GRUBER TIBOR

ANALÍZIS III.
Folytonosság

Tartalom

A. A RENDEZETT SZÁM N-ESEK TERE

IV. FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK

B. METRIKUS TEREK

I. METRIKUS TEREK TULAJDONSÁGAI

II. FOLYTONOS LEKÉPEZÉSEK

.

A. A RENDEZETT SZÁM N-ESEK TERE

I. $\mathbb{K}^N$ TOPOLÓGIÁJÁNAK ALAPJAI

1. $\mathbb{K}^N$ struktúrája

1.1. Alig van olyan területe a matematika alkalmazásainak, amelyben a valós vagy komplex számok meg ne jelennének. Sőt igen sokszor nem is csak számok, hanem rendezett szám N-esek játszanak fontos szerepet (például az alkalmazásokban: különféle mennyiségek adott módon elrendezett adatai). A valós illetve komplex számok halmazát $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{C}$ jelöli. Azért, hogy a valós illetve komplex számokkal kapcsolatos problémákról egységesen tudjunk beszélni, bevezetjük a $\mathbb{K}$ szimbólumot, amely akár $\mathbb{R}$-et, akár $\mathbb{C}$-t jelenti.

Tudjuk, hogy adott a $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $x\mapsto x^*$ komplex konjugálás, és $x\in\mathbb{C}$ pontosan akkor valós, ha $x^*=x$. Ezért értelmezzük a

$$\mathbb{K}\to\mathbb{K}, \quad x\mapsto x^* := \begin{cases} x^* & \text{ha } \mathbb{K}=\mathbb{C}, \\ x & \text{ha } \mathbb{K}=\mathbb{R} \end{cases}$$

konjugálást. Hasonlóan, $x\in\mathbb{C}$ pontosan akkor valós, ha $\mathrm{Re}(x)=x$, illetve $\mathrm{Im}(x)=0$, ezért értelmezzük a $(*)$ formulához hasonló módon a $\mathrm{Re}:\mathbb{K}\to\mathbb{R}$ és $\mathrm{Im}:\mathbb{K}\to\mathbb{R}$ leképezéseket.

A könyv első részében $\mathbb{K}^N$ szerkezetét és a $\mathbb{K}^N$-nel kapcsolatos függvények tulajdonságait tárgyaljuk, ahol N nem nulla természetes szám. Matolcsi Tamás Analízis I. (Halmazok, számok) című jegyzetének jelöléseit fogjuk használni. Többek között, mivel $\mathbb{K}^N$ az "alaphalmaz", csak ennek elemeivel és részhalmazaival foglalkozunk, használjuk a komplementer-halmaz fogalmát és jelölését:

$$H^{\circ} := \mathbb{K}^N \setminus H \qquad (H\subset\mathbb{K}^N).$$

1.2. Definíció *Ha* $x=(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ *és* $y=(y_1, y_2, \ldots, y_N)$ *a* $\mathbb{K}^N$ *elemei és* $\alpha\in\mathbb{K}$*, akkor*

$$\begin{aligned} x+y &:= (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_N+y_N) \\ \alpha x &:= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_N). \end{aligned}$$

A

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^N\times\mathbb{K}^N\to\mathbb{K}^N, &\qquad (x, y)\mapsto x+y, \\ \mathbb{K}\times\mathbb{K}^N\to\mathbb{K}^N, &\qquad (\alpha, x)\mapsto\alpha x \end{aligned}$$

műveleteket ***összeadásnak****, illetve* ***számmal (skalárral) szorzásnak*** *nevezzük.*

Legyen

$$\mathbf{0}:=(0, 0, \ldots, 0),$$

és $x\in\mathbb{K}^N$ esetén

$$-x:=(-1)x.$$

Állítás *A fent definiált összeadással és számmal szorzással* $\mathbb{K}^N$ *vektortér a* $\mathbb{K}$ *test felett, azaz teljesülnek a következő tulajdonságok: minden* $x, y, z\in\mathbb{K}^N$ *és* $\alpha, \beta\in\mathbb{K}$ *esetén*

