölcsönösen rokonszenves egymásnak, de az is előfordulhat, hogy csak az egyik rokonszenves a másiknak. Egy ember sok mást találhat rokonszenvesnek, de esetleg egyet sem. Ugyanakkor egy ember lehet sok másnak rokonszenves, de esetleg egynek sem. Állítsuk rendezett párokba az évfolyam hallagatóit, és válogassuk ki azokat az (x, y) párokat, amelyekre az igaz, hogy x-nek rokonszenves y, azaz képezzük az $\{(x, y) \mid x\text{-nek rokonszenves } y\}$ halmazt. Nyilván ezzel pontosan le is írtuk a szóban forgó viszonyt. Sietünk megjegyezni, ez csak rávezető példa volt, természetesen az előbbi "halmaz" nem matematikai fogalom, csak arra jó, hogy kézenfekvővé tegye a következő meghatározást.

Definíció *Legyen A és B halmaz. Az $A \times B$ egy R részhalmazát az A és B elemei közötti* ***relációnak*** *hívjuk.*

Azt mondjuk, a relációban áll b-vel, jelölésben aRb, ha $(a, b) \in R$; a nem áll relációban b-vel, jelölésben $a \not R\, b$, ha $(a, b) \notin R$.

$$\mathrm{Dom}R := \{x \in A \mid \text{ létezik } y \in B,\ xRy\},$$

$$\mathrm{Ran}R := \{y \in B \mid \text{ létezik } x \in A,\ xRy\}$$

a reláció ***értelmezési tartománya*** *illetve* ***értékkészlete****.*

Ha $R \subset A \times A$, akkor azt mondjuk, hogy R reláció az A elemei között, vagy azt, hogy R reláció A-n.

A rávezető példánkban az értelmezési tartomány azokból a hallgatókból áll, akiknek rokonszenves valaki, az értékkészlet pedig azokból, akik rokoknszenvesek valakinek.

5.2. Lássunk néhány példát relációra!

(i) Triviális az üres reláció, $\emptyset \subset A \times B$ (semmi sincs relációban semmivel), és a teljes reláció $A \times B$ (minden relációban áll mindennel).

(ii) Bármely A halmaz esetén megadható az **identitás-reláció**: $I_A := \{(x, y) \in A \times A \mid x = y\} = \{(x, x) \mid x \in A\}$.

(iii) Relációnak foghatjuk fel egy H halmaz részhalmazaihoz való tartozást is így:

$$\{(x, X) \in H \times \mathcal{P}(H) \mid x \in X\}.$$

Szavakban: a H halmaz x eleme relációban áll az X részhalmazzal, ha x hozzátartozik X-hez.

Jegyezzük meg, hogy ez a reláció nem minden elem és minden halmaz között van értelmezve (mert nincs univerzum), hanem egy tetszőlegesen adott halmaz elemei és részhalmazai között.

(iv) Reláció a halmazelméleti tartalmazás (résznek lenni) is:

$$\{(X, Y) \in \mathcal{P}(H) \times \mathcal{P}(H) \mid X \subset Y\}.$$

Szavakban: a H halmaz X részhalmaza relációban áll az Y részhalmazzal, ha X része Y-nak.

Jegyezzük meg itt is, hogy a résznek lenni sem értelmezhető relációként az összes halmazon, hiszen nem létezik az összes halmazok halmaza.

(v) Legyen $b \in B$. $A \times \{b\}$ a b értékű **konstans reláció**.

5.3. Minden relációnak értelmezhetjük a fordítottját. Például a bevezetőben úgy rendeztük a relációt, hogy kinek ki rokonszenves; de tekinthettük volna arról az oldalról is, ki kinek rokonszenves.

1. Definíció *Az A és B halmaz elemei között értelmezett R reláció **inverze** az*

$$R^{-1} := \{(y, x) \in B \times A \mid xRy\}$$

reláció.

Más szóval tehát $yR^{-1}x$ akkor és csak akkor, ha xRy. Nyilvánvaló, hogy $\mathrm{Dom}R^{-1} = \mathrm{Ran}R$ és $\mathrm{Ran}R^{-1} = \mathrm{Dom}R$. Az se kíván sok gondolkodnivalót, hogy belássuk: $I_A^{-1} = I_A$.

Még egy egyszerű és sokszor előforduló módját említjük meg, hogyan lehet egy relációból egy másikat származtatni.

2. Definíció *Legyen E és F az A illetve a B részhalmaza, és $R \subset A \times B$. Az R reláció **leszűkítése** az $E \times F$-re az $R \cap (E \times F)$ reláció. Ha $A = B$ és $E = F$, az $E \times E$-re való leszűkítés helyett E-re való leszűkítést mondunk.*

5.4. Összegyűjtünk és elnevezünk néhány tulajdonságot, amelyek a relációkkal kapcsolatban gyakran előfordulnak.

Definíció *Legyen R reláció A-n. Azt mondjuk, hogy R*
(i) ***reflexív****, ha xRx,*
(ii) ***szimmetrikus****, ha xRy esetén yRx,*
(iii) ***antiszimmetrikus****, ha xRy és yRx esetén $x = y$,*
(iv) ***tranzitív****, ha xRy és yRz esetén xRz*
teljesül az A minden x, y és z elemére.

Ha R a fenti tulajdonságok akármelyikével rendelkezik, akkor bármely részhalmazra való leszűkítése is ugyanolyan tulajdonságú lesz.

5.5. Feladatok
1. Legyen R és S reláció az A és B elemei között. Mutassuk meg, hogy

$$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}, \quad (R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}.$$

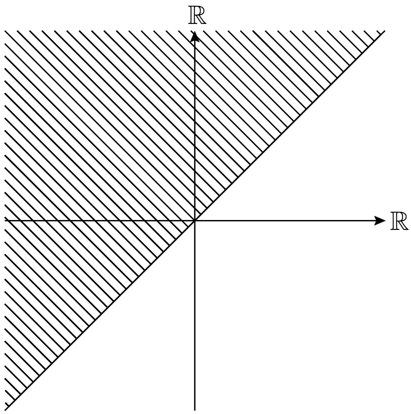
2. Az üres reláció és teljes reláció inverze önmaga.
3. Értelmezzük az $R \subset A \times B$ és $S \subset B \times C$ **kompozícióját** így:

$$S \circ R := \{(x, z) \in A \times C \mid \text{ létezik } y \in B,\ xRy \text{ és } ySz\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy
(i) $S \circ I_B = S, \quad I_A \circ R = R$,
(ii) $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.
4. Igazoljuk, hogy $R \subset A \times A$ akkor és csak akkor
(i) reflexív, ha $I_A \subset R$,
(ii) szimmetrikus, ha $R^{-1} \subset R$,
(iii) antiszimmetrikus, ha $R^{-1} \cap R = I_A$,
(iv) tranzitív, ha $R \circ R \subset R$.
5. Ha R tranzitív és reflexív, akkor $R \circ R = R$. Igaz-e fordítva is?
6. Rendelkezzen az ugyanazon a halmazon adott R és S reláció mindegyike a reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus, tranzitív tulajdonságok valamelyikével. Milyen tulajdonságú $R \cap S$ és $R \cup S$?
7. Legyen R tetszőleges reláció A-n. Ekkor $R \cup R^{-1}$ és $R \cap R^{-1}$ az R-et tartalmazó legszűkebb, illetve az R-beli legbővebb szimmetrikus reláció.
8. $R^{-1} \circ R = \emptyset$ pontosan akkor, ha $R = \emptyset$.
9. Az 5.4-ben felsorolt tulajdonságok melyikével rendelkeznek az alábbi relációk:
(i) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$,
(ii) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 =\}$,
(iii) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy = 1\}$.

6. Rendezés

6.1. Megelőlegeztük a valós számok ismeretét, hogy legyen szemléltető példánk. Most is a valós számokat vesszük elő; tudjuk, a valós számokat nagyság szerint rendezhetjük. Ez a rendezés is reláció, amelyet a $\leq$ szimbólummal jelölünk. $\mathbb{R}$-et egyenessel, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$-et síkkal szoktuk szemléletni az ismert módon. Ekkor a $\leq$ relációt, mint az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ részhalmazát az 1. ábrán bevonalkázott rész szemlélteti.



1. ábra

Természetesen nem csak a valós számokon, hanem más halmazon is értelmezhetünk rendezést, amit pontosan a következőképp határozunk meg.

Definíció *Egy reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív relációt* ***rendezésnek*** *hívunk.*

Szokásosan a rendezést a $\leq$ szimbólumal jelöljük, és azt mondjuk, x ***kisebb vagy egyenlő, mint*** *y, ha $x \leq y$. Ha $x \leq y$ és $x \neq y$, akkor azt írjuk, hogy $x < y$, és azt mondjuk, hogy x* ***kisebb, mint*** *y.*

Az x és y elemeket ***összehasolíthatónak*** *nevezzük, ha $x \leq y$ vagy $y \leq x$ teljesül.*

A rendezés ***láncszerű****, ha a szóban forgó halmaz bármely két eleme összehasonlítható.*

Szokták a láncszerű helyett a teljes elnevezést is használni, azonban jobb ezt kerülni, mert a valós számokkal kapcsolatban az igen fontos teljesség fogalma a rendezésnek egy más tulajdonságával kapcsolatos.

A $\leq$ inverzét a $\geq$ szimbólummal jelöljük; tehát $x \geq y$ (x nagyobb vagy egyenlő, mint y) egyenértékű azzal, hogy $y \leq x$. A $\geq$ reláció is rendezés.

Ha $\leq$ rendezés az S halmazon, akkor az $(S, \leq)$ párt **rendezett halmaznak** hívjuk. A matematikában megszokott célszerű kis pongyolasággal sokszor elhagyjuk a rendezett halmaz jelöléséből a rendezést, és azt mondjuk, írjuk, hogy S rendezett halmaz.

6.2. Íme néhány példa rendezésre.

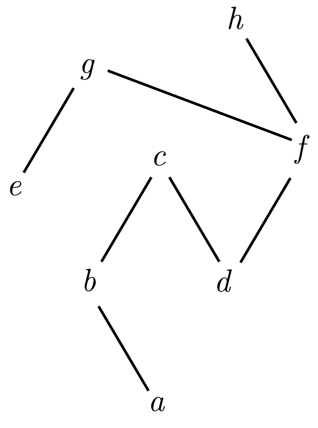
(i) Bármely H halmaz esetén $\mathcal{P}(H)$-n a résznek lenni (itt megtartjuk a $\subset$ jelet a $\le$ helyett).

(ii) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$-en legyen $(x, y) \le (u, v)$ pontosan akkor, ha $x \le u$ és $y \le v$.

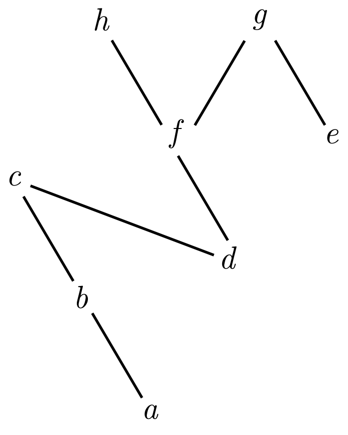
(iii) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$-en legyen $(x, y) \le (u, v)$ pontosan akkor, ha $x < u$, vagy $x = u$ és $y \le v$. Ezt a **lexikografikus rendezésnek** szokás nevezni, mert azt mintázza, ahogy a szavakat sorba rakják a lexikonokban.

Mint az utóbbi két példa mutatja, ugyanazon a halmazon általában többféle rendezés is megadható.

(iv) Véges halmazokon (majd pontosan definiáljuk, mit jelent a véges halmaz, most maradjunk az intuitív képnél) a rendezést ábrával szemléltethetjük, amelynek a szabálya a következő: a kisebb elemeket a nagyobbak alá rajzoljuk, és egyenessel összekötjük őket. A 2. ábra mutat egy példát. Itt $a < b < c$, $d < f < g$, $e < g$, $d < c$ és $f < h$, más összefüggés nincs az elemek között, tehát például e és f nem összehasonlíthatók. Természetesen ugyanezt úgy is rajzolhatjuk, ahogy a 3. ábrán látjuk.



2. ábra



3. ábra

6.3. Legyen $(S, \le)$ rendezett halmaz. Az S-nek az E részhalmazát **felülről** (**alulról**) **korlátosnak** nevezzük, ha létezik $k \in S$ úgy, hogy $x \le k$ $(k \le x)$ minden $x \in E$ esetén; ekkor k az E **felső** (**alsó**) **korlátja**.

Általában egy felülről korlátos halmaznak több felső korlátja is lehet: egy felső korlátnál bármely nagyobb elem is felső korlát. Ha a felső korlátok között létezik legkisebb – olyan, amely minden más felső korlátnál kisebb –, azt a halmaz **felső határának** nevezzük. Tehát h az E részhalmaz felső határa, ha felső korlátja E-nek és minden k felső korlátra $h \le k$ teljesül. Értelemszerűen hasonlóképp definiáljuk az **alsó határ** fogalmát.

Ha maga S felülről korlátos, akkor egyetlen felső korlátja van csak – hiszen, ha k és k' felső korlát, akkor $k \leq k'$ és $k' \leq$ is teljesül, azaz $k = k'$ – amit az S **legnagyobb elemének** nevezünk. Hasonlóan vezetjük be a **legkisebb** elem elnevezést is, ha S alulról korlátos.

Egy olyan elemet, amely nagyobb minden más, vele összehasonlíthatónál, **maximálisnak** hívunk. Tehát m maximális, ha $m \leq x$ csak úgy lehetséges, hogy $m = x$. Hasonlóan vezetjük be a **minimális** elnevezést is.

Jól különböztessük meg a legnagyobb elem és a maximális elem fogalmát. A legnagyobb elem minden más elemél nagyobb, egy maximális elem minden más vele összehasonlíthatónál. A legnagyobb elem természetesen maximális, fordítva azonban nem igaz. Legnagyobb elem csak egy lehet, maximális több is. Ugyanez vonatkozik a legkisebb és a minimális elem fogalmára is. Az előbb felrajzolt példában legnagyobb elem nincs, a maximális elemek halmaza $\{c, h, g\}$.

6.4. Rendezés leszűkítése részhalmazra szintén rendezés.

Az S rendezett halmaz egy L részhalmazát **láncnak** hívjuk, ha a rendezés leszűkítése L-re láncszerű. A lánc fogalma segít minket, hogy egyszerűen megfogalmazzuk a matematika egy igen fontos axiómáját, amelyet történeti okokból nem axiómának, hanem lemmának szokás nevezni:

Zorn-lemma: *legyen S olyan rendezett halmaz, hogy benne minden lánc felülről korlátos; ekkor van maximális elem S-ben.*

Ez az állítás olyan magától értetődőnek látszik, hogy szinte tessékel minket, bizonyítsuk be. A következőképp próbálkozhatunk. Az adott feltételek mellett S nem lehet üres: az üres halmaznak van felső korlátja. Van tehát x_0 eleme S-nek. Ha ez maximális, készen vagyunk; ha nem, akkor van az x_0-nál nagyobb x_1 elem. Ha x_1 maximális, készen vagyunk; ha nem, akkor van az x_1-nél nagobb x_2 elem. Ezt érvelést folytatva egyre nagyobb és nagyobb elemeket kapunk. Az a kérdés, mindenképp eljutunk-e így egy maximális elemhez. Egyáltalán nem biztos. Lehet, hogy lépéseink sohase vezetnek eredményre, egyre több és több nem maximális elemet kapunk. Persze ezek láncot alkotnak, ezért van felső korlátjuk, de még az sem biztos, hogy maximális elem. Ezzel a felső korláttal kezdhetjük megint az érvelést, és látjuk, hogy lényegében egy tapodtat sem haladtunk.

A Zorn-lemmát axiómának, azaz bizonyítás nélkül igaz állításnak fogadjuk el. Később látni fogjuk, hogy ez egyenértékű az úgynevezett kiválasztási axiómával. Ez azt jelenti, hogy a kettő közül csak az egyiket kell axiómának elfogadnunk; ízlés dolga, hogy melyiket.

6.5. Feladatok

1. Rendezés-e az identitás-reláció?
2. Van-e egy nemüres halmazon legszűkebb és legbővebb rendezés?
3. Lehet-egy rendezés egyben szimmetrikus reláció is?
4. Legyen H nemüres halmaz.

(i) Van-e $\mathcal{P}(H)$-nak (a résznek lenni rendezésre vonatkozóan) legnagyobb és legkisebb eleme?

(ii) A $\mathcal{P}(H)\setminus\{\emptyset\}$ halmaznak nincs legkisebb eleme, viszont H minden egy elemű részhalmaza minimális.

(iii) A $\mathcal{P}(H)\setminus\{H\}$ halmaznak nincs legnagyobb eleme. Mik maximális elemek?

5. Az üres halmaz minden rendezett halmaznak alulról és felülről is korlátos részhalamza. (Tegyük fel, hogy ez nem igaz: ellentmondásra jutunk.) Ha létezik a rendezett halmazban legkisebb (legnagyobb) elem, akkor az az üres halmaz felső (alsó) határa.

6. Rendezés-e a valós számok halmazán a következő reláció:

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x\le y,\ x\ge y-1\}.$$

7. Ekvivalencia-reláció

7.1. Definíció *Egy reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációt* ***ekvivalenciának*** *hívunk. Egymással ekvivalencia-relációban álló elemeket* ***ekvivalenseknek*** *mondunk.*

Ekvivalencia magyarul egyenértékűséget jelent. Az elnevezés arra utal, hogy az adott reláció szerint ekvivalens elemeket egy bizonyos szempontból egyenértékűeknek tekintünk (a “szempontot” épp a reláció rögzíti). Két triviális ekvivalencia-relációt tudunk megadni bármely nemüres halmazon: az identitás-relációt, amelyben minden elem csak önmagával ekvivalens, és a teljes relációt, amelyben minden elem ekvivalens minden elemmel.

Két másik fontos példát is megemlítünk ekvivalencia-relációra.

(i) A valós számokból álló rendezett párok halmazán legyen két elem ekvivalens, ha az első és a második tagok különbsége ugyanaz. Formulában: legyen a D reláció úgy megadva, hogy

$$(x,y)D(u,v) \quad \text{pontosan akkor, ha} \quad x-y=u-v.$$

Képet is tehetünk e reláció mögé. Jelentse az első illetve a második komponens a bevételt illetve a kiadást. Két bevétel-kiadás akkor ekvivalens, ha a haszon ugyanakkora.

(ii) A nemnulla valós számokból álló rendezett párok halmazán legyen két elem ekvivalens, ha az első és a második tagok hányadosa ugyanaz. Formulában: legyen a Q reláció úgy megadva, hogy

$$(x,y)Q(u,v) \quad \text{pontosan akkor, ha} \quad \frac{x}{y}=\frac{u}{v}.$$

Ezt a relációt úgy szemléltethetjük, hogy az első komponens jelentse egy ország nemzeti jövedelmét, a második pedig az ország lakosainak a számát. Az ekvivalencia itt az egy főre jutó nemzeti jövedelem egyenlőségét jelenti.

7.2. Definíció *Ha $\sim$ ekvivalencia-reláció a H halmazon és $a \in H$, akkor*

$$a/{\sim} := \{x \in H \mid a \sim x\}$$

az a elem ***ekvivalencia-osztálya****.*

Állítás *Bármely $x \in (a/{\sim})$ és $y \in H$ esetén $x \sim y$ akkor és csak akkor, ha $y \in (a/{\sim})$.*

Bizonyítás Ha $a \sim x$ és $a \sim y$, akkor a szimmetrikusság és a tranzitivitás miatt $x \sim y$. Ha viszont $a \sim x$ és $x \sim y$, akkor ismét a szimmetrikusság és a tranzitivitás miatt $a \sim y$. ■.

Érdemes egy kicsit átfogalmazni a fenti állítást, hogy jobban lássuk a tartalmát:
(i) bármely $x, y \in (a/{\sim})$ esetén $x \sim y$,
(ii) bármely $x \in (a/{\sim})$ és $y \notin (a/{\sim})$ esetén $x \not\sim y$.

Állításunk alapján a H halmaz egy E részhalmazát **ekvivalencia-osztálynak** nevezzük, ha $x \in E$ és $y \in H$ esetén $x \sim y$ akkor és csak akkor, ha $y \in E$.

Egy E ekvivalencia-osztály bármely elemét az E egy **reprezentánsának** hívjuk. Az elnevezést az az egyszerű tény indokolja, hogy ha E ekvivalencia-osztály és $x \in E$, akkor $E = x/{\sim}$. Ez egyben azt is jelenti, hogy minden ekvivalencia-osztály valamely elem ekvivalencia-osztálya.

7.3. Az ekvivalencia-osztályok az elkülönítési axióma szerint halmazt alkotnak:

$$H/{\sim} := \{X \in \mathcal{P}(H) \mid \text{ létezik } a \in H,\ X = a/{\sim}\}.$$

Állítás *Legyen $\sim$ ekvivalencia-reláció H-n. Ekkor*

(i) $H/{\sim}$ diszjunkt halmazrendszer,
(ii) $\bigcup\{X \mid X \in (H/{\sim})\} = H$.

Bizonyítás (i) Legyen E és F két különböző ekvivalencia-osztály. Ekkor van olyan eleme az egyik halmaznak, amely nem eleme a másiknak; mondjuk $x \in E$ és $x \notin F$. Tegyük fel, hogy $E \cap F \neq \emptyset$, és legyen $y \in E \cap F$. Ekkor $x \in E$ és $y \in E$ miatt $x \sim y$, viszont $x \notin F$ és $y \in F$ miatt $x \not\sim y$, ami ellentmondás. Tehát E és F diszjunkt kell, hogy legyen.

(ii) Mivel minden ekvivalencia-osztály a H részhalmaza, az egyesítésük is a H része. Azt kell csak megmutatnunk, hogy ha $x \in H$, akkor van olyan ekvivalencia-osztály, amelynek az x az eleme; ez pedig $x/{\sim}$.

7.4. Az előző állításnak bizonyos megfordítása is igaz: diszjunkt halmazrendszerből ekvivavelencia-reláció definiálható.

Állítás *Legyen $\mathcal{S}$ a H halmaz nem üres részhalmazainak olyan diszjunkt rendszere, hogy $\bigcup\{E \mid E \in \mathcal{S}\} = H$. Ekkor a H-n értelmezett következő reláció ekvivalencia:*

$$x \sim_{\mathcal{S}} y \quad \textit{pontosan akkor, ha létezik } E \in \mathcal{S} \textit{ úgy, hogy } x, y \in E.$$

Az állítás bizonyítása egyszerű feladat, az olvasóra bízzuk. Azt is egyszerű belátni, hogy

(i) egy $\mathcal{S}$ halmazrendszerből kiindulva a fentiek szerint megadott ekvalencia-relációra $H/(\sim_{\mathcal{S}}) = \mathcal{S}$ teljesül,

(ii) egy $\sim$ ekvivalencia-relációból kiindulva és a fentiek szerint a $H/\sim$ halmazrendszert véve alapul azt kapjuk, hogy $\sim_{(H/\sim)}=\sim$.

7.5. Feladatok

1. Ekvivalencia-reláció-e ekvivalencia-relációk metszete, egyesítése, kompozíciója?

2. Ekvivalenciák-e a következő relációk:

(i) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = 2y\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y + 1,\ x \geq y - 1\}$?

3. Igazoljuk, hogy $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$-en a következő $\sim$ reláció ekvivalencia:

$$(x, y) \sim (u, v) \quad \text{pontosan akkor, ha létezik } \alpha \in \mathbb{R}, \\ \text{amellyel } x - u = 2\alpha, y - v = 3\alpha.$$

4. A H halmazon adott R reláció pontosan akkor ekvivalencia, ha

(i) $\mathrm{Dom}R = H$, (ii) $I_H \subset R$, (iii) $R \circ R^{-1} \circ R = R$.

5. Legyen E a H halmaz része. Mutassuk meg, hogy

$$\{(x, y) \in H \times H \mid x = y \text{ vagy } (x \in E \text{ és } y \in E)\}$$

ekvivalencia-reláció. Adjuk meg az ekvivalencia-osztályokat!

III. FÜGGVÉNYEK

8. A függvény fogalma

8.1. A függvény intuitív fogalma: egy halmaz elemeihez hozzárendelünk elemeket egy másik (nem szükségképpen különböző) halmazból. Szemléltető példaként tekintsük a következőt: egy évfolyam hallgatóihoz rendeljük hozzá a legjobb barátjukat; a hajuk színét; a magasságukat. Ezekkel a hozzárendelésekkel tulajdonképpen relációkat létesítettünk. Például egy hallagató és egy szín relációban áll egymással, ha a szín megegyezik a hallgató hajának a színével. Egy különlegessége van ezeknek a relációknak: egy hallagató csak egy legjobb baráttal, csak egy hajszínnel, csak egy magassággal állhat relációban (természetesen több hallgatónak lehet ugyanaz a legjobb barátja, haja színe, magassága). A függvényt tehát mint speciális relációt határozzuk meg a következőképpen.

Definíció *Az A és B halmaz elemei között értelmezett f relációt* ***függvényszerűnek*** *nevezzük, ha minden $x \in \mathrm{Dom} f$ esetén xfu és xfv maga után vonja, hogy $u = v$. Azt mondjuk, hogy f* ***hozzárendeli*** *x-hez u-t, ha xfu.*

Az $\big((A, B), f\big)$ hármast, ahol f az A és B halamzok elemei között értelmezett függvényszerű reláció, A-ból B-be képező ***függvénynek*** *hívjuk.*

A "hármas" szó a meghatározásban olyan rendezett párt jelent, amelynek az első tagja is egy rendezett pár.

Ha tehát $\big((A, B), f\big)$ függvény, akkor minden $x \in \mathrm{Dom} f$ esetén pontosan egy olyan $u \in B$ létezik, hogy xfu.

Ezt a hozzárendelés jelleget célszerű kidomborítani a jelölések alkalmas megváltoztatásával. $\big((A, B), f\big)$ helyett azt írjuk, hogy

$$f : A \to B \qquad \text{ha} \quad \mathrm{Dom} f = A,$$

$$f : A \rightarrowtail B \qquad \text{ha} \quad \mathrm{Dom} f \subset A,$$

és azt mondjuk, hogy f az A-ról illetve az A-ból képez B-be. A-t és B-t az f **indulási** illetve **érkezési** halmazának is szokás nevezni. $\mathrm{Dom} f$ elemeit a függvény **változóinak** hívjuk. Továbbá xfu helyett azt írjuk, hogy $u = f(x)$, és azt mondjuk, u az f-nek az x helyen **felvett értéke**.

Minthogy az f jelet az eredeti értelmezésétől eltérő szimbólumrendszerben használjuk, a függvényszerű relációt, amely a függvény definíciójában szerepel, a továbbiakban a függvény **grafikonjának** nevezzük, és Graph$f$-vel jölöljük; tehát

$$\mathrm{Graph} f := \{(x, f(x)) \in A \times B \mid x \in \mathrm{Dom} f\}.$$

A függvény leírására sok más jelölés is használatos. Olykor például $f(x)$ helyett f_x-et írunk, és a függvényt $(f_x)_{x \in \mathrm{Dom} f}$ formában adjuk meg.

Konkrét formulákkal meghatározott függvények esetén "talpas nyíllal" szoktuk kifejezni a hozzárendelési utasítást. Például:

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 3x^2 + 2,$$

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x + 1 & \text{ha } x \le 0, \\ 1 - x & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Végül megemlítjük, hogy a függvény szó helyett, vele azonos értelmében használjuk a leképezés, transzformáció, operátor elnevezéseket is; e két utóbbit általában bizonyos speciális típusú függvények megjelölésére.

8.2. A függvény fogalmának definíciójából és a mondottakból következik, hogy egy függvény akkor van megadva, ha adott az indulási halmaza, az érkezési halmaza, az értelmezési tartománya, és a hozzárendelési utasítása. Példa erre az előző pont végén szereplő két függvény vagy (amikor az értelmezési tartomány és az indulási halmaz nem egyenlő):

$$f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x - 1}, \qquad \mathrm{Dom} f := \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

Miután így pontosan megadtunk egy $f : A \rightarrowtail B$ függvényt, a továbbiakban egyetlen betűvel, f-fel hivatkozunk rá. Ez a kis jelölésbeli pontatlanság célszerű az egyszerű és áttekinthető fogalmazáshoz. Ha tehát azt írjuk vagy mondjuk, hogy az f függvény, mindig odaértjük mellé a már megadott indulási halmazt, értelmezési tartományt, érkezési halmazt is.

Ha R reláció A és B elemei között, továbbá ha A' és B' olyan halmazok, hogy $A \subset A'$ és $B \subset B'$, akkor R reláció A' és B' elemei között is: $R \subset A \times B \subset A' \times B'$. A reláció mint halmaz független attól, milyen halmaznak a részhalmaza.

A függvény, megállapodásunk szerint, nem egyszerűen a függvényszerű relációval azonos: a függvényhez hozzátartozik az indulási halmaza és az érkezési halmaza is, noha nyilván a leglényegesebb alkotója maga a reláció, vagyis a függvény grafikonja. Ha $A \subset A'$ és $B \subset B'$, akkor az $\big((A, B), f\big)$ és az $\big((A', B'), f\big)$ függvények azaz $f : A \rightarrowtail B$ és $f : A' \rightarrowtail B'$ nem azonosak. Viszont ez a különbség nem jelenik meg, ha a fügvényre egyetlen betűvel hivatkozunk; jó ezt észben tartani.

8.3. A függvények változóját többnyire x-szel jelöljük. Ez azonban nem jelenti azt, hogy kötelező így tennünk. Jó, ha látjuk például, hogy

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x^2+1},$$

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a \mapsto \frac{1}{a^2+1}, \qquad \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \sigma \mapsto \frac{1}{\sigma^2+1}$$

mind ugyanaz a függvény. Természetesen olyan jelet nem írhatunk a változó helyébe, amit már másra lefoglaltunk: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\mathbb{R}^2+1}$ nem jó.

A hozzárendelési utasítással kapcsolatban olyan figyelmeztetést kell tennünk, mint a halmazokkal kapcsolatban az elkülönítési axiómára vonatkozóan: "értelmesnek" kell lennie, ami pontosan azt jelenti, hogy a hozzárendelési utasítással megadott grafikon halmaz legyen. Például

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{ha } x \text{ elég kicsi,} \\ 1-x & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x-1)x^2$$

nem függvények.

Ha az értelmezési tartomány véges sok elemből áll – később pontosan megmondjuk, mit jelent ez –, akkor nincs gondunk, a grafikont mint véges sok elemből álló halmazt mindig megkonstruálhatjuk (lásd 3.2.).

8.4. Íme néhány sokat használt függvény.

(i) Bármely A és B halmaz esetén a $\emptyset : A \rightarrowtail B$ üres függvény, amelynek az értelmezési tartománya és az értékkészlete is üres.

(ii) Az A halmaz identitás-relációja függvényszerű; a megfelelő függvényt id_A-val jelöljük. Ez minden elemhez önmagát rendeli hozzá:

$$\mathrm{id}_A : A \to A, \quad x \mapsto x.$$

(iii) Az előbbi általánosítása: ha $A \subset B$, akkor

$$\mathrm{in}_{A,B} : A \to B, \quad x \mapsto x$$

az A **beágyazása** B-be.

(iv) Függvényszerű a konstans reláció is. **Konstans függvénynek** hívunk minden olyan függvényt, amelynek az értékkészlete egy elemű. Közelebbről, legyen b a B halmaz eleme. Ekkor bármely $X \neq \emptyset$ halmaz esetén definálhatjuk az

$$X \to B, \quad x \mapsto b$$

leképezést. Szokásosan minden ilyen függvényt is b-vel jelölünk, ha nem okoz félreértést.

(v) Tetszőleges A és B halmaz esetén a

$$\mathrm{pr}_A : A \times B \to A, \quad (x, y) \mapsto x$$

leképezést az **első komponensre való (természetes) projekciónak** nevezzük. Értelemszerűen hasonlóan definiálhatjuk pr_B-t.

(vi) Legyen $\sim$ ekikvalencia-reláció a H halmazon. A

$$\Pi_\sim : H \to H/\!\sim, \quad x \mapsto x/\!\sim$$

leképezés neve: **ekvivalencia-osztályozás**.

8.5. A függvények rendezett hármasok (olyan rendezett párok, amelyek első tagja is rendezett pár), tehát már ismert értelme van annak, hogy két függvény egyenlő. A rendezett párokra vonatkozó ismereteink alapján $f : A \rightarrowtail B$ és $g : C \rightarrowtail D$ egyenlő, ha

(i) $A = C$, $B = D$,

(ii) $\mathrm{Graph} f = \mathrm{Graph} g$.

Emlékeztetünk arra, hogy az (ii) feltétel egyenértékű azzal, hogy $\mathrm{Dom} f = \mathrm{Dom} g$ és $f(x) = g(x)$ minden $x \in \mathrm{Dom} f$ esetén; természetesen ekkor $\mathrm{Ran} f = \mathrm{Ran} g$ is teljesül.

Ahogy függvényeket sokszor egyetlen betűvel jelölünk, az egyenlőség kifejezésére is az $f = g$ szimbólumot használjuk. Ez azonban további megállapodás nélkül nem volna egyértelmű, hiszen különböző függvényeket (amelyeknek ugyanaz a grafikonja de más az indulási illetve az érkezési halmaza) is jelölhetünk ugyanazzal a betűvel. A következőkben tehát *csak olyan függvények egyenlőségéről beszélünk, amelyek indulási halmaza is, érkezési halmaza is ugyanaz.*

Bevezetjük a függvények tartalmazási jelét is, amelyet szintén csak olyan függvényekre értelmezünk, amelyeknek mind az indulási, mind az érkezési halmaza ugyanaz. Tehát ha $f : A \rightarrowtail B$ és $g : A \rightarrowtail B$, akkor $f \subset g$ jelentse azt, hogy $\mathrm{Graph} f \subset \mathrm{Graph} g$. Ez egyenértékű azzal, hogy $\mathrm{Dom} f \subset \mathrm{Dom} g$ és $f(x) = g(x)$ minden $x \in \mathrm{Dom} f$ esetén; természetesen ekkor $\mathrm{Ran} f \subset \mathrm{Ran} g$ is teljesül.

Definíció *(i) Ha $f \subset g$, akkor azt mondjuk, hogy f **leszűkítése** g-nek, vagy g **kiterjesztése** f-nek.*

(ii) Ha $f : A \rightarrowtail B$ függvény és $E \subset A$, akkor az

$$f|_E : A \rightarrowtail B, \quad x \mapsto f(x),$$

$$\mathrm{Dom}(f|_E) := E \cap \mathrm{Dom} f$$

*formulákkal meghatározott függvény az f **leszűkítése** E-re.*

Előfordulhat, hogy két függvény nem egyenlő, de valamely halmazra való leszűkítésük már egyenlő. Ha $f|_E = g|_E$, akkor azt mondjuk, f megegyezik (egyenlő) g-vel az E-n, és így is írjuk: $f \underset{E}{=} g$.

Itt hívjuk fel ismét a figyelmet arra, hogy a konstans függvényeket mindig az egyetlen értékükkel jelöljük, függetlenül attól, mi az értelmezési tartományuk. Ezért ha $f : A \rightarrowtail B$ függvény és $b \in B$, akkor $f = b$ azt jelenti, hogy $f(x) = b$ minden $x \in \mathrm{Dom} f$ esetén; más szóval ekkor a b konstans függvény értelmezési tartományát az f értelmezési tartományával vesszük egyenlőnek.

8.6. Mikor tehetjük össze az $f, g : A \rightarrowtail B$ függvényeket eggyé, azaz mikor van olyan fügvény, amely mindkettőnek a kiterjesztése? Másképpen ugyanez: mikor adható meg egy $A \rightarrowtail B$ függvény úgy, hogy ennek leszűkítése f is, g is? Egyszerű a válasz: pontosan akkor, ha f és g megegyezik az értelmezési tartományuk közös részén. Nevezzük ekkor a függvényeket **összeilleszthetőnek**.

Az $A \rightarrowtail B$ függvények összességén rendezést vezetünk be az előző pontban leírt résznek lenni fogalmával. Legyen $\mathcal{S}$ az ilyen függvények olyan családja, hogy bármely két $\mathcal{S}$-beli függvény összeilleszthető. Ekkor az $\bigcup_{f \in \mathcal{S}} \mathrm{Dom} f$ halmazon értelmezett

$$\bigcup_{f \in \mathcal{S}} f : A \rightarrowtail B, \quad x \mapsto f(x) \quad \text{ha } x \in \mathrm{Dom} f$$

függvény jól definiált.

Miért kell hangsúlyoznunk, hogy jól definiált? Mert x a hozzárendelési utasításban egy uniónak az eleme, tehát több függvény értelmezési tartományában is benne lehet; melyik fügvény értékét kell hozzárendelnünk? Ha azonban $x \in \mathrm{Dom} f_1$ és $x \in \mathrm{Dom} f_2$, akkor az f_1 és f_2 összeilleszthetősége miatt $f_1(x) = f_2(x)$; az értelmezés jó.

$\bigcup_{f \in \mathcal{S}}$ minden $\mathcal{S}$-beli függvénynek a kiterjesztése, tehát $\mathcal{S}$ felső korlátja; nyilvánvaló, hogy a legkisebb felső korlát, azaz $\mathcal{S}$ felső határa.

Ha $f \subset g$, akkor f és g összeilleszthető, és $f \cup g = g$, ezért függvények láncának (olyan összességnek, amelyben bármely két függvény összehasonlítható) mindig van felső határa.

8.7. Most függvényekkel kapcsolatos néhány igen fontos fogalom következik.

Definíció *Az $f : A \rightarrowtail B$ függvény*

(i) ***injekció*** *(**injektív függvény**), ha minden $x, y \in \mathrm{Dom} f$ esetén $f(x) = f(y)$ maga után vonja, hogy $x = y$;*

(ii) ***szürjekció*** *(**szürjektív függvény**), ha $\mathrm{Ran} f = B$;*

(iii) ***bijekció*** *(**bijektív függvény**), ha $\mathrm{Dom} f = A$ és f injekció is, szürjekció is.*

Más szavakkal: f injekció, ha minden $u \in \mathrm{Ran} f$ esetén pontosan egy olyan $x \in \mathrm{Dom} f$ létezik, amelyre $u = f(x)$.

f szürjekció, ha minden $u \in B$ esetén létezik $x \in \mathrm{Dom} f$, amelyre $u = f(x)$. Szürjekció helyett használatos a szuperjekció és ráképezés elnevezés is.

Azt is szoktuk mondani, hogy egy $A \to B$ bijekció **kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés** A és B elemei között.

Vegyük észre, hogy ha egy függvényt azonosnak vennénk a megfelelő függvényszerű relációval – vagyis a grafikonjával –, akkor értelmét vesztené a szürjekció fogalma, hiszen $B \subset B'$ esetén $f : A \rightarrowtail B$ és $f : A \rightarrowtail B'$ ugyanaz volna. Tartsuk ezt észben, amikor egyetlen betűvel jelölünk egy függvényt.

Nyilvánvaló, hogy
– injekció bármely leszűkítése is injekció,
– szürjekció bármely kiterjesztése is szürjekció,
– injektív függvény kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés az értelmezési tartomány és az értékkészlet elemei között.

Érdemes megjegyezni, hogy a 8.4-ben felsorolt függvények a következő jellegzetes tulajdonságokkal rendelkeznek: az üres függvény injekció, az identitás-függvény bijekció, a beágyazás injekció, nemüres halmazok Descartes-szorzata esetén a természetes projekció szürjekció, az ekvivalencia-osztályozás szürjekció.

8.8. Gyakran előfordul, hogy egy függvény értékeihez egy más függvénnyel további, más értékeket rendelünk. Például egy hallagóhoz hozzárendeljük a legjobb barátját, aztán ehhez az ő magasságát; így végülis egy hallgatóhoz a legjobb barátjának a magasságát rendeltük hozzá. Ennek akkor van jelentősége, ha aziránt érdeklődünk, ki milyen növésű társával barátkozik.

Definíció *Az $f : A \rightarrowtail B$ függvénynek a $g : C \rightarrowtail D$ függvénnyel vett* ***kompozíciója*** *a*

$$g \circ f : A \rightarrowtail D, \quad x \mapsto g(f(x))$$

függvény, amelynek értelmezési tartománya

$$\{x \in \mathrm{Dom} f \mid f(x) \in \mathrm{Dom} g\}.$$

A $g \circ f$ kompozícióban g-t szokás **külső**, f-et **belső** függvénynek nevezni.

Bár a kompozíció fogalma nem bonyolult, konkrét függvények kompozíciójának – vagyis a kompozíció értelmezési tartományának és a hozzárendelési utasításának – a meghatározása olykor nem kis gondot okozhat. Sokszor csak azért, mert mindkét függvény változóját ugyanúgy jelöljük.

Határozzuk meg például az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

$$g : \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x-1}$$

függvények kompozícióit. Sokkal hamarább átlátjuk a teendőnket, ha különböző betűvel jelöljük a változókat, tehát például a második függvényt így írjuk:

$$g : \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\} \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \sqrt{y-1}.$$

Ekkor nyilvánvalóvá lesz, hogy $g(f(x)) = \sqrt{x^2-1}$ és $\mathrm{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 1\}$. Hasonlóan, $f(g(y)) = y - 1$ és $\mathrm{Dom}(f \circ g) = \mathrm{Dom} g$.

Mint ez a példa is mutatja, általában $g \circ f \neq f \circ g$.

Véssük eszünkbe a $\mathrm{Dom}(g \circ f) \subset \mathrm{Dom} f$ és a $\mathrm{Ran}(g \circ f) = \mathrm{Ran}(g|_{\mathrm{Ran} f}) \subset \mathrm{Ran} g$ összefüggéseket.

8.9. Állítás *Legyenek $f : A \rightarrowtail B$, $g : C \rightarrowtail D$ és $h : E \rightarrowtail F$ függvények. Ekkor*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Bizonyítás Mindkét kétszeresen komponált függvény indulási halmaza A, érkezési halmaza F. x akkor és csak akkor van benne $h \circ (g \circ f)$ értelmezési tartományában, ha $x \in \mathrm{Dom}(g \circ f)$ és $(g \circ f)(x) \in \mathrm{Dom} h$, azaz $x \in \mathrm{Dom} f$, $f(x) \in \mathrm{Dom} g$ és $g(f(x)) \in \mathrm{Dom} h$. Ez viszont pontosan azt jelenti, hogy $x \in \mathrm{Dom} f$ és $f(x) \in \mathrm{Dom}(h \circ g)$, azaz x benne van $(h \circ g) \circ f$ értelmezési tartományában. Azt kell tehát már csak megmutatnunk, hogy a szóban forgó két kompozíció-függvény hozzárendelési utasítása megegyezik, ami szinte nyilvánvaló; ha x benne van a közös értelmezési tartományban, akkor

$$\big(h \circ (g \circ f)\big)(x) = h\big((g \circ f)(x)\big) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = \\ = \big((h \circ g) \circ f\big)(x). \blacksquare$$

A kompozíció most bizonyított úgynevezett asszociatív tulajdonsága miatt a zárójelek elhagyhatók, és használható a $h \circ g \circ f$ jelölés.

8.10. A függvények kompozíciójának egyik elemi tulajdonsága, hogy minden $f : A \rightarrowtail B$ függvényre

$$f \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ f = f.$$

További egyszerű tények, hogy

(i) ha f és g injekció, akkor $g \circ f$ is injekció,

(ii) ha f és g bijekció és $\mathrm{Ran} f = \mathrm{Dom} g$, akkor $g \circ f$ is bijekció,

(iii) ha g injekció, f_1 indulási és érkezési halmaza megegyezik f_2 indulási illetve érkezési halmazával, és $\mathrm{Ran} f_1 \subset \mathrm{Dom} g$, $\mathrm{Ran} f_2 \subset \mathrm{Dom} g$, továbbá $g \circ f_1 \subset g \circ f_2$, akkor $f_1 \subset f_2$,

(iv) ha f szürjekció, g_1 indulási és érkezési halmza megegyezik g_2 indulási illetve érkezési halmazával, és $g_1 \circ f \subset g_2 \circ f$, akkor $g_1 \subset g_2$.

8.11. Feladatok

1. Döntsük el a 8.1-ben és a 8.2-ben adott $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvényekről, melyik injektív, szürjektív, bijektív.

2. Adjuk meg az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x^2$ és az $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ függvények mindkét sorrendű kompozícióját.