(**A1**) $x+y=y+x$,
(**A2**) $(x+y)+z=x+(y+z)$,
(**A3**) $x+\mathbf{0}=x$,
(**A4**) $x+(-x)=\mathbf{0}$,
(**P**) $1x=x$,
(**MP**) $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$,
(**AP**) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$,
(**PA**) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

Az állítást közvetlenül az itt szereplő műveletek definíciója alapján is bebizonyíthatjuk, vagy utalhatunk arra a lineáris algebrából jól ismert tényre, hogy ha V vektorkér $\mathbb{K}$ felett és $X\neq\emptyset$ halmaz, akkor a V^X halmaz a pontonkénti műveletekkel vektortér $\mathbb{K}$ felett.

Az összeadás és a számmal szorzás ilyen tulajdonságai miatt $\mathbb{K}^N$ elemeit a következőkben **vektoroknak** is fogjuk nevezni.

Emlékeztetünk arra, hogy a nem nulla x és y vektorokat egymással **párhuzamosnak** nevezzük, ha van olyan $0 \neq \alpha\in\mathbb{K}$, amellyel $y=\alpha x$. A nulla vektort minden vektorral párhuzamosnak tekintjük.

1.3. (i) Hasonlóan, mint valós számok esetén, bevezetjük a halmazok közötti komplexus műveleteket. Ha $F,G\subset\mathbb{K}^N$ és $A\subset\mathbb{K}$, akkor

$$F+G := \{x+y \mid x\in F, y\in G\}, \qquad F-G := \{x-y \mid x\in F, y\in G\},$$

$$-G := \{-y \mid y \in G\},$$

$$AG := \{\alpha y \mid \alpha\in A, y\in G\},$$

Ha $x\in\mathbb{K}^N$ és $\alpha\in\mathbb{K}$, akkor

$$x+G := \{x\}+G,$$

$$\alpha G := \{\alpha\}G, \qquad Ax := A\{x\}.$$

$F+G$ az $F\times G$ halmaz képe az összeadás által, AF pedig az $A\times F$ képe a számmal szorzás által. Vegyük észre továbbá, hogy ha F és A nem üresek, akkor

$$F+G = \bigcup_{x\in F}(x+G), \qquad AG = \bigcup_{\alpha\in A}(\alpha G).$$

(ii) Sokszor használjuk az egyenes és a szakasz fogalmát, amelyeket a következő módon értelmezünk.

Legyen $x\in\mathbb{K}^N$, $\mathbf{0}\neq v\in\mathbb{K}^N$. Ekkor

$$x+\mathbb{R}v := \{x+\alpha v \mid \alpha\in\mathbb{R}\}$$

az x ponton áthaladó, v irányú **egyenes**.

Ha $x,y\in\mathbb{K}^N$ és $x\neq y$, akkor $x+\mathbb{R}(y-x)$ az x és y pontokon áthaladó egyenes, továbbá

$$[x,y] := x+[0,1](y-x)$$

az x és y végpontú **szakasz**.

1.4. Definíció *Az $x=(x_1,x_2,\dots,x_N)$ és az $y=(y_1,y_2,\dots,y_N)$ $\mathbb{K}^N$-beli vektorok* ***skaláris szorzata****, vagy röviden* ***skalárszorzata****:*

$$\langle x,y\rangle := \sum_{k=1}^{N} x_k^* y_k \in \mathbb{K}.$$

Minden nehézség nélkül, a definíció közvetlen következményeiként beláthatjuk a skaláris szorzat alapvető tulajdonságait.