3. Adjuk meg az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x - 2$ és az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x + 5$ függvények mindkét sorrendű kompozícióját.

4. Mutassunk két olyan függvényt, amelyek nem injektívek, de a kompozíciójuk injektív.

5. Legyen c konstans függvény. Igazoljuk, hogy bármely f függvényre, $f \circ c$ és $c \circ f$, ha nem üresek, szintén konstans függvények.

6. Lássuk be, hogy a függvények kompozíciójának a definíciója megfelel a relációk kompozíciójára adott definíciónak.

7. Legyen $\mathcal{S}$ páronként összeilleszthető függvények halmaza (lásd 8.4.). Igazoljuk, hogy ha $\cup\{f \mid f \in \mathcal{S}\}$ injektív, akkor minden $f \in \mathcal{S}$ injektív. Hozzunk példát arra, hogy fordítva nem igaz! Viszont ha $\mathcal{S}$ lánc, akkor $\cup\{f \mid f \in \mathcal{S}\}$ injektív, ha minden $f \in \mathcal{S}$ injektív.

8. Legyen $f : A \rightarrowtail B$, $E \subset A$. Ekkor $f \circ \mathrm{id}_E = f|_E$.

9. Halmazrendszerek

9.1. Már eddig is találkoztunk halmazrendszerekkel, azaz halmazok halmazával. A függvény fogalma lehetőséget nyújt arra, hogy kényelmesen kezeljük őket.

Legyen I nemüres halmaz – amelyet megkülönböztetésül most **indexhalmaznak** fogunk nevezni –, $\mathcal{S}$ valamely halmazrendszer, és $I \to \mathcal{S}$, $i \mapsto A_i$ egy függvény. Ennek a függvénynek az értékkészlete, $\{A_i \mid i \in I\}$, maga is egy halmazrendszer, az $\mathcal{S}$ része. A továbbiakban az $\mathcal{S}$ maga érdektelen lesz, ezért elhagyjuk a jelölésből, és a szóban forgó halmazértékű függvényre az $(A_i \mid i \in I)$ szimbólumot használjuk, és **indexezett halmazrendszernek** nevezzük. Világos, hogy $(A_i \mid i \in I)$ és $\{A_i \mid i \in I\}$, egy függvény és az értékkészlete különböző dolgok; az előbbi egyértelműen meghatározza az utóbbit, fordítva nem. Ezért a továbbiakban általában a függvényre hivatkozunk akkor is, amikor tulajdonképpen az értékkészletét használjuk. Például az $(A_i \mid i \in I)$ indexezett halmazrendszer egyesítéséről, metszetéről beszélünk az $\{A_i \mid i \in I\}$ halmazrendszer egyesítése illetve meteszete helyett, amelyekre az

$$\bigcup_{i \in I} A_i, \quad \text{illetve} \quad \bigcap_{i \in I} A_i$$

jelölést alkalmazzuk.

Tapasztaljuk majd, hogy az ilyen indexezett halmazrendszerekkel könnyű bánni. Például a de Morgan-féle azonosságokat így írhatjuk:

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^{\complement} = \bigcap_{i\in i} A_i^{\complement}, \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^{\complement} = \bigcup_{i\in i} A_i^{\complement}.$$

Ugyanakkor az általánosságot sem szorítjuk meg, ha csak indexezett halmazrendszereket tekintünk, mert bármely nemüres $\mathcal{S}$ halmazrendszert ilyen formában írhatunk: az $I := \mathcal{S}$ és $A_X := X$ $(X \in \mathcal{S})$ meghatározással $\mathcal{S} = \{A_X \mid X \in \mathcal{S}\}$.

Megemlítjük, meg lehetne engedni, hogy I üres legyen; ekkor az indexezett halmazrendszer üres volna. Mi most kizárjuk ezt az érdektelen lehetőséget, és ezzel elkerülünk bizonyos körülményeskedést a fogalmazásban.

Szemléltető példák megadása céljából megelőlegeztük a valós számok ismeretét. Most a pozitív egész számokat vesszük igénybe, hogy később sokat használt formulákat felírjunk.

Jelölje $\mathbb{N}$ a pozitív egész számok halmazát.

Ha $n \in \mathbb{N}$, az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazzal indexezett halmazrendszert így is jelöljük: $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Egyesítésére, metszetére az

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad \text{illetve} \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

szimbólumakat használjuk.

9.2. Legyen A_1 és A_2 halmaz (vagyis vegyük az (A_1, A_2) indexezett halmazrendszert), és tekintsük azokat a függvényeket, amelyek értelmezési tartománya az $\{1, 2\}$ halmaz, az 1-hez A_1-beli, a 2-höz A_2-beli elemet rendelnek:

$$A_1 * A_2 := \{f : \{1, 2\} \to A_1 \cup A_2 \mid f(1) \in A_1, f(2) \in A_2\}.$$

Első pillanatra nem látszik, mire jók ezek a függvények, de a következő állítás múlhatatlanul fontos szerepet oszt ki nekik.

Állítás *A* $\Phi : A_1 * A_2 \to A_1 \times A_2,\ \ f \mapsto (f(1), f(2))$ *leképezés bijekció.*

BIZONYÍTÁS Ha $\Phi(f) = \Phi(g)$, azaz $(f(1), f(2)) = (g(1), g(2))$, akkor $f(1) = g(1)$ és $f(2) = g(2)$, azaz $f = g$, tehát Φ injektív. Ha viszont $(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2$, akkor az $f(1) := x_1$, $f(2) := x_2$ formulákkal definiált f függvény az $A_1 * A_2$ eleme és $\Phi(f) = (x_1, x_2)$, tehát Φ szürjektív. ■

A Φ bijekció olyan "egyszerű", annyira "természetes", f és $\Phi(f)$ annyira "hasonló", "alig különböző" dolgok, hogy célszerűnek látszik azonosnak tekinteni őket. Úgy mondjuk, hogy a Φ bijekció által azonosítjuk a két halmazt és elemeiket, amit így írunk:

$$A_1 * A_2 \equiv A_1 \times A_2, \quad f \equiv (f(1), f(2)).$$

9.3. Ezzel a matematikának egy fontos jelölés-egyszerűsítő mechanizmusával találkoztunk. Megfogalmazzuk, általános keretek között, miről van szó.

Adott két halmaz, X és Y, és egy $i : X \to Y$ injekció. Úgy találjuk, hogy i valami egészen "természetes", "kitüntetett", "egyszerűbb, mint más", az X és az Y halmaz tulajdonságaihoz illeszkedő injekció, x és $i(x)$ "szinte ugyanaz". Ezért **azonosnak** tekintjük az x és az $i(x)$ elemet, ezáltal **azonosítjuk** X-et $\mathrm{Ran}\,i$-vel, amely az Y részhalmaz, elhagyjuk az i jelölését, $i : X \to Y$, $x \mapsto i(x)$ helyett azt írjuk, hogy

$$X \Rrightarrow Y \quad x \equiv i(x).$$

Ha i nemcsak injekció, hanem bijekció is, akkor X-et az egész Y-nal azonosítjuk, és ezt írjuk:

$$X \equiv Y \quad x \equiv i(x).$$

Mi több, ha már egy ilyen azonosítást megszoktunk, akkor $\Rrightarrow$ helyett a $\subset$ tartalmazást írjuk, $\equiv$ helyett pedig az $=$ egyenlőséget.

Az idézőjelbe tett szavak nem matematikai fogalmak. Hogy mi "természetes", "kitüntetett" stb., az végül is izlés dolga: rajtunk áll, mit fogadunk el azonosításnak. Választani egy bijekciót és ezzel az azonosítást megcsinálni, az már matematika, és lényegében nem más, mint elhagyni egy jelölést: ugyanazzal a szimbólummal két dolgot jelölni, és közben tudni, mi a "természetes" kapcsolat a két dolog között.

Természetesen rajtunk áll, milyen injekciót (bijekciót) fogadunk el azonosításnak, milyent nem. Bizonyos azonosításokat a metematikusok egy része elfogad, más része nem. Többségben vannak azonban azok az azonosítások, amelyeket mindenki egyöntetűen vállal. Van olyan "természetes" bijekció is, amelyet nem célszerű azonosításra használni; például az $A \times B \to B \times A$, $(a, b) \mapsto (b, a)$ leképezés. Ha ezáltal azonosítanánk $A \times B$-t $B \times A$-val, épp az veszne el, ami a rendezett párok lényege: a két elem közül melyik az első, melyik a második.

9.4. A mondottaknak megfelelően tehát $A_1 * A_2$ helyett is $A_1 \times A_2$-t írunk, és a Descartes-szorzat elemeit hol rendezett párnak, hol az $\{1, 2\}$ halmazon értelmezett megfelelő függvénynek tekintjük, mikor mi a kényelmesebb.

Ez az azonosítás módot nyújt a Descartes-szorzat fogalmának általánosítására.

Definíció *Az $(A_i \mid i \in I)$ indexezett halmazredszer* ***Descartes-szorzata***

$$\mathop{\mathsf{X}}_{i \in I} A_i := \{x : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \mid x_i \in A_i \text{ minden } i \in I \text{ esetén}\}.$$

A definícióban az x függvénynek az i helyen felvett értékét célszerűen $x(i)$ helyett x_i-nek írtuk; magára a függvényre, vagyis a Descartes-szorzat elemére az $(x_i)_{i \in I}$ jelöléssel fogunk hivatkozni.

Ha A_i ugyanaz az A halmaz minden i esetén, akkor a Descartes-szorzat az $I \to A$ függvények összessége, amelyre az

$$A^I$$

szimbólumot használjuk.

Fontos, hogy az $(A_i \mid i \in I)$ indexezett halmazrendszer Descartes-szorzatárzol beszélünk, és nem az $\{A_i \mid i \in I\}$ halmazrendszer Descartes-szorzatáról. Jól szemléltethetjük ezt két halmazból álló rendszerrel. Legyen ugyanis H és G két különböző halmaz. A $\{H, G\} = \{G, H\}$ halmazrendszer esetén nincs első és második halmaz, így nincs értelme azoknak az $\{1, 2\}$-n értelmezett függvényeknek, amelyek 1-nél az első halmazban, 2-nél a második halmazban veszik fel az értéküket. Ha azonban megadunk egy $\{1, 2\}$-n értelmezett függvényt úgy, hogy $A_1 := H$, $A_2 := G$ vagy úgy, hogy $A_1 := G$, $A_2 := H$, értelmet nyernek a szóban forgó függvények; természetesen a két különböző esetben különbözőképpen, ami pont azt tükrözi, hogy $H \times G \neq G \times H$.

9.5. Ha $n \in \mathbb{N}$, egy $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ indexezett halmazrendszer Descartes-szorzatára a

$$\mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{n} A_i \quad \text{illetve} \quad A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \tag{$*$}$$

jeleket használjuk. A Descarates-szorzat elemeit **rendezett** n**-eseknek** hívjuk, és $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ alakba írjuk. Ha minden A_i ugyanaz az A halmaz, akkor A^n-t írunk.

Véges sok halmaz esetén sokszor különféle betűkkel jelöljük a halmazrendszer elemeit, nem indexekkel különböztethetjük meg őket. Ekkor a Descartes-szorzatot felsorolásszerűen írjuk a $(*)$ második formulájának megfelelően, és a felsorolás sorrendjét értjük "indexelésnek". Tehát például az $A \times B \times C$ Descartes-szorzat nem ugyanaz, mint a $B \times A \times C$ Descartes-szorzat.

A Descartes-szorzat "lényegében" **asszociatív** a következő értelemben. Vegyük az $(A_1, \ldots, A_n)$ halmazrendszert, és legyen $m < n$. Az $\left(\mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{m} A_i\right) \times \left(\mathop{\mathsf{X}}_{i=m+1}^{n} A_i\right)$ elemei olyan rendezett párok, amelyek első tagja rendezett m-es, második tagja rendezett $n-m$-es, tehát az elemei nem rendezett n-esek. Viszont természetes kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető az ilyen elemek és a rendezett n-esek között, amivel a következő azonosítást tesszük:

$$\left(\mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{m} A_i\right) \times \left(\mathop{\mathsf{X}}_{i=m+1}^{n} A_i\right) \equiv \mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{n} A_i,$$

$$\big((x_1, \ldots, x_m), (x_{m+1}, \ldots, x_n)\big) \equiv (x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n).$$

Természetesen nem csak két, hanem három, négy stb. egymás utáni csoportba is oszthatjuk a halmazok rendszerét (lásd a 9.9.6. feladatot).

9.6. Tudjuk, hogy két nem üres halmaz Descartes-szorzata nem üres. Igaz-e hogy bármilyen nemüres halmazok indexezett rendszerének a Descartes-szorzata nem üres? Szinte természetesnek látszik, hogy igen. Próbálkozzunk meg a bizonyítással! Tegyük fel, hogy adott az $(A_i \mid i \in I)$ indexezett halmazrendszer úgy, hogy egyik A_i sem üres. Tegyük fel, hogy J az I olyan nemüres részhalmaza, hogy $(A_j \mid j \in J)$ Descartes-szorzata nem üres (minden két elemű J ilyen). Ha $r \in I \setminus J$, akkor az $(A_k \mid k \in J \cup \{r\})$ halmazrendszer Descartes-szorzata sem üres, hiszen ha $(x_j)_{j \in J} \in \bigtimes_{j \in J} A_j$ és $x_r \in A_r$, akkor eleme a

$$k \mapsto \begin{cases} x_k & \text{ha } k \in J, \\ x_r & \text{ha } k = r \end{cases}$$

függvény. Így tehát eggyel mindig tovább léphetünk: ha valamilyen halmazrendszer Descartes-szorzata nem üres, akkor eggyel több halmazból álló rendszeré sem üres. Kettőről eljuthatunk háromra, négyre, véges sokra; de akárhányra hogyan?

A végtelennel kapcsolatos olyan problémára bukkantunk, mint a Zornm-lemmánál. Természetes elvárásunkat rögzíti a

Kiválasztási axióma: *nemüres halmazokból álló indexezett halamzrendszer Descartes-szorzata nem üres.*

Azért hívják kiválasztási axiómának, mert biztosítja hogy a halmazrendszer minden halmazából kiválaszthatunk egy elemet, és így tudunk definiálni egy függvényt.

Más megfogalmazásban még inkább kidomborodik a kiválasztási jelleg. Legyen H nemüres halmaz, és $\mathcal{S} := \mathcal{P}(H) \setminus \{\emptyset\}$. Indexeljük $\mathcal{S}$-et önmagával, azaz vegyük az $(A_X \mid X \in \mathcal{S})$ halmazrendszert, ahol $A_X := X$. Ekkor a kiválasztási axióma szerint van olyan az $\mathcal{S}$-en értelmezett függvény, amely X-hez az $A_X = X$-ben veszi fel az értékét. Egyszerűbben: van olyan **kiválasztó függvény**, amely a H minden nemüres részhalmazához a részhalmazbeli elemet rendel (szemléletesen: minden nemüres részhalmazból kiválaszt egy elemet):

$$c : \mathcal{P}(H) \setminus \{\emptyset\} \to H, \quad c(X) \in X.$$

9.7. Elérkeztünk a halmazelmélet újabb axiómájához. Tulajdonképpen nem kellet volna axiómának (nem bizonyítandó alapigazságnak) elfogadni, mert az eddigiekből már levezethető. Azonban, ez megint izlés dolga, van aki ezt veszi axiómának, és mást vezet le belőle. Pontosan két axiómának az ekvivalenciáját tudjuk bebizonyítani, amint erre már korábban utaltunk.

Állítás *A Zorn-lemma és a kiválasztási axióma egyenértékű.*

BIZONYÍTÁS A Zorn-lemmából viszonylag egyszerűen származtathatjuk a kiválasztási axiómát. Vegyük a nemüres halmazokból álló $(A_i \mid i \in I)$ indexezett halmazrendszert, és tekintsük azokat a függvényeket, anelyek az I részhalmazain értelmezett kiválasztó függvények, vagyis az

$$\mathcal{F} := \{f : I \rightarrowtail \cup_{i\in I} A_i \mid f(i) \in A_i,\ i \in \mathrm{Dom} f\}$$

halmazt. Ez az előzőekben mondottak szerint nem üres, tartalmazza a véges részhalmazon értelmezett függvényeket. Vezessünk be $\mathcal{F}$-en rendezést a függvényekre szokásos résznek lenni fogalmával. Legyen $\mathcal{L}$ lánc $\mathcal{F}$-ben. Az $\mathcal{L}$-beli függvények uniója (lásd 8.4.), amely a lánc felső határa az $I \rightarrowtail \bigcup_{i\in I} A_i$ függvények halmazában, szintén $\mathcal{F}$-ben van. Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{F}$-ben minden lánc felülről korlátos. A Zorn-lemma szerint tehát van maximális elem $\mathcal{F}$-ben, mondjuk F. Ennek az értelmezési tartománya az egész I, mert ha nem így volna, akkor "eggyel tovább lépve", ahogy korábban bemutattuk, az F valódi kiterjesztéséhez jutnánk, ami ellentmond F maximális voltának. Végül is F a szóban forgó Descartes-szorzat eleme, vagyis ez a Descartes-szorzat nem üres.

Amennyire magától értetődő, természetes volt a Zorn-lemmából bizonyítani a kiválasztási axiómát, annyira "trükkös" a kiválasztási axiómából bizonyítani a Zorn-lemmát.

Legyen $(S, \leq)$ rendezett halmaz, és értelmezzük az S bármely A részhalmazára a

$$\mathrm{Maj} A := \{x \in S \mid x < a, a \in A\}, \qquad \mathrm{Min} A := \{x \in S \mid x > a, a \in A\}$$

halmazokat. Jegyezzük meg azt a két egyszerű tényt, hogy

$$A \cap \mathrm{Min} A = \emptyset, \qquad \mathrm{Maj}\emptyset = S.$$

Vegyünk egy $c : \mathcal{P}(S) \setminus \{\emptyset\} \to S$ kiválasztó függvényt.

1) A kiválasztó függvény segítségével speciális típusú láncokat tudunk értelmezni.

Legyen $x_0 := c(S)$. Ha x_0 nem maxiális elem, akkor $\emptyset \neq \mathrm{Maj}\{x_0\}$, és legyen $x_1 := c(\mathrm{Maj}\{x_0\}) \in \mathrm{Maj}\{x_0\})$. Nyilvánvaló, hogy $x_0 < x_1$, tehát $\{x_0, x_1\}$ lánc. Ha x_1 nem maximális, akkor $\emptyset \neq \mathrm{Maj}\{x_1\} = \mathrm{Maj}\{x_0, x_1\}$, és legyen $x_2 := c(\mathrm{Maj}\{x_0, x_1\}) \in \mathrm{Maj}\{x_0, x_1\})$. Nyilvánvaló, hogy $x_0 < x_1 < x_2$, és $\{x_0, x_1, x_2\}$ lánc. És így tovább...

Egy így elkészített L láncnak az a tulajdonsága – amit a Min-re és a Maj-ra említett egyszerű tények alapján könnyű belátni – , hogy

(i) az L minden nemüres részhalmazában van legkisebb elem,

(ii) az L minden x elemére

$$c(\mathrm{Maj}(L \cap \mathrm{Min}\{x\})) = x. \tag{$*$}$$

Az S egy L részhalmazát c-**láncnak** fogjuk hívni, ha teljesíti ezt a két feltételt. Megemlítjük, hogy az L részhalmazról nem kell feltennünk azt, hogy lánc, ez az (i) tulajdonságból (amit szokás úgy is nevezni, hogy L jól rendezett) már következik, hiszen ha $x, y \in L$, akkor az $\{x, y\}$ halmazban van legkisebb elem, tehát $x \leq y$ vagy $y \leq x$. Az előbb leírt eljárással csak véges c-láncokat tudunk előállítani, de lehetnek nemvéges c-láncok is. A mondottak szerint c-lánc létezik: maga a $\{c(S)\}$ egy elemű halmaz c-lánc.

2) Ha L c-lánc, akkor a $(*)$ tulajdonság szerint nem üres, így van legkisebb eleme, mondjuk k; erre $L \cap \mathrm{Min}\{k\} = \emptyset$ teljesül, ezért ismét a $(*)$ szerint $k = c(S)$. Tehát $c(S)$ minden c-lánc legkisebb eleme.

3) Ha L c-lánc, és $\mathrm{Maj}L \neq \emptyset$, akkor az $a := c(\mathrm{Maj}L) \in \mathrm{Maj}L$ elemmel $L \cup \{a\}$ is c-lánc, amely valódi részként tartalmazza L-et. Ugyanis $x < a$ az L minden x elemére; ha H az $L \cup \{a\}$ nemüres részhalmaza és $H \cap L = \emptyset$, akkor $H = \{a\}$, és ennek van legkisebb eleme, ha $H \cap L \neq \emptyset$, akkor ennek a legkisebb eleme legkisebb eleme H-nak is; végül $L \cap \mathrm{Min}\{a\} = L$, tehát a $(*)$ feltétel is teljesül.

4) Ha L_1 és L_2 két c-lánc, akkor $L_1 \subset L_2$ vagy $L_2 \subset L_1$ teljesül, és ha $L_1 \subset L_2$, $L_1 \neq L_2$, akkor van olyan $x_2 \in L_2$, hogy

$$L_1 = L_2 \cap \mathrm{Min}\{x_2\}.$$

Ezt a következőképpen láthatjuk be. Tegyük fel, hogy $L_2 \neq L_1$; ekkor $L_2 \setminus L_1$ és $L_1 \setminus L_2$ közül legalább az egyik nem üres. Legyen $L_2 \setminus L_1 \neq \emptyset$. Ekkor a jól rendezettség miatt van az $L_2 \setminus L_1$-ben legkisebb elem, legyen ez x_2. Ha tehát $x \in L_2$ és $x < x_2$, akkor $x \in L_1$, ezért

$$L_2 \cap \mathrm{Min}\{x_2\} \subset L_1. \tag{1}$$

Ha egyenlőség áll, készen vagyunk. Ha nem, akkor az $L_1 \setminus (L_2 \cap \mathrm{Min}\{x_2\})$ halmazban van legkisebb elem, legyen ez x_1. Ha tehát $x \in L_1$ és $x < x_1$, akkor $x \in L_2 \cap \mathrm{Min}\{x_2\}$, ezért

$$L_1 \cap \mathrm{Min}\{x_1\} \subset L_2 \cap \mathrm{Min}\{x_2\}. \tag{2}$$

Itt egyenlőség nem állhat, mert akkor a $(*)$ feltétel szerint $x_1 = x_2$ volna, ami $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2 \setminus L_1$ miatt lehetetlen.

Így tehát az $(L_2 \cap \mathrm{Min}\{x_2\}) \setminus (L_1 \cap \mathrm{Min}\{x_1\}$ nemüres halmaznak (amely az $L_1 \cap L_2$ része) van legkisebb eleme, legyen ez y. Ha tehát $x \in L_2$ és $x < y$, akkor $x \in L_1 \cap \mathrm{Min}\{x_1\}$, ezért

$$L_2 \cap \mathrm{Min}\{y\} \subset L_1 \cap \mathrm{Min}\{x_1\}. \tag{3}$$

Az $y \in L_1 \cap L_2 \subset L_1$ az $L_1 \cap \mathrm{Min}\{x_1\} \subset L_1$ minden x elemével összehasonlítható; az $y \leq x$ lehetőségből azonban $y < x_1$, azaz $y \in L_1 \cap \mathrm{Min}\{x_1\}$ következne, ami ellentmond az y definíciójának. Tehát $x < y$ az $L_1 \cap \mathrm{Min}\{x_1\}$ minden x elemére, azaz (3)-ban egyenlőség áll. Ekkor viszont a $(*)$ feltétel szernt $x_1 = y \in L_2 \cap \mathrm{Min}\{x_2\}$, ami ellentmond az x_1 definíciójának.

Az ellentmondás csak úgy oldható fel, hogy nincs az adott tulajdonságú x_1, azaz (1)-ben egyenlőség áll, és ezzel bebizonyítottuk, amit akartunk.

5) Vegyük a c-láncok $\mathcal{L}$ összességét; azt állítjuk, hogy $L_0 := \cup\{L \mid L \in \mathcal{L}\}$ is c-lánc.

Ehhez először megállapítjuk, hogy tetszőleges L c-lánc minden x elemére

$$L_0 \cap \mathrm{Min}\{x\} = L \cap \mathrm{Min}\{x\}. \tag{4}$$

Ugyanis, ha y a bal oldali (nyilvánvalóan bővebb) halmaz eleme, akkor van olyan $L' \in \mathcal{L}$, hogy $y \in L'$. Ha $L' \subset L$, akkor y eleme a jobb oldalnak is. Ha $L' \not\subset L$, akkor az előbb bizonyítottak szerint van olyan $x' \in L'$, hogy $L = L' \cap \mathrm{Min}\{x'\}$, tehát $x < x'$. Mivel $y < x$, az is igaz, hogy $y \in \mathrm{Min}\{x_1\}$, végül is $y \in L' \cap \mathrm{Min}\{x'\} = L$, azaz y eleme a jobb oldalnak is.

Ha H az L_0 nemüres részhalmaza, akkor van olyan L c-lánc, hogy $H \cap L \neq \emptyset$. Ennek van legkisebb eleme, legyen ez x. Ekkor $(H \cap L) \cap \mathrm{Min}\{x\} = \emptyset$, ami a (4) szerint maga után vonja, hogy $(H \cap L_0) \cap \mathrm{Min}\{x\} = \emptyset$, azaz x az L_0-nak is a legkisebb eleme, tehát L_0 jól rendezett. A (4) egyenlőségből az is azonnal következik hogy L_0 teljesíti a $(*)$ feltételt.

6) L_0 tehát c-lánc, és nyilvánvalóan a legbővebb. Ezért $\mathrm{Maj}L_0 = \emptyset$. Ugyanis, ha nem így volna, akkkor a 3) szerint volna az L_0-nál szigorúan bővebb c-lánc.

Ezen előkészületek után tegyük fel, hogy az S rendezett halmazban minden lánc felülről korlátos.

Az előbbiekben meghatározott L_0 lánc is felülről korlátos, azaz van olyan $x_m \in S$, hogy $x \leq x_m$ az L_0 minden elemére. Mivel $\mathrm{Maj}L_0 = \emptyset$, annak kell teljesülnie, hogy $x_m \in L_0$. Az x_m az S maximális eleme, mert nála nagyobb elem a $\mathrm{Maj}L_0$-hoz tartozna, de ez üres halmaz.

Bebizonyítottuk tehát, hogy a kiválasztási axiómából következik Zorn lemmája. ■

Láttuk, a jól rendezettség lényeges szerepet játszott a bizonyításban. Megemlítjük azt az érdekes (de alkalmazások szempontjából kevéssé jelentős) tényt, hogy a Zorn-lemma illetve a kiválasztási axióma ekvivalens azzal is, hogy minden halmazon megadható olyan rendezés, amellyel a halmaz jól rendezett, azaz bármely nemüres részhalmazában van legkisebb elem.

9.8 Hasonlóan, mint két halmaz esetén, bevezethetjük a

$$\mathrm{pr}_k : \mathop{\times}_{i\in I} A_i \to A_k, \quad (x_i)_{i\in I} \mapsto x_k \qquad (k \in I)$$

függvényt, amelyet a k-ik komponensre való **természetes projekciónak** hívunk.

Az $f : A \rightarrowtail \mathop{\times}_{i\in I} A_i$ függvény esetén $\mathrm{pr}_k \circ f : A \rightarrowtail A_k$ az f k-ik komponense nevet viseli.

Egy ilyen függvényt tehát "szétbonthatunk" a komponenseire. A komponensekből a függvény "összetehető" az alábbi meghatározás szerint.

1. Definíció *Legyen az A halmaz és az $(A_i \mid i \in I)$ indexezett halmazrendszer esetén adva az I minden i elemére egy $f_i : A \rightarrowtail A_i$ függvény. Ezeknek a függvényeknek az **együttese** a $\bigcap_{i\in I} \mathrm{Dom} f_i$ halmazon értelmezett*

$$(f_i)_{i\in I} : A \rightarrowtail \mathop{\mathsf{X}}_{i\in I} A_i, \quad x \mapsto \big(f_i(x)\big)_{i\in I}$$

függvény.

Nyilvánvaló, hogy $\mathrm{pr}_k \circ (f_i)_{i\in I} \subset f_k$, és egyenlőség áll, ha f_i értelmezési tartománya ugyanaz minden i-re; továbbá bármely $f : A \rightarrowtail \mathop{\mathsf{X}}_{i\in I} A_i$ függvény a komponenseinek az együttese: $f = (\mathrm{pr}_i \circ f)_{i\in I}$.

Másféle függvényrendszerek összetevését adja meg a következő meghatározás.

2. Definíció *Legyenek $(A_i \mid i \in I)$ és $(B_i \mid i \in I)$ indexezett halmazrendszerek, és legyen adva az I minden i elemére egy $f_i : A_i \rightarrowtail B_i$ függvény. Ezeknek a függvényeknek a **Descartes-szorzata** a $\mathop{\mathsf{X}}_{i\in I} \mathrm{Dom} f_i$ halmazon értelmezett*

$$\mathop{\mathsf{X}}_{i\in I} f_i : \mathop{\mathsf{X}}_{i\in I} A_i \rightarrowtail \mathop{\mathsf{X}}_{i\in I} B_i, \quad (x_i)_{i\in I} \mapsto \big(f_i(x_i)\big)_{i\in I}$$

függvény.

Nyilvánvaló, hogy $\mathrm{pr}_k \circ \mathop{\mathsf{X}}_{i\in I} f_i \subset f_k \circ \mathrm{pr}_k$, és egyenlőség áll, ha $\mathrm{Dom} f_i = A_i$ minden i-re.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a függvények együttesénél mondottakkal ellentétben, nem minden $f : \mathop{\mathsf{X}}_{i\in I} A_i \rightarrowtail \mathop{\mathsf{X}}_{i\in I} B_i$ függvény szorzat alakú; az identitás-függvény viszont az:

$$\mathrm{id}_{\mathop{\mathsf{X}}_{i\in I} A_i} = \mathop{\mathsf{X}}_{i\in I} \mathrm{id}_{A_i}.$$

Megemlítjük végül, hogy az $\{1, 2, \ldots, n\}$ indexhalmaz esetén a függvények együttesére az

$$(f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

jelölést, Descartes-szorzatára az

$$\mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{n} f_i \quad \text{illetve} \quad f_1 \times f_2 \times \ldots \times f_n$$

jelölést használjuk.

9.9. Feladatok

Értelemszerű jelöléseket használunk a következőkben pontos részletezés nélkül.

1.

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J}(A_i \cap B_j),$$

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{i\in I}\bigcap_{j\in J}(A_i \cup B_j),$$

$$A \setminus \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A \setminus A_i).$$

2.

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J}(A_i \times B_j),$$

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{i\in I}\bigcap_{j\in J}(A_i \times B_j).$$

3. (i) Ha valamely i esetén $f_i : A \rightarrowtail A_i$ injektív, akkor $(f_i)_{i\in I}$ is injektív.
(ii) Adjunk példát arra, hogy minden i esetén $f_i : A \rightarrowtail A_i$ szürjektív, $(f_i)_{i\in I}$ mégsem az. (Elég két elemű indexhalmazt venni.)
4. Ha minden i esetén $f_i : A_i \rightarrowtail B_i$ injektív illetve szürjektív, akkor $\mathop{\times}_{i\in I} f_i$ is injektív illetve szürjektív.
5.

$$\left(\mathop{\times}_{i\in I} g_i\right) \circ \left(\mathop{\times}_{i\in I} f_i\right) = \mathop{\times}_{i\in I}(g_i \circ f_i),$$

$$\left(\mathop{\times}_{i\in I} g_i\right) \circ (f_i)_{i\in I} = (g_i \circ f_i)_{i\in I},$$

$$(g_i)_{i\in I} \circ f = (g_i \circ f)_{i\in I}.$$

6. Értelmezzük az

$$A \times (B \times C) \times D \equiv A \times (B \times (C \times D)) \equiv A \times B \times C \times D$$

azonosításokat.

10. Inverzek

10.1. Tudjuk, minden relációnak értelmezhető az inverze, amely szintén reláció. Így egy függvényszerű relációnak is; kérdés, mikor lesz ez is függvényszerű.

Állítás *Az $f : A \rightarrowtail B$ függvényhez tartozó relációnak (azaz $\mathrm{Graph}f$-nek) az inverze pontosan akkor függvényszerű, ha f injektív.*

BIZONYÍTÁS Legyen $B \times A$-nak tetszőleges (u, x_1) és (u, x_2) eleme benne $\mathrm{Graph}f$ reláció-inverzében, azaz $u = f(x_1)$ és $u = f(x_2)$. Ebből $x_1 = x_2$ pontosan akkor következik, ha f injektív. ■

Természetszerűleg, ha függvényekkel dolgozunk, általában nem akarunk kilépni a függvények köréből. Ezért ekkor csak függvény-inverzről beszélünk, reláció-inverzről nem. Tehát ilyen értelemben csak injektív függvénynek van inverze, amely szintén függvény. Az f injektív függvény inverzét az f^{-1} szimbólummal jelöljük.

10.2. Egyszerű tény, hogy injektív függvény inverze is injektív, és az inverz függvény inverze az eredeti függvény:

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f.$$

Nyilvánvaló továbbá, hogy

$$\mathrm{Dom}f^{-1} = \mathrm{Ran}f, \qquad \mathrm{Ran}f^{-1} = \mathrm{Dom}f,$$

és

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{Dom}f}, \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{Ran}f}.$$

Ezeknek az összefüggésekenek bizonyos megfordítása is igaz.

Állítás *Legyen adva az $f : A \rightarrowtail B$ függvény. Ha $g : B \rightarrowtail A$ olyan függvény, hogy $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{Dom}f}$, akkor f injektív és $f^{-1} \subset g$.*

BIZONYÍTÁS Mivel most $\mathrm{Dom}(g \circ f) = \mathrm{Dom}f$, annak kell teljesülnie, hogy $\mathrm{Ran}f \subset \mathrm{Dom}g$.

Ha f nem volna injektív, akkor volna két különböző x_1 és x_2 elem az értelmezési tartományában, amelyre $f(x_1) = f(x_2)$. Ekkor bármely g függvényre (amelyre $\mathrm{Ran}f \subset \mathrm{Dom}g$) $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, tehát $g \circ f$ nem lehetne identitás-függvény.

Mivel $g(f(x)) = x$ és az $f(x) \mapsto x$ ($x \in \mathrm{Dom}f$) határozza meg az f inverzét, g szükségképpen megegyezik f^{-1}-gyel az f értékkészletén. ■

Ha még az is igaz, hogy $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{Dom}g}$, akkor $g^{-1} \subset f$, amiből $g = (g^{-1})^{-1} \subset f^{-1}$ következik, így végül $g = f^{-1}$. Összefoglalva tehát: ha

$$g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{Dom}f} \quad \text{és} \quad f \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{Dom}g},$$

akkor f injektív, és

$$f^{-1} = g.$$

10.3. Állítás *Ha f és g injektív, akkor $g \circ f$ is injektív, és*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Bizonyítás Azt már úgyis tudjuk, hogy injektív függvények kompozíciója is injektív, de még ez is következik az előbbiekből. Ugyanis ha $x \in \mathrm{Dom}(g \circ f)$, akkor $g(f(x)) \in \mathrm{Dom}(f^{-1} \circ g^{-1})$, amiből egyszerűen adódik, hogy

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \mathrm{id}_{\mathrm{Dom}(g \circ f)},$$

és ugyanúgy

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \mathrm{id}_{\mathrm{Dom}(f^{-1} \circ g^{-1})}.$$

10.4. Definíció *Legyen $f : A \rightarrowtail B$ és R a B részhalmaza. R-nek az f általi* ***ősképe*** *az*

$$\overset{-1}{f}(R) := \{x \in \mathrm{Dom} f \mid f(x) \in R\}$$

halmaz. A

$$\mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A), \quad R \mapsto \overset{-1}{f}(R)$$

leképezést az f ***teljes inverzének*** *nevezzük.*

Véssük jól észbe, sokszor fogjuk használni: $x \in \overset{-1}{f}(R)$ egyenértékű azzal, hogy $f(x) \in R$.

Jegyezzük meg, hogy bármilyen függvénynek értelmeztük a teljes inverzét, nemcsak injekciónak, és a teljes inverz a hatványhalmazok közötti leképezés. Figyeljünk az f^{-1} és az $\overset{-1}{f}$ jelek különbségére is.

A függvények teljes inverze nagyon sokat használt fogalom. Arra is alkalmas, hogy bizonyos formulákat egyszerűen megfogalmazzunk, leírjunk. Például megállapíthatjuk, hogy

$$\mathrm{Dom}(g \circ f) = \overset{-1}{f}(\mathrm{Dom} g).$$

A kompozíciók teljes inverzére ugyanolyan alakú összefüggés igaz, mint az injektív függvények kompozíciójának az inverzére.

Állítás

$$\overbrace{g \circ f}^{-1} = \overset{-1}{f} \circ \overset{-1}{g}.$$

Bizonyítás Legyen H a $g\circ f$ érkezési halmazának része. $x\in \overbrace{g\circ f}^{-1}(H)$ egyenértékű azzal, hogy $(g\circ f)(x)\in H$, azaz $g(f(x))\in H$. Ez viszont egyenértékű azzal, hogy $f(x)\in \overset{-1}{g}(H)$, azaz $x\in \overset{-1}{f}(\overset{-1}{g}(H))$.

10.5. Definíció *Legyen $f: A \rightarrowtail B$ és E az A részhalmaza. E-nek az f általi **képe** az*

$$f[E] := \{f(x) \mid x\in E\cap \mathrm{Dom} f\}$$

halmaz.

Ezzel a definícióval f-et "felemeljük" egy

$$\mathcal{P}(A)\to\mathcal{P}(B), \quad E\mapsto f[E]$$

leképezéssé. Olykor, hogy megkülönböztessék f-től, a teljes inverzzel való hasonlóság miatt ezt $\overset{1}{f}$-gyel jelölik. Mi tartjuk magunkat ahhoz a szokáshoz, hogy a függvény jele után szögletes zárójellel fejezzük ki, hogy nem magáról a függvényről van szó, hanem a felemeltjéről.

Állítás *Legyen $f: A\rightarrowtail B$, $\quad E\in \mathrm{Dom} f$, $\quad R\in B$. Ekkor*

(i) $f[\overset{-1}{f}(R)]\subset R$, és ha $R\subset \mathrm{Ran} f$ (speciálisan, ha f szürjektív), akkor egyenlőség áll;

(ii) $E\subset \overset{-1}{f}(f[E])$, és ha f injektív, akkor egyenlőség áll;

(iii) ha f injektív, akkor $\overset{-1}{f}(R) = f^{-1}[R]$.

Bizonyítás (i) Ha $u\in f[\overset{-1}{f}(R)]$, akkor van olyan $x\in \overset{-1}{f}(R)$, hogy $u=f(x)$; tehát $f(x)\in R$ és $u=f(x)$, azaz $u\in R$.

Ha $R\subset \mathrm{Ran} f$ és $u\in R$, akkor van olyan $x\in \mathrm{Dom} f$, hogy $u=f(x)$, azaz $f(x)\in R$; ebből viszont $x\in \overset{-1}{f}(R)$, majd $u\in f[\overset{-1}{f}(R)]$ következik.

(ii) Ha $x\in E$, akkor $f(x)\in f[E]$, és így $x\in \overset{-1}{f}(f[E])$.

Ha $x\in \overset{-1}{f}(f[E])$, azaz $f(x)\in f[E]$, akkor van olyan $y\in E$, hogy $f(x)=f(y)$; ha f injektív, akkor $x=y$, azaz $x\in E$.

(iii) $x\in f^{-1}[R]$ pontosan akkor teljesül, ha van (szükségképpen egyetlen) olyan $u\in R$, hogy $x=f^{-1}(u)$, azaz $f(x)=u$, és így $f(x)\in R$, ami viszont egyenértékű azzal, hogy $x\in \overset{-1}{f}(R)$. ■

Az $A:=B:=\{1,2,3\}$, $f(1):=f(2):=2, f(3):=3$ függvényt és az $E:=\{2,3\}$, $R:=\{1,2,\}$ részhalmazokat hozhatjuk fel ellenpéldának, hogy (i)-ben és (ii)-ben általában csak tartalmazás áll.

10.6. Nagyon fontos jó tulajdonsága a teljes inverznek, hogy megtartja a halmazműveleteket, azaz metszet ősképe az ősképek metszete, stb.

Állítás *Legyen $f : A \rightarrowtail B$. Ekkor*

(i) $\overset{-1}{f}(\emptyset) = \emptyset, \quad \overset{-1}{f}(\mathrm{Ran} f) = \mathrm{Dom} f,$

(ii) ha R és S a B részhalmaza, akkor

$$\text{ha} \quad R \subset S, \quad \text{akkor} \quad \overset{-1}{f}(R) \subset \overset{-1}{f}(S),$$

$$\overset{-1}{f}(R \setminus S) = \overset{-1}{f}(R) \setminus \overset{-1}{f}(S);$$

(iii) ha $(R_i \mid i \in I)$ a B részhalmazainak indexezett rendszere, akkor

$$\overset{-1}{f}\left(\bigcup_{i \in I} R_i\right) = \bigcup_{i \in I} \overset{-1}{f}(R_i),$$

$$\overset{-1}{f}\left(\bigcap_{i \in I} R_i\right) = \bigcap_{i \in I} \overset{-1}{f}(R_i).$$

Bizonyítás A bizonyítás igen egyszerű, az olvasóra bízzuk, végezze el. Mutatóba végigviszünk két gondolatmenetet, ahol a szokásunktól eltérően az egyenértékűség logikai jelét alkalmazzuk:

$$x \in \overset{-1}{f}(R \setminus S) \iff f(x) \in R \setminus S \iff f(x) \in R, f(x) \notin S$$
$$iff x \in \overset{-1}{f}(R), x \notin \overset{-1}{f}(S) \iff x \in \overset{-1}{f}(R) \setminus \overset{-1}{f}(S).$$

Hasonlóan:

$$x \in \overset{-1}{f}\left(\bigcap_{i \in I} R_i\right) \iff f(x) \in \bigcap_{i \in I} R_i \iff f(x) \in R_i \ (i \in I)$$
$$\iff x \in \overset{-1}{f}(R_i) \quad (i \in I) \iff x \in \bigcap_{i \in I} \overset{-1}{f}(R_i). \ \blacksquare$$

Különösen fontos a $\mathrm{Dom} f = A$ eset. Ekkor $\overset{-1}{f}(B) = A$, és így az A-ra illetve a B-re vonatkozó komplementerekre az

$$\overset{-1}{f}(R^{\circ\!\!|}) = \left(\overset{-1}{f}(R)\right)^{\circ\!\!|}$$

formula adódik a B minden R részhalmaza esetén.

10.7. Összehasonlításul az előzővel könnyen bebizonyíthatjuk ezeket az összefüggéseket is:

(i) $f[\emptyset]=\emptyset, \quad f[\mathrm{Dom} f]=\mathrm{Ran} f$,

(ii) ha $E\subset F\subset \mathrm{Dom} f$, akkor $f[E]\subset f[F]$,

(iii) ha $(E_i \mid i\in I)$ a $\mathrm{Dom} f$ részhalmazainak indexezett rendszere, akkor

$$f\left[\bigcup_{i\in I} R_i\right]=\bigcup_{i\in I} f[R_i],$$

$$f\left[\bigcap_{i\in I} R_i\right]\subset\bigcap_{i\in I} f[R_i].$$

A 10.5-ben ismertetett függvénnyel és az $E_1:=\{1\}$, $E_2:=\{2\}$ halmazokkal mutathatjuk meg, hogy itt az utolsó formulában nem áll egyenlőség. $f[E\setminus F]$ semmiféle kapcsolatba sem hozható $f[E]\setminus f[F]$-fel (lásd a 10.9.5. feladatot).

10.8 Állítás *Értelemszerű jelölésekkel*

(i) $\overbrace{(f_i)_{i\in I}}^{-1}\left(\bigtimes_{i\in I} R_i\right)=\bigcap_{i\in I}\overset{-1}{f_i}(R_i)$,

(ii) $\overbrace{(\bigtimes_{i\in I} f_i)}^{-1}\left(\bigtimes_{i\in I} R_i\right)=\bigtimes_{i\in I}\overset{-1}{f_i}(R_i)$.

Bizonyítás (i) x pontosan akkor van benne az egyenlőség bal oldalán álló halmazban, ha $(f_i(x))_{i\in I}\in\bigtimes_{i\in I} R_i$, ami viszont azzal egyenértékű, hogy $f_i(x)\in R_i$ azaz $x\in\overset{-1}{f_i}(R_i)$ minden i esetén.

(ii) $(x_i)_{i\in I}$ pontosan akkor van benne a bal oldali halmazban, ha $(f_i(x_i))_{i\in I}\in\bigtimes_{i\in I} R_i$, ami viszont azzal egyenértékű, hogy $f_i(x_i)\in R_i$ azaz $x_i\in\overset{-1}{f_i}(R_i)$ minden i esetén. ■

Descartes-szorzatokra vonatkozóan sokszor bukkan fel a következő formula (emlékezzünk a $\mathrm{pr}_k:\bigtimes_{i\in I} A_i\to A_k$ természetes projekcióra):

$$\overset{-1}{\mathrm{pr}}_k(E_k)=\bigtimes_{i\in I} X_i,\quad \text{ahol}\quad X_i=\begin{cases} A_i & \text{ha } i\neq k,\\ E_k & \text{ha } i=k\end{cases}$$

minden $E_k\subset A_k$ és $k\in I$ esetén. Ebből és az előzőből pedig az adódik, hogy

$$\bigtimes_{i\in I} E_i=\bigcap_{i\in I}\overset{-1}{\mathrm{pr}}_i(E_i).$$

10.9. Feladatok

1. Bijekció inverze is bijekció.

2. $\mathrm{id}_A^{-1} = \mathrm{id}_A$. Igaz-e, hogy f identitás-függvény, ha bijekció és $f^{-1} = f$?

3. Adjunk példát arra, hogy $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{Dom} f}$ és $g \neq f^{-1}$.

4. Legyen E az f függvény indulási halmazának része. Ekkor $\mathrm{Ran}(f|_E) = f[E]$.

5. Adjunk meg olyan f függvényt és E, F részhalmazokat az értelmezési tartományában, hogy

(i) $f[E \setminus F] \supset f[E] \setminus f[F]$, és a tartalmazás valódi,

(ii) $f[E \setminus F] \subset f[E] \setminus f[F]$, és a tartalmazás valódi,

(iii) $f[E \setminus F]$ és $f[E] \setminus f[F]$ egyike sem része a másiknak.

6. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x^2 + 2$ és $E := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$. Adjuk meg $f[E]$-t és $\overset{-1}{f}(E)$-t.

7. A valós számok összeadása az $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$ függvény, szorzás pedig az $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$ függvény. Adjuk meg az $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ halmaznak az összeadás és a szorzás általi ősképét.

8. Igazoljuk, hogy egy halmaz ősképe egy függvény által pontosan akkor üres, ha a halmaz diszjunkt a függvény értékkészletétől.

9. Milyen a függvény, ha általa csak az üres halmaz ősképe üres?

10. Igaz-e, hogy egy függvény injektív, ha általa minden egy elemű halmaz ősképe egy elemű?

11. Bizonyítsuk be, hogy

(i) $(f_i)_{i \in I}[E] \subset \mathop{\times}\limits_{i \in I} f_i[E_i]$,

(ii) $(\mathop{\times}\limits_{i \in I} f_i)\left[\mathop{\times}\limits_{i \in I} E_i\right] = \mathop{\times}\limits_{i \in I} f_i[E_i]$.

Adjunk példát arra, hogy (i)-ben általában nem áll egyenlőség!

12. Igazoljuk, hogy $f : A \to B$ pontosan akkor

(i) szürjekció, ha létezik $g : B \to A$ injekció úgy, hogy $f \circ g = \mathrm{id}_B$ ("jobb oldali inverz" létezése),

(ii) injekció $A \neq \emptyset$ esetén, ha létezik $h : B \to A$ szürjekció úgy, hogy $h \circ f = \mathrm{id}_B$ ("bal oldali inverz" létezése).

(Megjegyezzük, hogy (i) a kiválasztási axiómával bizonyítható, míg (ii) triviális tény.)

11. Egyenletek

11.1. A függvények teljes inverze alkalmas arra is, hogy pontosan meghatározzuk az egyenlet fogalmát.

Mit jelent ez az ismerős felszólítás: oldjuk meg az $x^2 = 3x + 2 = 0$ egyenletet? Azt, hogy keressük meg azokat az x valós számokat, amelyekre a fenti összefüggés igaz. Más szóval, adjuk meg az $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ halmazt. De hiszen ez a halmaz ezzel a formulával tökéletesen meg van határozva! Igen, de tudjuk, hogy egy halmazt többféleképpen is megadhatunk. Az előbbi meglehetősen burkolt formával szemben az $\{1, 2\}$ forma "kézzelfogható".

Sajnos a megoldás szó szokásosan kettős értelmű, ezért olykor zavart okoz. Értik rajta ugyanis azt az elemet, amelyet keresünk, és a keresés folyamatát is. Mi az első jelentés mellett maradunk.

A bevezető példa eléggé megvilágítja miről is van szó tulajdonképpen. Adott egy $f : A \rightarrowtail B$ függvény és a B-nek egy b eleme. Az

$$(x \in A)? \qquad f(x) = b \tag{$*$}$$

egyenlet megoldásain az $\{x \in \mathrm{Dom} f \mid f(x) = b\} = \overset{-1}{f}(\{b\})$ halmaz elemeit értjük. **Nincs megoldása** az egyenletnek, vagy az egyenlet **nem oldható meg**, ha ez a halmaz üres. **Egyértelmű** a megoldás, ha a halmaz egy elemű.

A megoldások megkeresésén azt értjük, hogy más, "konkrét", "kézzelfogható" formában adjuk meg a szóban forgó halmazt. Vigyázzunk, az előbb matematikai fogalmakat értelmeztünk, ez azonban, a megoldások megkeresése már nem az.

Megjegyezzük, hogy a keresendő, "ismeretlen" mennyiséget általában x-szel jelöljük, de ez nem kötelező. Akármilyen más betűt is használhatunk, kivéve azokat, amelyeknek a jelentését már lekötöttük (itt A-t, B-t, f-et és b-t);

$$(a \in A)? \qquad f(a) = b \quad \text{és} \quad (\sigma \in A)? \qquad f(\sigma) = b$$

ugyanaz az egyenlet, amelyről beszéltünk.

11.2. Sokszor találkozunk ilyen feladattal is: oldjuk meg az $x^2 - 3x + 2 > 0$ egyenlőtlenséget. Ez természetesen az $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 > 0\}$ halmazt jelenti. Általában így fogalmazhatunk: adott egy $f : A \rightarrowtail B$ függvény, a B-nek egy b eleme és egy R reláció B-n. Az

$$(x \in A)? \qquad f(x) R b$$

feladat (sajnos nincs olyan jó szavunk erre, mint volt az egyenelet) megoldásain az $\{x \in \mathrm{Dom} f \mid f(x) R b\}$ halmaz elemeit értjük. Ez általánosítása az egyenletnek, ahol R az identitás-reláció.

11.3. Gyakran van dolgunk úgynevezett egyenletrendszerekkel. Ezeket így pontosíthatjuk: adott egy n pozitív egész szám (már megelőlegeztük ezek ismeretét), $f_i : A \rightarrowtail B_i$ függvények és a B_i-nek b_i eleme $(i = 1, \ldots, n)$. Az

$$(x \in A)? \qquad f_i(x) = b_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

egyenletrendszer megoldásain az $\{x \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Dom} f_i \mid f_i(x) = b_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ halmaz elemeit értjük. Pillanatok alatt átláthatjuk, hogy ez nem új fogalom, hiszen az

$f := (f_1, \dots, f_n)$, $B := \displaystyle\operatorname*{\times}_{i=1}^{n} B_i$ és $b := (b_1, \dots, b_n)$ definícóval a $(*)$ alakra hozhatjuk.

Az egyenletrendszer egyenlet, ha a függvényeket összerakjuk, az együttesüket tekintjük. Az egyenlet pedig egyenletrendszer, ha a függvényt szétbontjuk (amikor ez lehetséges) komponensekre. A szétbontás sem egyértelmű a Descartes-szorzat asszociativitása miatt; az előbbi példában az első m komponenst majd a maradék $n - m$ komponenst együvé csoportosítva két egyenletből álló rendszert kapunk.

Ehhez hasonlóan, ha $A = \displaystyle\operatorname*{\times}_{i=1}^{m} A_k$, akkor m ismeretlenes egyenlet(rendszer)ről szokás beszélni. Itt is látjuk, nézőpont kérdése, hány ismeretlenes az egyenlet: szétbontjuk-e komponensekre (és hányra) az ismeretlent vagy sem.

Közszájon forog az a megállapítás, hogy egy egyenletrendszer egyértelmű megoldhatóságához annyi egyenletnek kell lennie, ahány az ismeretlen. Ez így általában nem helytálló, nem is lehet az, hiszen láttuk, rajtunk áll, hány ismeretlenesnek és hány egyenletből állónak tekintünk egy egyenletrendszert. Későbbi tanulmányaink során majd találkozunk egy ennek megfelelő pontos állítással több valós változójú valós értékű függvények rendszerére, most pedig felhívjuk a figyelmet a 11.5.3. feladatra.

11.4. Nem egyszer előfordul, hogy egy egyenlet ismeretlenje maga is függvény. Ezt általában a jelölésben is feltüntetjük, hogy áttekinthetőbb képet kapjunk. Egy példát hozunk erre. Legyenek $\phi : H \rightarrowtail G$ és $b : F \rightarrowtail G$ adott függvéneyk. Az

$$(x : F \rightarrowtail H)? \qquad \phi \circ x = b$$

egyeneletet az előbbiek tudatában nem kell magyaráznunk. Ha viszont mereven ragaszkodnánk a 11.1-ben leírt formához, akkor definiálnuk kellene az $A := \{F \rightarrowtail H \text{ függvények}\}$, $B := \{F \rightarrowtail G \text{ függvények}\}$, $f : A \rightarrowtail B$, $x \mapsto \varphi \circ x$ mennyiségeket, és ezekkel felírhatnánk a 11.1-ben megadott formájú egyenletet; csak éppen nehezen látnánk, mit is takar tulajdonképpen.

11.5. Feladatok

1. Értelmezzük a 11.2-nek megfelelő feladatrendszert!

2. Egyenletnek szokás nevezni a 11.4-hez hasonló, de annál általánosabb $(x : F \rightarrowtail H)?$, $\varphi \circ x \subset b$ feladatot is. Természetesen adott $\phi : F \rightarrowtail H$ és $b : F \rightarrowtail G$ esetén a következő alakú egyenlet is felmerülhet:

$$(x : H \rightarrowtail G)? \qquad x \circ \phi \subset b.$$

Mit tudunk mondani ezek megoldhatóságáról, a megoldás egyértelműségéről?

3. Az egyetlen

$$\big((x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\big)? \qquad (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = 0$$

két ismeretlenes egyenletnek egyértelmű megoldása van.

IV. VALÓS SZÁMOK

12. A természetes számok

12.1. Az első matematikai fogalmak és ismeretek a valós számokra és műveleteikre vonatkoztak. Ahogy az elemi iskolában elindultunk, és jutottunk előre a számolás tudományában, lényegében ugyanúgy haladt előre az emberiség is. Először az azonos dolgok – például almák vagy szarvasmarhák vagy kardok – mennyiségének a megállapításával kialakultak a természetes számok és ezek között az összeadás és a szorzás művelete, valamint a nagyság szerinti rendezésük. Aztán a részekre osztás, darabolás – a zsákmány felezése, a termény tizedelése – eredményezte a pozitív törtszámokat (pozitív racionális számokat). Hosszú évszázadok után az adósság, a hiány megjelenítésére bevezették a negatív racionális számokat. Végül az irracionális számokat már nem is annyira a mindennapi gyakorlati élet, hanem inkább a matematikai vizsgálatokból származó szükségszerűség hívta létre (aztán később persze ezek gyakorlati alkalmazása is mindennapossá vált). A számfogalom ilyen fokozatos bővítésének lényeges része az összeadás, a szorzás és a rendezés kiterjesztése az új és új számokra.

12.2. Nem kell sokat elmélkednünk, hogy rájöjjünk, a nulla a semmit jelképezi, az egy az egy elemű halmazokat, a kettő a két elemű halmazokat, stb. Így kézenfekvő a

$$\begin{aligned} 0 :=& \emptyset, \\ 1 :=& \{\emptyset\}, \\ 2 :=& \{0, 1\} = 1 \cup \{1\}, \\ 3 :=& \{0, 1, 2\} = 2 \cup \{2\} \end{aligned}$$

stb. meghatározás az úgynevezett **természetes számokra**. A definíció jó, a felsorolt halmazok a páraxióma és az egyesítési axióma szerint léteznek. Egyetlen baj van csak, a halmazelméletben tipikus nehézség: bár a számokat ily módon "vég nélkül" gyárthatjuk, akármeddig csináljuk is, mindig csak véges sokat állítunk elő.

Elengedhetetlen tehát, hogy axiómában rögzítsük végtelen sok természetes szám létezését. Ennek pontos megfogalmazásához vezessük be a következő fogalmakat.

Ha x halmaz, legyen

$$x^+ := x \cup \{x\}.$$

Egy M halmazt **monotonnak** hívunk, ha
(i) $0 \in M$,
(ii) minden $x \in M$ esetén $x^+ \in M$.

A **végtelenségi axióma** így szól: *létezik monoton halmaz.*

A természetes számoktól éppen azt várjuk el, hogy monoton halmazt alkossanak. A monoton halmaz létezésének axiómájával még nem rögzítettük a természetes számokat: sok monoton halmaz létezhet, nem csak egy. Viszont van egyetlen “legszűkebb”.

Állítás *Létezik egyetlen olyan monoton halmaz, amely minden monoton halmaznak a része.*

Bizonyítás Legyen M monoton halmaz. Ekkor

$$\mathcal{S} := \{N \subset M \mid N \text{ monoton}\}$$

az elkülönítési axióma szerint halmaz, és $M \in \mathcal{S}$. Legyen

$$\mathbb{N}_0 := \bigcap \{N \mid N \in \mathcal{S}\}.$$

Egyszerű tény, hogy monoton halmazok rendszerének metszete monoton, ezért $\mathbb{N}_0$ is monoton halmaz. Ha M' tetszőleges monoton halmaz, akkor $M \cap M' \in \mathcal{S}$, ezért $\mathbb{N}_0 \subset M \cap M' \subset M'$, azaz $\mathbb{N}_0$ olyan, mint aminek a létezését állítottuk.

Ha volna még egy másik olyan monoton halmaz, amely minden monoton halmaz része, akkor az és $\mathbb{N}_0$ kölcsönösen tartalmaznák egymást, azaz megegyeznének; tehát $\mathbb{N}_0$ az adott tulajdonsággal egyértelmű. ■

Kényelmes $\mathbb{N}_0$-ra úgy gondolni, mint az összes monoton halmazok metszetére, de ez a kép nem teljesen jó, mert nem tudjuk, létezik-e az összes monoton halmazok halmaza (belátható: nem létezik).

Azt az egyetlen monoton halmazt, amely minden monoton halmaznak a része, $\mathbb{N}_0$-t, a **természetes számok** halmazának nevezzük; elemei a **természetes számok**.

A $0 := \emptyset$ (“nulla”), az $1 := 0^+$ (“egy”), a $2 := 1^+$ (“kettő”) stb. tehát természetes számok.

Sok területen a nem-nulla természetes számok játszanak jelentős szerepet, ezért célszerű külön jelölést bevezetni rájuk:

$$\mathbb{N} := \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$$

elemei a **pozitív egész számok**.

Egyelőre még semmiféle művelet (összeadás, szorzás, rendezés) nincs a természetes számokon, de hogy jól lássuk, mit jelent a továbbiakban sokat használt szimbólum, előrevetítjük: ha $n \in \mathbb{N}_0$, akkor n^+ nem más, mint $n+1$.

12.3. A természetes számok halmaza a legszűkebb monoton halmaz, ezért ha M monoton halmaz és $M \subset \mathbb{N}_0$, akkor $M = \mathbb{N}_0$. Ezt szokás a **teljes indukció** elvének is nevezni, és igen hasznosnak bizonyul a természetes számokra vonatkozó állítások igazolásában. Közelebbről: ha $M \subset \mathbb{N}_0$ olyan, hogy

(i) $0 \in M$,

(ii) minden $n \in M$ esetén $n^+ \in M$,

akkor $M = \mathbb{N}_0$.

Ennek sokat használt változata: ha $N \subset \mathbb{N}$ olyan, hogy

(i) $1 \in N$,

(ii) minden $n \in N$ esetén $n^+ \in N$,

akkor $N = \mathbb{N}$. Ugyanis a $\{0\} \cup N$ halmazra az előbbi feltétel teljesül, tehát $\{0\} \cup N = \mathbb{N}_0$, amiből $N = \mathbb{N}$.

12.4. Szokjunk hozzá a természetes számok értelmezéséből eredő kis "furcsaságokhoz", azaz olyan tulajdonságokhoz, amelyeket nem használunk a természetes számok mindennapi alkalmazása közben, azonban elengedhetetlenek a jól ismert és alkalmazott tulajdonságok meghatározása, levezetése végett.

Állítás *Minden n természetes számra*

(i) $n \subset \mathbb{N}_0$ (azaz $\mathbb{N}_0$-nak az elemei egyben részhalmazai is; következésképpen az n természetes szám elemei is természetes számok);

(ii) $m \in n$ pontosan akkor, ha $m \subset n$, $m \neq n$ (azaz n elemei egyben n valódi részhalmazai):

(iii) ha $n \neq 0$, akkor $0 \in n$.

Bizonyítás Mindenekelőtt véssük eszünkbe, hogy

$$m \in m^+ \quad \text{pontosan akkor, ha} \quad m \in n \text{ vagy } m = n.$$

Teljes indukcióval bizonyítunk, vagyis vesszük a természetes számok

(i) $M_1 := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \subset \mathbb{N}_0\}$,

(ii) $M_2 := \{n \in \mathbb{N}_| \text{ ha } m \in n, \text{ akkor } m \subset n, m \neq n\}$,

$M_3 := \{n \in \mathbb{N}_| \text{ ha } m \subset n, m \neq n \text{ akkor } m \in n\}$,

(iii) $M_4 := \{0\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \in n\}$

részhalmazait, és megmutatjuk, hogy monoton halmazok, azaz minden $i = 1, 2, 3, 4$ esetén

– $0 \in M_i$,

– ha $n \in M_i$, akkor $n^+ \in M_i$,

amiből következik, hogy $M_i = \mathbb{N}_0$, vagyis valóban minden n természetes számra igazak a felsorolt kijeletések.

Az hogy $0 := \emptyset$ benne van minden M_i-ben, nyilvánvaló. Maradnak tehát a teljes indukciós bizonyítás második lépései.

(i) Legyen $n \in M_1$, azaz $n \subset \mathbb{N}_0$. Ekkor, lévén $n \in \mathbb{N}_0$, fennáll az $\{n\} \subset \mathbb{N}_0$ tartalmazás, és így $n^+ = n \cup \{n\} \subset \mathbb{N}_0$, tehát $n^+ \in M_1$.

(ii) Legyen $n \in M_2$, azaz minden $m \in m$ esetén $m \subset n$ és $m \neq n$. Vizsgáljuk meg $n^+ = n \cup \{n\}$ elemeit: ha $m \in n^+$, akkor

– $m \in n$ esetén $m \subset n \subset n^+$,

– $m = n$ esetén $m = n \subset n^+$,

azaz $m \subset n^+$, így $n^+ \in M_2$.

Legyen $n \in M_3$, azaz minden $m \subset m$ és $m \neq n$ esetén $m \in n$. Vizsgáljuk meg azokat a természetes számokat, amelyek n^+ valódi részhalmazai: ha $k \subset n^+ = n \cup \{n\}$, $k \neq n^+$, akkor

– $k \subset n$, $k \neq n$ esetén $k \in n \subset n^+$,

– $k = n \subset n^+$ esetén $k = n \in n^+$,

azaz $k \in n^+$, így $n^+ \in M_3$.

(iii) Legyen $n \in M_4$, azaz $n = 0$ vagy $n \neq 0$, $0 \in n$. Ha $n = 0$, akkor $0 \in \{0\} = 0^+ = n^+$, tehát $n^+ \in M_4$. Ha $n \neq 0$, akkor $0 \in n \subset n^+$, tehát ismét $n^+ \in M_4$. ■

Vegyük észre (ii)-nek egy fontos következményét: mivel $n \in n^+$, minden n természetes számra $n \neq n^+$, vagy ami ezzel egyenértékű, $n \notin n$.

Ebből pedig azt származtatjuk, hogy minden n természetes szám valódi részhalmaza $\mathbb{N}_0$-nak, hiszen ha valamely n-re $n = \mathbb{N}_0$ teljesülne, akkor $n \subset n^+ \subset \mathbb{N}_0$ miatt $n^+ = \mathbb{N}_0$ vagyis $n = n^+$ volna, ami lehetetlen.

12.5. Állítás *(i) Minden m és n természetes számra $m^+ = n^+$ pontosan akkor, ha $m = n$,*

(ii) minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik egyetlen olyan $n^- \in \mathbb{N}_0$, hogy $(n^-)^+ = n$.

Bizonyítás (i) Tegyük fel, hogy $m^+ = n^+$. Mivel $m \subset m^+ = n^+ = n \cup \{n\}$, az igaz, hogy $m \subset n$ vagy $m = n$. Ha $m \in n$, $m \neq n$, akkor az előző állítás (ii) pontja értelmében $m \subset n$. Az m és az n szerepét felcserélve azt kapjuk, hogy $n \subset m$ is fennáll, tehát csak $m = n$ lehetséges.

(ii) Vegyük az $N := \{n \in \mathbb{N} \mid \text{ létezik } n^- \in \mathbb{N}_0, (n^-)^+ = n\}$ halmazt. $1 \in N$, mert $1 = 0^+$, és ha $n \in N$, akkor $n^+ \in N$ (hiszen minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $n^+ \in N$), ezért $N = \mathbb{N}$.

n^- egyértelműsége az (i)-ből adódik. ■

Megint szemléltetésként későbbi tudást előrevetítve mondhatjuk, hogy n^- nem más, mint $n - 1$.

Így tekintve az eddigi állítások "nyilvánvalók" (csak éppen ezeknek az állításoknak és még másoknak a birtokában írhatjuk majd fel a fenti egyenlőségeket).

Említsük még meg azt, hogy egy természetes szám elemei természetes számok, amelyek egyben részhalmazai is, azonban általában vannak a természetes számoknak olyan részhalmazai, amelyek nem természetes számok; például $n \neq 0$, $n \neq 1$ esetén $n \setminus \{0\}$ nem terészetes szám.

12.6. Minthogy minden természetes szám az $\mathbb{N}_0$-nak egyben részhalmaza is, bevezethetjük a természetes számok rendezését a résznek lenni fogalmával.

Definíció *Ha $n, m \in \mathbb{N}_0$, akkor*

$$m \leq n \quad \textit{jelentse azt, hogy} \quad m \subset n.$$

Felidézzük, hogy a 12.4. állítás (ii) pontja szerint $m \leq n$ pontosan akkor, ha $m \in n$ vagy $m = n$; tehát $m < n$ pontosan akkor, ha $m \in n$.

12.7. Állítás *Minden m és n természetes számra*

(i) $n < n^+$, és nincs az n és n^+ közé eső természetes szám,
(ii) ha $n < m$, akkor $n^+ < m^+$.

Bizonyítás (i) A definícióból látszik, hogy minden n-re $n < n^+$. Ha $m \in \mathbb{N}_0$ és $n < m < n^+$, akkor $n \in m \in n^+$, $n \neq m \neq n^+$; ezekből $m \in n^+$ és $m \neq n$ miatt $m \in n$ azaz $m < n$ volna, ami lehetetlen, tehát nincs természetes szám n és n^+ között.

(ii) Az előző megállapítás miatt, ha $n < m$, akkor $n^+ \leq m$; ellenkező esetben ugyanis m az n és n^+ közé eső szám volna. Ezért $n^+ \leq m < m^+$. ■

12.8. Állítás *Az $\mathbb{N}$ minden n elemére*

$$n = \{m \in \mathbb{N}_0 \mid 0 \leq m \leq n^-\}. \qquad (*)$$

Bizonyítás Legyen $N := \{n \in \mathbb{N} \mid n \quad (*) \text{ alakú}\}$. Mivel $1 = \{0\}$, az 1 az N eleme. Tegyük fel, hogy $n \in N$. Ekkor $n^+ = n \cup \{n\}$, és $n^- < (n^-)^+ = n$, továbbá nincs az n^- és az n között természetes szám, tehát $n^+ = \{m \in \mathbb{N}_0 \mid 0 \leq m \leq n = (n^+)^-\} \in N$, ezért $N = \mathbb{N}$. ■

A gyakorlati alkalmazásokban a természetes számokat mindig csak az $\mathbb{N}_0$ elemeinek tekintjük és nem részhalmazainak. Az iménti állítás alapján n mint részhalmaz helyett mindig a $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ halmazt vesszük, ahol már figyelembe vettük említett $n - 1 = n^-$ összefüggést is.

12.9. Ha $n \in \mathbb{N}_0$, akkor $n \subset \mathbb{N}_0$, tehát n az $\mathbb{N}_0$ rendezésének a leszűkítésével szintén rendezett halmaz.

0 az $\mathbb{N}_0$-nak és minden n természetes számnak a legkisebb eleme. $\mathbb{N}_0$-nak nincs legnagyobb eleme. Minden nem nulla n-nek van legnagyobb eleme, az n^-.

Még többet is mondhatunk: minden n természetes szám minden nem üres részhalmazának van legkisebb eleme.

Valóban, legyen

$$M := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \text{ minden nemüres rszhalmazának van legkisebb eleme}\}.$$

Világos, hogy $0 \in M$, mert a 0-nak vagyis az üres halmaznak nincs nemüres része (aki tagadni akarja azt, hogy $0 \in M$, adnia kellene a 0-nak olyan nemüres részhalmazát, amelynek nincs legkisebb eleme). Megmutatjuk, hogy ha n az M eleme, akkor n^+ is az.

Legyen $n \in M$. Vegyük az $n^+ = n \cup \{n\}$ nemüres h részhalmazát.

– Ha $\emptyset = h \cap n$, akkor $\{h\} = n$, tehát n a h-nak a legkisebb (mert egyetlen) eleme;

– ha $\emptyset \neq h \cap n$ akkor $h \cap n \subset n \in M$ miatt van $h \cap n$-nek legkisebb eleme; legyen ez m. De m az n-nek is eleme, ezért $m < n$. Minthogy $h \subset (h \cap n) \cup \{n\}$, m a h-nak is a legkisebb eleme.

Mindez azt jelenti, hogy $n^+ \in M$, amit akartunk.

Ez csak bevezető volt ahhoz, hogy a gyakorlatban igen sokszor felhasznált következő tényt bebizonyítsuk.

Állítás $\mathbb{N}_0$ *minden nemüres részhalmazának van legkisebb eleme.*

Bizonyítás Legyen $\emptyset \neq H \subset \mathbb{N}_0$, Van tehát $n \in H$.

– Ha $H \cap n = \emptyset$, akkor a H minden m elemére $n \leq m$ teljesül (mert $m < n$ esetén $m \in n$ volna, ami ellentmond annak, hogy n és H közös része üres), tehát n a H a legkisebb eleme;

– ha $H \cap n \neq \emptyset$, akkor az előzőekben mondottak alapján van $H \cap n$-nek mint az n részhalmazának legkisebb eleme, mondjuk k, és ez egyben a H legkisebb eleme is, hiszen ha volna olyan $m \in H$, amelyre $m < k$ teljesülne, akkor $m \in k$ és $k \subset n$ miatt $m \in n$ is fennállna, azaz m a $H \cap n$-nek a k-nál kisebb eleme volna.

12.10. Állítás $\mathbb{N}_0$ *rendezése láncszerű.*

Bizonyítás . Ha $m, n \in \mathbb{N}_0$, akkor az $\{m, n\}$ halmaznak van legkisebb eleme, azaz $m \leq n$ vagy $n \leq m$. ■

12.11. Elérkeztünk ahhoz, hogy bevezessük az összeadás és a szorzás műveletét a természetes számok körében. Meghatározásunk ez lenne: bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\begin{aligned}
n + 0 &:= n, \\
n + 1 &:= n^+, \\
n + 2 &:= (n+1) + 1 = (n+1)^+, \\
n + 3 &:= (n+2) + 1 = (n+2)^+,
\end{aligned}$$

és így tovább; azaz, mivel $0^+ = 1$, $1^+ = 2$, $2^+ = 3$, stb., ha $m \in \mathbb{N}_0$, akkor

$$n + m^+ := (n + m)^+.$$

Hasonlóan, bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\begin{aligned} n \cdot 0 &:= 0, \\ n \cdot 1 &:= n, \\ n \cdot 2 &:= n + n = n \cdot 1 + n, \\ n \cdot 3 &:= n \cdot 2 + n, \end{aligned}$$

és így tovább, azaz ha $m \in \mathbb{N}_0$, akkor

$$n \cdot m^+ := n \cdot m + n.$$

Felületesen nézve egyszerű a dolog, de ha alaposan utánagondolunk, észrevesszük, hogy van egy kis nehézség. Arról van szó, hogy meg akarjuk adni az összeadást mint egy

$$\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \qquad (n, m) \mapsto n + m$$

leképezést. A hozzárendelési utasítás $(n, 0) \mapsto n$, $(n, m^+) \mapsto (n+m)^+$ volna, de ez így nem értelmes, mert a hozzárendelési utasítás leírásában felhasználjuk magát a hozzárendelést is. Ugyanez a gond az

$$\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \qquad (n, m) \mapsto n \cdot m$$

szorzással is.

Így jutunk el az úgynevezett **rekurzív** módon megadott függvények fogalmához, amikor attól függően rendelünk hozzá m-hez valamit, hogy mit rendeltünk $(m - 1)$-hez. Találkozunk például alkalmazásokaban efféle meghatározásokkal: legyen $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ az a leképezés ("sorozat"), amelyre

$$a_0 := 1, \qquad a_m := \frac{m(m+1)}{2} a_{m-1} \quad (m \in \mathbb{N})$$

(természetesen már az összeadás és a szorzás ismeretében). Ennél ugyanaz a baj, mint az összeadás és a szorzás értelmezésénél: a hozzárendelési utasításban szerepel maga a hozzárendelés is. Viszont úgy látszik, a függvény mégiscsak jól van definiálva, hiszen az értékei sorban mind megadhatók: $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, stb.

A következőkben az ilyen rekurzív módon megadott függvények pontos értelmezésével foglalkozunk.

Állítás *Legyen B nemüres halmaz és minden $m \in \mathbb{N}_0$ esetén $r_m : B \to B$ függvény. Ekkor a B minden e elemére létezik egyetlen olyan*

$$f : \mathbb{N}_0 \to B$$

függvény, amelyre

$$f(0) = e, \qquad f(m^+) = r_m(f(m)) \quad (m \in \mathbb{N}_0).$$

Bizonyítás Legyen N azoknak az $n \in \mathbb{N}$ számoknak az összessége, amelyekre létezik olyan

$$f_n : \{0, 1, \ldots, n-1\} \to B$$

függvény, amelyre

$$f_n(0) = e, \qquad f_n(m^+) = r_m(f_n(m)) \quad (0 \le m \le n-1).$$

Világos, hogy $1 \in N$: van a csak a $\{0\}$-n értelmezett f_1 függvény, amelyre $f_1(0) = e$. Ha $n \in N$, akkor definiálhatjuk az

$$f_{n^+} : \{0, 1, \ldots, n\} \to B, \qquad k \mapsto \begin{cases} f_n(k) & \text{ha } 0 \le k \le n-1, \\ r_{n-1}(f_n(n-1)) & \text{ha } k = n \end{cases}$$

függvényt, amiből látjuk, hogy $n^+ \in N$, tehát $N = \mathbb{N}$, azaz minden n esetén létezik a kívánt tulajdonságú f_n. Innen már könnyű folytatni: ezek a függvények összeilleszthetők, és $f := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} f_n$ a keresett függvény. Ennek az egyértelműségét úgy láthatjuk be – az olvasóra bízzuk a részleteket –, hogy feltesszük, van egy másik g függvény is, és teljes indukcióval megmutatjuk, hogy $\{n \in \mathbb{N}_0 \mid f(n) = g(n)\} = \mathbb{N}_0$. ■

A bevezető példánál $r_m : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $n \mapsto \frac{m(m+1)}{2} n$. Előfordulhat természetesen, hogy r_m minden m esetén ugyanaz az r. Írjuk ki f_e néhány értékét ekkor, hogy szemléletessé tegyük, miről van szó:

$$\begin{aligned} f(0) &= e, \\ f(1) &= r(e), \\ f(2) &= r(r(e)), \\ f(3) &= r(r(r(e))). \end{aligned}$$

Tehát e-ből kiindulva és sorra lépegetve képezzük az e-nek az r általi egyszeres, kétszeres, háromszoros stb. képét, és ezeket rendeljük hozzá egyhez, kettőhöz, háromhoz, stb.

Végezetül felhívjuk a figyelmet arra, hogy az állításban megadott f függ az $(r_m \mid m \in \mathbb{N}_0)$ úgynevezett **rekurziós** függvénycsaládtól és az e **indulási** elemtől. Tehát például adott rekurziós függvénycsalád esetén különböző e-kből indulva különböző f-eket kapunk, vagy különböző rekurziós függvénycsaládok esetén ugyanabból az e-ből indulva különböző f-eket kapunk.

12.12. Az összeadást és a szorzást az előző eredményünk alapján úgy értelmezzük, hogy $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ függvények helyett azokat az $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ függvényeket definiáljuk, amelyeket úgy kapunk, hogy az egyik változót az összes lehetséges módon rögzítjük: minden adott $n \in \mathbb{N}_0$ esetén értelmezzük az $m \to n + m$ és az $m \to n \cdot m$ fügvényeket.

Az előző pontbeli r_m szerepére minden m-re az $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $k \mapsto k^+$ függvényt véve megállapíthatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén van egyetlen olyan

$$s_n : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$$

függvény (itt indexben jelöltük, hogy az n indulási elemtől függően más és más függvényt kapunk), amelyre

$$s_n(0) = n, \qquad s_n(m^+) = (s_n(m))^+ \quad (m \in \mathbb{N}_0).$$

Értelmezzük ezután az **összeadást** így:

$$\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \qquad (n, m) \mapsto n + m := s_n(m).$$

Tehát definíció szerint

$$n + 0 = n, \qquad n + m^+ = (n + m)^+.$$

Tetszőlegesen rögzített $n \in \mathbb{N}_0$ esetén az előző pontbeli r_m szerepére minden m-re az $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $k \mapsto k + n$ függvényt, az e szerepére pedig 0-t véve megállapíthatjuk, hogy van egyetlen olyan

$$p_n : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$$

függvény (itt indexben jelöltük, hogy az n-nel jellemzett rekurziós függvénytől függően más és más függvényt kapunk), amelyre

$$p_n(0) = 0, \qquad p_n(m^+) = n + p_n(m) \quad (m \in \mathbb{N}_0).$$

Értelmezzük ezután a **szorzást** így:

$$\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \qquad (n, m) \mapsto n \cdot m := p_n(m).$$

Tehát definíció szerint

$$n \cdot 0 = n, \qquad n \cdot m^+ = n \cdot m + n.$$

12.13. Az összeadás és a szorzás értelmezéséből szinte azonnal adódik – ne feledjük, $1 = 0^+$ –, hogy

$$\text{(i) } 0 + n = n + 0 = n, \qquad \text{(ii) } 1 + n = n + 1 = n^+,$$

$$\text{(iii) } 0 \cdot n = n \cdot 0 = 0, \qquad \text{(iv) } 1 \cdot n = n \cdot 1 = n.$$

Ugyanis a következőket mondhatjuk.

(i) $n+0 = n$ a definíció szerint, továbbá az $M := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid 0+n = n\}$ halmazra nyilván $0 \in M$, és ha $n \in M$, akkor $0 + n^+ = (0 + n)^+ = n^+$, így $n^+ \in M$, tehát $M = \mathbb{N}_0$.

(ii) $n+1 = n+0^+ = (n+0)^+ = n^+$, továbbá az $M := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid 1+n = n+1\}$ halmazra nyilván $0 \in M$, és ha $n \in M$, akkor $1 + n^+ = (1 + n)^+ = (n + 1)^+ = (n^+)^+ = n^+ + 1$, így $n^+ \in M$, tehát $M = \mathbb{N}_0$.

(iii) $n \cdot 0 = 0$ a definíció szerint, továbbá az $M := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid 0 \cdot n = 0\}$ halmazra nyilván $0 \in M$, és ha $n \in M$, akkor $0 \cdot n^+ = 0 \cdot n + 0 = 0 + 0 = 0$, így $n^+ \in M$, tehát $M = \mathbb{N}_0$.

(iv) $n \cdot 1 = n \cdot 0^+ = n \cdot 0 + n = n$, továbbá az $M := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid 1 \cdot n = n\}$ halmazra nyilván $0 \in M$, és ha $n \in M$, akkor $1 \cdot n^+ = 1 \cdot n + 1 = n + 1 = n^+$, így $n^+ \in M$, tehát $M = \mathbb{N}_0$.

12.14. Most az előzőekhez hazonló igazán egyszerű teljes indukciós bizonyítással, az előző eredményeket is felhasználva, sorban beláthatjuk az összeadásnak és a szorzásnak az alább összefoglalt alapvető tulajdonságait.

Állítás *Minden k, m és n természetes számra*

(i) $(k + m) + n = k + (m + n)$, *(ii)* $m + n = n + m$,
(iii) $k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n$ *és* $(k + m) \cdot n = k \cdot n + m \cdot n$,
(iv) $(k \cdot m) \cdot n = k \cdot (m \cdot n)$, *(v)* $m \cdot n = n \cdot m$.

Bizonyítás Felírjuk azokat a halmazokat, amelyekre a teljes indukciót alkalmazni kell; a részleteket az olvasóra bízzuk.

(i) Rögzített $k, m \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\{n \in \mathbb{N}_0 \mid (k + m) + n = k + (m + n)\}.$$

(ii) Rögzített $m \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\{n \in \mathbb{N}_0 \mid m + n = n + m\}.$$

(iii) Rögzített $k, m \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\{n \in \mathbb{N}_0 \mid k \cdot (m+n) = k \cdot m + k \cdot n\},$$

$$\{n \in \mathbb{N}_0 \mid (k+m) \cdot n = k \cdot n + m \cdot n)\}.$$

(iv) Rögzített $k, m \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\{n \in \mathbb{N}_0 \mid (k \cdot m) \cdot n = k \cdot (m \cdot n)\}.$$

(v) Rögzített $m \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\{n \in \mathbb{N}_0 \mid m \cdot n = n \cdot m\}.$$

12.15. Az összeadásnak és a szorzásnak a rendezéssel való kapcsolatát a következőképpen jellemezhetjük.

Állítás *Minden k, m és n természetes számra, ha $k < m$, akkor*

(i) $k + n < m + n$,

(ii) $n \neq 0$ esetén $k \cdot n < m \cdot n$.

Bizonyítás (i) Rögzített $k, m \in \mathbb{N}_0$, $k < m$ esetén legyen $M := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid k+n < m+n\}$. Nyilván $0 \in M$, és ha $n \in M$, akkor 12.7. miatt $k + n^+ = (k+n)^+ < (m+n)^+ = m + n^+$, azaz $n^+ \in M$, így $M = \mathbb{N}_0$.

(ii) Rögzített $k, m \in \mathbb{N}_0$, $k < m$ esetén legyen $M := \{n \in \mathbb{N} \mid k \cdot n < m \cdot n\}$. Nyilván $1 \in M$, és ha $n \in M$, akkor $k \cdot n^+ = k \cdot n + k < m \cdot n + k < m \cdot n + m = m \cdot n^+$, azaz $n^+ \in M$, így $M = \mathbb{N}$. ■

E tulajdonságok és a rendezés láncszerűsége következtében, ha $k + n = m + n$, akkor $k = m$, és ha $n \neq 0$, $k \cdot n = m \cdot n$, akkor $k = m$. Továbbá, ha $m + n = 0$, akkor $m = 0$ és $n = 0$; ha $m \cdot n = 0$, akkor $m = 0$ vagy $n = 0$.

12.16. Ettől kezdve – vagyis a műveleti tulajdonságok ismeretében – az középiskolában tanult összes elemi számismereti tény egyszerűen bizonyítható a "szokásos" módon.

12.17. Feladatok

1. Végezzük el a 12.15-ben kijelölt teljes indukciós bizonyításokat.

2. Mutassuk meg, hogy minden $n \neq 0$ természetes számra $n - 1 < n$, és ha $m < n$, akkor $m \leq n - 1$.

3. Bizonyítsuk be közvetlenül – nem hivatkozva a 12.4. (ii) pontjára –, hogy $n \notin n$ minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén.

4. Igazoljuk, hogy minden természetes számnak (mint az $\mathbb{N}_0$ részhalmazának) bármely részhalmazában van legnagyobb elem. Következésképpen, ha H az $\mathbb{N}_0$ korlátos részhalmaza, azaz van olyan $k \in \mathbb{N}_0$, hogy $m \leq k$ minden $m \in H$ esetén (más szóval $H \subset k$), akkor van a H-nak legnagyobb eleme.

5. A teljes indukciót olykor 2-től, 3-tól stb. általában egy rögzített $n_0 \in \mathbb{N}$ elemtől célszerű indítani; azaz ha $N \subset \mathbb{N}_0$ olyan, hogy

(i) $n_0 \in N$, (ii) minden $n \in N$ esetén $n^+ \in N$,

akkor $N \supset \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n_0 \leq n\}$. Bizonyítsuk ezt be! (Tegyük fel, hogy $\{n \in \mathbb{N}_0 \mid n_0 \leq n\} \setminus N = \emptyset$, és vegyük ennek a legkisebb elemét, legyen mondjuk k; $n_0 < k$, mert $k \neq n_0$, hiszen $k \notin N$. Lássuk be, hogy $k-1$ is a szóban forgó halmaz eleme, ami ellentmondás.)

6. Igazoljuk, hogy ha $m \leq n$, akkor van egyetlen olyan, $(n-m)$-mel jelölt természetes szám, hogy $m + (n-m) = n$. (Alkalmazzunk m-től indított teljes indukciót.)

13. A valós számok megalkotása

13.1. Az előző fejezetben megismerkedtünk a természetes számokkal és műveleteikkel. Most hozzáláthatunk, hogy vázoljuk, hogyan építhető fel a valós számok halmaza matematikailag korrekt módon, a halmazelmélet alapján. Követhetnénk az előző fejezet elején említett utat, ahogyan az emberiség eljutott a valós számokhoz, azonban az egyszerűbb fogalmazás érdekében megváltoztatjuk a sorrendet így: természetes számok, pozitív racionális számok, pozitív valós számok, valós számok.

13.2. A részekre osztással jutunk el a pozitív törtszámokhoz, amelyeket $\frac{m}{n}$ alakba írunk, ahol m és n pozitív egész számok. Előfordulhat, hogy különböző m' és n' ugyanazt a törtet adja, mint m és n, méghozzá pontosan akkor, ha $mn' = nm'$. Ezek alapján a pontos eljárás a törtszámok értelmezésére a következő.

Könnyű bebizonyítani, hogy $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-en ekvivalencia-relációt határozunk meg így:

$$(m, n) \sim (m', n') \quad \text{pontosan akkor, ha} \quad mn' = nm'.$$

A reláció nyilvánvalóan reflexív és szimmetrikus. Tegyük fel, hogy $(m, n) \sim (m', n') \sim (m'', n'')$. Ekkor $mn' = nm'$ és $m'n'' = n'm''$. Szorozzuk meg az első egyenlőséget n''-vel, használjuk fel a második egyenlőséget, hogy erre jussunk: $mn'n'' = nn'm''$. Ez a szorzás tulajdonságai miatt csak úgy lehet, hogy $mn'' = nm''$, azaz $(m, n) \sim (m'', n'')$, vagyis a reláció tranzitív.