Állítás *A $\mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}$, $(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$ leképezésre teljesülnek az alábbiak: minden $x,y,z \in \mathbb{K}^N$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ esetén*

*(**S1**) $\langle x,x \rangle \in \mathbb{R}_0^+$, továbbá $\langle x,x \rangle = 0$ pontosan akkor, ha $x = \mathbf{0}$,*
*(**S2**) $\langle y,x \rangle = \langle x,y \rangle^*$,*
*(**SA**) $\langle x, y+z \rangle = \langle x,y \rangle + \langle x,z \rangle$,*
*(**SP**) $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle$.*

Megjegyzés (i) (**SA**) és (**SP**) együtt azt jelentik, hogy az $(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$ leképezés a második változójában lineáris. Ezért az is igaz, hogy $\langle x, \mathbf{0} \rangle = 0$ minden $x \in \mathbb{K}^N$ esetén

(ii) Az $(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$ leképezés az első változójában konjugált lineáris, azaz
(**SA'**) $\langle x+y, z \rangle = \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle$,
(**SP'**) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha^* \langle x,y \rangle$.
Mindkét formula az (**SA**), (**SP**) és (**S2**) közvetlen következménye, az olvasó könnyen beláthatja akármelyiket. Például:

$$\langle \alpha x, y \rangle = \langle y, \alpha x \rangle^* = (\alpha \langle y,x \rangle)^* = \alpha^* \langle y,x \rangle^* = \alpha^* \langle x,y \rangle.$$

Megjegyezzük, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén ez azt jelenti, hogy a skaláris szorzás az első változójában is lineáris.

Értelmezzük két halmaz skaláris szorzatát is a szokásos módon, mint a halmazok Descartes-szorzatának a skaláris szorzat általi képét: ha F és G a $\mathbb{K}^N$ részhalmazai, akkor

$$\langle F, G \rangle := \{\langle x,y \rangle \mid x \in F, y \in G\}.$$

1.5. Állítás *(**Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség**) Minden $x,y \in \mathbb{K}^N$ esetén*

$$|\langle x,y \rangle| \leq \sqrt{\langle x,x \rangle}\,\sqrt{\langle y,y \rangle},$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha x és y párhuzamosak.

Bizonyítás Legyen $z := \langle x,x \rangle y - \langle x,y \rangle x$. Ekkor az 1.4 állítás és az utána lévő megjegyzés szerint

$$0 \leq \langle z,z \rangle = \langle x,x \rangle^2 \langle y,y \rangle - \langle x,x \rangle \langle x,y \rangle^* \langle x,y \rangle = \langle x,x \rangle \left(\langle x,x \rangle \langle y,y \rangle - |\langle x,y \rangle|^2\right)$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $z = \mathbf{0}$.

Ha $x = \mathbf{0}$, akkor $\langle x,x \rangle = 0$ és $\langle x,y \rangle = 0$, így a kívánt egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül. Ha $x \neq \mathbf{0}$, akkor (**S1**) szerint $\langle x,x \rangle > 0$, így

$$\langle x,x \rangle \, \langle y,y \rangle - |\langle x,y \rangle|^2 \geq 0$$

mely átrendezés és négyzetgyökvonás után a kívánt egyenlőtlenséget adja.

Világos továbbá, hogy ha y és x párhuzamosak és $\alpha{\in}\mathbb{K}$ olyan, hogy $y{=}\alpha x$, akkor $|\langle x,y\rangle|{=}|\alpha|\ |\langle x,x\rangle|{=}|\alpha|\ |x|^2{=}|x|\ |y|$. Fordítva, ha a Cauchy–Schwarz egyenlőtlenségben egyenlőség áll fenn, akkor $z{=}\mathbf{0}$, amiből következik, hogy y és x párhuzamosak.

1.6. Definíció *Az $x{=}(x_1,x_2,\dots,x_N){\in}\mathbb{K}^N$ vektor **euklidészi normája** vagy röviden **normája** (más néven **hossza** vagy **abszolút értéke**):*

$$|x| := \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{N}|x_k|^2}.$$

Állítás *A $\mathbb{K}^N{\to}\mathbb{R}_0^+$, $\quad x{\mapsto}|x|$ leképezésre teljesülnek az alábbiak: minden $x,y{\in}\mathbb{K}^N$ és $\alpha{\in}\mathbb{K}$ esetén*

*(**N**) $|x|{=}0$ pontosan akkor, ha $x{=}\mathbf{0}$,*

*(**NP**) $|\alpha x|{=}|\alpha|\ |x|$,*

*(**NA**) $|x{+}y|{\le}|x|{+}|y|$.*

Bizonyítás (**N**) ekvivalens (**S1**)-gyel, (**NP**) pedig a definíció közvetlen következménye.