Definiáljuk ezután a **pozitív racionális** számok halmazát:

$$\mathbb{Q}^+ := \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim,$$

és legyen

$$\frac{m}{n} := (m, n)/\sim.$$

A pozitív racionális számok tehát halmazok, közelebbről ekvivalencia-osztályok. Reméljük, ez már senkit sem zavar, hiszen a természetes számokat is halmazoknak definiáltuk.

Az összeadás, a szorzás és a rendezés az

$$\frac{m}{n}+\frac{i}{k}:=\frac{mk+im}{nk},$$

$$\frac{m}{n}\frac{i}{k}:=\frac{mi}{nk},$$

$$\frac{m}{n}\le\frac{i}{k}\quad\text{pontosan akkor, ha}\quad mk\le ni$$

formulákkal értelmezhető $\mathbb{Q}^+$-on. Nem nehéz megmutatni, hogy a definíciók jók, azaz ha $\frac{m'}{n'}=\frac{m}{n}$ és $\frac{i'}{k'}=\frac{i}{k}$, akkor $\frac{m'k'+i'm'}{n'k'}=\frac{mk+im}{nk}$, stb. Ugyancsak egyszerűen igazolhatók, hogy az összeadás, a szorzás és a rendezés $\mathbb{Q}^+$-on is rendelkezik az ismert tulajdonságokkal, amelyek közül a legfontosabbak azok, amelyeket a 12.15. és 12.16. ír le, és az, hogy a rendezés láncszerű.

A pozitív egész számok, a $\mathbb{Q}^+$ definíciója szerint, nincsenek a pozitív racionális számok között. Azonban $\mathbb{N}$ beágyazható $\mathbb{Q}^+$-ba, azaz megtehetjük, és meg is tesszük a következő azonosítást:

$$\mathbb{N}\Rrightarrow\mathbb{Q}^+,\qquad n\equiv\frac{n}{1}.$$

Ez a beágyazás művelettartó, azaz

$$m+n=\frac{m}{1}+\frac{n}{1},\qquad mn=\frac{m}{1}\frac{n}{1},$$

$$m\le n\quad\text{pontosan akkor, ha}\quad\frac{m}{1}\le\frac{n}{1}.$$

Mivel ez már rég megszokott azonosítás, azt írjuk, hogy $\mathbb{N}\subset\mathbb{Q}^+$, $n=\frac{n}{1}$.

13.3. Tudjuk, nincs olyan racionális szám, amelynek a négyzete 2. Ugyanis $2=\left(\frac{m}{n}\right)^2$ azaz $2n^2=m^2$ a pozitív egész számok primtényezős felbontásának ismeretében lehetetlen. Ugyanakkor az egységnyi oldalhosszúságú négyzet átlója hosszának a mérőszáma olyan kell legyen, hogy a négyzete 2. Ezért "léteznie kell" $\sqrt{2}$-nek, vagyis egy olyan számnak, amelyre $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$. Az 1,4 racionális szám megközelíti $\sqrt{2}$-t, a négyzete alig kisebb 2-nél. 1,41 még jobb közelítés, 1,414 még annál is jobb. Megadhatunk a bevezetendő számnál kisebb racionális számokat úgy, hogy minél nagyobb egy ilyen racionális szám, annál kevésbé különbözik tulajdonságaiban a (még nem létező) keresett szám előírt tulajdonságaitól. Nem nagyon merész elgondolás tehát $\sqrt{2}$-t épp azzal jellemezni, melyek azok a pozitív racionális számok, amelyek négyzete kisebb 2-nél; pontosabban értelmezzük így: $\sqrt{2}:=\{r\in\mathbb{Q}^+\mid r^2<2\}$.

E példa alapján tegyük a következőket. Emlékezzünk arra, hogy $\mathbb{Q}^+$-on adott egy rendezés, így értelmes a korlátos halmaz fogalma. Nevezzük a $\mathbb{Q}^+$ egy x részhalmazát **szeletnek**, ha

(i) x korlátos,

(ii) minden $r \in x$ esetén ha $p < r$, akkor $p \in x$.

Legyenek ezután a **pozitív valós** számok ezek a szeletek; halmazukat jelölje $\mathbb{R}^+$.

Vezessük be az összeadást, a szorzást és a rendezést $\mathbb{R}^+$-on az

$$x + y := \{r + s \mid r \in x, s \in y\},$$

$$xy := \{rs \mid r \in x, s \in y\},$$

$$x \le y \quad \text{pontosan akkor, ha} \quad x \subset y$$

formulákkal. Igen egyszerű tény, hogy a definíciók jók, azaz $x + y$ és xy is szelet. Igazolhatók továbbá, hogy az összeadás, a szorzás és a rendezés $\mathbb{R}^+$-on is rendelkezik az ismert tulajdonságokkal.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy $\mathbb{R}^+$-on a rendezés olyan, hogy minden felülről korlátos nemüres részhalmaznak van felső határa. Valóban, ha $\emptyset \ne H \subset \mathbb{R}^+$, felülről korlátos, akkor H elemeinek mint szeleteknek az egyesítése is szelet, és a legkisebb, amelyik minden H-belinél nagyobb; azaz $\bigcup\{x \mid x \in H\}$ a H felső határa.

A pozitív racionális számok, $\mathbb{R}^+$ definíciója szerint, nincsenek a pozitív valós számok között. Azonban $\mathbb{Q}^+$ beágyazható $\mathbb{R}^+$-ba műveletttartó módon: megtehetjük, és meg is tesszük a

$$\mathbb{Q}^+ \Rrightarrow \mathbb{R}^+, \qquad r \equiv \{p \in \mathbb{Q}^+ \mid p \le r\}$$

azonosítást. Mivel ez már rég megszokott dolog, a következőkben egyszerű tartalmazást írunk.

$\mathbb{R}_0^+ := \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ elemeit **nemnegatív valós** számoknak nevezzük. Kiterjesztjük rájuk a műveleteket a $0 + x := x + 0 := x$, $0x := x0 := 0$, $0 \le x$ formulákkal, ahol x tetszőleges nemnegatív valós szám.

13.4. A hiány, az adósság fogalmával juthatunk el a negatív számokhoz, amelyek $x - y$ alakba írhatók, ahol x és y pozitív valós számok. Előfordulhat, hogy különböző x' és y' ugyanazt a negatív számot adja így, mint x és y, méghozzá pontosan akkor, ha $x + y' = y + x'$. Ezek alapján a pontos eljárás a negatív számok értelmezésére a következő.

Könnyű bebizonyítani, hogy $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$-on ekvivalencia-relációt határozunk meg így:

$$(x, y) \sim (x', y') \quad \text{pontosan akkor, ha} \quad x + y' = y + x'.$$

Definiáljuk ezzel a **valós** számok halmazát:

$$\mathbb{R} := \left(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+\right)/\!\sim,$$

és legyen
$$x - y := (x, y)/\sim.$$

Vezessük be a műveleteket $\mathbb{R}$-en az

$$(x - y) + (u - v) := (x + u) - (y - v),$$

$$(x - y)(u - v) := (xu + yv) - (xv + yu),$$

$$x - y \leq u - v \quad \text{pontosan akkor, ha} \quad x + v \leq u + y$$

formulákkal. Nem nehéz megmutatni, hogy a definíciók jók, azaz ha $x' - y' = x - y$ és $u' - v' = u - v$, akkor $(x' + u') - (y' + v') = (x + u) - (y + v)$ stb. Levezethetők továbbá a műveletek ismert tulajdonságai az $\mathbb{R}_0^+$-beli műveletek tulajdonságaiból.

A nemnegatív valós számok, $\mathbb{R}$ definíciója szerint, nincsenek a számok között. Azonban $\mathbb{R}_0^+$ beágyazható $\mathbb{R}$-be művelettartó módon az

$$\mathbb{R}_0^+ \Rrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \equiv x - 0$$

azonosítással. Természetesen ez is annyira megszokott már, hogy a továbbiakban egyszerű tartalmazást írunk.

13.5. A számfogalom bővítésének három lépése egy-egy művelet tulajdonságainak bizonyos javítását szolgálta. A szorzás "fordítottjának", az osztásnak a bővebb lehetőségét teremtették meg a pozitív racionális számok. A rendezés úgynevezett teljességét (felső határ létezése) eredményezték a pozitív valós számok. Az összeadás "fordítottja", a kivonás vezetett el a negatív számokhoz.

Vázoltuk csupán a valós számok értelmezését, de ennek alapján bárki pontosan is végigjárhatja az utat minden nehézség nélkül. Nem részleteztük a valós számok műveleti tulajdonságait, csak utaltunk arra, hogy a természetes számok műveleti tulajdonságaiból származtathatók. A következő fejezetben felsoroljuk és bizonyítás nélkül igaznak fogadjuk el ezeket a tulajdonságokat.

13.6. Feladatok

1. Alkossuk meg a valós számokat a természetes számokból kiindulva úgy, hogy először az egész számokat vezetjük be, aztán a racionális számokat, végül a valós számokat.

2. Az út így is végigjárható: természetes számok, pozitív racionális számok, racionális számok, valós számok.

3. Legyen S rendezett halmaz. Nevezzük az S egy x részhalmazát szeletnek, ha x felülről korlátos, és ha $r \in x$, akkor minden $p < r$ esetén $p \in x$. Legyen Z a szeletek halmaza a résznek lenni rendezéssel ellátva. Igaz-e, hogy $S \to Z$, $r \mapsto \{p \in S \mid p \leq r\}$ rendezéstartó injekció? Igaz-e, hogy ha H a Z felülről korlátos nemüres részhalmaza, akkor $\bigcup\{x \mid x \in H\}$ a H felső határa?

14. A valós számok alaptulajdonságai

14.1. Elfogadjuk, hogy létezik a valós számok $\mathbb{R}$ halmaza, amelyet a következő tulajdonságok jellemeznek.

A. Összeadás

Adott egy $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$ leképezés, amelyre az teljesül, hogy

A1) minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $x + y = y + x$ (az összeadás *kommutatív*),

A2) minden $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén $(x+y)+z = x+(y+z)$ (az összeadás *asszociatív*),

A3) létezik egy nullának nevezett $0 \in \mathbb{R}$, amelyre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $0+x = x$ (*nulla-elem* létezése),

A4) minden $x \in \mathbb{R}$ esetén létezik egy $-x$ szimbólummal jelölt valós szám, amelyre $x + (-x) = 0$ (*additív inverz* létezése);

M. Szorzás

Adott egy $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$ leképezés, amelyre az teljesül, hogy

M1) minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $xy = yx$ (a szorzás *kommutatív*),

M2) minden $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén $(xy)z = x(yz)$ (a szorzás *asszociatív*),

M3) létezik egy egynek nevezett $0 \neq 1 \in \mathbb{R}$, amelyre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $1x = x$ (*egység-elem* létezése),

M4) minden $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén létezik egy $\frac{1}{x}$ szimbólummal jelölt valós szám, amelyre $x\frac{1}{x} = 1$ (*multiplikatív inverz* létezése).

AM) Minden x, y és z valós számra $x(y + z) = xy + xz$ (az összeadás és a szorzás *disztributivitása*).

O. Rendezés

Adott egy $\leq$ láncszerű rendezés $\mathbb{R}$-en (bár tudjuk már, ez mit jelent, az összhang kedvéért felsoroljuk ennek a tulajdonságait is), amely teljes az alább ismertetett értelemben; tehát minden x, y és z valós számra

O1) $x \leq x$ (*reflexivitás*),

O2) ha $x \leq y$ és $y \leq x$, akkor $x = y$ (*antiszimmetrikusság*),

O3) ha $x \leq y$ és $y \leq z$, akkor $x \leq z$ (*tranzitivitás*),

O4) $x \leq y$ vagy $y \leq x$ (*láncszerűség*),

O5) minden felülről korlátos nemüres részhalmaznak van felső határa (*teljesség*).

OA) Minden x, y és z valós számra, ha $x < y$, akkor $z+x < z+y$ (az összeadás *monotonitása*).

OM) Minden x, y és z valós számra, ha $x < y$ és $0 < z$, akkor $zx < zy$ (a szorzás *monotonitása*).

Bebizonyítható, hogy az **A**, **M**, **AM**, **O**, **OA** és **OM** alatt felsorolt tulajdonságok egyértelműen jellemzik a valós számokat. Ez azt jelenti, hogy ha adott egy X halmaz, azon összeadás, szorzás és rendezés a felsorolt tulajdonságokkal, akkor létezik egyetlen $b : \mathbb{R} \to X$ bijekció, amely művelettartó, azaz minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $b(x + y) = b(x) + b(y)$, $b(xy) = b(x)b(y)$, és $b(x) \leq b(y)$ pontosan akkor, ha $x \leq y$.

Figyeljük meg azt a sémát, amellyel a műveletek tulajdonságait felsoroltuk; sokszor találkozunk majd ilyennel a későbbiekben. Az első művelet, amelyet bevezettünk, az összeadás volt; felsoroltuk a meghatározó tulajdonságait (A1-A4). Ezután következett a szorzás, ennek is felsoroltuk a meghatározó tulajdonságait (M1-M4), majd ezt követte az eddig megismert két művelet egymáshoz kapcsolódó tulajdonsága (AM). Következett a rendezés, ennek saját tulajdonságai (O1-O5) után a már meglevő műveletekhez való viszonya (OA és OM). Tehát egy új művelet (leképezés, reláció) beveztésekor először tisztáznunk kell e művelet saját tulajdonságait, majd a már adott műveletekkel kapcsolt tulajdonságait.

Az összeadás és a szorzás **A**, **M** és **AM** alatt rögzített tulajdonságait testaxiómáknak is szokás hívni, bár az axióma elnevezés nem a legszerencsésebb; jobb azt mondani, hogy egy halmazt, amelyen adott a leírt tulajdonságú összeadás és szorzás, **testnek** nevezünk. Testet alkotnak például a racionális számok is; sőt, a racionális számok rendelkeznek a valós számokat meghatározó összes tulajdonsággal, kivéve a rendezés teljességét.

14.2. Az előző fejezetben a természetes számokból építettük fel a valós számokat (vázlatosan). Most a valós számok létezést és tulajdonságait axiómaként (bizonyítás nélkül igaznak) fogadjuk el, és egyelőre semmi kapcsolata sincs a természetes számokkal.

Könnyű meggyőződni arról, hogy $0 < 1$. Ugyanis $0 \neq 1$ és $1 < 0$ nem lehet, mert akkor AM és A4 szerint $0 < -1$ volna, és e kettőből OM miatt $0 < 0$ teljesülne.

Ezért az OA tulajdonság szerint $1 < 1 + 1 =: 2$, $2 < 2 + 1 =: 3$, stb. Így sorba lépegetve a nullától egyesével megkapjuk a természetes számokat, mint a valós számok részhalmazát. Pontosabban, ismerve $\mathbb{N}_0$-nak mint a legszűkebb monoton halmaznak a tulajdonságait, a 12.12. szerint az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1$ leképezéshez van egyetlen olyan $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $f(0) = 0$ és $f(n^+) = n + 1$. Nyilvánvaló, hogy f művelettartó injekció, és ezzel beágyazzuk $\mathbb{N}_0$-t az $\mathbb{R}$-be, vagyis $\mathbb{N}_0$-t az $\mathbb{R}$ részhalmazának tekintjük.

14.3. A valós számok műveleteinek alaptulajdonságaiból egy sor egyéb tulajdonság származtatható. Ilyenek például: ha $x \leq y$, akkor $-y \leq -x$. Ezeket nem részletezzük, az eddigi tanulmányokból ismertnek vesszük. Az érdeklődő olvasó a feladatok között talál egy párat, amely arra szólít fel, hogy vezessünk le néhány jól ismert formulát.

Rögzített $y \in \mathbb{R}$ esetén az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + y$ leképezés bijekció. Injekció, mert ha $x + y = z + y$, akkor A4, A2 és A3 szerint $x + y + (-y) = z + y + (-y)$, azaz $z = x$. Szürjekció, mert ha $z \in \mathbb{R}$, akkor $\big(z + (-y)\big) + y = z$. Ennek a leképezésnek az inverzét nevezzük y **kivonásának**, és így jelöljük: $x \mapsto x - y$. A **kivonás** pedig az $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x - y$ leképezés.

Hasonlóképpen, rögzített $0 \neq y \in \mathbb{R}$ esetén az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto xy$ leképezés bijekció, amelynek ez inverzét y-nal való **osztásnak** nevezzük, és így jelöljük: $x \mapsto \dfrac{x}{y}$. Az **osztás** pedig az $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \dfrac{x}{y}$ leképezés.

A szorzásból származtatjuk a **hatványozást** is. A kivonás, osztás és hatványozás tulajdonságait ("azonosságait"), amelyek a fentiekből egyszerűen levezethetők, a rájuk vonatkozó jelölési megállapodásainkat nem részletezzük, az eddig tanulmányokból ismertnek vesszük.

A gyökvonásról kell még beszélnünk. Megállapítjuk a későbbiekben, hogy adott $n \in \mathbb{N}$ esetén

– ha n páratlan, akkor $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ bijekció,

– ha n páros, akkor $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto x^n$ bijekció,

ahol $\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\}$. Ezeknek a függvényeknek az inverze az n-ik **gyökvonás**:

$$\sqrt[n]{} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

A gyökvonás tulajdonságait is ismertnek tételezzük fel.

14.4. Sokszor jó hasznát vesszük annak, hogy bevezetjük a **komplexus-műveleteket**, azaz a valós számok részhalmazainak összegét, szorzatát stb.

Definíció *Legyen A és B az $\mathbb{R}$ részhalmaza. Ekkor*

(i) $A + B := \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$,

(ii) $A - B := \{x - y \mid x \in A, y \in B\}$,

(iii) $AB := \{xy \mid x \in A, y \in B\}$,

(iv) ha $0 \notin B$, *akkor* $\frac{A}{B} := \left\{\frac{x}{y} \mid x \in A, y \in B\right\}$.

Ha $x \in \mathbb{R}$, *akkor* $x + A := \{x\} + A$, $xA := \{x\}A$, *stb. Speciálisan* $-A := (-1)A = 0 - A$.

Vegyük észre, hogy $A + B$ nem más, mint az $A \times B$ részhalmaznak a képe az $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ összeadás által. Hasonlót mondhatunk a többi most értelmezett halmazról is.

14.5. Az előbbi jelölések segítségével kényelmesen bevezethetjük az egész számokat és a racionális számokat (ne feledjük, az itteni tárgyalásunkban még csak $\mathbb{R}$ és $\mathbb{N}_0$ illetve $\mathbb{N} := \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$ ismert):

$\mathbb{Z} := (-\mathbb{N}) \cup \mathbb{N}_0$ az egész számok halmaza,

$\mathbb{Q} := \dfrac{\mathbb{Z}}{\mathbb{N}}$ a racionális számok halmaza.

További, gyakran használt részhalmazok:

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ az irracionális számok halmaza,

$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\}$ a pozitív valós számok halmaza,

$\mathbb{R}_0^+ := \{0\} \cup \mathbb{R}^+$ a nemnegatív valós számok halmaza,

$\mathbb{R}^- := -\mathbb{R}^+$ a negatív valós számok halmaza.

14.6. Már eddig is felmerült egyszer-kétszer, hogy egy halmaznak véges vagy végtelen sok eleme van-e. Később a számosságokról szóló fejezetben erről bővebben beszélünk; most csak annyit említünk meg, hogy a természetes számok adnak nekünk természetes lehetőséget a pontos definícióra. (Emlékezzünk a természetes számoknak az előbbi fejezetben ismertetett konstrukciójára.)

Egy H halmazt n eleműnek mondunk, ha $n \in \mathbb{N}$ és létezik $\{0, 1, \ldots, n-1\} \to H$ bijekció. A H halmaz véges, ha üres vagy n elemű valamilyen $n \in \mathbb{N}$ esetén. Végtelen egy halmaz, ha nem véges.

Az hogy egy véges halmaz hány elemű, egyértelműen meg van határozva; nem lehet n elemű is, m elemű is, ha $n \neq m$. Ez abból következik, hogy ha $n \neq m$, akkor nincs $\{0, 1, \ldots, n-1\} \to \{0, 1, \ldots, m-1\}$ bijekció. Ha A m elemű és B n elemű, továbbá $A \cap B = \emptyset$, akkor $A \cup B$ $m+n$ elemű. Véges halmaz minden részhalmaza szintén véges. Mindezeket később bebizonyítjuk.

14.7. Eddigi tanulmányainkhoz képest érdekes újdonságnak számítanak a teljességgel kapcsolatos ismeretek. Ezekből foglalunk össze néhányat.

Elevenítsük fel az idevágó fogalmakat. Az $A \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos, ha van olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy $x \leq k$ minden $x \in A$ esetén. Az A legkisebb felső korlátja vagy felső határa vagy **szuprémuma** olyan h felső korlát, amelyre $h \leq k$ teljesül az A minden k felső korlátjára. Alulról korlátos halmaz alsó határát vagy **infimumát** hasonlóképp értelmezzük.

Ha A felülről korlátos halmaz, a felső határát a $\sup A$ szimbólummal jelöljük; ha alulról korlátos, alsó határát az $\inf A$ szimbólummal.

Az O5 teljességi tulajdonság azt mondja, hogy $\mathbb{R}$-ben minden felülről korlátos, nemüres részhalmaznak van felső határa (az üres halmaznak minden valós szám felső korlátja, és a valós számok között nincs legkisebb). Kérdés, létezik-e minden alulról korlátos nemüres részhalmaznak alsó határa? A válasz igenlő.

Állítás *A valós számok minden alulról korlátos nemüres részhalmazának van alsó határa.*

Bizonyítás Legyen $A \neq \emptyset$ alulról korlátos. Ekkor $-A$ felülről korlátos, hiszen ha k az A alsó korlátja, akkor $-k$ a $-A$ felső korlátja. Így létezik $\sup(-A)$. Megmutatjuk, hogy $-\sup(-A)$ az A alsó határa. Valóban, minden $y \in -A$ esetén $y \leq \sup(-A)$, azaz $-\sup(-A) \leq -y$, tehát minden $x \in A$ esetén $-\sup(-A) \leq x$, ami azt jelenti, hogy $-\sup(-A)$ az A alsó korlátja. Ha k az A alsó korlátja, akkor $-k$ a $-A$ felső korlátja, így $\sup(-A) \leq -k$, azaz $k \leq -\sup(-A)$. ■

Az előző bizonyítás eredményét így foglalhatjuk össze: ha $A \neq \emptyset$ alulról korlátos, akkor

$$\inf A = -\sup(-A).$$

Hasonlóan igaz, hogy ha A felülről korlátos, akkor

$$\sup A = -\inf(-A).$$

14.8. A későbbiekben számtalanszor alkalmazzuk az alábbi két egyszerű tényt.

Állítás *(i) Ha A és B az $\mathbb{R}$ nemüres részhalmazai, akkor*

$$\sup A \leq \inf B \quad \textit{pontosan akkor, ha}$$

$$x \leq y \quad \textit{minden } x \in A, y \in B \textit{ esetén.}$$

(ii) Ha a és b valós számok és

$$a - x \leq b \quad (\textit{másképpen: } a \leq b + x) \quad \textit{minden } x \in \mathbb{R}^+ \textit{ esetén,}$$

akkor $a \leq b$.

Bizonyítás (i) Ha $\sup A \leq \inf B$, akkor $\inf B$ az A felső korlátja, tehát ha $x \in A$ és $y \in B$, akkor $x \leq \inf B \leq y$.

Viszont, ha $x \leq y$ az A illetve a B minden x illetve y elemére, akkor minden y az A felső korlátja, tehát $\sup A \leq y$ minden y-ra, azaz $\sup A$ a B alsó korlátja, tehát $\sup A \leq \inf B$.

(ii) Alkalmazzuk az előbbi eredményünket az $A := \{a - x \mid 0 < x\}$ és a $B := \{b\}$ halmazra. Nyilvánvaló, hogy $\inf B = b$, és az is elég egyszerű, hogy $\sup A = a$. Ugyanis világos, hogy a az A felső korlátja; ha $z < a$, akkor $\frac{a-z}{2} > 0$, és egyszerű átalakítással látható, hogy $z < a - \frac{a-z}{2}$, tehát z nem lehet felső korlát, vagyis a a legkisebb felső korlát.

14.9. Egy számhalmaz felső illetve alsó korlátja hozzátartozhat a halmazhoz, de lehet tőle idegen is. Például $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$ tartalmazza az alsó határát – a nullát – de a felső határát – az egyet – nem.

Definíció *Ha egy számhalmaz tartalmazza a szuprémumát (infimumát), akkor szuprémum (infimum) helyett **maximumról** (**minimumról**) beszélünk, amelyet a* max *(*min*) szimbólummal jelölünk.*

Tehát ha $\sup A \in A$, akkor $\max A := \sup A$, és ha $\inf A \in A$, akkor $\min A := \inf A$.

Ha A felülről (alulról) nem korlátos, vagy $\sup A \notin A$ ($\inf A \notin A$), akkor A-nak nincs maximuma (minimuma).

Állítás *A valós számok bármely nemüres, véges részhalmazának van maximuma és minimuma.*

Bizonyítás . Vegyük az $\{x_1, \ldots, x_n\}$ részhalmazt. Feltehetjük, hogy a felsorolásban minden elem különböző. A rendezés láncszerűsége miatt x_1 és x_2 közül az egyik kisebb a másiknál; hagyjuk el ezt, mondjuk x_2-t. Így marad $\{x_1, x_3, \ldots, x_n\}$.

x_1 és x_3 közül is hagyjuk el a kisebbet. Így már csak $n-2$ elem marad. Az eljárást addig folytatjuk, míg végül csak egyetlen elem lesz, amelyet nem rostáltunk ki. Ez nyilvánvalóan minden többinél nagyobb, azaz maximális. Hasonlóan érvelhetünk a minimum létezésének igazolásához.

14.10. Mivel $0 < 1$, minden n természetes számra $n < n + 1$, azaz nincs legnagyobb természetes szám. Ez magában még nem zárja ki azt a lehetőséget, hogy $\mathbb{N}$ a valós számok felülről korlátos részhalmaza legyen. A teljességi tulajdonság segítségével viszont már tagadhatjuk ezt a lehetőséget.

Állítás *$\mathbb{N}$ az $\mathbb{R}$ felülről nem korlátos részhalmaza.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy felülről korlátos, és legyen s a felső határa. Ekkor $s - 1 < s$, tehát $s - 1$ nem felső korlát, azaz van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $n > s - 1$, azaz $n + 1 > s$, ami ellentmondás. ■

$\mathbb{N}$ nemkorlátosságát a valós számok **archimédészi tulajdonságának** szokás nevezni.

Az archimédészi tulajdonság fontos következménye, hogy

$$\inf\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} = 0.$$

Azt ugyanis tudjuk, hogy $0 < \frac{1}{n}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, tehát a nulla az $\frac{1}{\mathbb{N}}$ alsó korlátja. Bármilyen nullánál nagyobb szám viszont már nem alsó korlátja: ha $x > 0$, akkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $n > \frac{1}{x}$, azaz $\frac{1}{n} < x$.

14.11. Feladatok

1. Bizonyítsuk be az **A**, **M** és **AM** tulajdonságok segítségével, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

(i) $-(-x) = x$, (ii) $x0 = 0$, (iii) $(-x)(-y) = xy$,
(iv) $-(x + y) = (-x) + (-y)$.

2. Bizonyítsuk be az **O**, **OA** és **OM** tulajdonságok segítségével bizonyítsuk be, hogy minden $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén

(i) $x \le y$ pontosan akkor, ha $x - y \le 0$,
(ii) ha $x \le y$ és $z \le 0$, akor $zy \le zx$,
(iii) ha $zx \le zy$ és $0 < z$, akor $x \le y$.

3. Legyen A és B az $\mathbb{R}$ korlátos, nemüres részhalmaza. Mutassuk meg, hogy

(i) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$,
(ii) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$,
(iii) ha $A \cap B \neq \emptyset$, akkor $\inf(A \cap B) \ge \max\{\inf A, \inf B\}$,
(iv) ha $A \cap B \neq \emptyset$, akkor $\sup(A \cap B) \le \min\{\sup A, \sup B\}$,
(v) ha $A \subset B$, akkor $\inf A \ge \inf B$ és $\sup A \le \sup B$.

4. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Ha A korlátos, akkor

(i) $\sup(x + A) = x + \sup A$ és $\inf(x + A) = x + \inf A$,
(ii) ha $x < 0$, akkor $\sup(xA) = x \inf A$ és $\inf(xA) = x \sup A$,

(iii) ha $x > 0$, akkor $\sup(xA) = x \sup A$ és $\inf(xA) = x \inf A$.

5. Legyen A és B az $\mathbb{R}$ korlátos, nemüres részhalmaza. Mutassuk meg, hogy

(i) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ és $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$,

(ii) $\sup(A-B) = \sup A - \inf B$ és $\inf(A-B) = \inf A - \sup B$,

(iii) ha A és B minden eleme pozitív, akkor $\sup(AB) = (\sup A)(\sup B)$ és $\inf(AB) = (\inf A)(\inf B)$,

(iv) ha A és B minden eleme negatív, akkor $\sup(AB) = (\inf A)(\inf B)$ és $\inf(AB) = (\sup A)(\sup B)$.

Mit tudunk mondani ennek és a 3. feladatnak az alapján AB szuprémumáról illetve infimumáról, ha A vagy B tartalmazhat pozitív és negatív elemeket is?

6. Igazoljuk, hogy $\inf \left\{ \frac{1}{n(n+1)} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} = 0$.

7. Korlátosak-e alulról vagy felülről az alábbi halmazok, és ha igen, mi a szuprémumuk illetve az infimumuk?

(i) $\left\{ \frac{n-1}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$, (ii) $\left\{ \frac{n^2+1}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$,

(iii) $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(Az utolsónál szorozzunk és osszunk is e két tag összegével.)

8. Legyen $a \in \mathbb{R}$. Igazoljuk, hogy $\sup \left\{ a - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \inf \left\{ a + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = a$.

9. Van-e olyan valódi, nemüres A részhalmaza $\mathbb{R}$-nek, hogy

(i) $A + A = A$, $A + A \subset A$, $A + A \supset A$;

(ii) $A + A = 2A$, $A + A \subset 2A$, $A + A \supset 2A$;

(iii) $AA = A$, $AA \subset A$, $AA \supset A$?

10. Mik a következő halmazok:

(i) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 1\} + \{1, 2, 3\}$,

(ii) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 1\}\{y \in \mathbb{R} \mid y < 1\}$?

11. A 13.6.1-2 feladat arra szólít fel, hogy alkossuk meg a valós számokat az általunk vázolttól különböző úton. Ezeken a különböző utakon azonban más halmazhoz érkezünk el (elemei más ekvivalencia-osztályok, más szeletek lesznek). Azonban a különféle utakon megkonstruált halmazok (és rajtuk adott műveletek) egy bijekció erejéig egyértelműek (lásd a 14.1. végén mondottakat).

15. A valós számok egyéb tulajdonságai

15.1. Már előfordult a végtelen fogalma azzal kapcsolatban, hogy véges-e egy halmaz vagy sem. A végtelent azonban más értelemben is használjuk. A valós számokkal kapcsolatban a végtelen hétköznapi fogalmak szerint a "mindennél nagyobbat" jelenti. Ezt az értelmezést tesszük most matematikailag egzakttá.

Kanyarodjunk vissza a valós számok konstrukciójához, és álljunk meg egy kicsit $\mathbb{Q}^+$-nál. Ha a szelet fogalmába nem vennénk bele a korlátosságot, akkor volna még egy szelet: maga $\mathbb{Q}^+$. Jelölje az így általánosított szeletek halmazát $\overline{\mathbb{R}}^+$, és vezessük be a $\infty := \mathbb{Q}^+$ (végtelen) szimbólumot. E jelölésekkel tehát $\overline{\mathbb{R}}^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$.

A műveleteket is kitűnően értelmezhetjük $\overline{\mathbb{R}}^+$-on ugyanazokkal a formulákkal, mint $\mathbb{R}^+$-on; így kapjuk, hogy $x+\infty = \infty$, $x\infty = \infty$, $x < \infty$ minen $x \in \mathbb{R}^+$ esetén, továbbá $\infty + \infty = \infty$, $\infty\infty = \infty$.

Ott lesz az első baj, hogy az $\overline{\mathbb{R}}_0^+ := \{0\} \cup \overline{\mathbb{R}}^+$ halmazon már nem tudjuk kielégítően értelmezni a szorzást. A $0x = 0$ és az $x\infty = \infty$ egyenlőség igaz az $\mathbb{R}^+$ minden x elemére; a 0 és a ∞ szorzatára az első formula 0-t kínál, a második ∞-t. Akármelyiket is választjuk, a szorzás nem fogja megtartani az ismert tulajdonságait, és egyéb kellemetlenségek is előjönnek (majd látjuk a sorozatok határértékénél). Ezért inkább egyik lehetőséget sem fogadjuk el: nem értelmezzük a 0∞-t. Az összeadással és a rendezéssel nincs baj: $0 + \infty = \infty$, $0 < \infty$.

Annak ellenére, hogy az összadással nem akadt gondunk, az $\overline{\mathbb{R}}_0^+ \times \overline{\mathbb{R}}_0^+$-on a 13.4. mintájára megadott reláció nem lesz ekvivalencia, mert minden $x, y \in \mathbb{R}^+$ esetén $(x, x) \sim (\infty, \infty) \sim (x, y)$, azonban $(x, x) \sim (x, y)$ csak akkor teljesül, ha $x = y$, vagyis a tranzitivitás sérül.

Viszont $\overline{\mathbb{R}}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$-on már ekvivalencia lesz ez a reláció:

$$(x, y) \sim (x', y') \quad \text{pontosan akkor, ha} \quad x + y' = y + x'.$$

Ez azon múlik, hogy $(\infty, y) \sim (x', y')$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x' = \infty$. Ha tehát $(x, y) \sim (x', y') \sim (x'', y'')$, akkor vagy x, x' és x'' mindegyike $\mathbb{R}^+$-ban van, és ekkor a 13. fejezetben tárgyalt esettel van dolgunk, vagy az egyikük végtelen, de ekkor mind az, $x = x' = x'' = \infty$, és így $(x, y) \sim (x'', y'')$, a reláció tranzitív.

Vehetjük tehát az ekvivalencia-osztályokat és halmazukat:

$$x - y := (x, y)/\sim, \qquad \mathbb{R}_\infty := \left(\overline{\mathbb{R}}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+\right)/\sim.$$

Ha $x, y \in \mathbb{R}_0^+$, akkor $x - y$ ugyanaz az halmaz, mint a 13. fejezetben. Így tehát $\mathbb{R}_\infty$ az egyetlen $\infty - x$ ($x \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges) elemmel több $\mathbb{R}$-nél: $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Hasonlóképp okoskodhatunk, ha $\mathbb{R}_0^+ \times \overline{\mathbb{R}}_0^+$-on adunk meg ekvivalencia-relációt ugyanazzal a formulával, mint az előbb. Így jutunk el az

$$x - y := (x, y)/\sim, \qquad \mathbb{R}_{-\infty} := \left(\mathbb{R}_0^+ \times \overline{\mathbb{R}}_0^+\right)/\sim$$

ekvivalencia-osztályokhoz. $\mathbb{R}_{-\infty}$ az egyetlen, mínusz végtelennek nevezett $-\infty := x - \infty$ ($x \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges) elemmel bővebb $\mathbb{R}$-nél: $\mathbb{R}_{-\infty} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$.

Így kapjuk meg végülis a valós számok

$$\overline{\mathbb{R}} := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

kibővített halmazát. A kibővítés két féloldalas lépésben ment csak. Ez már sejteti, hogy a műveleteket nem tudjuk mindenütt értelmezni, túl azon, hogy a nullának és a végtelennek a szorzatát nem tudjuk egyértelműen "jól" meghatárzoni.

15.2. A végteleneket egyértelműen jellemzik a rájuk értelmezett műveletek, tulajdonképpen lényegtelen, miként vezettük be őket (más utat is bejárhattunk volna). Tehát anélkül, hogy az előbbi gondolatmenetre hivatkoznánk, elfogadjuk, hogy van két különböző elem, ∞ és $-\infty$, amelyek nem tartoznak $\mathbb{R}$-hez, és amelyekre a következő műveleteket értelmezzük.

1. (i) Minden x valós számra

$$x+\infty := \infty + x := \infty, \qquad x-\infty := x+(-\infty) := \infty + x := \infty,$$

(ii) $\qquad \infty+\infty := \infty.$

2. (i) Minden x pozitív valós számra

$$x\infty := \infty x := \infty, \qquad x(-\infty) := (-\infty)x := -\infty,$$

(ii) minden x negatív valós számra

$$x\infty := \infty x := -\infty, \qquad x(-\infty) := (-\infty)x := \infty,$$

(iii) $\infty\infty := \infty, \quad \infty(-\infty) := (-\infty)\infty := -\infty, \quad (-\infty)(-\infty) := \infty.$

3. Minden x valós számra

$$\frac{x}{\infty} := \frac{x}{-\infty} := 0.$$

4. Nem értelmezzük a $0(\pm\infty)$, $(\pm\infty)-(\pm\infty)$, $\infty+(-\infty)$, és $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\dfrac{\mp\infty}{\pm\infty}$ mennyiségeket.

5. Minden x valósz számra $-\infty < x < \infty$.

15.3. A végtelenek értelmezése igen hasznos sok szempontból. Például az alsó és a felső határ fogalmát akármilyen – nem szükségképpen nem üres és korlátos – halmazra is definiálhatjuk.

Ha $A \subset \mathbb{R}$ nem üres és felülről nem korlátos, akkor A-nak mint az $\overline{\mathbb{R}}$ részhalmazának ∞ a felső korlátja, és egyben a felső határa is; ezért

$$\begin{aligned} \text{ha } A \neq \emptyset, \quad & \sup A = \infty \text{ pontosan akkor, ha } A \text{ felülről nem korlátos,} \\ & \inf A = \infty \text{ pontosan akkor, ha } A \text{ alulról nem korlátos.} \end{aligned}$$

Az üres halmaznak minden valós szám a felső korlátja (akárhogy veszünk is egy valós számot, nincs olyan eleme $\emptyset$-nak, amely annál nagyobb lenne), ezért az üres halmaznak a felső határa $\overline{\mathbb{R}}$-ben $-\infty$; hasonlót mondhatunk az alsó határra is, azaz

$$\sup\emptyset = -\infty, \qquad \inf\emptyset = \infty.$$

Az üres halmaz az egyetlen olyan részhalmaz $\mathbb{R}$-ben, amelynek a felső határa kisebb, mint az alsó határa.

A sup és inf ilyen értelmű kiterjesztése mellett most már minden korlátozás nélkül igazak a 14.11.3. feladatban felsorolt összefüggések.

15.4. A valós számok fontos részhalmaz-típusaival ismerkedünk most meg.

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ekkor

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\},$$
$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$
$$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\},$$
$$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\},$$

amelyeket rendre az a **alsó végpontú** és b **felső végpontú zárt, nyílt, alulról zárt és felülről nyílt, alulról nyílt és felülről zárt intervallumnak** hívunk.

Nyilvánvaló, hogy mindezek az intervallumok korlátosak, felső határuk a felső végpontjuk, alsó határuk az alsó végpontjuk.

Legyen $a \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$[a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\},$$
$$]a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\},$$
$$]-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\},$$
$$]-\infty, a[:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\},$$

amelyeket rendre az a **alsó végpontú (felülről) nem korlátos zárt, nyílt intervallumnak** a **felső végpontú (alulról) nem korlátos zárt, nyílt intervallumnak** hívunk.

$\overline{\mathbb{R}}$-ben használatosak az $[a, \infty]$ stb. intervallumok is.

Nyilvánvaló, hogy

$$\mathbb{R}^+ =]0, \infty[, \quad \mathbb{R}^- =]-\infty, 0[, \quad \mathbb{R}_0^+ = [0, \infty[.$$

Ennek megfelelően olykor azt írjuk, hogy $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$.

15.5. Az intervallumokra vonatkozó úgynevezett **Cantor-féle közösrész-tétel** a valós számok igen fontos tulajdonsága.

Állítás *Legyen adott minden n pozitív egész számhoz egy $[a_n, b_n]$ intervallum úgy, hogy $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$. Ekkor az*

$$\alpha := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}, \qquad \beta := \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

jelöléssel

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x \leq \beta\} \neq \emptyset.$$

Bizonyítás Mivel mindegyik intervallum része $[a_1, b_1]$-nek, $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ és $B := \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ korlátos halmazok, tehát α és β véges (valós szám). Továbbá $a_n < b_m$ minden $n, m \in \mathbb{N}$ esetén. Valóban, ez igaz, ha $n = m$. Ha $n < m$, akkor $a_n \leq a_m < b_m$, ha $n > m$, akkor $a_n < b_n \leq b_m$. Ebből viszont már következik a 14.8. (i) alapján, hogy $\alpha \leq \beta$, így $\{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x \leq \beta\}$ nem üres. Az, hogy x ennek a halmaznak az eleme egyenértékű azzal, hogy x felső korlátja A-nak és alsó korlátja B-nek, azaz $a_n \leq x \leq b_n$ minden n-re, ami pontosan azt jelenti, hogy x benne van az intervallumok metszetében. ■

Vegyük észre, hogy a szóban forgó intervallumok metszete pontosan akkor egyelemű, ha $\alpha = \beta$, ami viszont azzal egyenértékű, hogy $\inf(b_n - a_n) = 0$ ("az intervallumok hossza minden határon túl csökken").

A Cantor-féle közösrész-tételt úgy szoktuk szavakba foglalni, hogy egymásba skatulyázott korlátos zárt intervallumok metszete nem üres.

Jegyezzük meg jól, hogy akár a korlátosságot, akár a zártságot nem kötjük ki, akkor az állítás nem igaz. Íme az ellenpéldák:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]0, \frac{1}{n}\right] = \emptyset, \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n, \infty[= \emptyset.$$

15.6. A Cantor-féle közösrész-tétel a valós számok teljességi tulajdonságának (sup és inf létezésének) a következménye. De nemcsak következménye, hanem előfeltétele is: ha bármilyen egymásba skatulyázott korlátos zárt intervallumok metszete nem üres, akkor minden nem üres felülről korlátos halmaznak van felső határa. Vázoljuk ennek a bizonyítását.

Tegyük fel, hogy van olyan $A \neq \emptyset$ felülről korlátos halmaz, amelynek nincs felső határa. Ekkor találunk olyan b_1 számot, amely A-nak felső korlátja, de $a_1 := b_1 - 1$ már nem felső korlátja. Továbbá van olyan $k_1 \in \mathbb{N}$, $k_1 \geq 1$ hogy $b_2 := b_1 - \frac{1}{k_1+1}$ felső korlát, de $a_2 := b_1 - \frac{1}{k_1}$ már nem az. Ugyanígy, van olyan $k_2 \in \mathbb{N}$, $k_2 \geq 2$, hogy $b_3 := b_2 - \frac{1}{k_2+1}$ felső korlát, de $a_3 := b_2 - \frac{1}{k_2}$ már nem az. Folytatva ezt az eljárást minden n pozitív egész számhoz megadunk agy $k_n \geq n$ pozitív egész számot és egy $[a_n, b_n]$ intervallumot úgy, hogy $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ és $b_n - a_n \leq \frac{1}{k_n} - \frac{1}{k_{n-1}} = \frac{1}{k_n(k_n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)}$. Feltevésünk szerint $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$. Legyen h az eleme. Vegyük tekintetbe, hogy minden n-re $h \geq a_n \geq h - \frac{1}{n(n+1)}$ és $h \leq b_n \leq h + \frac{1}{n(n+1)}$, továbbá $\inf \frac{1}{n(n+1)} = 0$. Ha tehát $b > h$, akkor van olyan b_n, amelyre $b_n < b$, ezért $b \notin A$, vagyis b az A felső korlátja. Ha viszont $a < h$, akkor van olyan a_n, amelyre $a < a_n$, vagyis a nem felső korlát; ez viszont azt jelenti, hogy h az A felső határa, ami nincs: ellentmondásra jutottunk, amit akartunk is.

15.7. Végezetül álljon itt egy fontos eredmény, amelyre úgy szoktunk hivatkozni, hogy a racionális számok mindenütt sűrűn helyezkednek el a valós számok között.

Állítás *Bármely intervallumban van racionális szám.*

Bizonyítás Elég nyílt intervallumot tekinteni, és azt is feltehetjük, az intervallum alsó végpontja pozitív (az intervallum az $\mathbb{R}^+$ része). Valóban, ha $]a, b[$ olyan, hogy $a \leq 0$, akkor az archimédészi tulajdonság miatt létezik $m \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $m > a$. Ezzel $]a+m, b+m[\subset \mathbb{R}^+$, és ha r racionális szám ez utóbbi intervallumban, akkor $r - m$ az eredeti intervallumban levő racionális szám. Legyen tehát $0 < a < b$. Az $\mathbb{N}$ nemkorlátossága miatt van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $n > \frac{1}{b-a}$, azaz $\frac{1}{n} < b - a$. Ismét az $\mathbb{N}$ nemkorlátossága folytán $\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq bn\} \neq \emptyset$, és így a 12.9. szerint létezik

$$m := \min \left\{ k \in \mathbb{N} \;\middle|\; \frac{k}{n} \geq b \right\}.$$

Szemléletesen a nullától $\frac{1}{n}$ lépésekkel addig megyünk, amíg b fölé nem érünk; m a legkevesebb ilyen lépés. Az értelmezés alapján

$$\frac{m-1}{n} < b \quad \frac{m}{n} \geq b,$$

továbbá

$$-\frac{1}{n} > -b + a;$$

a két utolsó egyenlőtlenség összegéből

$$\frac{m-1}{n} > a.$$

Arra jutottunk hogy az $\dfrac{m-1}{n}$ racionális szám benne van az $]a, b[$ intervallumban. ■

A most bebizonyított állításból az is következik, hogy minden intervallumban végtelen sok racionális szám van. Valóban, ha I intervallum és $r \in I \cap \mathbb{Q}$, akkor van olyan I_1 részintervalluma I-nek, hogy $r \notin I_1$. Viszont létezik $r_1 \in I_1 \cap \mathbb{Q}$. Ezután vesszük az I_1-nek (tehát az I-nek is) olyan I_2 részintervallumát, hogy $r_1 \notin I_2$, és így tovább.

Hasonlóan bizonyíthatjuk be, hogy az irracionális számok is mindenütt sűrűn vannak $\mathbb{R}$-ben, azaz minden intervallum tartalmaz irracionális számot Mindössze annyit kell tennünk, hogy kiindulásul olya n természetes számot veszünk, amelyre $n > \frac{\sqrt{2}}{b-a}$, és $m := \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \frac{k}{n} \geq \frac{b}{\sqrt{2}}\right\}$.

15.8. Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy a 14.11.3. feladat állításai az $\mathbb{R}$ tetszőleges részhalmaza esetén igazak, vagyis nem kell kikötnünk sem a korlátosságot sem a nemürességet.

2. Két nem diszjunkt intervallum egyesítése intervallum. Lehet-e diszjunkt intervallumok egyesítése intervallum?

3. Két nem diszjunkt intervallum metszete egy elemű halmaz vagy intervallum.

4. Mikor intervallum két intervallum halmazelméleti különbsége? Ha nem intervallum, akkor mi?

5. Intervallumok komplexus-összege és komplexus-szorzata intervallum.

6. Két intervallum Descartes-szorzatát téglának szokás nevezni, zárt intrvallumok Descartes-szorzatát zárt téglának. Bizonyítsuk be, hogy egymásba skatulyázott korlátos zárt téglák metszete nem üres (egyenlő a megfelelő oldalak metszetének Descartes-szorzatával). Adjuk feltételt arra, hogy ez a metszet egy elemű legyen.

16. A teljes indukció

16.1. A természetes számokat jellemző "legszűkebb monotonitás", mint már megjegyeztük (és alkalmaztuk is), a természetes számok halmazára – illetve annak bizonyos részhalmazaira – vonatkozó állítások hatékony bizonyítási módszere a teljes indukció, amit a következőképpen foglalhatunk össze. Tekintsünk egy az $\mathbb{N}_0$ elemeivel megfogalmazott kijelentést. Ha a kijelentés igaz

(i) valamely n_0 természetes számra,

(ii) ha igaz n-re, akkor igaz $n+1$-re is,

akkor a kijelentés igaz minden n_0-nál nagyobb természetes számra.

16.2. Emlékezzünk a 14.9. állításra: valós számok nem üres véges halmazában mindig van legkisebb és legnagyobb elem. Az ottani közvetlen bizonyítás helyett teljes indukcióval egy kicsit hamarabb és elegánsabban érünk célt. A nem üres véges halmazokat $\mathbb{N}$ elemeivel jellemezzük.

(i) Egy elemű halmazra nyilvánvalóan igaz az állítás, és két eleműre is a rendezés láncszerűsége miatt.

(ii) Tegyük fel, hogy n elemű halmazra is igaz, és vegyünk egy $n+1$ elemből álló $\{x_1,\dots,x_{n+1}\}\subset\mathbb{R}$ halmazt. Ekkor az indukciós feltevés szerint az $\{x_1,\dots,x_n\}$ halmazban van legkisebb és legnagyobb elem, jelölje ezeket a illetve b. Az $\{a,x_{n+1}\}$ halmazban is van legkisebb, és ez nyilván a legkisebb az $\{x_1,\dots,x_{n+1}\}$ halmazban is. Hasonlóan, a $\{b,x_{n+1}\}$ halmaz legnagyobb eleme egyben az $\{x_1,\dots,x_{n+1}\}$ halmaz legnagyobb eleme is. A teljes indukció elve alapján beláttuk tehát, hogy az állítás minden véges halmazra igaz.

Az összeadás kommutativitása és asszociativitása miatt véges sok valós szám akármilyen sorrendű összege ugyanaz. Ezt a jól ismert tényt közvetlenül is bebizonyíthatjuk, de eléggé fáradságosan; teljes indukcióval könnyebben érünk célt.

(i) Két valós szám bármely sorrendű összege ugyanaz, ez a kommutativitás.

(ii) Legyen $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, és tegyük fel, n darab valós szám akármilyen sorrendű összege ugyanaz.

Ebből az is következik, hogy $n \geq 3$ esetén tetszőleges $n-1$ tagú összeg sem függ az összeadás sorrendjétől. Ha ugyanis volna olyan $n-1$ darab valós szám és két sorrend, amely különböző összeghez vezetne, akkor mindegyikhez nullát hozzáadva ellentmondásba kerülnénk azzal, hogy n darab valós számra az összeg független a sorrendtől.

Vegyünk $n+1$ darab (nem feltétlenül különböző) $x_1, \ldots, x_{n+1}$ valós számot. Képezzünk belőlük tetszés szerinti sorrendben két összeget úgy, hogy az egyik összeg utolsó tagja x_{n+1}, a másik összeg utolsó tagja x_1 legyen. Az előttük levő n darab valós számot akármilyen sorrendben összeadhatjuk az indukciós feltevés alapján. A két összeg tehát:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + x_{n+1}, \quad \text{illetve} \quad (x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}) + x_1,$$

azaz

$$x_1 + (x_2 + \cdots + x_n) + x_{n+1}, \quad \text{illetve} \quad (x_2 + \cdots + x_n) + x_{n+1} + x_1,$$

amelyek az előző megjegyzésünk szerint megegyeznek.

Ugyanígy okoskodhatunk, ha az összegben az utolsó számok bármelyik x_k illetve x_m, csak egy kicsit körülményesebb az írásmód.

Az $x_1, \ldots, x_n$ számok összegére a

$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$

jelölést használjuk. Itt megengedjük, hogy $n = 1$ legyen; ekkor egy tagú összegünk, azaz egyetlen valós számunk van.

Teljesen hasonlóan bizonyítható be, hogy $n \geq 2$ darab valós szám szorzata független a szorzás sorrendjétől. Az $x_1, \ldots, x_n$ számok szorzatára a

$$\prod_{i=1}^{n} x_i$$

jelölést használjuk. Itt is megengedjük, hogy $n = 1$ legyen.

16.3. Vezessünk be néhány gyakran használt jelet, amelyeket most mindjárt alkalmazunk is.

Bármely n pozitív egész számra legyen

$$n! := \prod_{i=1}^{n} i, \qquad 0! := 1$$

(elnevezésük: n faktoriális, 0 faktoriális).

Továbbá minden $k, n \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$ esetén

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

("n alatt a k"), amelyeket **binomiális együtthatóknak** nevezünk. Ezek sok tulajdonsága közül csak egyet említünk meg, amelyet igen könnnyű belátni:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

A **binomiális tétel** néven ismert formula a következő: bármely $a, b \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k.$$

Bizonyítását teljes indukcióval végezzük.

(i) Az állítás nyilvánalóan igaz $n = 1$ esetére.

(ii) Tegyük fel, hogy igaz az állítás n-re. Ekkor

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k+1} =$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k}\, b^k + \binom{n}{n} b^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k}\, b^k,$$

vagyis az állítás igaz $(n+1)$-re is, és ezzel a teljes indukciós bizonyítást befejeztük. Az utolsó egyenlőségnél figyelembe vettük, hogy

$$\binom{n+1}{0} = \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1.$$

16.4. A **Bernoulli-egyenlőtlenség** így szól: bármely $h \in]-1, \infty[$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(1+h)^n \geq 1 + nh.$$

Ezt is teljes indukcióval bizonyítjuk be.

(i) Az egyenlőtlenség nyilvánvalóan igaz $n = 1$ esetére (egyenlőség áll).

(ii) Tegyük fel, hogy az egyenlőtlenség igaz n-re. Ekkor

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)(1+h)^n \geq (1+h)(1+nh) = 1+nh+h+nh^2 \geq 1+(n+1)h,$$

tehát az egyenlőtlenség igaz $(n+1)$-re is, és ezzel befejeztük a bizonyítást.

A második lépésben azt használtuk fel, hogy az egyenlőtlenség nem változik, ha pozitív számmal szorozzuk mindkét oldalát $(1 + h > 0)$, az utolsó lépésben pedig azt, hogy egy pozitív számot kivonva az egyenlőtlenség kisebb oldalából, az egyenlőtlenség nem változik $(nh^2 > 0)$.

A bizonyítás menetéből az is látszik, hogy $h \neq 0$ esetén egyenlőség csak akkor áll, ha $n = 1$.

A Bernoulli-egyenlőtlenségből következik, hogy

$$2^n > n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Akkor, ha $h \geq 0$, a Bernoulli-egyenlőtlenség következik a binomiális tételből is. Sőt ekkor egy másik fontos egyenlőtlenséget is származtathatunk:

$$(1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h + k \geq \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} h^k = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2} h^2$$

$$(h \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}).$$

16.5. A következő sokszor felhasznált úgynevezett diszjunktizációs formula igazolásának egyik lépése is a teljes indukció.

Állítás *Bármely $(A_n \mid n \in \mathbb{N})$ indexezett halmazrendszerhez létezik $(B_n \mid n \in \mathbb{N})$ halmazrendszer úgy, hogy minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén*

(i) B_m és B_n diszjunkt, ha $m \neq n$,

(ii) $B_n \subset A_n$,

(iii) $\biguplus_{k=1}^{n} B_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$.

Bizonyítás Meg lehet konstruálni ezt új halmazrendszert:

$$B_1 := A_1, \quad B_n := A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}).$$

Világos, hogy B_n része A_n-nek. Továbbá, ha m és n különböző számok, mondjuk $m < n$, és $x \in B_n$, akkor $x \in A_n$ és $x \notin A_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$; tehát $x \notin A_m$, és még inkább igaz, hogy $x \notin B_m$, azaz $B_m \cap B_n = \emptyset$.

Már csak az (iii) összefüggést kell megmutatnunk. Teljes indukciót alkalmazunk.

(i) Az egyenlőség $n = 1$ esetén igaz, hiszen $B_1 = A_1$.

(ii) Tegyük fel, hogy igaz az egyenlőség n-re. Ekkor

$$\bigcup_{k=1}^{n+1} B_k = \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \cup B_{n+1} = \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cup B_{n+1} =$$
$$= \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cup \left(A_{n+1} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right) = \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k,$$

vagyis igaz az egyenlőség $(n+1)$-re is. ■

Mivel $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k$, és ugyanilyen összefüggés áll fenn a másik halmazrendszerre is, azt is megállapíthatjuk, hogy

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

16.6. Feladatok

Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy az alábbi összefüggések igazak minden n pozitív egész számra.

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.
3. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$.
4. $3^n \geq 1 + 2^n$.
5. Legyen $a_1, a_2 \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ és $n \in \mathbb{N}$. Igazoljuk, hogy

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Ezeket a mennyiségeket rendre a számok **harmonikus, mértani, számtani közepének** hívjuk. A bizonyítást csináljuk úgy, hogy mutassuk meg teljes indukcióval az egyenlőtlenségeket $n = 2^m$ $(m \in \mathbb{N})$ esetekre, aztán igazoljuk, ha az egyenlőtlenség fennáll n-re, akkor $(n-1)$-re is.

6. Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$b^n - a^n = (b-a) \sum_{k=0}^{n-1} b^{n-1-k} a^k.$$

7. Ha $a \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, akkor $(1+a)^n \leq 1 + a(2^n - 1)$.

8. Az előbbi egyenlőtlenség és a Bernoulli-egyenlőtlenség alapján, ha $x \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$, akkor $\sqrt[n]{x} := \sup\{y \in \mathbb{R} \mid y^n \leq x\}$ olyan szám, amelyre $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$.

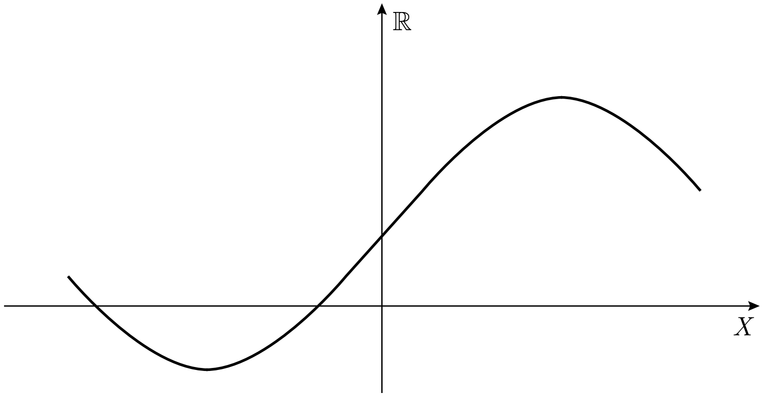
(Útmutatás: $\emptyset \neq]0, \min\{x, 1\}] \subset \{y \in \mathbb{R} \mid y^n \leq x\} =: A$ és ez utóbbi halmaznak $1 + \frac{x-1}{n}$ felső korlátja, mert ellenkező esetben volna olyan $y \in A$, amelyre a Bernoulli-egyenlőtlenség miatt az $y^n > x$ lehetetlen összefüggésre jutnánk.

Ha $0 < \epsilon < \sqrt[n]{x}$, akkor van olyan $y \in A$, hogy $\sqrt[n]{x} - \epsilon \leq y$, azaz $\left(\sqrt[n]{x} - \epsilon\right)^n \leq x$, amiből a Bernoulli-egyenlőtlenség miatt $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n - x \leq n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}\epsilon$, és így $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n - x \leq 0$.

Viszont $\left(\sqrt[n]{x} + \epsilon\right)^n > x$, ezért a 7. feladat szerint $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n + \epsilon\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1} 2^{n-1} > x$, azaz $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n - x \geq 0$.)

17. Valós értékű függvények

17.1. Legyen X tetszőleges nemüres halmaz. Egy $f : X \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvényt sokszor jól tudunk szemlélteni a grafikonjával úgy, hogy a lap síkjával ábrázoljuk $X \times \mathbb{R}$-et: egy "vízszintes" és egy "függőleges" egyenest ("első" illetve "második" tengelyt) rajzolunk, amelyek X-et illetve $\mathbb{R}$-et jelképezik. Ekkor a függvény grafikonját egy görbe mutatja, amint a 4. ábrán látjuk.



4. ábra

A szemléltetés szabályaihoz az is hozzátartozik, hogy a függőleges egyenesen a számok alulról felfelé növekesznek, és ha $X = \mathbb{R}$, akkor a vízszintes egyenesen balról jobbra.

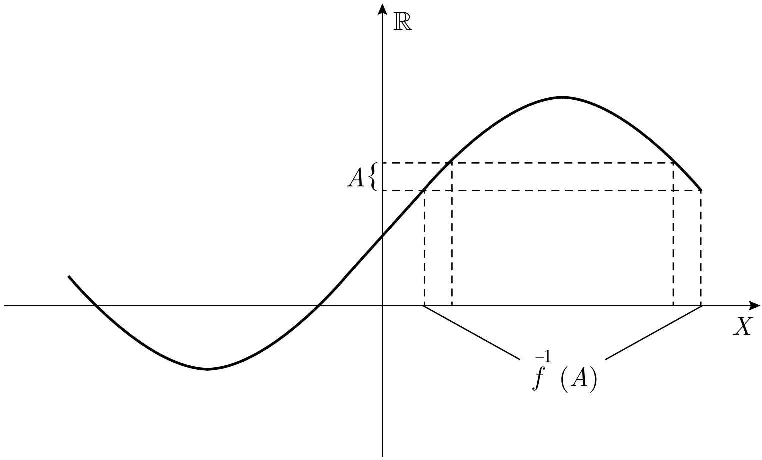
Ha általában beszélünk $X \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvényekről, ilyen szép görbéket rajzolunk szemléltetésül. Ez viszont nem jelenti azt, hogy minden függvényről valóban efféle kép adható. Például az

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{ha } x \notin \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dirichlet-féle függvény nem jeleníthető meg ilyen módon.

Ha $A \subset \mathbb{R}$, akkor az $\overset{-1}{f}(A)$ az 5. ábrán bemutatott szabály szerint szerkeszthető meg.

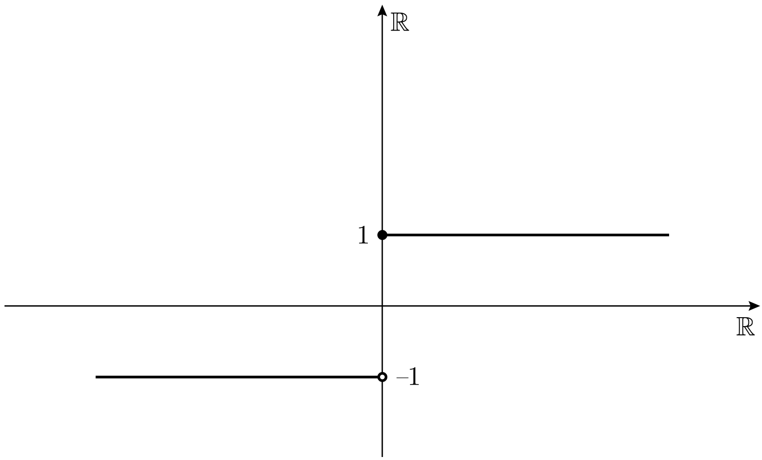
Először most néhány fontos, sokat használt konkrét függvénnyel ismerkedünk meg, azután általános kijelentéseket teszünk valós értékű függvényekre.



5. ábra

17.2. (i) Az **előjel-** vagy **szignumfüggvény** (lásd a 6. ábrát):

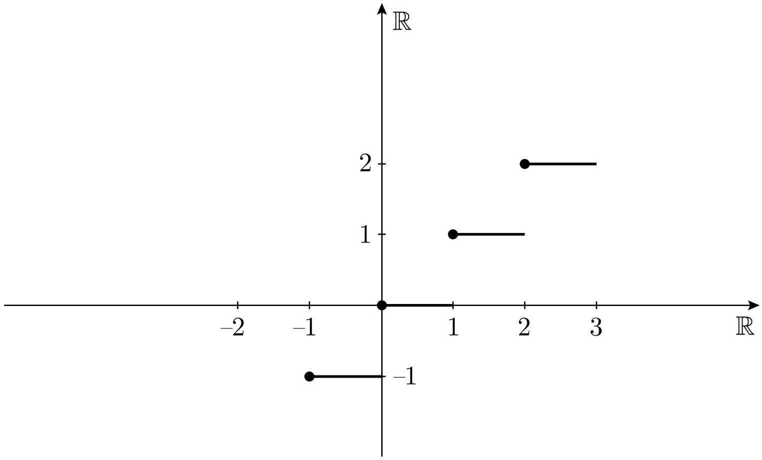
$$\operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{ha } x < 0, \\ 1 & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$



6. ábra

(ii) Az **egészrész-függvény** (7. ábra):

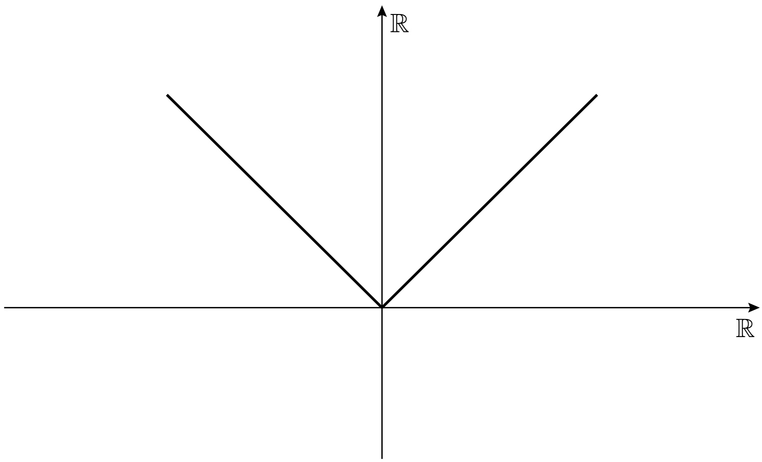
$$\mathrm{int} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}.$$



7. ábra

(iii) Az **abszolútérték-függvény** (8. ábra):

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} -x & \text{ha } x < 0, \\ x & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$



8. ábra

Nyilvánvaló, hogy minden x valós számra

$$|x| = |-x| = \sqrt{x^2} = (\mathrm{sign} x)x,$$

és
$$-|x| \leq x \leq |x|,$$
továbbá
$$|x| \leq y \quad \text{pontosan akkor, ha} \quad x \leq y \text{ és } -x \leq y,$$
ami azzal egyenértékű, hogy $-y \leq x \leq y$.

Állítás *Minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén*

(i) $|xy| = |x||y|$,
(ii) $|x+y| \leq |x| + |y|$,
(iii) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.

Bizonyítás (i) Egyszerűen következik a definícióból.

(ii) A $-|x| \leq x \leq |x|$ és $-|y| \leq y \leq |y|$ egyenlőtlenségek összeadásából $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$ adódik, ami viszont az állítás előtti megjegyzés szerint a kívánt egyenlőtlenséget eredményezi.

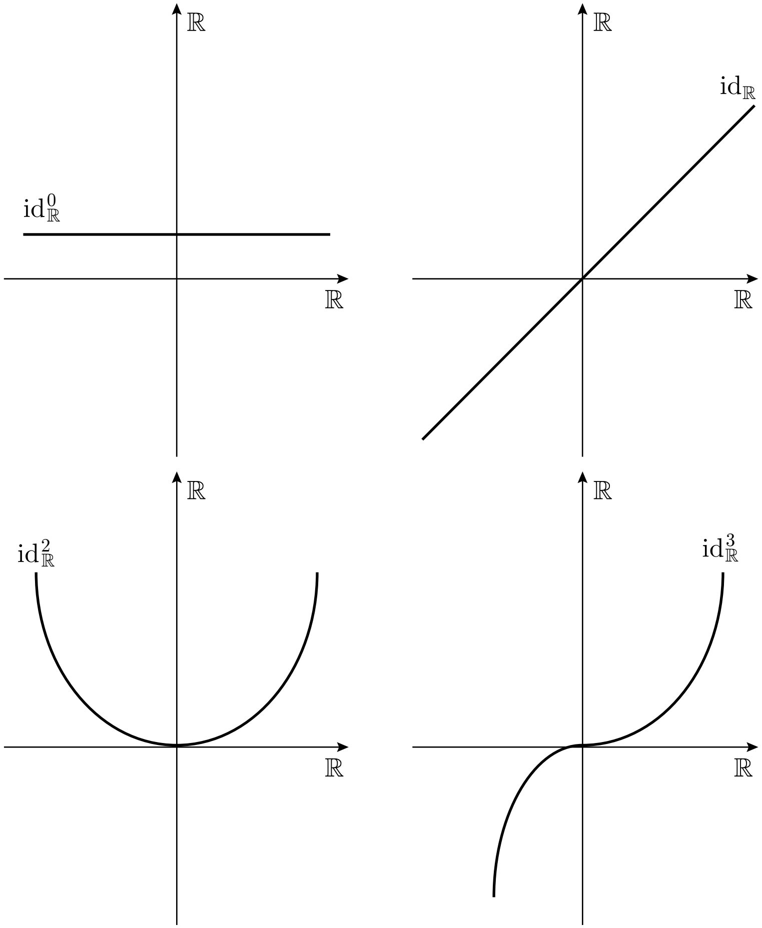
(iii) $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$, és ugyanígy $|y| \leq |y - x| + |x|$; mivel $|x - y| = |y - x|$, azt kapjuk, hogy
$$|x| - |y| \leq |x - y|, \quad |y| - |x| \leq |x - y|,$$
ami a kívánt egyenlőtlenséggel egyenértékű.

17.3. $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ a valós számok identitás-függvénye. Ha $n \in \mathbb{N}$, értelmezzük az n-ik hatványfüggvényt így:
$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n.$$

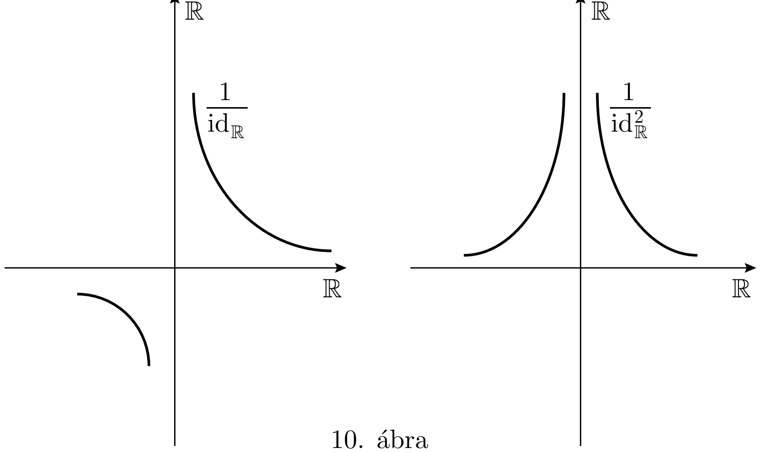
Nyilván $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Célszerű továbbá bevezetni az
$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1$$
függvényt, amely tehát a mindenütt értelmezett konstans 1 függvény. Minden nemnulla x valós számra $x^0 = 1$, azonban 0-nak a 0-ik hatványát nem értelmeztük. Tehát $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^0$ nem az $x \mapsto x^0$ függvény, hanem annak kiterjesztése (9. ábra)

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor az n-ik hatványfüggvénynek illetve páros n esetén a nemnegatív számokra való leszűkítésének az inverze az n-ik gyökfüggvény.

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor az n-ik reciprok-függvény a következő (10.ábra):
$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{-n} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$



9. ábra



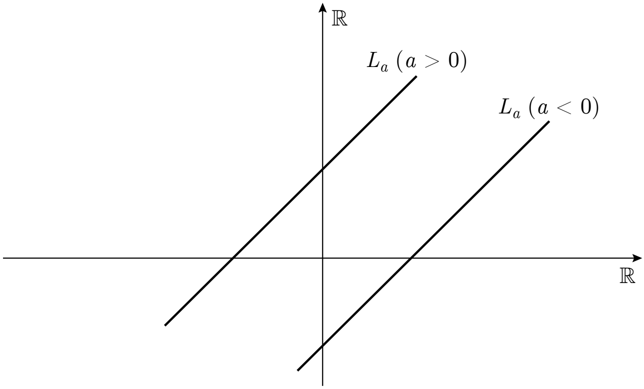
10. ábra

17.4. (i) Legyen $a \in \mathbb{R}$. Az a-val való **eltolás** az

$$L_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto a + x$$

függvény (11. ábra). Könnyen ellenőrizhetjük az eltolások alapvető tulaldonságát:

$$L_a \circ L_b = L_{a+b} \qquad (a, b \in \mathbb{R}).$$



11. ábra

Ebből is következik, de közvetlenül is beláthatjuk, hogy az eltolások bijekciók, és

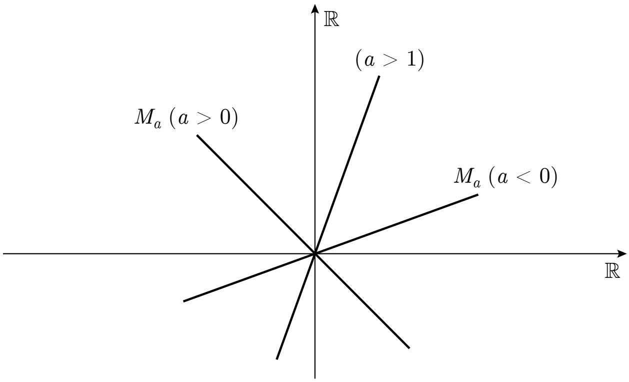
$$L_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}, \quad L_a^{-1} = L_{-a}.$$

Ha $A \subset \mathbb{R}$, akkor $\overset{-1}{L_a}(A) = A - a$.

(ii) Legyen $0 \neq a \in \mathbb{R}$. Az a-val való **szorzás** az

$$M_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax$$

függvény (12. ábra). Ha $0 < a < 1$, akkor zsugorításról, ha $1 < a$, akkor nyújtásról beszélünk. $M_{-1} = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}} =: T$ a tükrözés.



12. ábra

Könnyen ellenőrizhetjük a szorzások alapvető tulajdonságát:

$$M_a \circ M_b = M_{ab} \qquad (a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Ebből is következik, de közvetlenül is beláthatjuk, hogy a szorzások bijekciók, és

$$M_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}, \quad M_a^{-1} = M_{1/a}.$$

Ha $A \subset \mathbb{R}$, akkor $\overset{-1}{M_a}(A) = \frac{1}{a}A$.

17.5. Legyen $f : X \rightarrowtail \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Értelmezzük ennek n-ik hatványát ($n \in \mathbb{N}$), reciprokát, abszolútértékét, pozitív és negatív részét a következőképpen:

$$f^n := \mathrm{Dom} f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)^n,$$

$$\frac{1}{f} : \{x \in \mathrm{Dom} f \mid f(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{f(x)},$$

$$|f| : \mathrm{Dom} f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |f(x)|,$$

$$f^+ : \mathrm{Dom} f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{ha } f(x) < 0, \\ f(x) & \text{ha } f(x) \geq 0, \end{cases}$$

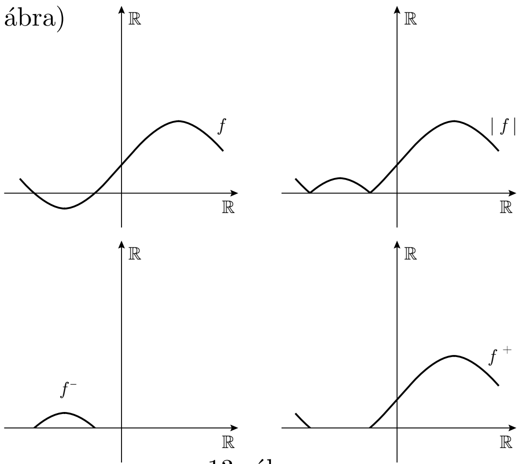
$$f^- : \mathrm{Dom} f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} -f(x) & \text{ha } f(x) < 0, \\ 0 & \text{ha } f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Jegyezzük meg, hogy egy függvény negatív része is nemnegatív értékű.

Nyilvánvalóak az

$$f = f^+ - f^-, \qquad |f| = f^+ + f^-$$

összefüggések (13. ábra)



13. ábra

Vegyük észre, hogy $f^n = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^n \circ f$, $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}} \circ f$, $|f| = |\cdot| \circ f$. Ennek alapján

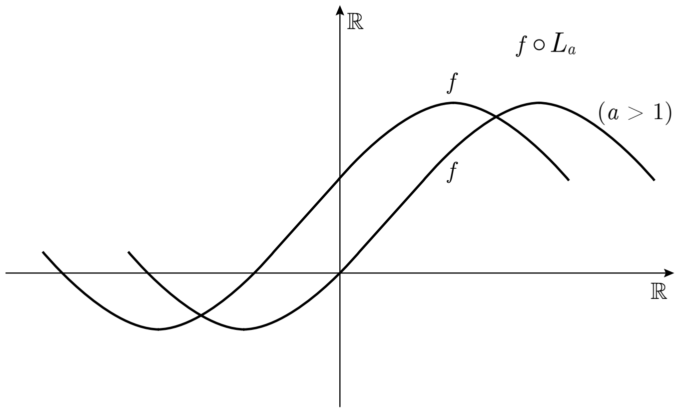
$$\sqrt[n]{f} := \sqrt[n]{} \circ f.$$

17.6. (i) Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$. Érdekesek az $f \circ L_a$ és az $L_a \circ f$ függvények; ez utóbbira új jelet is vezetünk be: $a + f := L_a \circ f$.

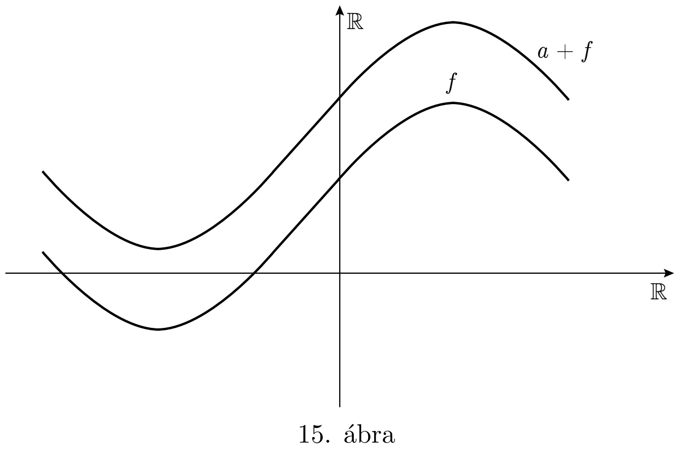
$$\mathrm{Dom}(f \circ L_a) = \overset{-1}{L_a}(\mathrm{Dom} f) = \mathrm{Dom} f - a,$$

$$\mathrm{Dom}(a + f) = \mathrm{Dom} f.$$

$f \circ L_a$ az f függvénynek az első tengely menti eltolása, $a + f$ pedig a második tengely menti eltolása (14. és 15. ábra)



14. ábra



15. ábra

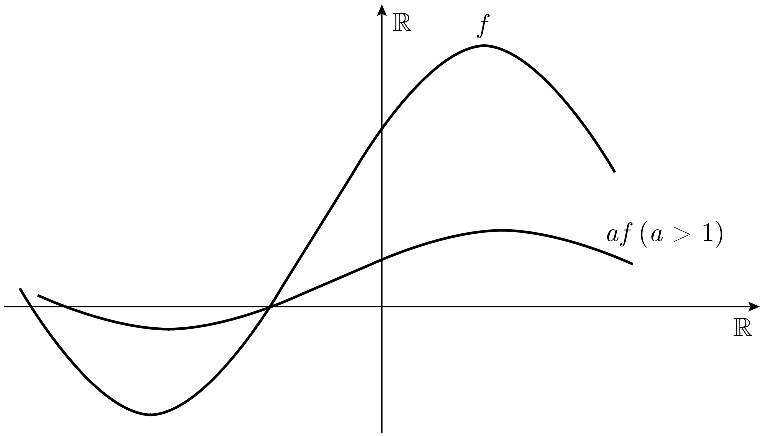
Nyilván $L_a \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ L_a = L_a$, vagyis az identitás egyik tengely menti eltolása ugyanaz, mint a másik tengely menti.

(ii) Legyen $0 \neq a \in \mathbb{R}$ és $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$. Érdekesek az $f \circ M_a$ és az $M_a \circ f$ függvények; ez utóbbira új jelet is vezetünk be: $af := M_a \circ f$.

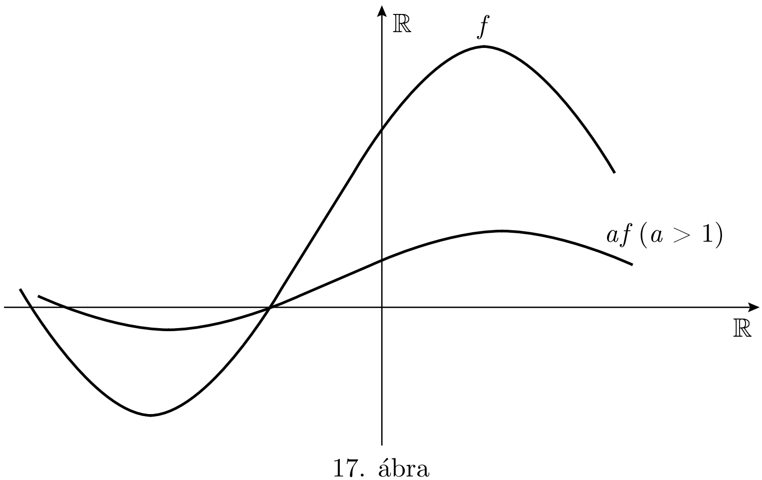
$$\mathrm{Dom}(f \circ M_a) = \overset{-1}{M_a}(\mathrm{Dom} f) = \frac{1}{a}\mathrm{Dom} f,$$

$$\mathrm{Dom}(af) = \mathrm{Dom} f.$$

Legyen $a > 0$. Ekkor $f \circ M_a$ az f függvénynek az első tengely menti zsugorítása illetve nyújtása, aszerint, hogy $a > 1$ vagy $a < 1$; af pedig a második tengely menti zsugorítás illetve nyújtás aszerint, hogy $a < 1$ vagy $a > 1$ (16. és 17. ábra)

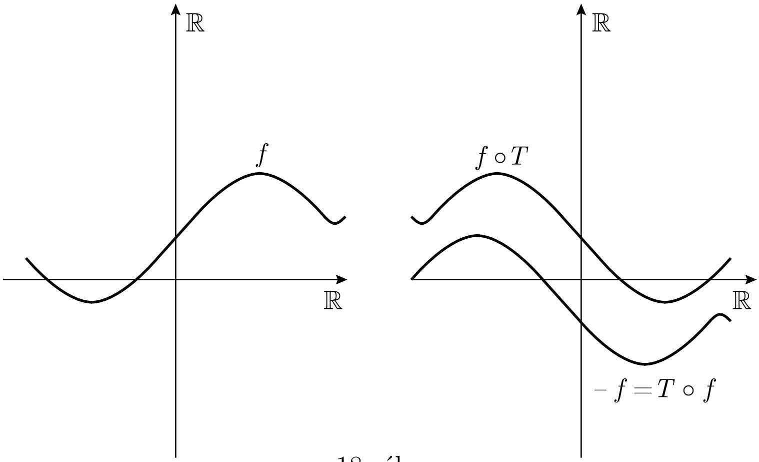


16. ábra



17. ábra

Emlékezzünk a $T := M_{-1}$ jelölésre. $f \circ T$ illetve $T \circ f = -f$ az f függvény tükrözöttje az első illetve a második tengelyre (18. ábra)



18. ábra

17.7. 1. Definíció *Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt* ***periodikusnak*** *hívunk, ha van olyan $p \in \mathbb{R}^+$, hogy $f \circ L_p = f$. Ekkor p az f egy* ***periódusa****, f a p szerint periodikus.*

f tehát pontosan akkor periodikus a p szerint, ha $f(x+p) = f(x)$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Ha p és q is az f periódusa, akkor az $L_p \circ L_q = L_{p+q}$ összefüggés alapján $p + q$ is periódusa. Tehát ha p periódus, akkor np is periódus minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Ha van a függvény periódusai között legksebb, azt **alapperiódusnak** nevezzük.

Bármely konstans függvénynek minden pozitív valós szám a periódusa, alapperiódusa nincs. A Dirichlet-függvénynek minden pozitív racionális szám a periódusa, alapperiódusa nincs. Az szinusz és koszinusz függvények (most példaként felhozva őket a korábbi tanulmányokra hagyatkozunk, később pontos értelmezést adunk rájuk) alapperiódusa 2π.

2. Definíció *Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény*

(i) ***páros****, ha $f \circ T = f$,*
(ii) ***páratlan****, ha $f \circ T = -f (= T \circ f)$.*

f tehát pontosan akkor páros illetve páratlan, ha $f(-x) = f(x)$ illetve $f(-x) = -f(x)$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

$\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^n$ páros, ha n páros, és páratlan, ha n páratlan.

Csak az azonosan nulla függvény lehet egyszerre páros is, páratlan is.

Van olyan függvény, amely se nem páros, se nem páratlan; például $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + x$.

17.8. Feladatok

1. Döntsük el, az alábbi függvények közül melyek párosak, melyek páratlanok:

$$\mathrm{sign}, \quad \mathrm{int}, \quad |\cdot|, \quad \sqrt[n]{}, \quad L_a, \quad M_a.$$

2. Milyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre igaz, hogy f^+ páros?

3. Tegyük fel, hogy az f függvénynek a az alapperiódusa. Lehet-e f a p szerint periodikus úgy, hogy p nem az a egész számú többszöröse?

4. Lehet-e egy periodikus függvény páros vagy páratlan?

5. Periodikus-e $\mathrm{id}^n_{\mathbb{R}}$?

6. Periodikus-e az az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $f(x) = 3x - 6n$, ha $x \in [2n-1, 2n+1[\quad (n \in \mathbb{Z})$?

18. Valós értékű függvények műveletei

18.1. Már az előző fejezetben is volt szó valós értékű függvényeken értelmezett műveletekről, hiszen egy függvényt hatványoztunk, vettük a reciprokát stb. Ott azonban csak egy függvény szerepelt a műveletekben, most több függvény közötti műveletekről beszélünk.

Definíció *Az $f : X \rightarrowtail \mathbb{R}$ és a $g : X \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvények* ***összege*** *és* ***szorzata*** *a*

$$g + f : \mathrm{Dom} g \cap \mathrm{Dom} f \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto g(x) + f(x),$$

illetve a

$$gf : \mathrm{Dom} g \cap \mathrm{Dom} f \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto g(x)f(x)$$

függvény.

Úgy szoktuk mondani, hogy a függvények közötti műveleteket **pontonként** értelmezzük: minden egyes pontnak (az értelmezési tartományok közös elemének) megfelelő függvényértékek között végezzük el a műveleteket.

Ha $a \in \mathbb{R}$ és $g = a$ (konstans függvény), akkor $a + f$ és $a \neq 0$ esetén af ugyanazok a függvények, amelyeket az előző fejezetben bevezettünk.

Értelemszerű, hogy $g - f := g + (-f)$ és $\dfrac{g}{f} := g\dfrac{1}{f}$.

Vegyük észre, hogy $g + f$ és gf a g és az f együttesének az összeadással illetve a szorzással vett kompozíciója: $g + f = + \circ (g, f)$, $gf = \cdot \circ (g, f)$.

18.2. Definíció *Legyen* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *és jelentse*

$$f \leq g$$

azt, hogy $\mathrm{Dom} f = \mathrm{Dom} g$ *és* $f(x) \leq g(x)$ *minden* $x \in \mathrm{Dom} f$ *esetén.*

Ha $E \subset \mathrm{Dom} f \cap \mathrm{Dom} g$, *akkor*

$$f \underset{E}{\leq} g$$

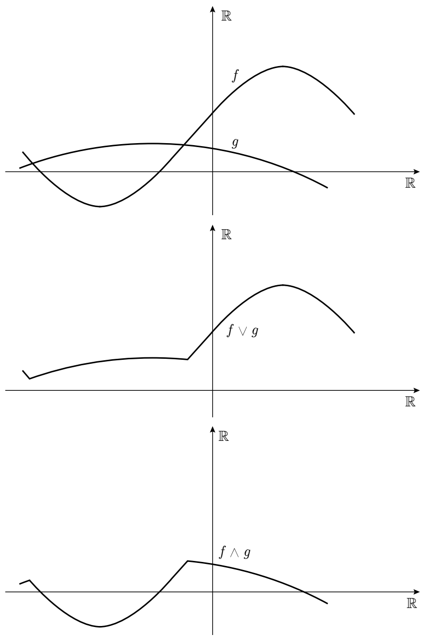
jelentse azt, hogy $f(x) \leq g(x)$ *minden* $x \in E$ *esetén.*

Ezek után értelemszerű, mit jelentenek az

$$f < g, \qquad f \underset{E}{<} g$$

szimbólumok.