A komplex számok valós, illetve képzetes része kisebb vagy egyenlő, mint az abszolút értékük, ezért és a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség szerint pedig

$$\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle) \le |\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle)| \le |\langle x,y\rangle| \le |x|\ |y|,$$

következésképpen

$$\begin{aligned}|x{+}y|^2 = \langle x{+}y,x{+}y\rangle = |x|^2{+}|y|^2{+}\langle x,y\rangle{+}\langle x,y\rangle^* = |x|^2{+}|y|^2{+}2\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle) \le \\ \le |x|^2{+}|y|^2{+}2|x|\ |y| = (|x|{+}|y|)^2,\end{aligned}$$

ebből pedig négyzetgyökvonással adódik (**NA**).

Megjegyzés Az (**NA**) tulajdonságot **háromszög-egyenlőtlenségnek** nevezzük.

A háromszög-egyenlőtlenségből következik, hogy minden $x,y{\in}\mathbb{K}^N$ esetén

$$\big|\,|x|-|y|\,\big| \le |x{-}y|,$$

ugyanis (**NA**) szerint

$$\begin{aligned}|x| &= |(x{-}y)+y| \le |x{-}y| + |y|,\\ |y| &= |(y{-}x)+x| \le |y{-}x| + |x|,\end{aligned}$$

és (**NP**) szerint $|y-x|=|x-y|$, így

$$-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y|.$$

Egy másik fontos összefüggés a **parallelogramma-egyenlőség** (egy parallelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyetösszegével): a skalárszorzat tulajdonságaiból azonnal adódik, hogy minden $x, y \in \mathbb{K}^N$ esetén

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2.$$

1.7. Definíció *Az $x=(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ és az $y=(y_1, y_2, \ldots, y_N)$ $\mathbb{K}^N$-beli vektorok **euklidészi távolsága** vagy röviden **távolsága**:*

$$d(x,y) := |x-y| = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} |x_k - y_k|^2}.$$

*A $d: \mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{R}_0^+$ leképezést **euklidészi metrikának** vagy röviden **metrikának**, illetve **távolságfüggvénynek** nevezzük.*

Állítás *A $d: \mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{R}_0^+$ metrikára teljesülnek az alábbiak: a $\mathbb{K}^N$ minden x, y, z elemére*

*(**M1**) $d(x,y)=0$ pontosan akkor, ha $x=y$,*
*(**M2**) $d(y,x)=d(x,y)$,*
*(**M3**) $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$.*

Bizonyítás (**M1**) következik (**N**)-ből, (**M2**) pedig (**NP**)-ből az $\alpha := -1$ esetére, hiszen $y-x = -(x-y)$.

Mivel $x-z = (x-y) + (y-z)$, (**NA**) felhasználásával kapjuk (**M3**)-at.

Megjegyezés (**M3**)-at is **háromszög-egyenlőtlenségnek** hívjuk.

A metrika három felsorolt alaptulajdonsága az, amit a "fizikai terünkben" megszokott távolság-fogalmunkban természetesnek veszünk:

• különböző pontok között a távolság nem nulla, és egy pont önmagától és csak önmagától nulla távolságra van,

• egy pont ugyanolyan messze van egy másiktól, mint a másik az egyiktől,

• egy háromszög bármely oldalának hossza nem nagyobb a másik két oldal hosszának összegénél.

1.8. Nem csak két pontnak, hanem egy pontnak és egy halmaznak, illetve két halmaznak a távolságát is értelmezhetjük, de ez, ellentétben a halmazok összegével, skaláris szorzatával, stb. nem a "komplexus-távolság" lesz, azaz nem a két halmaz Descartes-szorzatának a képe a távolságfüggvény által, hanem annak infimuma, tehát egyetlen valós szám.