Különleges eset, amikor egy függvényt egy konstans függvénnyel hasonlítunk össze. A konstans függvény értelmezési tartománya megállapodásunk szerint bármely halmaz, pontosaban egy és ugyanaz az elem jelöli a bárhol érelmezett konstans függvényt, amelynek az értéke a szóban forgó elem. Ezért, ha $a \in \mathbb{R}$ és azt írjuk, hogy $f \leq a$, akkor az a konstans függvény értelmezési tartományának az f értelmezési tartományát vesszük, azaz $f \leq a$ azt jelenti, hogy $f(x) \leq a$ minden $x \in \mathrm{Dom} f$ esetén.



19. ábra

18.3. Definíció *Az* $f, g : X \rightarrowtail \mathbb{R}$ *függvények* ***alsó*** *illetve* ***felső burkolója*** *(19. ábra):*

$$g \wedge f : \mathrm{Dom}f \cap \mathrm{Dom}g \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \min\{g(x), f(x)\},$$

$$g \vee f : \mathrm{Dom}f \cap \mathrm{Dom}g \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \max\{g(x), f(x)\}.$$

Speciális esetük a már megismert negatív illetve pozitív rész:

$$f^- = -(0 \wedge f), \qquad f^+ = 0 \vee f.$$

18.4. Általában, ha $n \in \mathbb{N}$ és $f_i : X \rightarrowtail \mathbb{R}$, akkor a $D := \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Dom}f_i$ jelöléssel

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f_i : D \to \mathbb{R}, &\qquad x \mapsto \sum_{i=1}^{n} f_i(x),\\
\prod_{i=1}^{n} f_i : D \to \mathbb{R}, &\qquad x \mapsto \prod_{i=1}^{n} f_i(x),\\
\bigwedge_{i=1}^{n} f_i : D \to \mathbb{R}, &\qquad x \mapsto \min\{f_i(x) \mid i = 1, \dots, n\},\\
\bigvee_{i=1}^{n} f_i : D \to \mathbb{R}, &\qquad x \mapsto \max\{f_i(x) \mid i = 1, \dots, n\}
\end{aligned}$$

a függvények összege, szorzata, alsó és felső burkolója.

18.5. Legyen $f, g : X \rightarrowtail \mathbb{R}$ és $\varphi : Y \rightarrowtail X$. Ekkor

$$\begin{aligned}
(g + f) \circ \varphi =& g \circ \varphi + f \circ \varphi,\\
(gf) \circ \varphi =& (g \circ \varphi)(f \circ \varphi),\\
(g \wedge f) \circ \varphi =& (g \circ \varphi) \wedge (f \circ \varphi),\\
(g \vee f) \circ \varphi =& (g \circ \varphi) \vee (f \circ \varphi),
\end{aligned}$$

továbbá

$$|f| \circ \varphi = |f \circ \varphi|, \quad \frac{1}{f} \circ \varphi = \frac{1}{f \circ \varphi}, \quad f^+ \circ \varphi = (f \circ \varphi)^+.$$

E formulákat azonnal igazolhatjuk közvetlenül is, de származtathatjuk abból, is, hogy a műveleteket felfoghatjuk kompozícióként, és a komponálás asszociatív. Például

$$(g + f) \circ \varphi = + \circ (g, f) \circ \varphi = + \circ (g \circ \varphi, f \circ \varphi) = g \circ \varphi + f \circ \varphi.$$

Úgy is mondhatjuk, hogy a "jobbról" való komponálás "disztributív" a műveletekkel. "Balról" azonban általában nem; íme egy példa:

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2 \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{R}} + 1) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2 + 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}} + 1 \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2 + 1 = \left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2 \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\right) + \left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2 \circ 1\right).$$

18.6. Definíció *Legyen H halmaz, és $A \subset H$. Ekkor a*

$$\chi_A : H \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in A, \\ 0 & \text{ha } x \notin A \end{cases}$$

függvényt az A ***karakterisztikus függvényének*** *nevezzük.*

Figyeljünk föl arra, hogy a χ_A jelölésben nem jelenik meg a H "alaphalmaz" (hasonlóan, mint a komplementereknél).

Nyilvánvaló, hogy

$$\chi_H = 1, \qquad \chi_\emptyset = 0,$$

és az alábbi formulák is a definció egyszerű következményei, ezért bizonyításukat nyugodt szívvel az olvasóra hagyjuk.

Legyen A és B a H részhalmaza. Ekkor

(i) $\chi_A^2 = \chi_A$,

(ii) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B$,

(iii) $\chi_A\chi_B = \chi_A$ pontosan akkor, ha $A \subset B$,
$\chi_A\chi_B = 0$ pontosan akkor, ha $A \cap B = \emptyset$,

(iv) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B$, és $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$ pontosan akkor, ha $A \cap B = \emptyset$,

(v) $\chi_{B\setminus A} = \chi_B - \chi_B\chi_A$ és $\chi_{B\setminus A} = \chi_B - \chi_A$ pontosan akkor, ha $A \subset B$; speciálisan $\chi_{A^\diamond} = 1 - \chi_A$.

18.7. Feladatok

1. Igazoljuk, hogy

(i) két páros függvény összege, számszorosa is páros, páratlanoké páratlan;

(ii) két páros függvény szorzata és két páratlan függvény szorzata páros, egy páros és egy páratlan függvény szorzata páratlan.

2. Lehet-e nemnulla páros és páratlan függvények összege páros illetve páratlan?

3. Mikor lesz két periodikus függvény összege illetve szorzata periodikus?

4. Mi az 1 konstans függvény és Dirichlet-függvény különbsége?

5. Adjuk meg az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x+1|$ és $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x-1|$ függvények alsó és felső burkolóját.

6. Írjuk le az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \wedge \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2$ és az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \vee \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2$ függvényeket.

7. Előfordulhat-e, hogy $g + f = g \vee f$ illetve $gf = g \vee f$?

8. Mi az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha \mapsto \alpha^2 + 1$ és az $\mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $\beta \mapsto \dfrac{1}{\beta - 1}$ függvények összege?

9. Bizonyítsuk be, hogy az $f, g : X \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvényekre

(i) $f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) = f - (f - g)^+$,

(ii) $f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) = (f - g)^+ + g$.

10. Mutassuk meg, hogy az $X \to \mathbb{R}$ függvények körében értelmezett összeadás és szorzás rendelkezik a 14.1-ben felsorolt $A1 - A4$ és $M1 - M3$ tulajdonságokkal, de az $M4$-gyel nem (a nulla-elem és az egység-elem a 0 illetve az 1 konstans függvény).

11. Az $X \to \mathbb{R}$ függvények körében értelmezett $\leq$ reláció rendezés, amely nem láncszerű, ha X-nek van két különböző eleme.

19. Becslések

19.1. Azt már láttuk korábban, mit jelent pontosan az a fizikában gyakran használt kijelentés, hogy egy mennyiség (valós szám) elég kicsi illetve elég nagy. Most olyan fordulatoknak akarunk pontos értelmet adni, hogy egy mennyiség "elhanyagolható", "elenyésző", hogy valami "sokkal kisebb" illetve "sokkal nagyobb" valami másnál, és hogy két mennyiség "körülbelül egyenlő".

Száz tallérhoz képest egy tallér elenyésző mennyiség; két tallérhoz képest viszont már egyáltalán nem. Hasonlóan, száz tallérhoz képest ötven tallér jelentős mennyiség, de tízezerhez képest már nem. Egy morzsa kenyér egy embernek elhanyagolható mennyiség, egy hangyának nem. Látjuk, önmagában semmi sem elenyésző, csak egy másik ugyanolyan jellegű mennyiséghez képest. (Tallért tallérral, kenyeret kenyérrel hasonlítunk össze, bár az utóbbi példából ez nem világlik ki, mégis a morzsát azzal a kenyérmennyiséggel vetjük össze, amellyel egy ember illetve egy hangya jóllakna.) Csak később leszünk olyan matematikai eszközök birtokában, amelyekkel pontos értelmet adhatunk az "ugyanolyan jellegű mennyiség" fogalmának; mivel a mennyiségeket általában mérőszámokkal is lehet jellemezni, most a valós számok körében fogalmazzuk meg a mondanivalónkat.

Az elenyésző vagy elhanyagolható önmagában nem értelmes fogalom. Így már igen: "ez elenyésző ahhoz képest", "ez elhanyagolható amellett", vagy más szavakkal ugyanez: "ez sokkal kisebb annál". Mindig rajtunk áll – és általában a feladat sugallja –, mikor tekintünk valamit valami másnál sokkal kisebbnek. Van, amikor egy mennyiség ötvened részét már elhanyagoljuk, van, amikor csak az ezred részét. Abban mindenesetre megállapodhatunk, hogy egy mennyiség tized része már sosem elenyésző az egészhez viszonyítva.

Definíció *Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $r < 0,1$. Azt mondjuk, hogy $a \in \mathbb{R}_0^+$ (r* ***szerint)*** ***sokkal kisebb, mint*** *$b \in \mathbb{R}_0^+$, ha kisebb vagy egyenlő, mint rb; jelölésben:*

$$a \underset{r}{\ll} b \quad \text{pontosan akkor, ha} \quad a \le rb.$$

A sokkal kisebbnek lenni reláció $\mathbb{R}_0^+$-n, azonban nem rendezés, mert se nem reflexív, se nem antiszimmetrikus; viszont tranzitív.

Egyszerű tény, hogy

$$r \underset{r}{\ll} 1, \qquad 0 \underset{r}{\ll} a \quad (a \in \mathbb{R}_0^+).$$

A reláció fontos tulajdonságait a következőképp foglaljuk össze, az egyszerűség kedvéért $\underset{r}{\ll}$ helyett csak $\ll$-t írva.

Állítás *Legyen $a, b \in \mathbb{R}_0^+$, $a \ll b$. Ekkor*

(i) ha $b \ne 0$, akkor $a < b$; ha $b = 0$, akkor $a = 0$;
(ii) ha $b \ne 0$, akkor $\frac{a}{b} \ll 1$, és ebből következik is, hogy $a \ll b$;
továbbá minden $c, d, a', b' \in \mathbb{R}_0^+$ esetén
(iii) ha $b < b'$ illetve $a' < a$, akkor $a \ll b'$ illetve $a' \ll b$;
(iv) ha $c \ll d$, akkor $a + c \ll b + d$;
(v) ha $c \le d$, akkor $ac \ll bd$.

Ezeknek az összefüggéseknek a bizonyítása rendkívül egyszerű feladat. Azt jegyezzük csak meg, hogy (i) alapján (iii) mondja ki a reláció tranzitivitását.

Lényeges, hogy csak nemnegatív számokra értelmeztük a sokkal kisebb relációt. Véssük eszünkbe továbbá, hogy a $\le$ rendezésre megszokott jó néhány formula nem érvényes a $\ll$ relációra. Például, ha $a \ll b$ és $c \in \mathbb{R}^+$, általában $a + c \ll b + c$ nem teljesül.

19.2. Az imént tárgyalt fogalomra támaszkodva adhatunk értelmet annak is, mikor tekintünk két mennyiséget körülbelül egyenlőnek: akkor, ha a különbségük elenyésző hozzájuk képest.

Definíció *Azt mondjuk, hogy $a \in \mathbb{R}$ és $b \in \mathbb{R}$ (r* ***szerint) körülbelül egyenlő****, ha $|a - b|$ (r szerint) sokkal kisebb $|a| + |b|$-nél; jelölésben:*

$$a \underset{r}{\approx} b \quad \text{pontosan akkor, ha} \quad |a - b| \underset{r}{\ll} |a| + |b|.$$

Ismét relációt határoztunk meg, most $\mathbb{R}$-en. Azonban ez nem ekvivalencia, mert nem tranzitív. Viszont reflexív és szimmetrikus. A reláció fontos tulajdonságait a következőképp foglaljuk össze, ismét elhagyva az r-et a jelek alól.

Állítás *Legyen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ és $h \in \mathbb{R}^+$. Ekkor*

(i) $a \approx a$;
(ii) ha $a \approx b$, akkor $b \approx a$;
(iii) ha $a \approx b$ akkor vagy $a = b = 0$ vagy $a \neq 0$, $b \neq 0$ és $\operatorname{sign} a = \operatorname{sign} b$;
(iv) az $a \neq 0$, $b \neq 0$ esetben $a \approx b$ pontosan akkor teljesül, ha $\frac{a}{b} \approx 1$;
(v) ha $0 < a \approx b$ és $0 < c \approx d$, akkor $a + c \approx b + d$;
(vi) ha $a \approx b$, akkor $ac \approx bc$;
(vii) ha $h \ll |a|$, akkor $a \pm h \approx a$.

Bizonyítás Tulajdonképpen mindegyik összefüggés elemien igazolható. Példaként levezetünk kettőt.

(v)

$$|(a+c) - (b+d)| = |(a-b) + (c-d)| \leq |a-b| + |c-d| \leq$$
$$\leq r(a+b) + r(c+d) = r(a+b+c+d).$$

(vii) Mivel $|a| \leq |a \pm h| + h$ és $h < r|a|$, azt kapjuk, hogy

$$|(a \pm h) - a| = h \leq r|a| \leq r(|a \pm h| + h).$$

Véssük jól az eszünkbe, hogy (iii) szerint nemnulla szám nem lehet a nullával körülbelül egyenlő. Ezt azért fontos hangsúlyozni, mert fizikai alkalmazásokban gyakran látunk ilyet: $x \approx 0$, holott $x \neq 0$. Ennek azonban nem adható értelem, mint ahogy annak sem, hogy valami önmagában elenyésző volna. Az $x \approx 0$ kijelentésen azt értik, hogy megnevezetlenül, kimondatlanul ott van egy y, amelyre $|x| \ll |y|$; így viszont $y \pm x \approx y$, amit helyetelenül úgy fejeznek ki, hogy x körülbelül nulla.

19.3. A fizikában a mérési eredmények nem pontosak. A mennyiségeket mindig hibakorláttal együtt adják meg, például így: $16,23 \pm 0,5$; általános formában $e \pm h$. Ez azt jelenti, hogy a mért mennyiség értéke az $[e-h, e+h]$ intervallumba esik. A mérés akkor megbízható, akkor ad valami információt, ha a h **hiba** sokkal kisebb az e **átlagérték** abszolútértékénél, vagy másképp fogalmazva, a $\frac{h}{|e|}$ **relatív hiba** sokkal kisebb egynél. Itt és a következőkben mindig feltesszük, hogy a szóban forgó átlagértékekek nem nullák.

Ha $h \ll |e|$, akkor $e \pm h \approx e$, sőt bármely $x \in [e-h, e+h]$ esetén $x \approx e$. Írjuk át az előző formulát: $2h \ll 2|e|$, azaz $(e+h) - (e-h) \ll |(e+h) + (e-h)|$, ami pontosan azt jelenti, hogy $e - h \approx e + h$.

Igen fontos kérdés a hibaterjedés: ismerjük két mennyiség értékét bizonyos hibával, milyen pontosan tudjuk akkor a két mennyiség összegének és szorzatának az értékét?

Fogalmazzunk így: egy szám az $[e-h, e+h]$ intervallumba esik, egy másik szám pedig a $[d-k, d+k]$ intervallumba, és $h \ll |e|$, $k \ll |d|$. Milyen intervallumba esik a két szám összege és szorzata?

(i) A két szám összege az intervallumok komplexus-összegében található meg: az $[(e+d)-(h+k),(e+d)+(h+k)]$ intervallumban. A 19.1. állítás (iv) pontja értelmében, ha e és d azonos előjelű, akkor $h+k \ll |e+d|$. Továbbá

$$\frac{h+k}{|e+d|} = \frac{h}{|e+d|} + \frac{k}{|e+d|} < \frac{h}{|e|} + \frac{k}{|d|}.$$

Tehát ekkor az összeg relatív hibája kisebb, mint a relatív hibák összege, és még mindig sokkal kisebb egynél.

(ii) A két szám szorzata az intervallumok komplexus-szorzatában található meg. Ahhoz, hogy mondhassunk valamit, megint fel kell tennünk, hogy e és d azonos előjelű; az egyszerűbb írásmód kedvéért most azt vesszük, hogy $e > 0$, $d > 0$. Ekkor a szorzat-intervallum $[(ed+hk)-(ek+dh),(ed+hk)+(ek+dh)]$. Így a szorzat relatív hibája,

$$\frac{ek+dh}{ed+hk} < \frac{h}{e} + \frac{k}{d}$$

itt is kisebb, mint a relatív hibák összege. Azt azonban már nem állíthatjuk, hogy ez is sokkal kisebb volna egynél (ha körülbelül egyenlő számokat szorzunk össze, nem feltétlenül kapunk körülbelül egyenlő számokat, lásd a 19.4.4. feladat (ii) pontját). Utána is járhatunk: $h \le re$, $k \le rd$, így $dh \le red$, $ek \le red$, tehát

$$\frac{ek+dh}{ed+hk} \le \frac{2red}{ed+hk} = r\left(1 + \frac{ed-hk}{ed+hk}\right).$$

A zárójelben levő mennyiség határozottan nagyobb, mint egy, sőt körülbelül egyenlő 2-vel (de kisebb 2-nél). Azt állíthatjuk mindösze, hogy a szorzat relatív hibája sokkal kisebb 2-nél.

19.4. Feladatok

1. Különböző előjelű számok nem lehetnek körülbelül egyenlők.

2. Ha $a \approx b$, akkor $a < b$ lehetséges, viszont $a \approx b$ és $a \ll b$ kizárják egymást.

3. Ha $a \approx b$ és $0 < a \le b$, akkor $b \le \dfrac{1+r}{1-r}$.

4. A $\ll$ és a $\approx$ reláció nem teljesíti a $<$ és az $=$ sok közös tulajdonságát. Hozzunk példát arra, hogy

(i) $a \approx b$ és $c \ll d$, viszont $a+c \ll b+d$ és $ac \ll bd$ nem igaz;

(ii) $a \approx b$ és $c \approx d$, viszont $ac \approx bd$ nem igaz;

(iii) $a \approx b$ és $c \approx d$, viszont $a+c \ll b+d$.

5. Mely számoknál sokkal kiseb 1?

6. Legyen $a < b$ és $a \approx b$. Mutassuk meg, hogy bármely $x, y \in [a,b]$ esetén $x \approx y$.

7. Legyen a nemnulla valós szám. Melyik az a legbővebb intervallum, amelynek minden x elemére $a \approx x$ teljesül?

8. Legyen $0 < h \ll e$, $0 < k \ll d$. Igazoljuk, hogy $ed - hk \approx ed + hk$.

9. Mit tudunk mondani az n-ik hatványozás hibájáról?

10. Mit tudunk mondani a négyzegyökvonás hibájáról?

11. Értelmezzük, mit jelentsen az, hogy egy valós szám alig kisebb egy másiknál.

12. Értelmezzük a körülbelül egyenlő fogalmát így: $a \approx b$ ha $|a-b| \leq \min\{|a|,|b|\}$. Írjuk le ennek a relációnak a tulajdonságait.

V. HALMAZOK SZÁMOSSÁGA

20. Számosságok összehasonlítása

20.1. Mit jelenthet az, hogy egy halmaznak ugyanannyi vagy több eleme van, mint egy másiknak? Véges halmazokra igen intuitív a válasz, a mindennapi élet jól ismert fogalma: ugyanannyi ceruza van itt, mint toll ott, több szilva van itt, mint alma ott. Az elemek mennyiségének összehasonlítását megfeleltetéssel végezzük. Itt egy ceruza, mellé teszünk onnan egy tollat, megint egy ceruza, emellé is teszünk egy tollat, és így tovább. A természetes számok bevezetésénél már utaltunk arra, hogy a természetes számok maguk az azonos "számoságú" véges halmazok absztrakciói. Kézenfekvőnek látszik tehát az alábbi meghatározás.

Definíció *Az A és B halmaz* ***azonos számosságú****, ha van $A \to B$ bijekció.*

Nyilván minden A halmaz azonos számosságú önmagával, hiszen $\mathrm{id}_A : A \to A$ bijekció.

Természetesen, ha van $A \to B$ bijekció, akkor van $B \to A$ bijekció is, az előbbi inverze.

Mivel bijekciók kompozíciója is bijekció, egyszerű tény az is, hogy ha A azonos számosságú B-vel és B azonos számosságú C-vel, akkor A és C is azonos számosságú.

Az azonos számosság tehát rendelkezik a reflexív, szimmetrikus és tranzitív tulajdonsággal. Hajlamosak volnánk azt mondani, hogy ez ekvivalencia-reláció, de nem az, mert nem reláció: nem halmazon értelmeztük! Nincs olyan halmaz, amelynek elemei volnának az összes halmazok.

Mindazonáltal használjuk az $A \sim B$ jelet arra, hogy A és B azonos számosságú.

20.2. Az a képzetünk, hogy egy részhalmazban nem lehet több elem, mint az egészben. Ezért kézenfekvőnek látszik az alábbi meghatározás.

Definíció *Az A halmaz* ***legfeljebb olyan számosságú*** *mint a B halmaz (B* ***legalább olyan számosságú****, mint A), ha van $A \to B$ injekció, azaz A azonos számoságú a B egy részhalmazával.*

Azt, hogy A legfeljebb olyan számosságú, mint B, így jelöljük: $A \preceq B$. Ilyenkor azt is szoktuk mondani, hogy A kisebb vagy egyenlő számosságú, mint B.

Az üres halmaz minden halmaznál kisebb vagy egyenlő számosságú.

Ha $A \subset B$, akkor $A \preceq B$. Speciálisan nemüres halmazok egyesítése legalább olyan számosságú, mint a szóban forgó halmazok akármelyike.

Ha van $B \to A$ szürjekció, akkor $A \preceq B$ (lásd a 10.9.12. feladatot). Ezért nemüres halmazok Descartes-szorzata legalább olyan számosságú, mint a szóban forgó halmazok akármelyike.

Nyilván, ha $A \sim B$, akkor $A \preceq B$; speciálisan minden A halmazra $A \preceq A$.

Injekciók kompozíciója injekció, ezért az is egyszerű tény, hogy ha $A \preceq B$ és $B \preceq C$, akkor $A \preceq C$.

Ezek alapján a $\preceq$ összefüggés rendezésszerűséget sejtet (nem reláció, mert nincs univerzum). Reflexív és tranzitív. Vajon antiszimmetrikus-e? Nem. Ugyanis $A \preceq B$ és $B \preceq A$ teljesül, ha $A \sim B$, anélkül is, hogy A és B megegyeznének. Legfeljebb tehát azt várhatjuk el, amit a következő úgynevezett **Schröder–Bernstein-tétel** ki is mond.

Állítás *Ha $A \preceq B$ és $B \preceq A$, akkor $A \sim B$.*

Bizonyítás Legyen $i : A \to B$ és $j : B \to A$ injekció. Meg kell mutatnunk, hogy van $A \to B$ bijekció. Ha $E \subset A$ olyan, hogy

$$j[B \setminus i[E]] = A \setminus E, \tag{(*)}$$

akkor az

$$A \to B, \quad x \mapsto \begin{cases} i(x) & \text{ha } x \in E, \\ j^{-1}(x) & \text{ha } x \in A \setminus E \subset \mathrm{Ran} j \end{cases}$$

függvény triviálisan bijekció. Belátjuk, hogy van olyan E halmaz, amelyre $(*)$ teljesül; nevezetesen a

$$\mathcal{H} := \{H \in \mathcal{P}(A) \mid j[B \setminus i[H]] \subset A \setminus H\}$$

jelöléssel

$$E := \bigcup \mathcal{H} = \bigcup_{\{H \in \mathcal{H}\}} H.$$

Ugyanis ekkor

$$i[E] = \bigcup_{\{H \in \mathcal{H}\}} i[H], \qquad B \setminus i[E] = \bigcap_{\{H \in \mathcal{H}\}} (B \setminus i[H]),$$

$$j(B \setminus i[E]] \subset \bigcap_{\{H \in \mathcal{H}\}} j[B \setminus i[H]] \subset \bigcap_{\{H \in \mathcal{H}\}} (A \setminus H) = A \setminus \bigcup_{\{H \in \mathcal{H}\}} H = A \setminus E,$$

vagyis E hozzátartozik $\mathcal{H}$-hoz, és nyilván $\mathcal{H}$-nak a legbővebb eleme.

Azt kell már csak megmutatnunk, hogy $j[B \setminus i[E]] \supset A \setminus E$, vagyis $F := A \setminus j[B \setminus i[E]] \subset E$. Ehhez elég belátni, hogy $F \in \mathcal{H}$, hiszen E a $\mathcal{H}$ legbővebb eleme. Mivel $j[B \setminus i[E]] \subset A \setminus E$, az igaz, hogy $E \subset A \setminus j[B \setminus i[E]] = F$, amiből $B \setminus i[F] \subset B \setminus i[E]$, és így $j[B \setminus i[F]] \subset j[B \setminus i[E]] = A \setminus F$, vagyis F a $\mathcal{H}$ eleme; ezzel befejeztük a bizonyítást.

20.3. A $\preceq$ "majdnem rendezés" láncszerű, azaz bármely két halmaz összehasonlítható számosság szerint.

Állítás *Tetszőleges A és B halmazokra $A \preceq B$ vagy $B \preceq A$ teljesül.*

Bizonyítás Nyilvánvalóan igaz ez, ha a halmazok egyike üres. Tegyük fel tehát, hogy sem A sem B nem üres. Legyen $\mathcal{F}$ az $A \rightarrowtail B$ injekciók összessége. $\mathcal{F}$ nem üres, hiszen van A-nak és B-nek legalább egy a illetve egy b eleme, és az $a \mapsto b$ hozzárendelés az $\mathcal{F}$ eleme. Vezessünk be rendezést $\mathcal{F}$-en a függvények körében szokásos módon a tartalmazással. Bármely $\mathcal{F}$-beli láncnak a láncban levő függvények egyesítése a lánc felső határa (lásd a 8.11.7. feladatot). Zorn lemmája szerint tehát van maximális elem $\mathcal{F}$-ben, legyen ez $i : A \rightarrowtail B$. Mivel i maximális, $\operatorname{Dom} i = A$ vagy $\operatorname{Ran} i = B$. Az első esetben $A \preceq B$, a második esetben $B \preceq A$, hiszen ekkor $i^{-1} : B \to A$ injekció.

20.4. A Schröder–Bernstein-tétel alapján ha $A \preceq B$ és $A \not\sim B$, akkor $B \preceq A$ nem állhat fenn. Ezért jó az alábbi meghatározás.

Definíció *Az A halmaz **kisebb számosságú**, mint a B halmaz (B **nagyobb számosságú**, mint A), jelben $A \prec B$, ha $A \preceq B$ és $A \not\sim B$.*

Más szóval A kisebb számosságú B-nél, ha A azonos számosságú a B egy részhalmazával, de B nem azonos számosságú az A egyetlen részhalmazával sem. Még másképp ugyanez: van $A \to B$ injekció, de nincs $B \to A$ injekció (vagy $A \neq \emptyset$ esetén van $B \to A$ szürjekció, de nincs $A \to B$ szürjekció).

20.5. A félreértések elkerülése végett sietünk megjegyezni, hogy amennyire kielégíti a várakozásunkat a számosságok ilyen öszzehasonlítása, annyira meglepő eredménnyel is szolgál. Előfordulhat ugyanis, hogy egy halmaz valódi részhalmaza azonos számosságú az egész halmazzal. Ez bizony egy kicsit ellentmond annak az elképzelésünknek, hogy egy valódi részhalmazban kevesebb elem van, mint az egészben. Hozzá kell szoknunk ehhez a furcsasághoz. Íme két példa.

(i) $\mathbb{N}$ és $\mathbb{Z}$ azonos számosságú, mert

$$\mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \qquad n \mapsto \begin{cases} \dfrac{n+1}{2} & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ -\dfrac{n}{2}+1 & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$$

bijekció.

(ii) $]-1,1[$ és $\mathbb{R}$ azonos számosságú, mert

$$]-1,1[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{x}{1-|x|}$$

bijekció.

20.6. Van legkisebb számosságú halmaz: az üres halmaz. Vajon létezik-e legnagyobb számosságú halmaz? Amint ez a következő úgynevezett **Cantor-féle tételből** kiderül, nem.

Állítás *Bármely halmaz kisebb számosságú, mint a hatványhalmaza.*

Bizonyítás Ez igaz az üres halmazra, mert $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ nem üres. Legyen A nemüres halmaz. $A \to \mathcal{P}(A)$, $x \mapsto \{x\}$ injekció, ezért $A \preceq \mathcal{P}(A)$. Azt kell megmutatnunk, hogy $A \not\sim \mathcal{P}(A)$. Tegyük fel ennek az ellenkezőjét, vagyis hogy létezik egy $s : A \to \mathcal{P}(A)$ szürjekció. Legyen

$$B := \{x \in A \mid x \notin s(x)\}.$$

Minthogy $B \in \mathcal{P}(A)$ és s szürjekció, van olyan $b \in A$, hogy $s(b) = B$. Két eset lehet: b benne van B-ben vagy nincs benne B-ben. Ha $b \in B = s(b)$, akkor B definíciója szerint $b \notin B$, ami lehetetlen. Ha $b \notin B = s(b)$, akkor ismét a B definíciója szerint $b \in B$, ami szintén lehetetlen. Mindenképpen ellentmondásra jutunk, tehát nem létezik $A \to \mathcal{P}(A)$ szürjekció, azaz $A \prec \mathcal{P}(A)$.

20.7. Feladatok

1. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\{1, 2, \ldots, n\}$ kisebb számosságú, mint $\mathbb{N}$, és $\mathbb{N} \setminus \{1, 2, \ldots, n\}$ azonos számosságú $\mathbb{N}$-nel.

2. A $]0,1[$ intervallum azonos számosságú $\mathbb{R}^+$-szal ($x \mapsto \frac{x}{1-x}$).

3. Ha $A \preceq B$ ($A \prec B$) és $B \subset C$, akkor $A \preceq C$ ($A \prec C$).

4. Legyenek A, B, C nemüres halmazok, és emlékezzünk, hogy A^C a $C \to A$ függvények összessége.

(i) Ha $A \preceq B$, akkor $A^C \preceq B^C$,

(ii) $A^{B \cup C} \sim A^B \times A^C$,

(iii) $(A \times B)^C \sim A^C \times B^C$.

5. Igazoljuk, hogy $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) \sim \{1, 2, 3, 4\}$.

6. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $(A_k \mid k = 1, \ldots, n)$ nemüres és nem egyelemű halmazok indexezett rendszere. Ekkor $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \preceq \mathop{\times}_{k=1}^{n} A_k$. (Elég diszjunkt halmazokat tekintenünk. Legyen $a_k, b_k \in A_k$, $a_k \neq b_k$; az

$$A_k \to \mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i, \qquad x \mapsto \begin{cases} (a_1, \ldots, x, \ldots, a_n) & \text{ha } x \neq a_k, \\ (b_1, \ldots, x, \ldots, b_n) & \text{ha } x = a_k \end{cases}$$

olyan injekciók, amelyek összeillesztése injekció.)

7. Legyen A halmaz, és $(A_i \mid i \in I)$ olyan diszjunkt halmazrendszer, hogy $A_i \preceq A$ minden $i \in I$ esetén. Ekkor $\bigcup_{i \in I} A_i \preceq I \times A$. (Létezik $h_i : A_i \to A$ injekció; ekkor $A_i \to I \times A$, $x \mapsto (i, h_i(x))$ injekció.)

21. Véges halmazok

21.1. Már használtuk a véges halmaz fogalmát (lásd 14.6.). Most ugyanezt a számosság oldaláról így fogalmazhatjuk meg: egy nemüres H halmaz **véges**, ha van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ azonos számosságú H-val. Ekkor azt mondjuk, hogy A **számossága** n, vagy azt, hogy A n elemű. Az üres halmazt is véges számosságúnak vesszük, számossága a nulla.

A természetes számok bevezetésénél azt láttuk, hogy az $n \neq 0$ természetes szám egyenlő az $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ halmazzal, ezért szerepelt ez a véges számosság definíciójában. A szokásos szemléletünkhöz azonban jobban illeszkedik, ha helyette a vele nyilvánvalóan azonos számosságú $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazt vesszük.

Magától értetődőnek látszik, hogy az $\{1, 2, \ldots, n\}$ valódi részhalmazai szintén végesek és n-nél kisebb számosságúak. Ezt azonban be kell bizonyítanunk.

Állítás *Egy véges halmaz bármely valódi részhalmaza szintén véges és kisebb számosságú, mint maga a halmaz.*

Két részre bontva átfogalmazzuk az állítást.

1) Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ bármely nemüres valódi részhalmazához van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy a részhalmaz m elemű.

2) Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ bármely valódi részhalmaza kisebb számosságú, mint $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Bizonyítás Mindkét részt teljes indukcióval bizonyítjuk.

1) (i) $n = 1$ esetén az állítás nyilvánvalóan igaz.

(ii) Tegyük fel, hogy igaz n-re, és legyen E az $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ valódi, nemüres részhalmaza.

– Ha E az $\{1, 2, \ldots, n\}$-nek is valódi, nemüres részhalmaza, akkor az indukciós feltevés szerint m elemű, ahol $m < n$; persze $m < n + 1$ szintén fennál.

– Ha $E = \{1, 2, \dots, n\}$, akkor n elemű, és $n < n + 1$.

– Ha $n+1 \in E$, akor legyen $k \in \{1, 2, \dots, n+1\} \setminus E$. Ilyen k van, mert E valódi részhalmaz, a különbség nem üres. Nyilván $k \neq n + 1$. Az

$$E \to \{1, 2, \dots, n\}, \qquad i \mapsto \begin{cases} i & \text{ha } i \neq n+1, \\ k & \text{ha } i = n+1 \end{cases}$$

függvény injektív. Ezért E vagy n számosságú, ami kisebb $(n + 1)$-nél, vagy kisebb számosságú n-nél, de akkor az indukciós feltevés szerint m számosságú, ahol $m < n$, és természetesen $m < n + 1$.

2) (i) $n = 2$ esetén az állítás igaz, mert $\{1, 2\}$ bármely nemüres, valódi részhalmaza egy elemű, és az kisebb számosságú $\{1, 2\}$-nél (egyetlen $\{1, 2\} \to \{1\}$ függvény létezik, és az nem bijekció).

(ii) Tegyük fel, hogy igaz n-re, és azt is, hogy nem igaz az $\{1, 2, \dots, n + 1\}$ valamely nemüres, valódi E részhalmazára, azaz létezik egy $b : \{1, 2, \dots, n+1\} \to E$ bijekció.

– Ha $n+1 \notin E$, vagyis $E \subset \{1, 2, \dots, n\}$, akkor b leszűkítése bijekció $\{1, 2, \dots, n\}$ és annak valódi részhalmaza, $E \setminus b(n+1)$ között, ami lehetetlen az indukciós feltevés szerint.

– Ha $n + 1 \in E$, akkor $E \setminus \{n + 1\}$ az $\{1, 2, \dots, n\}$ valódi részhalmaza, és két esetet különböztetünk meg: az elsőben $b(n + 1) = n + 1$, ami azt jelenti, hogy b leszűkítése bijekció $\{1, 2, \dots, n\}$ és $E \setminus \{n+1\}$ között, de ez lehetetlen az indukciós feltevés szerint; a másodikban $b^{-1}(n + 1) =: k \in \{1, 2, \dots, n\}$, és így

$$\{1, 2, \dots, n\} \to E \setminus \{n + 1\}, \qquad i \mapsto \begin{cases} b(i) & \text{ha } i \neq k, \\ b(n+1) & \text{ha } i = k \end{cases}$$

bijekció, ami megint lehetetlen.

Mindenképpen ellentmondásra jutottunk, tehát nincs olyan valódi nemüres részhalmaza $\{1, 2, \dots, n + 1\}$-nek, amely ne volna kisebb számosságú. ■

A most bebizonyított állítás szerint tehát $m < n$ esetén $\{1, 2, \dots, m\}$ kisebb számosságú, mint $\{1, 2, \dots, n\}$. Ennek folyománya, hogy egy véges halmaz nem lehet m elemű is, n elemű is, ha $m \neq n$.

21.2. Jelölje $s(H)$ a H véges halmaz számosságát. Azt tudjuk már, hogy
(i) $s(E) \leq s(H)$, ha $E \subset H$, és $s(E) < s(H)$, ha $E \subset H$, $E \neq H$.
Mivel $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ esetén

$$\{1, 2, \dots, m + n\} \setminus \{1, 2, \dots, m\} \to \{1, 2, \dots, n\}, \quad i \mapsto i - m$$

bijekció, megállapíthatjuk azt is, hogy
(ii) ha $E \subset H$, akkor $s(H \setminus E) = s(H) - s(E)$,
(iii) bármely A és B véges halmaz esetén $A \cup B$ is véges, és

$$s(A \cup B) \leq s(A) + s(B),$$

és egyenlőség pontosan akkor áll, ha A és B diszjunktak.

Ezért véges sok véges halmaz egyesítése is véges, és ha a halmazok diszjuktak, akkor az egyesítésük számossága a számosságok összege:

$$s\left(\biguplus_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} s(B_k).$$

Ebből származtatjuk a következő szokszor jól felhasználható tényt.

Állítás *Ha A és B véges halmazok és $f : A \to B$ olyan szürjekció, hogy $\overset{-1}{f}(\{b\})$ számossága ugyanaz az m szám a B minden b elemére, akkor – lévén $A = \biguplus_{b\in B} \overset{-1}{f}(\{b\})$ –*

$$s(A) = m\, s(B).$$

21.3. 1. Állítás *Ha A és B véges halmaz, akkor*

$$s(A \times B) = s(A)s(B).$$

Bizonyítás Ha a két halmaz közül az egyik üres, akkor nyilván igaz az állítás. Ha egyik sem üres, akkor azzal bizonyítunk, hogy

$$\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, mn\}, \quad (i, k) \mapsto i + (k-1)n$$

bijekció.

2. Állítás *Ha A és B nemüres véges halmaz, akkor*

$$s(B^A) = s(B)^{s(A)}.$$

Bizonyítás B^A az $A \to B$ függvények halmaza. Ha $A = \{1, \dots, m\}$, akkor B^A a B-nek önmagával vett m-szeres Descartes-szorzata. Ezért az előző állítás alapján ha $m > 2$,

$$s(B^m) = s(B \times B^{m-1}) = s(B)s(B^{m-1}) = s(B)s(B)s(B^{m-2}) = \dots = s(B)^m.$$

21.4. Feladatok

1. Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy egy véges A halmaz hatványhalmaza is véges, és $s(\mathcal{P}(A)) = 2^{s(A)}$.

2. Igazoljuk, hogy $\mathbb{N}$ nem véges, mert van valódi részhalmaza, amely vele azonos számosságú, illetve valódi részhalmaza egy vele azonos számosságú halmaznak.

3. Igaz-e, hogy bármely végtelen (azaz nem véges) halmaznak van n elemű részhalmaza, ahol n tetszőleges természetes szám?

4. Mutassuk meg, hogy $\{(i,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq k \leq n\}$ és $\{(i,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i < k \leq n\}$ számossága $\frac{n(n+1)}{2}$ illetve $\frac{n(n-1)}{2}$.

22. Megszámlálható halmazok

22.1. A nem véges halmazokat **végtelennek** hívjuk. A végtelennek különféle "fokozatai" vannak: kisebb és nagyobb számosságú végtelen halmazok is léteznek. Tudjuk például, hogy egy halmaz hatványhalmaza nagyobb számosságú a halmaznál.

$\mathbb{N}$ végtelen halmaz, mert például azonos számosságú $\mathbb{Z}$-vel, amelynek valódi részhalmaza (lásd 20.5.(ii)).

Definíció *Egy halmazt **megszámlálhatónak** nevezünk, ha $\mathbb{N}$-nel azonos számosságú.*

Állítás *Minden végtelen halmaznak van megszámlálható részhalmaza.*

Bizonyítás Legyen A végtelen halmaz. Vegyük egy elemét, jelölje ezt a_1. Ekkor $A \setminus \{a_1\}$ is végtelen halmaz (mert ellenkező esetben A az $A \setminus \{a_1\}$ és az $\{a_1\}$ véges halmazok uniójaként véges lenne). Legyen $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$, az a_3 pedig tartozzon az $A \setminus \{a_1, a_2\}$ végtelen halmazhoz. Eljárásunkat folytatva minden n természetes számhoz megadjuk az A egy a_n elemét úgy, hogy $a_m \neq a_n$, ha $m \neq n$. Ezért $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ az A megszámlálható részhalmaza. ■

Azt tudjuk, hogy minden véges számosság kisebb a megszámlálhatónál (hiszen $\{1, \ldots, n\}$ része $\mathbb{N}$-nek, és nem azonos számosságúak, mert $\mathbb{N}$ nem véges). Ennek a fordítottja is igaz: megszámlálhatónál kisebb számosságú halmaz véges. Tegyük fel ugyanis, hogy $H \prec \mathbb{N}$ és H végtelen. Ekkor az előző állítás szerint van megszámlálható részhalmaza, azaz $\mathbb{N} \preceq H$, ami ellentmondás.

Szemléletesen azt mondhatjuk, hogy a megszámlálható a legkisebb végtelen számosság.

22.2. Állítás *Két megszámlálható halmaz Descartes-szorzata megszámlálható.*

Bizonyítás Adjuk meg a

$$D_n := \left\{ k \in \mathbb{N} \;\middle|\; \frac{n(n-1)}{2} < k \leq \frac{n(n+1)}{2} \right\}$$

halmazokat. Hogy jól lássuk, néhányat konkrétan le is írunk:

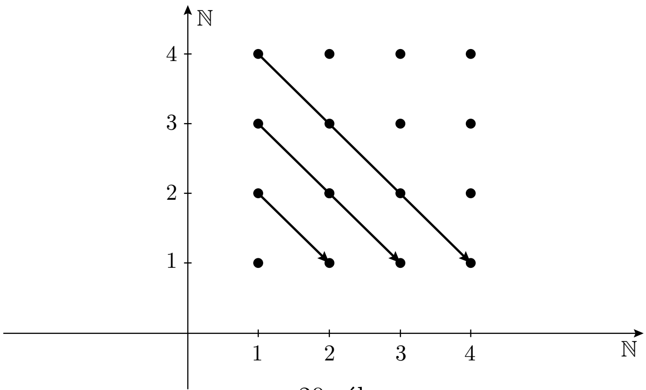
$$D_1 = \{1\}, \quad D_2 = \{2,3\}, \quad D_3 = \{4,5,6\}, \quad D_4 = \{7,8,9,10\}.$$

Könnyű ellenőrizni, hogy D_n n elemű, és $\mathbb{N} = \biguplus\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n$. Ezekkel a halmazokkal felépíthetjük a

$$b : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad k \mapsto \left(k - \frac{n(n-1)}{2}, \frac{n(n+1)}{2} - k + 1 \right) \qquad (k \in D_n, n \in \mathbb{N})$$

leképezést, amely nyilvánvalóan injekció, és szürjekció is, mert ha $(i,j) \in \mathbb{N}$, akkor az $n := i + j - 1$ és $k := i + \dfrac{n(n-1)}{2} \in D_n$ definícióval $b(k) = (i,j)$. ■

Szemléletessé tehetjük b konstrukcióját. Reprezentáljuk $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-et szokásosan a lap síkjában, amint azt a 20. ábra mutatja. A D_n elemeihez rendelt számpárokat nyilak foglalják egybe, mutatva a hozzárendelés sorrendjét.



20. ábra

Ezek után természetesen az is igaz, hogy
(i) véges sok megszámlálható halmaz Descartes-szorzata megszámlálható,
(ii) nemüres véges halmaz és megszámlálható halmaz Descartes-szorzata megszámlálható.

Jó gyakorlás az olvasónak ezeket bebizonyítani!

22.3. Állítás *Megszámlálható sok megszámlálható halmaz egyesítése megszámlálható.*

Bizonyítás Legyen $(A_n \mid n \in \mathbb{N})$ olyan halmazrendszer, amelynek minden tagja megszámlálható. Ekkor minden n-re van egy $b_n : A_n \to \mathbb{N}$ bijekció. Ezekkel

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \qquad (n, m) \mapsto b_n(m) \tag{$*$}$$

szürjekció, tehát az unió legfeljebb megszámlálható (mert $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ megszámlálható), és legalább megszámlálható, hiszen nem lehet kisebb számosságú, mint az egyes halmazok számossága. ■

Jó megjegyezni, hogy ha a halmazrendszer diszjunkt, akkor a $(*)$ leképezés bijekció.