Definíció *A $\mathbb{K}^N$ nemüres F és G részhalmazának* ***távolsága***

$$d(F,G) := \inf\{d(x,y) \mid x\in F, y\in G\};$$

az x elem és a nemüres G részhalmaz ***távolsága***

$$d(x,G) := d(\{x\},G) = \inf\{d(x,y) \mid y\in G\};$$

Ha H a $\mathbb{K}^N$ akármilyen részhalmaza, akkor

$$d(\emptyset,H) := 0.$$

Világos, hogy ha $x\in G$, akkor $d(x,G)=0$, és ha $F\cap G\neq\emptyset$, akkor $d(F,G)=0$. Azonban egy pontnak és egy halmaznak a távolsága akkor is lehet nulla, ha a pont nincs benne a halmazban, és diszjunkt halmazok távolsága is lehet nulla. Például

$$d(1,[0,1[)=0 \qquad \text{és} \qquad d([1,2],[0,1[)=0.$$

1.9. Definíció *A $\mathbb{K}^N$ egy H nem üres részhalmazának* ***átmérője***

$$\mathrm{diam}(H) := \sup\{d(x,y) \mid x,y\in H\} \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$$

H ***korlátos****, ha $\mathrm{diam}(H) < +\infty$. Az üres halmazt nulla átmérőjűnek és így korlátosnak tekintjük.*

Nyilvánvaló, hogy ha $F\subset G$, akkor $\mathrm{diam}(F)\leq\mathrm{diam}(G)$. Ezért korlátos halmaz részhalmaza korlátos.

Emlékeztetünk arra, hogy a valós számok részhalmazaira már bevezettük a korlátosság fogalmát. Megmutatjuk, hogy rájuk az itteni és a korábbi definíció egybeesik, sőt $\mathbb{K}^N$-beli halmazok korlátossága is szorosan kapcsolódik $\mathbb{R}$-beli halmazok korlátosságához.

Állítás *A $H\subset\mathbb{K}^N$ halmaz pontosan akkor korlátos, ha a*

$$|H| := \{|x| \mid x\in H\} \subset \mathbb{R}$$

halmaz korlátos $\mathbb{R}$-ben a korábbi definíció szerint.

Bizonyítás Minden $x,y{\in}H$ esetén

$$d(x,y)\le d(x,\mathbf{0})+d(\mathbf{0},y)=|x|+|y|\le 2\sup|H|,$$

következésképpen $\operatorname{diam}(H){\le}2\sup|H|$. Ha tehát a jobb oldalon álló szuprémum véges – azaz $|H|$ korlátos a korábban bevezetett értelemben –, akkor a halmaz korlátos.

Legyen most H korlátos és x_0 tetszőleges, rögzített elem H-ból. Ekkor minden $x{\in}H$ esetén

$$|x|\le d(x,x_0)+d(x_0,\mathbf{0})\le \operatorname{diam}(H)+|x_0|,$$

következésképpen

$$\sup|H|\le \operatorname{diam}(H)+|x_0|<+\infty. \blacksquare$$

A halmaz átmérője valamiképp azt jellemzi, milyen "terjedelmes" a halmaz. Persze vigyáznunk kell egy kicsit, mert az átmérő szó – amelyet körrel kapcsolatban szoktunk meg – félrevezető lehet. Ugyanazon átmérővel rendelkező halmazok közül az egyik lehet "testes", a másik "vézna", a harmadik "lyukas"; ajánljuk az olvasónak, példaként ábrázolja magának az

$$\{(x,y){\in}\mathbb{R}^2\mid x^2{+}y^2{\le}1\},\qquad [-1,1]{\times}\{0\}{\subset}\mathbb{R}^2,\qquad \{(-1,0),(1,0)\}$$

halmazokat.

1.10. Feladatok

1. Mi a hossza a $\mathbb{C}^3$-beli $(1,i,1{+}i)$ vektornak? Milyen távol van ez a pont az $(1{-}i,2,3i)$ ponttól? Mi e vektorok skaláris szorzata?

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $x{\in}\mathbb{K}^N$ és minden $y{\in}\mathbb{K}^N$ esetén $\langle y,x\rangle{=}0$, akkor (és csak akkor) $x{=}\mathbf{0}$. (Útmutatás: y lehet egyenlő x-szel.)

3. Mi a következő pontok és halmazok távolsága?
(i) $(0,0){\in}\mathbb{R}^2$ és $\{(x,1/x\mid x{\in}\mathbb{R}_0^+\}{\subset}\mathbb{R}^2$,
(ii) $(1,2){\in}\mathbb{R}^2$ és $\{(x,y){\in}\mathbb{R}^2\mid x^2{+}y^2<1\}{\subset}\mathbb{R}^2$,
(iii) $(i,i){\in}\mathbb{C}^2$ és $\{(x{+}i,x{-}i)\mid x{\in}\mathbb{R}\}{\subset}\mathbb{C}^2$.

4. Adjuk meg a következő halmazok távolságát!
(i) $\{(x,0)\mid x{\in}\mathbb{R}\}$ és $\{(x,1/x)\mid x{\in}\mathbb{R}^+\}{\subset}\mathbb{R}^2$,
(ii) $\{(x,x^2{+}2)\mid x{\in}\mathbb{R}\}$ és $\{(x,y){\in}\mathbb{R}^2\mid x^2{+}y^2{\le}1\}$,
(iii) $\{(x,y){\in}\mathbb{C}^2\mid |x|^2{+}|y|^2{<}1\}$ és $\{(x{+}i,x-i)\mid x{\in}\mathbb{R}\}{\subset}\mathbb{C}^2$.

5. Mi az

$$\{(x,y,z){\in}\mathbb{R}^3\mid x^2{+}2y^2{+}3z^2{=}1\}$$

halmaz átmérője?

6. Mutassuk meg hogy a $H{\subset}\mathbb{K}^N$ nem üres halmazra $\operatorname{diam}(H){=}0$ pontosan akkor, ha H egy elemű.

7. Ha F és G a $\mathbb{K}^N$ részhalmazai és $F\cap G$ nem üres, akkor
(i) $\operatorname{diam}(F{\cup}G)\le\operatorname{diam}(F){+}\operatorname{diam}(G)$,

(ii) $\text{diam}(F \cap G) \leq \min\{\text{diam}(F), \text{diam}(G)\}$.
8. Az előző feladat alapján lássuk be, hogy
(i) korlátos halmaz komplementere nem korlátos,
(ii) véges halmaz korlátos.
9. Bármely $\emptyset \neq H \subset \mathbb{K}^N$, $x \in \mathbb{K}^N$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$\text{diam}(x+H) = \text{diam}(H), \qquad \text{diam}(\alpha H) = |\alpha| \text{diam}(H).$$

10. Ha F és G a $\mathbb{K}^N$ nemüres részhalmazai és $\emptyset \neq A \subset \mathbb{K}$, akkor

$$\text{diam}(F+G) \leq \text{diam}(F) + \text{diam}(G),$$

$$\text{diam}(AG) \leq \sup |A| \text{diam}(G) + \text{diam}(A) \sup |G|.$$

2. Nyílt halmazok és zárt halmazok

2.1. Definíció *$x \in \mathbb{K}^N$ és $r > 0$ esetén a*

$$G_r(x) := \{y \in \mathbb{K}^N \mid d(y,x) < r\},$$
$$B_r(x) := \{y \in \mathbb{K}^N \mid d(y,x) \leq r\},$$
$$S_r(x) := \{y \in \mathbb{K}^N \mid d(y,x) = r\}$$

halmazokat rendre x középpontú, r sugarú ***(euklidészi) nyílt gömbnek, zárt gömbnek****, illetve* ***gömbhéjnak*** *nevezzük.*