Ezek után természetesen az is igaz, hogy

(i) véges sok megszámlálható halmaz egyesítése is megszámlálható,

(ii) megszámlálható sok nemüres diszjunkt véges halmaz egyesítése megszámlálható.

Kérjük az olvasót, járjon utána, hogy e kijelentések igazak.

22.4. Állítás *Bármely végtelen A és legfeljebb megszámlálható M halmaz esetén $A \cup M \sim A$.*

Bizonyítás Legyen S az A-nak megszámlálható részhalmaza. Ekkor $S \cup M$ is megszámlálható, létezik tehát egy $b : S \to S \cup M$ bijekció. Ezzel

$$A \to A \cup M, \quad x \mapsto \begin{cases} x & \text{ha } x \in A \setminus S, \\ b(x) & \text{ha } x \in S \end{cases}$$

szürjekció, tehát $A \cup M \preceq A$; az meg nyilvánvaló, hogy $A \preceq A \cup M$. ■

Az is igaz tehát, hogy ha A végtelen halmaz és B véges, akkor $A \setminus B \sim A$.

22.5. Az előbbi két pont szerint megállapíthatjuk a következőket.

(i) Az egész számok halmaza megszámlálható, mert

$$\mathbb{Z} = (-\mathbb{N}) \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$$

(ezt egyébként már tudjuk máshonnan is).

(ii) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\dfrac{\mathbb{Z}}{n}$ megszámlálható, hiszen $\mathbb{Z} \to \dfrac{\mathbb{Z}}{n}$, $k \mapsto \dfrac{k}{n}$ bijekció. Ezért a racionális számok halmaza is megszámlálható, mert

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\mathbb{Z}}{n}.$$

A racionális számok “ugyanannyian” vannak, mint a természetes számok; ez legalább annyira meghökkentő, mint hogy a $]-1, 1[$ intervallumban levő számok és a valós számok ugyanannyian vannak.

22.6. Feladatok

1. Megszámlálhatók a következő halmazok:
(i) $2\mathbb{N}$ (páros természetes számok),
(ii) $2\mathbb{N}-1$ (páratlan természetes számok),
(iii) $2\mathbb{Z}$ (páros egész számok),
(iv) $2\mathbb{Z}-1$ (páratlan egész számok).

2. Mi a számossága a $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ halmaznak?

3. Van-e az $\mathbb{R}$-nek a $\mathbb{Q}$-nál bővebb olyan részhalmaza, amely megszámlálható?

4. Bizonyítsuk be, hogy egy megszámlálható halmaz összes véges részhalmazának a halmaza megszámlálható. ($\mathbb{N}$-nek az azonos véges számosságú részhalmazain a $V \mapsto \sum_{k\in V} k$ leképezés injekció.)

5. Mutassuk meg, hogy minden $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ függvényhez van olyan $\emptyset \neq H \neq \mathbb{N}$ hogy $f[H]\subset H$.

6. AZ A halmaz pontosan akkor végtelen, ha minden $F:A\to A$ függvényhez van olyan $H\subset A$, $\emptyset\neq H\neq A$, hogy $f[H]\subset H$.

23. Kontinuum-számosságú halmazok

23.1. Definíció *Egy halmazt* ***kontinuum-számosságúnak*** *nevezünk, ha $\mathbb{R}$-el azonos számosságú.*

Tudjuk már, hogy $]-1,1[$ kontinuum-számosságú (lásd 20.5.(ii)), Ebből származtathatjuk, hogy minden korlátos nyílt intervallum kontinuum-számosságú, mert

$$]-1,1[\to]a,b[,\quad x\mapsto a+\frac{b-a}{2}(x+1)$$

bijekció.

Ezután igen egyszerűen adódik, hogy minden intervallum kontinuum-számosságú, hiszen legfeljebb kontinuum-számosságú, lévén a valós számok részhalmaza, és legalább kontinuum-számosságú, mert tartalmaz korlátos nyílt intervallumot.

23.2. Kérdés, hogyan viszonylik a kontinuum-számosság a megszámlálhatóhoz. $\mathbb{N}\subset\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ "sokkal bővebb" $\mathbb{N}$-nél, mégis $\mathbb{N}\sim\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}$ "nem sokkal bővebb" $\mathbb{Q}$-nál, hiszen $\mathbb{Q}$ sűrű $\mathbb{R}$-ben; lehet, hogy $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R}$ azonos számosságú, vagyis a megszámlálható és a kontinuum-számosság ugyanaz? A válasz nemleges.

Állítás *$\mathbb{N}$ kisebb számosságú $\mathbb{R}$-nél.*

Bizonyítás $\mathbb{N}\preceq\mathbb{R}$, így csak azt kell megmutatnunk, hogy $\mathbb{N}\not\sim\mathbb{R}$. Sőt elég azt, hogy $\mathbb{N}\not\sim[0,1]$.

Tegyük fel, hogy $\mathbb{N} \sim [0,1]$, azaz létezik $s : \mathbb{N} \to [0,1]$ szürjekció. A $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ intervallumok egyikében $s(1)$ biztos nincs benne; jelölje ezt $[a_1, b_1]$. Harmadoljuk el $[a_1, b_1]$-et az előzőhöz hasonlóan; ismét kapunk egy olyan $[a_2, b_2]$ intervallumot, amelyben $s(2)$ nincs benne. Ez $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ miatt $s(1)$-et sem tartalmazza. Folytatva ezt az eljárást, minden n pozitív egész számhoz megadunk egy $[a_n, b_n]$ intervallumot úgy, hogy

– $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$,

– $s(n) \notin [a_n, b_n]$.

A Cantor-féle közösrész-tétel miatt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Legyen x ennek az eleme. Minthogy $x \in [0,1]$, van olyan $i \in \mathbb{N}$, hogy $s(i) = x$. Mivel x az összes szóban forgó intervallumhoz hozzátartozik, $s(i)$ az $[a_i, b_i]$-nek is eleme, ami ellentmondás. ■

$\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$ és $\mathbb{Q}$ megszámlálható, ezért $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \sim \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \prec (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Szavakban: a racionállis számok halmaza kisebb számosságú, mint az irracionálisaké, amely $\mathbb{R}$-rel azonos számosságú.

Vajon van-e számosság a megszámlálható és a kontinuum között, vagyis van-e olyan halmaz, amely a megszámlálhatónál nagyobb számosságú, a kontinuumnál kisebb számosságú? A kérdés a halmazelmélet szokásos axiómáinak keretén belül nem dönthető el. **Kontinuum-hipotézisnek** nevezik azt a feltételezést, hogy nincs számosság a megszámlálható és a kontinuum között.

23.3. Kontinuum-számosságú halmazok Descartes-szorzatának számosságáról szeretnénk megtudni valami. Egynél több elemű véges halmazok Descartes-szorzata nagyobb számosságú, mint a halmazok. Ugyanakkor $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ azonos számosságú $\mathbb{N}$-nel. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ hogyan viszonylik $\mathbb{R}$-hez számosság tekintetében?

Meg fogjuk mutatni, hogy minden végtelen halmaz azonos számosságú az önmagával vett Descartes-szorzatával. Ehhez azonban még a következő egyszerű tények szükségesek.

Legyen A olyan végtelen halmaz, amelyre $A \sim A \times A$.

(i) Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A \sim A^n$, amit teljes indukcióval könnyű megmutatni.

(ii) Ha $n \in \mathbb{N}$ és $(A_k \mid k = 1, \ldots, n)$ diszjunkt halmazok olyan rendszere, hogy minden k-ra $A_k \sim A$, akkor $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \sim A^n \sim A$. Valóban, a 20.7.6. feladat alapján $A \preceq \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \preceq \mathop{\times}\limits_{k=1}^{n} A_k \sim A^n \sim A$.

(iii) ha $A \subset B$ és $A \prec B$, akkor $A \prec B \setminus A$. Tegyük ugyanis fel, hogy $B \setminus A \preceq A$. $B \setminus A$ végtelen, mert különben a 22.4. állítás és $B = (B \setminus A) \cup A$ szerint $B \sim A$ teljesülne, ami nem lehet. Így alkalmazhatjuk megint a 20.7.6. feladat eredményét: $B = (B \setminus A) \cup A \preceq (B \setminus A) \times A \preceq A \times A \sim A$, ami megint lehetetlen.

Állítás *Minden A végtelen halmazra $A \sim A \times A$.*

Bizonyítás Legyen D az A-nak megszámlálható részhalmaza (ilyen van, lásd 22.1.), és $b : D \to D \times D$ bijekció. Legyen továbbá

$$\mathcal{F} := \{f : H \to H \times H | D \subset H \subset A,\ f \text{ bijekció },\ f|_D = b\}.$$

$\mathcal{F}$-en a szoksásos rendezést vezetjük be. $\mathcal{F}$ elemei összeilleszthetők, minden láncnak van felső korlátja (kérjük az olvasót, győződjön meg arról, hogy a láncbeli függvények összeillesztése valóban $\mathcal{F}$-hez tartozik). Ezért a Zorn-lemma miatt van maximális elem $\mathcal{F}$-ben, legyen ez $m : E \to E \times E$. Megmutatjuk, hogy $E \sim A$ és ez elég.

Tegyük fel, hogy ez nem igaz, vagyis $E \prec A$ ($A \prec E$ nem lehet, mert $E \subset A$). Ekkor az állítás előtti (iii) pont szerint létezik $E' \subset A \setminus E$ úgy, hogy $E' \sim E$. Legyen $F := E \cup E'$. Mivel

$$F \times F = (E \times E) \cup (E \times E') \cup (E' \times E) \cup (E' \times E'),$$

és mind a négy halmaz a jobb oldalon $E \times E$-vel és így E-vel és egyben E'-vel azonos számosságú, az állítás előtti (ii) pont értelmében létezik $h : E' \to (E \times E) \cup (E \times E') \cup (E' \times E) \cup (E' \times E')$ bijekció. Az

$$F \to F \times F, \quad x \mapsto \begin{cases} m(x) & \text{ha } x \in E, \\ h(x) & \text{ha } x \in E' \end{cases}$$

függvény nyilvánvalóan $\mathcal{F}$-ben van és m-nek valódi kiterjesztése, ami ellentmondás. ■

Megállapíthatjuk tehát az előző eredményünk speciális eseteként, hogy $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Ezek után természetesen az is igaz, hogy

(i) véges sok kontinuum-számosságú halmaz Descartes-szorzata kontinuum-számosságú,

(ii) nemüres véges vagy megszámlálható halmaz és kontinuum-számosságú halmaz Descartes-szorzata kontinuum-számosságú.

Kérjük az olvasót, bizonyítsa be ezeket.

23.4. Állítás *Kontinuum sok kontinuum-számosságú halmaz egyesítése kontinuum-számosságú.*

Bizonyítás Legyen $(A_x \mid x \in \mathbb{R})$ olyan halmazrendszer, amelynek minden tagja kontinuum-számosságú. Ekkor minden x-re van egy $b_x : A_x \to \mathbb{R}$ bijekció. Ezekkel

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \bigcup_{x \in \mathbb{R}} A_x, \qquad (x, y) \mapsto b_x(y)$$

szürjekció, és ugyanúgy érvelhetünk, mint a 22.3-ban. ■

Ezek után természetesen az is igaz, hogy

(i) véges vagy megszámlálható sok kontinuum-számosságú halmaz egyesítése is kontinuum-számosságú,

(ii) kontinuum sok nemüres diszjunkt véges halmaz egyesítése kontinuum-számosságú.

Az olvasóra bízzuk ezek bebizonyítását.

23.5. Feladatok

1. Mutassuk meg 22.4. alapján, hogy $[a, b]$ és $]a, b[$ azonos számosságú.

2. Bizonyítsuk be, hogy $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$ kontinuum-számosságú.

3. Igazoljuk közvetlenül (nem hivatkozva arra, hogy $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kontinuum-számosságú), hogy megszámlálható sok kontinuum-számosságú halmaz egyesítése kontinuum-számosságú. (Ugyanis $\mathbb{R}$ megszámlálható sok intervallum egyesítése.)

4. Bármely A végtelen halmazra $A \times \mathbb{N} \sim A$.

5. A későbbiek során pontosan meghatározzuk a $[0, 1]$ intervallumban levő valós számok végtelen tizedestört alakban való előállítását, amelyet most megelőlegezünk (korábbi tanulmányokból ismertnek vesszük). Két különböző végtelen tizedestört pontosan akkor írja le ugyanazt a valós számot, ha véges sok számjegyük megegyezik, ezután az egyikben egy nemnulla a számjegy majd csupa nulla következik, a másikban $a - 1$ majd csupa kilences. Ennek segítségével mutassuk meg, hogy

(i) megszámlálható sok megszámlálható halmaz Descartes-szorzata kontinuum-számosságú ($(\mathbb{N})^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$),

(ii) két kontinuum-számosságú halmaz Descartes-szorzata kontinuum-számosságú ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$),

(iii) a megszámlálható kisebb számosság a kontinuumnál ($\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$),

(iv) megszámlálható halmaz hatvány-halmaza kontinuum-számosságú ($\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$).

(Útmutatás. (i) Szürjekció az az $(\mathbb{N}_0)^{\mathbb{N}} \to [0, 1]$ leképezés, amely $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$-hez azt a valós számot rendeli, amelynek n-ik tizedesjegye a_n. Injekció az az $(\mathbb{N}_0)^{\mathbb{N}} \to [0, 1]$ leképezés, amely $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$-hez azt a valós számot rendeli, amelynek $2n$-ik tizedesjegye a_n, a többi tizedesjegy nulla.

(ii) Adjuk meg az $f_1, f_2 : [0, 1] \to [0, 1]$ leképezéseket úgy, hogy $f_1(x)$ tizedesjegyei legyenek sorrendben az x páratlan helyiértékű tizedesjegyei, $f_2(x)$ tizedesjegyei legyenek sorrendben az x páros helyiértékű tizedesjegyei. Ekkor $(f_1, f_2) : [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1]$ szürjekció, és persze $[0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$, $(x, y) \to x$ szintén szürjekció.

(iii) Tegyük fel, hogy $s : \mathbb{N} \to [0, 1]$ szürjekció. Az a valós szám, amelynek a k-ik tizedesjegye 1 ha $s(k)$ k-ik tizedesjegye nem 1, és 0, ha $s(k)$ k-ik tizedesjegye 1, nincs benne s értékkészletében.

(iv) Legyen L azoknak a természetes számoknak a halmaza, amelyek tizes számrendszerű előállításában a nulla nem szerepel. Világos, hogy L nem véges, tehát megszámlálható. Vegyük az L nemüres H részhalmazát, rendezzük sorba az elemeit nagyság szerint. Rendeljük hozzá H-hoz a következő tizedestörtet: a tizedesvessző után írjuk le H legkisebb elemének számjegyeit, aztán egy nullát, majd H következő elemének a jegyeit, aztán ismét egy nullát, majd a H következő elemének a jegyeit, és így tovább; ha H véges, akkor az utolsó elemének jegyei után álljon csupa nulla. Az üres halmazhoz rendeljük a nullát. Ezzel $\mathcal{P}(L) \to [0,1]$ injekciót adtunk meg.

Jelölje $x \in [0,1]$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén $\alpha_n(x)$ az x-nek az n-ik számjegyét; ekkor $[0,1] \to \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, $x \mapsto \{(n, \alpha_n(x)) \mid n \in \mathbb{N}\}$ injekció.)

VI. A KOMBINATORIKA ELEMEI

A kombinatorika a véges halmazok elmélete. Az alapprobléma általában az, hogy valami "furfangos" módon körülírt halmaz számosságát kell megkeresnünk. Nagyon sok és érdekes kérdés vethető fel itt. Aki el akar mélyedni ebben a tudományágban, bőséges irodalom áll a rendelkezésére. Mi csupán a kombinatorika legelemibb, a matematika egyéb területein is gyakran felbukkanó feladattípusaival foglalkozunk, mintegy bepillantásként. Azt is gyakoroljuk egyben, ami sokszor nehézséget okoz: hogyan írjuk le a matematika nyelvén a szemléletesen, hétköznapian megfogalmazott feladatot. A feladattípusokat azonos "keretmese" segítségével vezetjük be, hogy jól lássuk a különbséget és a hasonlóságot közöttük.

24. Permutációk

24.1. Tíz udvari bolondja van egy királynak, aki abban leli örömét, hogy minden nap másik mókamester forog körülötte. Határozzuk meg, tíz nap alatt hányféle sorrendben élvezheti az uralkodó az udvari bolondok műsorát!

A feladatot viszonylag könnyen átfogalmazhatjuk a metematika nyelvére. Adott egy n pozitív egész szám (itt $n = 10$), és egy n elemű halmaz, H. Tudjuk, a halmaz elemeinek egy rendezése, vagyis egy rendezett n-es, az n-szeres Descartes-szorzatnak egy eleme. Azt keressük tehát, hány olyan eleme van H^n-nek, amelynek minden tagja különböző. A Descartes-szorzat elemeit függvényeknek is felfoghatjuk. Eszerint olyan $\{1, \dots, n\} \to H$ függvényekről van szó, amelyek különböző helyen különböző értéket vesznek vel, azaz injektívek; egyben szürjektívek is, hiszen az értékkészletük is és H is n elemű.

Egyszerűbbé tesszük a gondolkodást, ha valamilyen sorrendben megszámozzuk a H elemeit (például az udvari bolondokat névszor szerinti sorrendben), vagyis H helyett az $\{1, \dots, n\}$ halmazt vesszük.

Definíció *Legyen $n \in \mathbb{N}$. Az $\{1, \dots, n\}^n$ azon elemeit, amelyek minden tagja különböző, n* ***elem permutációinak*** *vagy n-**edrendű permutációknak** hjívjuk.*

Másképpen ugyanez: n elem permutációi az $\{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ bijekciók.

Az n elem permutációinak halmazát Perm_n jelöli.

A továbbiakban akár egy rendezett szám n-est, akár egy bijekciót tekintünk permutációnak, mikor mi kényelmesebb.

A permutációknak (mint bijekcióknak) a kompozícióját szokás a permutációk **szorzatának** nevezni, és jelölésben a kompozíció jelét elhagyni. Az identitás permutációt **egységnek** hívjuk és e-vel jelöljük. Szokjunk egy kicsit a permutációk kétféle felfogásához, és adjuk meg az egységet mint rendezett n-est is; ez $(1, 2, \ldots, n)$.

24.2. Két elemnek két permutációja van:

$$(1,2), \qquad (2,1).$$

Három elemnek hat permutációja van:

$$(1,2,3) \quad (2,3,1) \quad (3,1,2),$$

$$(3,2,1) \quad (2,1,3) \quad (1,3,2).$$

Érdemes ezeket jobban szemügyre venni, sokszor találkozunk velük. Az első az egység. Vele egy sorban a másik kettő ennek úgynevezett **ciklikus** permutációja: az első tagot leghátra visszük, a többit előretoljuk; aztán megismételjük. A második sorban az első az egység "fordítottja", majd ezt követik a ciklikus permutációi.

Kérdés, n elemnek hány permutációja van? (Hány elemű Perm_n? Hányféleképpen lehet n elemet sorrendbe rakni?)

Egy p permutáció megadásához az első helyre – azaz $p(1)$ kiválasztásához – az $1, 2, \ldots, n$ számok akármelyikét vehetjük, azaz n-féleképpen választhatunk. Megadott $p(1)$ mellett a második helyre – azaz $p(2)$ kiválasztásához – az $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{p(1)\}$ halmaz akármelyik elemét vehetjük, azaz $(n-1)$-féleképpen választhatunk. Minden $p(1)$ mellé akárhogy vehetünk így $p(2)$-t, vagyis az első két szám megválasztására $n(n-1)$ lehetőségünk van. Ezután $p(3)$-ra $(n-2)$-féle, és így tovább. Végül is $n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!$-féleképpen adhatunk meg permutációkat.

Állítás *n elem permutációinak a száma $n!$.*

Bizonyítás Amit az előbb elmondtunk, igaz, de bizonyításnak nem tökéletes, mert csak mint természetes tényre hivatkoztunk arra, hogy a lehetőségek összeszorzódnak, holott ezt is igazolni kellene. Ezért most másik bizonyítást adunk teljes indukcióval.

(i) $n = 1$ esetén az állítás nyilvánvalóan igaz.

(ii) Tegyük fel, hogy n-re igaz, és vegyük az $n+1$ elem permutációit. Egy $\mathrm{Perm}_{n+1} \to \mathrm{Perm}_n$, $P \mapsto p$ szürjekciót értelmezünk így:

$$p(i) := \begin{cases} P(i) & \text{ha } i < P^{-1}(n+1), \\ P(i+1) & \text{ha } i \geq P^{-1}(n+1) \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Szemléletesen: az $(n+1)$-ed rendű P permutációhoz úgy rendelünk egy n-ed rendű permutációt, hogy P értékeiből kiveszzük $(n+1)$-et, és a mögötte levő számokat előretoljuk eggyel. Például, ha $P = (2,5,3,1,4)$, akkor $p = (2,3,1,4)$.

Az világos, hogy ez a szürjekció minden n-ed rendű permutációt pontosan $n+1$ darab $(n+1)$-ed rendű permutációhoz rendeli hozzá (egy n-ed rendű permutációba $n+1$ helyre lehet $(n+1)$-et "betoldani": az első szám elé, az első szám után, a második szám után, ... az n-ik szám után). Az indukciós feltevés szerint Perm_n számossága $n!$, így a 21.2. állítás szerint Perm_{n+1} számossága $(n+1)n! = (n+1)!$.

Tehát az állítás igaz $(n+1)$-re is, és ezzel befejeztük a bizonyítást.

24.3. Általánosíthatjuk egy kicsit az előbbi bizonyítás gondolatát. Legyen $n \geq 2$ és rögzítsünk egy j és egy m számot 1 és n között. Azok az n-ed rendű permutációk, amelyek a j helyen az m értéke veszik fel, $(n-1)!$ sokan vannak. Ugyanis egy

$$\{p \in \mathrm{Perm}_n \mid p(j) = m\} \to \mathrm{Perm}_{n-1}$$

bijekció létesíthető úgy, hogy a fenti típusú n-ed rendű p permutációnak megfeleltetett $(n-1)$-ed rendű permutáció $a_m \circ p \circ a_j^{-1}$, ahol

$$a_j : \{1,\dots,n\} \setminus \{j\} \to \{1,\dots,n-1\}, \quad i \mapsto \begin{cases} i & \text{ha } i \leq j, \\ i-1 & \text{ha } i > j \end{cases}$$

bijekció, és természetesen hasonlóan van értelmezve a_m is.

Általában azok az n-ed rendű permutációk, amelyek értéke k helyen van rögzítve, $(n-k)!$ sokan vannak.

24.4. Minthogy a permutációk bijekciók, ha $p \in \mathrm{Perm}_n$ és $i, k \in \{1,\dots,n\}$, $i \neq k$, akkor $p(i) \neq p(k)$. Ha $i \neq k$, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $i < k$. Ekkor két esetet különböztethetünk meg: $p(i) < p(k)$ vagy $p(i) > p(k)$.

Definíció *Minden $p \in \mathrm{Perm}_n$ esetén legyen*

$$E(p) := \{(i,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i < k \leq n, \quad p(i) < p(k)\},$$

$$I(p) := \{(i,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i < k \leq n, \quad p(i) > p(k)\}.$$

*$I(p)$ elemeit a p **inverzióinak** hívjuk. Jelölje továbbá $s(p)$ az $I(p)$ számosságát, azaz p inverzióinak a számát.*

*A p permutáció **szignatúrája***

$$\mathrm{sign} p := (-1)^{s(p)}.$$

*p **páros** illetve **páratlan**, ha* $\mathrm{sign} p = 1$ *illetve* $\mathrm{sign} p = -1$.

Például a $p := (3,5,1,6,4,2)$ permutációra

$$E(p) = \{(3,5),\ (3,6,),\ (3,4),\ (5,6),\ (1,6),\ (1,4),\ (1,2)\},$$

$$I(p) = \{(3,1),\ (3,2,),\ (5,1),\ (5,2),\ (6,4),\ (6,2),\ (4,2)\},$$

$s(p) = 8$, $\mathrm{sign} p = 1$.

A három elemenek a 24.2-ben felsorolt permutációi közül a felső sorban levők párosak, az alsó sorban levők páratlanok.

Nyilvánvaló, hogy bármely p permutációra

$$\mathrm{sign} p = \prod_{(i,k)\in I(p)} \mathrm{sign}(p(k)-p(i)) = \prod_{1\le i<k\le n} \mathrm{sign}(p(k)-p(i)),$$

ahol a szorzatokban sign a valós számok előjelét jelenti.

Továbbá bármely r permutációra

$$(i,k)\in E(r^{-1}) \quad \text{pontsan akkor, ha} \quad (r(i),r(k))\in E(r),$$

$$(i,k)\in I(r^{-1}) \quad \text{pontsan akkor, ha} \quad (r(i),r(k))\in I(r).$$

E megjegyzések után most már bebizonyíthatjuk a permutációk szignatúrájának egy fontos tulajdonságát.

Állítás *Legyen $p,r\in \mathrm{Perm}_n$. Ekkor*

$$\mathrm{sign}(pr) = (\mathrm{sign} p)(\mathrm{sign} r).$$

Bizonyítás

$$\begin{aligned}
\mathrm{sign}(pr) &= \prod_{i<k} \mathrm{sign}(pr(k)-pr(i)) = \\
&= \prod_{(i,k)\in E(r^{-1})}\ \prod_{(i,k)\in I(r^{-1})} \mathrm{sign}(pr(k)-pr(i)) = \\
&= \prod_{(r(i),r(k))\in E(r)}\ \prod_{(r(i),r(k))\in I(r)} \mathrm{sign}(pr(k)-pr(i)) = \\
&= \prod_{(j,l)\in E(r)} \mathrm{sign}(p(l)-p(j)) \prod_{(j,l)\in I(r)} \mathrm{sign}(p(j)-p(l)) = \\
&= (-1)^s(r) \prod_{(j,l)\in E(r)}\ \prod_{(j,l)\in I(r)} \mathrm{sign}(p(l)-p(j)) = \\
&= (-1)^{s(r)} \prod_{(j<l)} \mathrm{sign}(p(k)-p(i)) = (\mathrm{sign} r)(\mathrm{sign} p). \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Ennek következménye, hogy két páros permutáció szorzata valamint két páratlan permutáció szorzata páros, egy páros és egy páratlan szorzata páratlan.

24.5. Definíció *Egy n-ed rendű p permutációt* ***transzpozíciónak*** *hívunk, ha létezik $i, k \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq k$ úgy, hogy $p(k) = i$, $p(i) = k$, és $p(j) = j$ ha $j \neq i$, $j \neq k$.*

Szemléletesen: egy transzpozíció a legegyszerűbb nemtriviális permutáció-típus: két elemet felcserél, a többit helyben hagyja.

Például $n = 6$ esetén $e_{2,5} = (1, 5, 3, 4, 2, 6)$.

Jelölje $e_{i,k}$ az imént bevezetett transzpozíciót.

Nyilvánvaló, hogy egy transzpoziciót kétszer egymás után végrehajtva (komponálva önmagával) az egységet kapjuk: $e_{i,k}e_{i,k} = e$.

1. Állítás *Minden transzpozíció páratlan permutáció.*

Bizonyítás Legyen $i < k$, és vegyük az $e_{i,k}$ transzpozíciót. Egyszerű meggondolás vezet arra, hogy

$$I(e_{i,k}) = \big\{(i, j) \mid i < j < k\big\} \uplus \big\{(j, k) \mid i < j < k\big\} \uplus \big\{(i, k)\big\}.$$

A jobb oldalon szereplő első két halmaz azonos számosságú (mindkettőnek $k - i - 1$ eleme van), tehát $s(e_{i,k})$ páratlan, azaz $\operatorname{sign}(e_{i,k}) = -1$. ■

Nyilvánvaló, hogy az egység szignatúrája 1, vagyis $n \geq 2$ esetén van páros és páratlan permutáció is.

Mivel páros (páratlan) permutációnak és páratlannak a szorzata páratlan (páros), egyszerű tény, hogy $n \geq 2$ esetén ugyanannyi páratlan permutáció van, mint páros: $\dfrac{n!}{2}$.

Bármilyen sorrendet elérünk úgy, hogy egymás melletti elemeket néhányszor felcserélünk; ezt mondja ki a következő állítás.

2. Állítás *Minden permutáció transzpozíciók szorzata.*

Természetesen egy permutációt többféleképpen is előállíthatunk transzpozíciók szorzataként. Minthogy a permutáció szignatúrája a megfelelő transzpozíciók szignatúrájának a szorzata, páros permutáció páros sok transzpozíció szorzata, páratlan permutáció páratlan soké.

24.6. A király nem egyformán kedveli a bolondjait. Osztályozza őket 1-től 5-ig, és úgy akarja beosztani a műsorát, hogy mindegyik mulattatója az osztályzatának megfelelően többször szerepeljen. Például az első és hetedik 1-est kapott, a harmadik, negyedik és tizedik 2-est, a második és ötödik 3-ast, a nyolcadik és a kilencedik 4-est, a hatodik 5-öst. Így tehát $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 27$

napos periódusban kell sorba rendezni a szórakoztató embereket úgy, hogy az első és a hetedik egy-egy napot kapjon, a harmadik, negyedik és tizedik kettőt-kettőt, stb. Kérdés, hányféleképp lehet ezt megtenni?

Fogalmazzuk át a matematika nyelvére a feladatot.

Adva van egy n pozitív egész szám (itt $n = 10$), és az $1, 2, \ldots, n$ számok mindegyikéhez egy $k_1, k_2, \ldots k_n$ pozitív egész szám, és keressük az $1, 2, \ldots, n$ számok olyan elrendezéseit, amelyekben az 1 k_1-szer szerepel, a 2 k_2-ször, stb.

Definíció *Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$, $k := k_1 + k_2 + \cdots + k_n$. Az $\{1, 2, \ldots, n\}^k$ azon elemeit, amelyek k_1 számú tagja 1, k_2 számú tagja 2, ..., k_n számú tagja n, az n* ***elem $k_1, k_2, \ldots, k_n$ tagú ismétléses permutációjának*** *vagy* ***$k_1, k_2, \ldots, k_n$ tagú n-ed rendű ismétléses permutációnak*** *nevezzük.*

Most is fogalmazhatunk másképp, ha akarunk: egy $k_1, k_2, \ldots, k_n$ tagú n-ed rendű ismétléses permutáció olyan $\{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ szürjekció, amelyre $\{i\}$ ősképe k_i elemű ($i = 1, \ldots, n$).

Szemléletetésképpen leírjuk 3 elemnek egy $2, 2, 4$, tagú ismétléses permutációját: $(1, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 1)$.

Megjegyezzük, egyes könyvekben azt mondják, hogy n fajtájú k darab elem van adva, amelyekből $k_1, k_2, \ldots, k_n$ azonos fajtájú, és ennek megfelelően k elem ismétléses permutációjáról beszélnek. Ez a fogalmazás azonban félrevezető (mi az azonos fajtájú, különböző elem foalma?), ezért kerüljük.

24.7. Állítás *n elem $k_1, k_2, \ldots, k_n$ tagú ismétléses permutációinak a száma*

$$\frac{k!}{k_1! k_2! \ldots k_n!}.$$

Bizonyítás Vegyük az n elemnek azt a $k_1, k_2, \ldots, k_n$ tagú permutációját, amelyben az első k_1 helyen 1 áll, a következő k_2 helyen 2, stb. Például $n = 3$, $k_1 = 2$, $k_2 = 2$, $k_3 = 4$ esetén $(1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3)$.

Más szóval vegyük azt a $h_0 : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ szürjekciót, amelyre

$$h_0(i) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 1 \le i \le k_1, \\ 2 & \text{ha } k_1 < i \le k_1 + k_2, \\ \ldots & \\ n & \text{ha } k_1 + \cdots + k_{n-1} < i \le k_1 + \cdots + k_n. \end{cases}$$

Ha P k-ad rendű permutáció, akkor $h_0 \circ P$ egy $k_1, k_2, \ldots, k_n$ tagú n-edrendű ismétléses permutáció. Nem nehéz belátni, hogy minden h ismétléses permutáció ilyen alakú; a $h : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ szürjekcióhoz így definiálunk P-t: megadunk

$$\overset{-1}{h}(\{1\}) \to \{1, \ldots, k_1\},$$

$$\overset{-1}{h}(\{2\}) \to \{k_1 + 1, \ldots, k_1 + k_2\}$$

stb. bijekciókat tetszőleges módon, azután ezeket összeillesztjük. Világos, hogy az így megszerkesztett P-re $h \circ P^{-1} = h_0$, tehát $P \mapsto h_0 \circ P$ szürjekció.

A konstrukcióból az is látszik, hogy P megválasztása h-hoz korántsem egyértelmű. $k_1!$-féleképpen definiálható $\overset{-1}{h}(\{1\})$-en, $k_2!$-féleképpen $\overset{-1}{h}(\{2\})$-n, stb. Összesen $k_1!k_2!\ldots k_n!$ olyan P van, amelyre $h_0 \circ P = h$. Ezért a 21.2. állítás értelmében a szóban forgó ismétléses permutációk számát megszorozva $k_1!k_2!\ldots k_n!$-nel megkapjuk a k-ad rendű permutációk számát, azaz $k!$-t, és ezzel be is fejeztük a bizonyítást.

25. Variációk, kombinációk

25.1. Most a király egy hetes időtartamra akarja összeállítani műsorát úgy, hogy mindennap más udvari bolond szórakoztassa. Hányféle választási lehetősége van?

Adva van tehát egy n pozitív egész szám (itt $n = 10$), és egy másik pozitív egész szám k, $k \leq n$ (itt $k = 7$), és azt keressük, az $1, 2, \ldots, n$ számok közül hányféle sorrendben tudunk kiválasztani k darabot.

Definíció *Legyen $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Az $\{1, 2, \ldots, n\}^k$ olyan elemeit, amelyek minden tagja különböző, n **elem k-ad osztályú variációinak** hívjuk.*

Másként ugyanez: n elem k-ad osztályú variációi az $\{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ injekciók.

Állítás *n elem k-ad osztályú variációinak a száma* $\dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Bizonyítás Szürjekciót létesítünk az n-ed rendű permutációkról az n elem k-ad osztályú variációira úgy, hogy a $(p(1), p(2), \ldots, p(k), p(k+1), \ldots, p(n))$ permutációhoz hozzzárendeljük a $(p(1), p(2), \ldots, p(k))$ variációt. Így egy variációt mindig $(n-k)!$ permutációnak feleltetünk meg, ezért a 21.2. állítás miatt igaz a fenti képlet. ∎

Megemlítjük, gondolkodhatunk úgy, mint a permutációk esetén: az első helyre n választási lehetőségünk van, a másodikra $n - 1$, stb., a k-ikra $n - (k - 1)$. Az összes lehetőség ezek szorzata: $n(n-1)\dots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

25.2. A király gondol egyet, megint más elvek alapján szándékozik megalkotni a műsorrendet. Előír egy időtartamot – egy hetet, egy hónapot –, de nem kívánja, hogy mindig más arcot lásson, akár az egész periódusban ugyanaz az egy mulattató léphet fel. Hányféle sorrendű lehetőség van így?

Definíció *Legyen $k, n \in \mathbb{N}$. Az $\{1, 2, \dots, n\}^k$ elmeit n* ***elem k-ad osztályú ismétléses variációinak*** *hívjuk.*

Másképpen ugyanez: n elem k-ad osztályú ismétléses variáció az $\{1, 2, \dots, k\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ függvények.

Állítás *n elem k-ad osztályú ismétléses variációinak a száma n^k .*

Bizonyítás Ezt már igazoltuk 21.3-ban. ■

Itt is elmondjuk az eddigiekben többször felmerült gondolatmenetet. Az első helyre n választási lehetőségünk van, a másodikra is n, minden helyre n-féleképpen választhatunk. Minthogy összesen k hely van, a lehetőségek száma n-nek önmagával vett k-szoros szorzata.

25.3. A király kegyes hangulatban van. Egy hétre kijelöl hét udvari bolondot, és rájuk bízza, határozzák meg ők maguk a fellépésük sorrendjét. Hányféle választása adódik így az uralkodónak, amikor tehát csak az lényeges neki, hogy ki szórakoztatja, mindegy milyen sorrendben.

Feladatunk hasonlít arra, ami az n elem k-ad osztályú variációhoz vezetett, azzal a lényeges eltéréssel, hogy a sorrend nem számít, csak az, melyek a kiválasztott elemek.

Mivel a kiválasztott elemek sorrendje mindegy, rögzíthetünk egy alkalmas sorrendet, hogy jól megfogalmazhassuk a feladatot; például azt, amelyben nagyság szerint rendezünk. Először a kiválasztottak közül a legkisebb sorszámú jelenik meg, utána a következő legkisebb sorszámú, stb.

Definíció *Legyen $k, n \in \mathbb{N}$, $k \le n$. Az $\{1, 2, \dots, n\}^k$ azon $(h_1, h_2, \dots, h_k)$ elemeit, amelyekre $1 \le h_1 < h_2 < \dots, < h_k \le n$, n* ***elem k-ad osztályú kombinációinak*** *hívjuk.*

Másképpen ugyanez: n elem k-ad osztályú kombinációi az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz k elemű részhalmazai.

Állítás *n elem k-ad osztályú kombinációinak a száma $\dbinom{n}{k}$.*

Bizonyítás n elem minden k-ad osztályú variációjához hozzárendelünk egy ilyen kombinációt úgy, hogy "elfeledkezünk" a sorrendről, vagyis a variációban szereplő számokat nagyság szerint rakjuk sorba. Nyilván $k!$ variációnak felel meg így ugyanaz a kombináció. Tudjuk a szóban forgó variáciiók számát, ezért a 21.2. állítás miatt a kombinációk száma $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, amit bizonyítani akartunk. ∎

Másképpen tehát arra az eredményre jutottunk, hogy egy n elemű halmaz $k \neq 0$ elemű részhalmazainak a száma $\binom{n}{k}$. Igaz ez azonban $k = 0$ esetére is. Ezért az n elemű halmaz összes részhalmazának a száma $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$ (lásd a binomiális tételt).

25.4. Új ötlete támad a királynak. Meghatároz egy időtartamot – egy hetet, egy hónapot –, kijelöl bohócokat, és meghatározza, melyik hányszor lépjen fel, de a sorrenddel nem törődik, azt rájuk bízza. Hányféle választási lehetősége van így?

Megint lényeges, hogy a sorrend nem számít, tehát egy alkalmas sorrend rögzítésével tudjuk jól megfogalmazni a feladatot. Legyen ez a sorrend: először a kiválasztottak közül a legkisebb sorszámú jelenik meg annyiszor, ahányszor az ki van rá róva, aztán a következő legkisebb sorszámú ahányszor csak kell, stb.

Definíció *Legyen $k, n \in \mathbb{N}$. Az $\{1, 2, \ldots, n\}^k$ azon $(h_1, h_2, \ldots, h_k)$ elemeit, amelyekre $1 \leq h_1 \leq h_2 \leq, \ldots, \leq h_k \leq n$, n **elem k-ad osztályú ismétléses kombinációinak** hívjuk.*

Állítás *n elem k-ad osztályú ismétléses kombinációinak a száma* $\binom{n+k-1}{k}$.

Bizonyítás Vegyünk egy ilyen $(h_1, h_2, \ldots, h_k)$ ismétléses kombinációt, és rendeljük hozzá $(h_1, h_2+1, \ldots, h_k+k-1)$-t, amely nyilván az $1, 2, \ldots, n+k-1$ számokból képezett olyan rendezett k-as, hogy $1 \leq h_1 < h_2+1 < \cdots < h_k+k-1 \leq n+k-1$, vagyis $n+k-1$ elem egy k-ad osztályú kombinációja. Világos, hogy ez a megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű, vagyis n elem k-ad osztályú ismétléses kombinációinak a száma ugyanannyi, mint $n+k-1$ elem k-ad osztályú kombinációinak a száma.

VII. KOMPLEX SZÁMOK

26. A komplex számok értelmezése

26.1. A természetes számoktól a valós számokig úgy jutottunk, hogy az összeadás, a szorzás és a hatványozás bizonyos inverzműveletének (kivonás, osztás, gyökvonás) értelmezhetősége céljából új és új számokat vezettünk be. A gyökvonással kapcsolatban azonban maradt egy kis kellemetlenség: negatív számoknak nincs valós négyzetgyöke. Egyszerű matematikai problémák – például másodfokú egyenletek – sugallják, hogy érdemes volna a számfogalamat tovább bővíteni úgy, hogy negatív számnak is legyen négyzetgyöke.

A valós számokat egy egyenes pontjaival szoktuk szemléltetni. Kijelölünk egy egyenesen két pontot, az egyik a 0-nak, a másik az 1-nek felel meg. A két pont távolságát sorozatosan egymás után rámérve az egyenesre megkapjuk az egész számokat reprezentáló pontokat; ezután szakaszdarabolással megszerkeszthetjük a racionális számok reprezentánsait is. Az irracionális számokat az egyenes többi pontja képviseli. A valós számok teljességi tulajdonsága azt jelenti, ilyen megjelenítésben a valós számok teljesen kitöltik az egyeneset, azaz minden pontnak megfelel egy és csak egy valós szám. Ha tehát tovább akarjuk bővíteni a számfogalmat, ki kell lépnünk az egyenesből. Kézenfekvőnek látszik a gondolat, hogy a sík pontjaival próbálkozzunk, pontosabban $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$-rel, hiszen ezt reprezentálhatjuk a sík pontjaival.

A bővítés alapelve az, hogy

(i) értelmezünk $\mathbb{R}^2$-n egy összeadást és egy szorzást, amelyekre teljesülnek a 14.1-ben felsorolt A1-A4, M1-M4 és AM tulajdonságok, azaz amelyek testműveletek;

(ii) a valós számokat beágyazzuk az új számok körébe, azaz legyen egy $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ összeadás- és szorzástartó injekció.

Fogjuk fel $\mathbb{R}^2$-t mint $\{1,2\}\to\mathbb{R}$ függvények összességét. Ezekre már értelmeztük az összeadást és a szorzást a pontonkénti műveletekkel (lásd 18.1.):

$$(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2),$$

$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2).$$

Felkérjük az olvasót, járjon utána, hogy ezek a műveletek az összes kívánt tulajdonsággal renedelkeznek, kivéve M4-et.

Miért nem igaz M4? Az összeadás nulla-eleme $(0,0)$, a szorzás egység-eleme $(1,1)$. $(1,0) \neq (0,0)$, azonban minden (x_1, x_2) esetén $(1,0)(x_1, x_2) = (x_1, 0) \neq (1,1)$, azaz a nemnulla $(1,0)$-nak nincs multiplikatív inverze.

26.2. El kell búcsúznunk a pontonkénti szorzástól, ha testműveleteket akarunk. De lehet-e egyáltalán ilyen szorzást definiálni $\mathbb{R}^2$-n? A válasz ignelő.

Állítás *Az*

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) + (u,v) = (x+u, y+v),$$

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y)(u,v) = (xu - yv, xv + yu)$$

összeadás és szorzás tesműveleteket alkotnak, azaz teljesül rájuk, hogy

A1) $(x,y) + (u,v) = (u,v) + (x,y)$,
A2) $\big((x,y) + (u,v)\big) + (a,b) = (x,y) + \big((u,v) + (a,b)\big)$,
A3) $(0,0) + (x,y) = (x,y)$,
A4) $(x,y) + (-x,-y) = (0,0)$,

M1) $(x,y)(u,v) = (u,v)(x,y)$,
M2) $\big((x,y)(u,v)\big)(a,b) = (x,y)\big((u,v)(a,b)\big)$,
M3) $(1,0)(x,y) = (x,y)$,
M4) ha $(x,y) \neq (0,0)$, akkor

$$(x,y)\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) = (1,0).$$

AM) $\big((x,y) + (u,v)\big)(a,b) = (x,y)(a,b) + (u,v)(a,b)$.

Továbbá $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x,0)$ összeadás- és szorzástartó injekció.

A bizonyítás egyszerű számolás csupán; mindazonáltal ajánljuk az olvasónak, ellenőrizze ezeket az egyenlőségeket.

26.3. Az előbbi műveletekkel Új számokat vezettünk be, amelyeket **komplex számoknak** nevezünk. A komplex számok összességét a $\mathbb{C}$ szimbólummal jelöljük.