Igen egyszerű belátni a következő fontos tényeket:

Állítás *Minden $0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$ esetén*

$$\alpha G_r(\mathbf{0}) = G_{|\alpha| r}(\mathbf{0}),$$

továbbá minden $x \in \mathbb{K}^N$ esetén

$$G_r(x) = x + G_r(\mathbf{0}),$$

és

$$B_r(x) \subset G_s(x) \qquad (0 < r < s).$$

Gyakran azt mondjuk, hogy $G_r(x)$ az x körüli r sugarú nyílt gömb. Ha nem akarjuk megnevezni a sugarat, csak x körüli nyílt gömbről beszélünk és $G(x)$-et írunk. Az x körüli nyílt gömböket az x **gömbkörnyezeteinek** is nevezzük.

2.2. 1. Definíció *A $T\subset\mathbb{K}^N$ halmaz **nyílt (zárt) tégla**,*

(i) $\mathbb{K}^N=\mathbb{R}$ esetén: ha T nyílt (zárt) intervallum,

(ii) $\mathbb{K}^N=\mathbb{C}$ esetén: ha léteznek T_1 és T_2 nyílt (zárt) intervallumok $\mathbb{R}$-ben úgy, hogy $T=T_1+iT_2$,

(iii) általában: ha $T := \prod\limits_{k=1}^{N} T_k$, ahol T_k nyílt (zárt) tégla $\mathbb{K}$-ban minden $k=1, 2, \ldots, N$ esetén.

2. Definíció *$\xi\in\mathbb{K}$ és $r>0$ esetén legyen*

$$T_r(\xi) := \begin{cases}]\xi-r, \xi+r[& \text{ha } \mathbb{K}=\mathbb{R}, \\ ]\mathrm{Re}(\xi)-r, \mathrm{Re}(\xi)+r[+i]\mathrm{Im}(\xi)-r, \mathrm{Im}(\xi)+r[& \text{ha } \mathbb{K}=\mathbb{C}. \end{cases}$$

Ekkor $x=(x_1, x_2, \ldots, x_N)\in\mathbb{K}^N$ és $r>0$ esetén

$$T_r(x) := \prod_{k=1}^{N} T_r(x_k)$$

*az x középpontú, $2r$ oldalú **nyílt kocka** $\mathbb{K}^N$-ben.*

Jegyezzük meg, hogy $y\in T_r(x)$ pontosan akkor, ha minden $k=1, 2, \ldots, N$ esetén

$$|\mathrm{Re}(y_k-x_k)|<r \quad \text{és} \quad |\mathrm{Im}(y_k-x_k)|<r.$$

2.3. Állítás *Minden $\mathbb{K}^N$-beli nyílt gömb tartalmaz ugyanolyan középpontú nyílt kockát, és fordítva.*

Bizonyítás Minden $x, y\in\mathbb{K}^N$ esetén

$$d(y, x)^2 = \sum_{k=1}^{N} \left(|\mathrm{Re}(y_k-x_k)|^2+|\mathrm{Im}(y_k-x_k)|^2\right).$$

Ebből a formulából közvetlenül látható, hogy

$$T_s(x) \subset G_r(x) \subset T_r(x),$$

ahol

$$s := \begin{cases} \dfrac{r}{\sqrt{N}} & \text{ha } \mathbb{K}{=}\mathbb{R}, \\ \dfrac{r}{\sqrt{2N}} & \text{ha } \mathbb{K}{=}\mathbb{C}. \end{cases}$$

2.4. Vezessük be a

$$\mathbb{P} := \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{ha } \mathbb{K}{=}\mathbb{R}, \\ \mathbb{Q}{+}i\mathbb{Q} & \text{ha } \mathbb{K}{=}\mathbb{C} \end{cases}$$

jelölést.