Mi a különbség $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{C}$ között? $\mathbb{R}^2$-n, mint minden valós értékű függvényhalmazon értelmezett a pontonkénti összeadás és szorzás. Ha $\mathbb{R}^2$-n más, az imént értelmezett szorzást vezetjük be (az összeadás marad a pontonkénti), akkor jutunk $\mathbb{C}$-hez. Tehát $\mathbb{C}$ alaphalmaza $\mathbb{R}^2$, azonban más szorzással van ellátva. $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{C}$ a műveleteikben (pontosabban csak a szorzásukban) különböznek egymástól.

Megjegyezzük, hogy $\mathbb{C}$-n nem adható meg olyan láncszerű rendezés, amely az összeadáshoz és a szorzáshoz ugyanúgy viszonyulna, mint a valós számok rendezése, azaz teljesülne a 14.1-ben leírt OA és és OM tulajdonság.

A komplex számok bevezetésével a valós számok halmazának bővítéséhez jutottunk, hiszen a valós számokat műveletttartóan beágyazhatjuk a komplex számok közé, vagyis $\mathbb{R}$-et azonosíthatjuk a $\mathbb{C}$ egy részhalmazával, amit a szokásunknak megfelelően $\mathbb{R} \Rrightarrow \mathbb{C}$, $x \equiv (x, 0)$ formában fejezhetünk ki.

Igen egyszerűvé válnak a jelölések, ha bevezetjük az

$$i := (0, 1)$$

képzetes (imaginárius) egységet. Ekkor ugyanis

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) \equiv x + iy.$$

Természetesen ez az azonosítás – csakúgy, mint a többi a számfogalom bővítése során – már annyira megszokott, hogy egyszerű tartalmazást és egyenlőséget írunk:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}, \qquad (x, y) = x + iy.$$

A komplex számok szorzásának definíciója alapján igen könnyen származtathatjuk a következő fontos egyenlőséget:

$$i^2 = -1.$$

Ez segít nekünk abban, hogy ne kelljen észben tartani a szorzás kissé körülményes formuláját; elég, ha tudjuk a fenti egyenlőséget, valamint a szorzás kommutatív, asszociatív tulajdonságát és a disztributivitást. Íme:

$$(x + iy)(u + iv) = xu + iyu + xiv + iyiv = xu - yv + i(xv + yu).$$

Egyébként az összeadás is egyszerű ebben a formában:

$$(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v).$$

Jegyezzük meg tehát, hogy minden komplex szám egyértelműen felírható $x+iy$ alakban, ahol x és y valós számok.

Definíció *Az $x + iy$ komplex számnak, ahol x és y valós, a* ***valós (reális) része*** *x,* ***képzetes (imaginárius) része*** *y. Jelölésben* $\mathrm{Re}(x + iy) = x$, $\mathrm{Im}(x + iy) = y$.

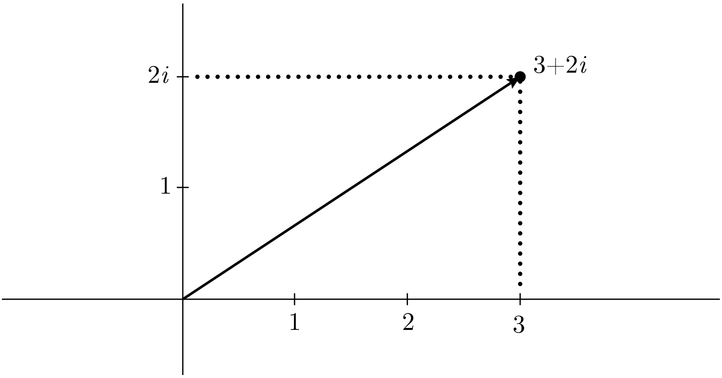
Véssük észbe, hogy egy komplex szám képzetes része is valós szám!

A $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ és $\mathrm{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ függvények, amelyek egy komplex számhoz a valós illetve a képzetes részét rendelik, tulajdonképpen az $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ természetes projekciók.

Két komplex szám akkor és csak akkor egyenlő, ha a valós részeik is egyenlők, a képzetes részeik is egyenlők. Egy komplex szám pontosan akkor valós, ha a képzetes része nulla; egy olyan komplex számot, amelynek a valós része nulla, **képzetesnek** hívunk.

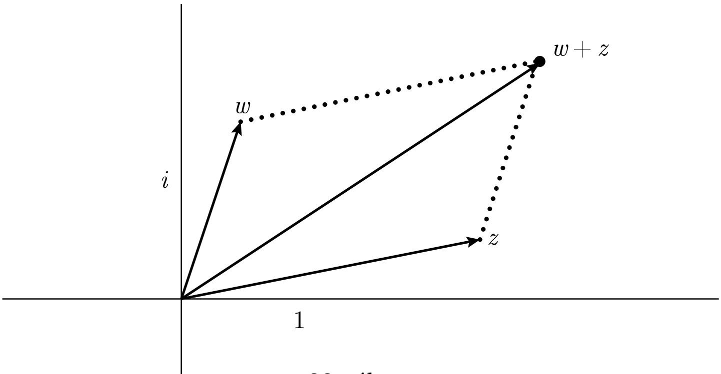
Természetesen egy komplex számot jelölhetünk egyetlen betűvel is, nemcsak $x + iy$ alakban. Ha $z \in \mathbb{C}$, akkor $z = \mathrm{Re} z + i \mathrm{Im} z$. Ha z és w komplex szám, akkor $z + iw$ is komplex szám, azonban ennek általában z és w nem a valós illetve a képzetes része. Vigyázzunk ezért az $x + iy$ alakkal; mindig meg kell mondanunk, ha arról van szó, hogy x és y valós.

26.4. A komplex számokat a sík pontjaival ábrázoljuk a szokásos módon. Célszerű egy nyíllal szemléltetni a pontot, ahogy a 21. ábra mutatja.



21. ábra

Ilyen ábrázolásban két komplex szám összegét a **parallelogramma-szabállyal** szerkeszthetjük meg (22. ábra)



22. ábra

Az ábrázolásnak megfelelően szokás a valós számok összességére a **valós egyenes** vagy a **valós tengely** néven hivatkozni, hasonló érelmű a **képzetes egyenes** vagy a **képzetes tengely**. A pozitív (negatív) képzetes részű komplex számok összességére a **felső (alsó) félsík** elnevezés használatos.

A komplex számok abszolútértéke szemléletesen az őket reprezentáló nyilak hossza.

Definíció *A*

$$\mathbb{C} \to \mathbb{R}_0^+, \quad z \mapsto |z| := \sqrt{(\mathrm{Re} z)^2 + (\mathrm{Im} z)^2}$$

függvényt ***abszolútértéknek*** *nevezzük.*

Ha tehát $x, y \in \mathbb{R}$, akkor $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ez az abszolútérték-függvény a valós számok abszolútérték-függvényének a kiterjesztése.

Állítás *Minden z és w komplex számra*

(i) $|z + w| \leq |z| + |w|$,

(ii) $|zw| = |z||w|$.

Bizonyítás (i) Legyen $z = x + iy$, $w = u + iv$, ahol $x, y, u, v \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$|z + w|^2 = (x + u)^2 + (y + v)^2 = x^2 + u^2 + y^2 + v^2 + 2xu + 2yv,$$

$$(|z| + |w|)^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{u^2 + v^2}\right)^2 = x^2 + y^2 + u^2 + v^2 + 2\sqrt{(x^2 + y)^2(u^2 + v^2)}.$$

Azt kell tehát csak megmutatnunk, hogy

$$xu + yv \leq \sqrt{(x^2 + y)^2(u^2 + v^2)},$$

ami igaz, ha a bal oldal negatív vagy nulla; ha pedig pozitív, akkor négyzetreemeléssel azt a bizonyítandó összefüggést kapjuk, hogy

$$2xuyv \leq x^2v^2 + y^2u^2 \quad \text{azaz} \quad 0 \leq (xv + yu)^2,$$

ami nyilvánvalóan igaz.

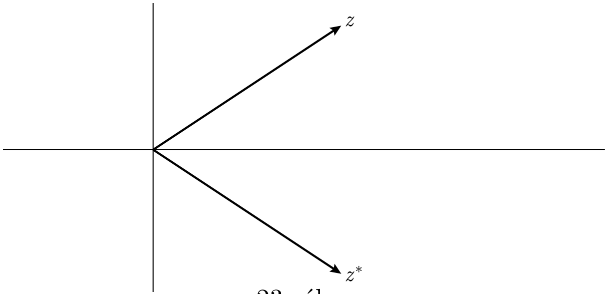
(ii) Megmutathatjuk ezt az egyenlőséget közvetlenül a komplex számok szorzási szabálya alapján – ajánljuk az olvasónak, tegye is meg gyakorlásképpen –, azonban jobban járunk, ha elhalasztjuk a bizonyítást a következő pontig, ahol olyan formula birtokába jutunk, amellyel hasonlíthatatlanul egyszerűbben kaphatjuk meg a kívánt eredményt.

26.5. Definíció *A*

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto z^* := \mathrm{Re}z - i\mathrm{Im}z$$

lelképezést ***komplex konjugálásnak*** *nevezzük.*

Ha tehát $x, y \in \mathbb{R}$, akkor $(x + iy)^* = x - iy$.



23. ábra

A szemléltető ábránkon egy komplex szám konjugáltja a valós egyenesre való tükrözöttje.

Megjegyezzük, hogy sok matematikakönyvben a komplex konjugálást másképp jelölik, többnyire felülhúzással. Fizikai alkalmazásokban azonban az itt használt jelölés terjedt el.

Állítás *Legyen $z, w \in \mathbb{C}$. Ekkor*

(i) $(z + w)^* = z^* + w^*$,
(ii) $(zw)^* = z^* w^*$,
(iii) $(z^*)^* = z$,
(iv) $|z^*| = |z|$,
(v) $|z^2| = z^* z$,
(vi) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{z^*}{|z|^2} \quad (z \neq 0)$,
(vii) $\mathrm{Re}z = \dfrac{z + z^*}{2}, \quad \mathrm{Im}z = \dfrac{z - z^*}{2i}$.

E formulák igazolása mindössze rutin-számolásokat igényel. Mint egyszerű következményeket külön feljegyezzük, hogy

$$i^* = \frac{1}{i} = -i.$$

Végül a komplex konjugálás segítéségvel könnyedén bebizonyíthatjuk az előző állítás (ii) pontját:

$$|zw|^2 = (zw)^*(zw) = z^* w^* zw = z^* z w^* w = |z|^2 |w|^2.$$

26.6. Feladatok

1. Adjuk meg a következő komplex számok valós és képzetes részét:

$$\frac{1}{3+2i}, \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{i}, \quad \frac{4+5i}{1+i}, \quad (3+3i)^2.$$

2. Mi az $(x+iy)^2$ valós és képzetes része, ha $x, y \in \mathbb{R}$?
3. Számítsuk ki a következő komplex számok abszolútértékét:

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{3+2i}.$$

4. Igazoljuk, hogy minden z komplex számra
(i) z akkor és csak akkor valós, ha $z = z^*$,
(ii) $|\mathrm{Re}z| \le |z|, \quad |\mathrm{Im}z| \le |z|$,
(iii) $\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}z, \quad \mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}z$.

5. Bármely z és w komplex számra $\mathrm{Re}(z+w) = \mathrm{Re}z + \mathrm{Re}w$, $\mathrm{Im}(z+w) = \mathrm{Im}z + \mathrm{Im}w$.

6. Mit tudunk mondani a z és w komplex számról, ha $\mathrm{Re}(zw) = (\mathrm{Re}z)(\mathrm{Re}w)$ teljesül? És ha $\mathrm{Im}(zw) = (\mathrm{Im}z)(\mathrm{Im}w)$?

7. Mutassuk meg, hogy a lexikografikus rendezés $\mathbb{C}$-n (azaz $w \le z$ pontosan akkor, ha $\mathrm{Re}w < \mathrm{Re}z$ vagy $\mathrm{Re}w = \mathrm{Re}z$ esetén $\mathrm{Im}w < \mathrm{Im}z$) a valós számokon értelmezett rendezés kiterjesztése, láncszerű, azonban nem teljesíti azt, hogy $w \le z$ és $0 \le u$ esetén $uw \le uz$.

8. Minden olyan a valós számokra igaz állítás, amely csak a testműveletek tulajdonságaira épül, igaz marad a komplex számokra is. Bizonyítsuk be speciálisan, hogy érvényes a binomiális tétel: ha z és w komplex számok, $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$(z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} w^k.$$

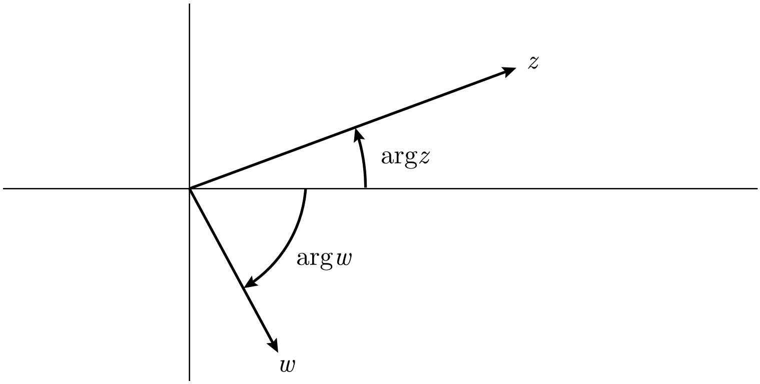
27. Gyökvonás

27.1. Van olyan komplex szám, amelynek a négyzete negatív valós szám: $i^2 = (-i)^2 = -1$. Könnyű ellenőrizni – kérjük az olvasót tegye meg –, hogy nincs is más komplex szám, amelynek a négyzete -1. Viszont minden x valós számra $(ix)^2 = -x^2$, tehát minden negatív valós szám valamely komplex (közelebbről: képzetes) szám négyzete. A komplex számokkal megoldódott a negatív számokból való gyökvonás problémája. Persze a komplex számok ennél sokkal többet is tudnak, amint azt meglátjuk ebben a fejezetben.

27.2. Megelőlegezzük a szögek valamint a szinusz,- koszinusz- és arkuszfüggvények ismeretét. Ezek birtokában ugyanis a komplex számokat az eddigiektől eltérő módon, a szorzás és a hatványozás szempontjából jobban kezelhető formában adhatjuk meg.

A szinusz- és koszinusz-függvény szemléletes értelmezését illetően a középiskolai tanulmányokra utalunk. A cos függvény injektív a $[0, \pi]$ intervallumon; ennnek az injektív függvénynek az inverze az arccos (arkusz-koszinusz), amely a $[-1, 1]$ intervallumon van értelmezve. Ha tehát $x \in [-1, 1]$, akkor $\arccos x$ az a valós szám ("szög") 0 és π között, amelynek a koszinusza x.

Egy nem nulla komplex szám **argumentumán** szemléletesen a komplex számot reprezentáló nyílnak a valós egyenessel bezárt "forgásszögét" értjük; pozitívnak számítjuk, ha a szám a felső félsíkban van, negatívnak, ha az alsóban.



24. ábra

A pontos meghatározás a következő.

Definíció *Az*

$$\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to]-\pi, \pi], \quad z \mapsto \operatorname{sign}(\operatorname{Im} z) \arccos \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$$

függvényt ***argumentumnak*** *hívjuk.*

Jegyezzük meg, hogy a negatív valós számok argumentumát "felülről" számítjuk, azaz pozitív és éppen π (emlékezzünk, hogy definíciónk szerint $\operatorname{sign} 0 = 1$).

Mivel $\operatorname{Re} z = |z| \cos(\arg z)$, $\operatorname{Im} z = |z| \sin(\arg z)$, igazak a következők.

Állítás *(i) A* $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi], \quad z \mapsto (|z|, \arg z)$
leképezés bijekció.
(ii) $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad (r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$
szürjeckió, amelyen leszűkítése $\mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi]$*-re az előbbi bijekció inverze.*

Vezessük be az

$$e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi$$

jelölést. Az előbbiek szerint tehát minden komplex szám előállítható $re^{i\varphi}$ úgynevezett **trigonometrikus alakban**; ha $r \neq 0$ (a komplex szám nem nulla), akkor az előállítás egyértelmű a $\varphi \in]-\pi, \pi]$ kikötéssel.

Úgy is szoktuk mondani, hogy az $re^{i\varphi}$ komplex szám argumentuma φ moduló 2π, jelben $\varphi|\mathrm{mod}2\pi$, ami azt jelenti, hogy $\arg(re^{i\varphi}) = \varphi - 2k\pi$, ahol k az az egyértelműen meghatározott egész szám, amellyel $\varphi - 2k\pi \in]-\pi, \pi]$.

27.3. Mivel a koszinusz páros függvény, a szinusz pedig páratlan, továbbá $\cos^2 + \sin^2 = 1$, megállapítjuk, hogy minden $\varphi \in \mathbb{R}$ esetén

$$|e^{i\varphi}| = 1, \qquad \frac{1}{e^{i\varphi}} = \left(e^{i\varphi}\right)^* = e^{-i\varphi}.$$

Továbbá a szögfüggvények addíciós tételei, azaz

$$\cos(\varphi + \psi) = \cos\varphi\,\cos\psi - \sin\varphi\,\sin\psi,$$

$$\sin(\varphi + \psi) = \sin\varphi\,\cos\psi + \cos\varphi\,\sin\psi$$

alapján

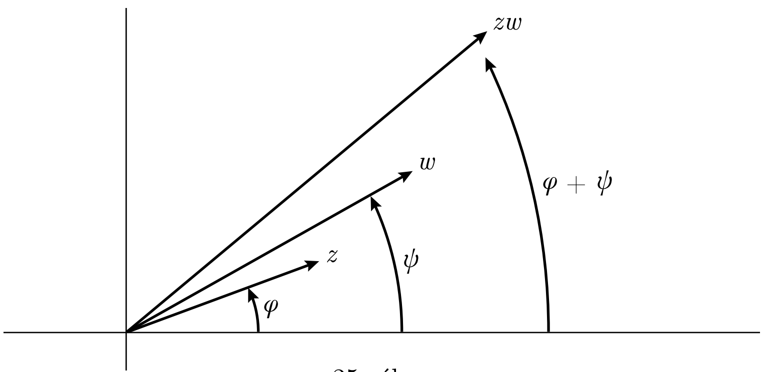
$$e^{i\varphi}e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)} \qquad (\varphi, \psi \in \mathbb{R}).$$

Ez a formula indokolja pillanatnyilag, miért választottuk a hatványformát a jelölésben: szorzáskor a hatványozás azonosságait követi.

Most már csak össze kell tennünk az eddigi eredményeinket, hogy a nevezetes **Moivre-formulát** származtassuk:

$$\left(re^{i\varphi}\right)\left(se^{i\psi}\right) = (rs)e^{i(\varphi+\psi)} \quad (r, s \in \mathbb{R}_0^+, \varphi, \psi \in \mathbb{R}).$$

Ez azt mondja, hogy két komplex szám szorzatának az abszolútértéke az abszolútértékek szorzata (ezt már tudtuk eddig is), és ha a számok nem nullák, akkor a szorzat argumentuma az argumentumok összege moduló 2π.

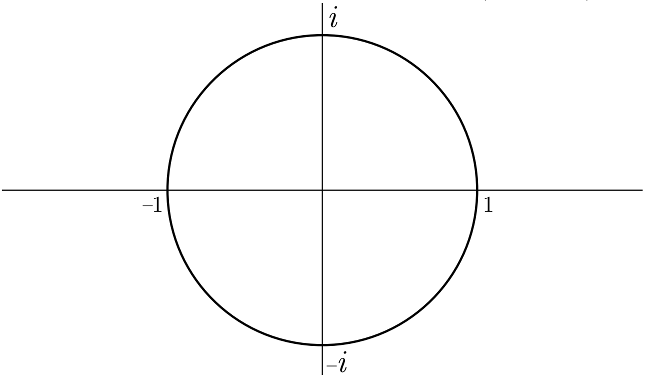


25. ábra

27.4. Az egységnyi abszolútértékű komplex számok fontos szerepet játszanak sok alkalmazásban, ezért külön jelölést vezetünk be az összességükre:

$$\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

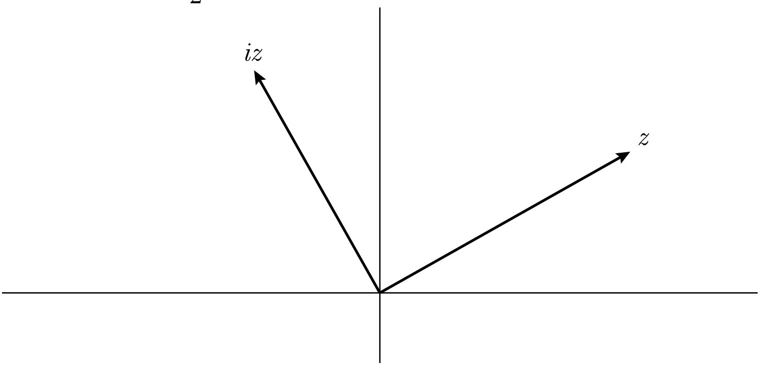
Szemléletesen $\mathbb{S}^1$ a nulla körüli egységsugarú körív (26. ábra).



26. ábra

Ha $h \in \mathbb{S}^1$, akkor a $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto hz$ leképezés a komplex számoknak a h argumentumával való elforgatása, hiszen $|hz| = |z|$ és $\arg(hz) = \arg h + \arg z$.

Speciálisan $z \mapsto iz$ a $\dfrac{\pi}{2}$-vel (90°-kal) való forgatás (27. ábra)



27. ábra

27.5. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és keressük azokat a komplex számokat, amelyek n-ik hatványa 1.

Az ilyen komplex számok a $\mathbb{S}^1$ elemei, azaz $e^{i\varphi}$ alakúak. A Moivre-formulából az adódik, hogy $(e^{\varphi})^n = e^{ni\varphi} = 1 = e^0$, vagyis $n\varphi|\mathrm{mod}2\pi = 0$; más szóval $n\varphi$ a 2π egész számú többszöröse: $\varphi = \dfrac{k2\pi}{n}$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Azonban minden k-ra $\dfrac{k2\pi}{n} = \dfrac{(k+n)2\pi}{n}|\mathrm{mod}2\pi$, viszont ha $0 < m < n$, akkor $\dfrac{k2\pi}{n} \neq \dfrac{(k+m)2\pi}{n}|\mathrm{mod}2\pi$. Ezért csak n darab különböző k ad különböző komplex számot; válasszuk a $0, 1, \dots, n-1$ számokat.

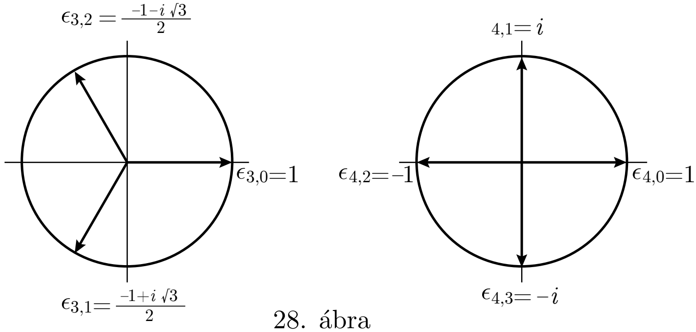
Definíció *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Ekkor*

$$\epsilon_{n,k} := e^{\frac{2k\pi}{n}}$$

*a k-**ad rendű** n-**ik egységgyök**.*

A mondottak szerint $\epsilon_{n,k} \neq \epsilon_{n,j}$, ha $k \neq j$, és ha z olyan komplex szám, amelyre $z^n = 1$, akkor van olyan k, hogy $z = \epsilon_{n,k}$.

A k-ad rendű n-ik egységgyök olyan egységnyi abszolútértékű komplex szám, amelyet saját argumentumával n-szer elforgatva – esetleg többszörös körbeforgás után – az 1-be juttatunk. Szemléletesen ezek az egységgyökök annak az n oldalú szabályos sokszögnek a csúcsai, amelynek az egyik csúcsa 1.



28. ábra

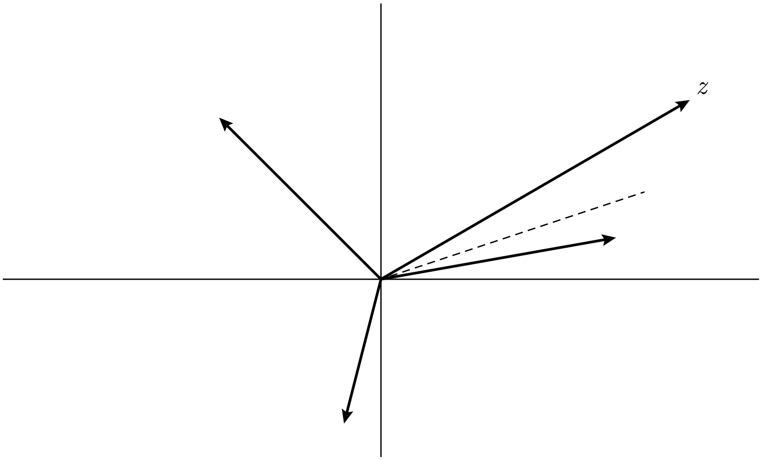
27.6. Definíció *Egy z komplex szám n-ik **gyökeinek** hívjuk azokat a komplex számokat, amelyeknek az n-ik hatványa z.*

Állítás *Legyen $n \in \mathbb{N}$. Minden nemnulla komplex számnak pontosan n darab n-ik gyöke van; közelebbről, re^{φ} n-ik gyökei*

$$\sqrt[n]{r}\, e^{\frac{i\varphi}{n}} \epsilon_{n,k} \qquad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Bizonyítás Egyszerű tény, hogy a fenti számok $re^{i\varphi}$ különböző n-ik gyökei. Ha viszont $w^n = z$ és $w = se^{i\psi}$, akkor $s^n = r$ és $n\psi = \varphi|\mathrm{mod}2\pi$, azaz $n\psi - k2\pi = \varphi$ valamely $k \in \mathbb{Z}$ esetén; ezek pedig épp azt mondják, hogy z minden n-ik gyöke a fenti alakú. ∎

Szemléletesen z-nek az n-ik gyökei az $\sqrt[n]{|z|}$ sugarú köríven annak az n oldalú szabályos sokszögnek a csúcsai, amelynek egyik csúcsa a z argumentumának n-ed része irányában van. A 29. ábra egy komplex szám harmadik gyökeit mutatja.



29. ábra

27.7. Feladatok

1. Adjuk meg a következő komplex számok trigonometrikus alakját:

$$i, \quad , -1, \quad , 1+i, \quad , \sqrt{3}+i, \quad 1-i\sqrt{3}.$$

2. Árázoljuk a következő komplex számokat:

$$(1-i)\left(\sqrt{3}+i\right), \quad i(1+i), \quad i\left(1+i\sqrt{3}\right).$$

3. Számítsuk ki az 1. feladatban szereplő komplex számok 2., 3. és 4. gyökeit.

28. Polinomok

28.1. Legyen X adott halmaz; az $X \rightarrowtail \mathbb{C}$ fügvények körében hasonlóképpen értelmezünk műveleteket, mint az $X \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvények körében (lásd a 17. és 18. fejezetet).

Ha $g, f : X \rightarrowtail \mathbb{C}$, akkor

$$\begin{aligned}
g+f : \mathrm{Dom} g \cap \mathrm{Dom} f \to \mathbb{C}, &\qquad x \mapsto g(x)+f(x),\\
gf : \mathrm{Dom} g \cap \mathrm{Dom} f \to \mathbb{C}, &\qquad x \mapsto g(x)f(x),\\
f^n := \mathrm{Dom} f \to \mathbb{C}, &\qquad x \mapsto f(x)^n,\\
\frac{1}{f} : \{x \in \mathrm{Dom} f \mid f(x) \neq 0\} \to \mathbb{C}, &\qquad x \mapsto \frac{1}{f(x)},\\
|f| : \mathrm{Dom} f \to \mathbb{R}, &\qquad x \mapsto |f(x)|.
\end{aligned}$$

Ezeken kívül itt még előbukkkan a függvények valós és képzetes része valamint komplex konjugáltja:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}f &: \mathrm{Dom}f \to \mathbb{R}, & x &\mapsto \mathrm{Re}(f(x)), \\ \mathrm{Im}f &: \mathrm{Dom}f \to \mathbb{R}, & x &\mapsto \mathrm{Im}(f(x)), \\ f^* &: \mathrm{Dom}f \to \mathbb{R}, & x &\mapsto f(x)^*. \end{aligned}$$

Természetesen itt a függvények nagyság szerinti összehasonlításának és alsó illetve felső burkolójának nincs értelme.

28.2. Különösen fontosak itt is a hatványfüggvények: $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$ $(n \in \mathbb{N})$ és $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^0 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto 1$.

Definíció *Egy $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvényt* ***komplex polinomnak*** *hívunk ha létezik $N \in \mathbb{N}_0$ és $(a_0, a_1, \dots a_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$ úgy, hogy*

$$p = \sum_{n=0}^{N} a_n \mathrm{id}_{\mathbb{C}}^n.$$

A p polinom ***foka*** *– jelben* $\mathrm{deg}p$ *– az a minimális N amellyel a fenti alakban előállítható.*

Az $a_0, a_1, \dots, a_N$ komplex számok a polinom ***együtthatói****.*

Nyilvánvaló, hogy ha $\mathrm{deg}p = N$, akkor $a_N \neq 0$.

Minthogy a továbbiakban igen sokszor szerepel $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$, az egyszerűség kedvéért csak id-et írunk helyette.

Állítás *Ha $\sum\limits_{n=0}^{N} c_n \mathrm{id}^n = 0$, akkor $c_0 = c_1 = \cdots = c_N = 0$.*

Bizonyítás A fenti plinom mindenütt a nulla értéket veszi fel, speciálisan a 0-ban is, amiből $c_0 = 0$. Így $\sum\limits_{n=0}^{N} c_n \mathrm{id}^n = \mathrm{id} \sum\limits_{n=1}^{N} c_n \mathrm{id}^{n-1}$; ez csak úgy lehet azonosan nulla, ha a jobb oldalon az id mellett álló összeg azonosan nulla, amiből, mint az előbb az következik, hogy $c_1 = 0$. Hasonlóan folytatva megkapjuk, hogy minden együttható nulla. ■

Ez egyben azt is jelenti, hogy a polinomok együtthatói egyértelműen meg vannak határozva. Ha ugyanis $\sum\limits_{n=0}^{N} a_n \mathrm{id}^n = \sum\limits_{n=0}^{N} b_n \mathrm{id}^n$, akkor átrendezve egy oldalra, a $c_n := a_n - b_n$ $(n = 0, 1, \dots, N)$ definícióval alkalmazhatjuk az előbbi eredményünket.

28.3. Világos, hogy polinomok össege és szorzata is polinom. Ha p és q polinom, akkor

$$\begin{aligned}
\deg(p+q) &= \max\{\deg p, \deg q\} \quad \text{ha } \deg p \neq \deg q,\\
\deg(p+q) &\leq \deg p \qquad\qquad\qquad\quad \text{ha } \deg p = \deg q,\\
\deg(pq) &= \deg p + \deg q.
\end{aligned}$$

28.4. Állítás *Legyen p és q polinom, $\deg q \leq \deg p$. Ekkor létezik r és s polinom úgy, hogy*

(i) $\deg r = \deg p - \deg q$,

(ii) $\deg s < \deg q$,

és

$$p = rq + s.$$

Bizonyítás Elég belátni azt, hogy van olyan r_1 és s_1 polinom, hogy $\deg r_1 = \deg p - \deg q$, $\deg s_1 < \deg p$ és $p = r_1 q + s_1$. Ugyanis, ha ez igaz, és $\deg s_1 \geq \deg q$, akkor p helyett s_1-re alkalmazva ezt az összefügést azt kapjuk, hogy $s_1 = r_2 q + s_2$, ahol $\deg r_2 = \deg s_1 - \deg q < \deg p - \deg q = \deg r_1$ és $\deg s_2 < \deg s_1$. Ebből $p = (r_1 + r_2)q + s_2$, és ekként továbblépegetve eljutunk a kívánt formához.

Ha $N := \deg p$, $M := \deg q$ és $p = \sum_{n=1}^{N} a_n \mathrm{id}^n$, $q = \sum_{n=1}^{M} b_n \mathrm{id}^n$, akkor az $r_1 := \frac{a_N}{b_M}\mathrm{id}^{N-M}$ és az $s_1 := p - r_1 q$ polinomok teljesítik a kirótt feltételeket (emlékezzünk, hogy sem a_N sem b_M nem nulla).

28.5. Legyen $\lambda \in \mathbb{C}$. Ekkor $\mathrm{id} - \lambda$ elsőfokú polinom, így bármely nem nulladfokú p polinom esetén az előbbiek szerint $p = r(\mathrm{id} - \lambda) + s$, ahol s nullad fokú, azaz konstans. Ha $p(\lambda) = 0$, akkor $0 = p(\lambda) = (\lambda - \lambda) + s$, azaz $s = 0$.

Azt mondhatjuk tehát: ha $p \neq 0$, akkor $p(\lambda) = 0$ egyenértékű azzal, hogy létezik r polinom, $\deg r = (\deg p) - 1$ és $p = (\mathrm{id} - \lambda)r$.

Definíció *A λ komplex szám a p polinom* ***gyöke****, ha $p(\lambda) = 0$.*

A nulla polinomnak minden komplex szám a gyöke. Nemnulla konstans polinomnak nincs gyöke.

Állítás *Ha p polinom, $\deg p \neq 0$, akkor véges sok gyöke van, és a gyökeinek száma kisebb vagy egyenlő mint p foka.*

Bizonyítás A polinomok foka szerinti teljes indukcióval bizonyítunk.

(i) Ha $\deg p = 1$, akkor $p = a_1 \mathrm{id} + a_0$, ahol $a_1 \neq 0$. Ennek pontosan egy gyöke van, $\frac{a_0}{a_1}$, tehát elsőfokú polinomra igaz az állítás.

(ii) Tegyük fel, hogy igaz az állítás N-ed fokú polinomra, és legyen p $(N+1)$-ed fokú polinom. Legyen λ a p gyöke. Ekkor az előzőek szerint $p = (\mathrm{id} - \lambda)r$, ahol r N-ed fokú polinom, amelynek legfeljebb N darab gyöke van az indukciós feltevés alapján. Ebből a formulából látjuk hogy p gyökeinek a halmaza az r gyökeiből és λ-ból áll (amely lehet is, nem is az r gyöke), tehát a p-nek legfeljebb $N + 1$ darab gyöke van.

28.6. Az előző eredményünk csak azt mondja, legfeljebb hány gyöke lehet egy polinomnak, de hogy van-e egyáltaln gyöke, azt még nem tudjuk. A következő állítást az **algebra alaptételének** hívják; csak későbbi tanulmányaink során bizonyítjuk be.

Állítás *Minden nem-nulladfokú polinomnak van gyöke.*

28.7. Az algebra alaptétele – nem hiába hívják így – jelentős következményekkel jár. Az első, minden többinek az alapja, a polinomok elsőfokú tényezőkre való bontása.

Legyen p N-ed fokú polinom, $N \neq 0$, és $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$ a p összes különböző gyöke. Már tudjuk, hogy $M \leq N$, és a 28.5. elején modottak alapján $p = (\mathrm{id} - \lambda_1)r_1$; viszont $\lambda_2 \neq \lambda_1$, ezért λ_2 az r_1 gyöke, így $r_1 = (\mathrm{id} - \lambda_2)r_2$. Tovább folytatva végül is azt kapjuk, hogy $p = (\mathrm{id} - \lambda_1)(\mathrm{id} - \lambda_2) \dots (\mathrm{id} - \lambda_M)r$, ahol r polinom, $\deg r = N - M$. Ha $M = N$, készen vagyunk. Ha $M < N$ akkor az r nem-nulladfokú polinomnak is van gyöke, és nyilvánvaló, hogy minden gyöke a p-nek is gyöke. Létezik tehát egy $K \leq N - M$ (az r gyökeinek a száma) és egy $i : \{1, \dots, K\} \to \{1, \dots, M\}$ függvény úgy, hogy r gyökei $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \dots, \lambda_{i_K}$. Alkalmazva r-re ugyanazt az eljárást, mint az előbb p-re, kapunk egy q polinomot úgy, hogy $r = (\mathrm{id} - \lambda_{i_1})(\mathrm{id} - \lambda_{i_2}) \dots (\mathrm{id} - \lambda_{i_K})q$. Ha $K = N - M$, akkor célhoz értünk; ha $K < N - M$, akkor q-nak is van gyöke, és gyökei szintén a p gyökei közül kerülnek ki; q-ra is alkalmazhatjuk az eddig eljárást, és így tovább, véges sok (legfeljebb N) lépésben célhoz érünk, azaz p-t előállítjuk mint elsőfokú polinomoknak és egy konstansnak a szorzatát. Bebizonyítottuk tehát a következőt.

Állítás *Legyen $N \in \mathbb{N}$ és p N-ed fokú polinom. Ekkor egyértelműen létezik*

(i) egy $M \in \mathbb{N}$, $M \leq N$ (a gyökök száma),

(ii) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$ egymástól különböző komplex számok (a polinom gyökei),

(iii) $m_1, m_2, \dots, m_M$ pozitív egész számok (a gyökök multiplicitása),

(iv) egy $a \neq 0$ komplex szám (a legmagasabb indexű együttható)

úgy, hogy

$$p = a \prod_{k=1}^{M} (\mathrm{id} - \lambda_k)^{m_k}.$$

Zárójelben leírtuk az állításban szereplő mennyiségek jelentését; így megjelent a multiplicitás szó is, amelyet maga az állítás értelmez: a p polinom λ gyökének a **multiplicitása** az a pozitív egész szám, ahányszor $\mathrm{id} - \lambda$ szorzótényezőként megjelneik a polinom úgynevezett **gyöktényezős** alakjában.

Az **egyszeres, kétszeres stb. gyök** elnevezés azt jelenti, hogy a szóban forgó gyök multiplicitása egy, kettő stb.

28.8. Definíció *Egy komplex polinomot* ***valósnak*** *nevezünk, ha minden együtthatója valós.*

Valós polinom valós számhoz valós számot rendel. Ezért sokszor valós polinomoknak csak a valós számokra való leszűkítését tekintik, azaz $\sum\limits_{n=0}^{N} a_0 \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^n$ alakba írják őket, ahol $a_0, \ldots, a_N$ valós számok.

Állítás *(i) Ha $\lambda \notin \mathbb{R}$ egy valós polinom gyöke, akkor λ^* is gyöke,*

(ii) valós polinom előállítható legfeljebb másodfokú valós polinomok szorzataként.

Bizonyítás (i) Ha p valós polinom, akkor minden z komplex számra $p(z)^* = p(z^*)$.

(ii) Ha a polinom minden gyöke valós, akkor az előző pontnak megfelelő gyöktényezős alakban csupa valós elsőfokú polinom szerepel. Ha a polinomnak van nem valós λ gyöke, akkor λ^* is a gyöke, és a gyöktényezős alakban

$$(\mathrm{id} - \lambda)(\mathrm{id} - \lambda^*) = \mathrm{id}^2 - (\lambda + \lambda^*)\mathrm{id} + \lambda\lambda^* = \mathrm{id}^2 - 2(\mathrm{Re}f)\mathrm{id} + |\lambda|^2$$

szerepel, amely másodfokú valós polinom.

28.9. Gyakran van dolgunk polinomok hányadosával. Ha p és q polinom, $q \neq 0$, akkor $\frac{p}{q}$ csak véges sok helyen, épp a q gyökeiben nincs értelmezve. A 28.3. állítás szerint, ha p nem alacsonyabb fokú, mint q, akkor

$$\frac{p}{q} = r + \frac{s}{q},$$

ahol s már a q-nál alacsonyabb fokú.

Itt jegyezzük meg, hogy a polinomok gyöktényezés felbontása párhuzamba hozható a pozitív egész számok prímtényezős felbontásával, a polinomok hányadosa pedig a pozitív egész számok hányadosával; a fenti jelöléssel r a $\frac{p}{q}$ “egész része”, s pedig az osztás “maradéka”. Polinomok olyan hányadosa, amelyben a számláló alacsonyabb fokú, mint a nevező, “valódi tört”. Most az ilyen valódi törteket vizsgáljuk meg.

Állítás *Legyen s és q polinom, $\deg s < \deg q$. Ha q minden gyöke egyszeres, a gyökök $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$, akkor vannak olyan egyértelműen meghatározott $c_1, c_2, \dots, c_M$ komplex számok, hogy*

$$\frac{s}{q} = \sum_{n=1}^{M} \frac{c_n}{\mathrm{id} - \lambda_n}.$$

(Ezt a formulát **parciális törtekre bontásnak** nevezzük.)

Bizonyítás Van olyan $0 \neq a \in \mathbb{C}$, hogy $q = a \prod_{k=1}^{M} (\mathrm{id} - \lambda_k)$. Ha a bizonyítandó egyenlőséget q-val beszorozzuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$s = a \sum_{n=1}^{M} c_n \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{M} (\mathrm{id} - \lambda_k) \tag{$*$}$$

(egy kis "szépítéssel", mert itt mindenütt definiált függvények szerepelnek, ott pedig a $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ pontokban nem definiált függvények).

Vegyük mindkét oldal értékét a λ_i helyen. A jobb oldalon a szorzat minden n-re nulla, kivéve, ha $n = i$. Tehát

$$s(\lambda_i) = a c_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{M} (\lambda_i - \lambda_k) \qquad (i = 1, \dots, M), \tag{$**$}$$

amiből c_i egyszerű átosztással meghatározható, hiszen nemnulla szorzó áll mellette.

Tehát a $(**)$ formulákból egyértelműen meghatározott $c_1, \dots, c_M$ komplex számokkal teljesül a $(*)$ egyenlőség, amely viszont maga után vonja a bizonyítandó egyenlőséget. ■

Látjuk, miért fontos, hogy q gyökei egyszeresek legyenek: egyébként $(**)$-ben volna olyan c_i, amely mellett nulla állna szorzóként, és ha $s(\lambda_i) \neq 0$, akkor a feladat megoldhatatlan.

Kissé bonyolultabb parciális törtekre bontás lehetséges akkor is, ha a nevező gyökei nem egyszeresek. Ekkor azonban a parciális törtek nevezői nemcsak elsőfokú polinomok. Ha például a nevező λ gyökének a multiplicitása m, akkor a parciális törtek között az

$$\frac{a_1}{\mathrm{id} - \lambda} + \frac{a_2}{(\mathrm{id} - \lambda)^2} + \dots + \frac{a_m}{(\mathrm{id} - \lambda)^m}$$

tag szerepel.

28.10. Feladatok

1. Polinom-e egy polinom komplex konjugáltja?

2. A p polinom gyökeinek halmazát egyesítve a q polinom gyökeinek halmazával megkapjuk pq gyökeinek halmazát.

3. Mik a gyökei a következő polinomoknak?

(i) $\mathrm{id}^2 - 5\mathrm{id} + 6$, (ii) $\mathrm{id}^2 + (2 - 3i)\mathrm{id} - 6i$,

(iii) $\mathrm{id}^2 + \mathrm{id} + 1$, (iv) $\mathrm{id}^3 - 3\mathrm{id} + 2$.

4. Végezzük el az $\dfrac{\mathrm{id}^5 - 2\mathrm{id} + 3}{2\mathrm{id}^2 + \mathrm{id} + 1}$ osztást, azaz írjuk fel ezt a hányadost mint egy harmadfokú polinomnak és egy valódi törtnek az összegét.

5. Bontsuk parciális törtekre a következő valódi törteket:

(i) $\dfrac{1}{\mathrm{id}^4 + 1}$, (ii) $\dfrac{3\mathrm{id}^2 - 2\mathrm{id} - 4i}{\mathrm{id}^3 - 4\mathrm{id}^2 - \mathrm{id} + 4}$.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha egy komplex polinom minden valós számhoz valós számot rendel, akkor a polinom valós. (Ha p ilyen, akkor $(p - p^*)(x) = 0$ minden valós x-re; érveljünk ezután úgy, mint az együtthatók egyértelműségénél.)

7. Mutassuk meg, hogy ha p N-ed fokú polinom, akkor bármely a komplex számra $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto p(z - a)$ is N-ed fokú polinom. Határozzuk meg ennek az együtthatóit a p együtthatóiból a binomiális tétel segítségével. Hogyan kapjuk meg ennek gyökeit a p gyökeiből?