Állítás *Minden $x{\in}\mathbb{K}^N$ és $r{>}0$ esetén*

$$G_r(x){\cap}\mathbb{P}^N \neq \emptyset, \qquad T_r(x){\cap}\mathbb{P}^N \neq \emptyset.$$

Bizonyítás Az állítás kockára vonatkozó része egyszerű következménye annak az ismert ténynek, hogy minden $\mathbb{R}$-beli nyílt intervallum tartalmaz racionális számot. Ebből az előző állítás szerint következik a gömbre vonatkozó rész.

Megjegyzés A $\mathbb{P}^N$ halmaz azokból a rendezett szám N-esekből áll, amelyeknek minden koordinátája (illetve koordinátájának valós és képzetes része) racionális. $\mathbb{P}^N$ megszámlálható, mivel véges sok megszámlálható halmaz Descartes-szorzata. A későbbiekben nagy jelentősége lesz annak a ténynek, hogy $\mathbb{K}^N$-ben létezik megszámlálható halmaz, melynek minden nyílt gömbbel való metszete nem üres.

2.5. Definíció *Legyen $H{\subset}\mathbb{K}^N$. Az $x{\in}\mathbb{K}^N$*

*(1) **belső pontja** H-nak, ha létezik $r{>}0$ úgy, hogy $G_r(x){\subset}H$,*
*(2) **érintkezési pontja** H-nak, ha minden $r{>}0$ esetén $G_r(x){\cap}H{\neq}\emptyset$,*
*(3) **torlódási pontja** H-nak, ha minden $r{>}0$ esetén $(G_r(x){\setminus}\{x\}){\cap}H{\neq}\emptyset$,*
*(4) **határpontja** H-nak, ha x érintkezési pontja H-nak is, $H^{\flat}$-nek is,*
*(5) **izolált pontja** H-nak, ha létezik $r{>}0$ úgy, hogy $G_r(x){\cap}H{=}\{x\}$.*

A definícióból azonnal adódik, hogy
(i) Ha x belső pontja vagy izolált pontja H-nak, akkor $x{\in}H$.
(ii) Ha $x{\in}H$, akkor x érintkezési pontja H-nak.
(iii) x akkor és csak akkor határpontja H-nak, ha határpontja $H^{\flat}$-nek.
(iv) Minden $x{\in}\mathbb{K}^N$ esetén az alábbi három feltétel közül pontosan egy teljesül:
(a) x belső pontja H-nak,
(b) x belső pontja $H^{\flat}$-nek,
(c) x határpontja H-nak.
(v) $x{\in}\mathbb{K}^N$ akkor és csak akkor érintkezési pontja H-nak, ha az alábbi feltételek közül pontosan egy teljesül:
(a) x torlódási pontja H-nak,

(b) x izolált pontja H-nak.

Állítás *Ha x a H torlódási pontja, akkor minden $r>0$ esetén a $(G_r(x)\setminus\{x\})\cap H$ halmaz végtelen.*

Bizonyítás Indirekt módon okoskodunk. Tegyük fel, hogy létezik $r>0$ úgy, hogy a $(G_r(x)\setminus\{x\})\cap H =: Z$ halmaz véges. Ekkor

$$\rho := \min\{d(y, x) \mid y \in Z\} > 0,$$

és

$$(G_\rho(x)\setminus\{x\})\cap H=\emptyset,$$

ez pedig ellentmond annak, hogy x torlódási pontja H-nak.

Következmény $\mathbb{K}^N$ véges részhalmazának nincs torlódási pontja, és így minden pontja izolált pont.

2.6. Könnyű belátni, hogy az $\mathbb{R}$-beli $]a, b[$ illetve $[a, b]$ intervallumok
(1) belső pontjainak halmaza: $]a, b[$,
(2) érintkezési és torlódási pontjainak halmaza: $[a, b]$,
(3) határpontjainak halmaza: $\{a, b\}$,
(4) izolált pontjainak halmaza: $\emptyset$.

2.7. Állítás *Legyen H nem üres, felülről korlátos részhalmaza $\mathbb{R}$-nek. Ekkor $\sup H$ határpontja H-nak.*

Bizonyítás Legyen $\varepsilon>0$ tetszőleges. A szuprémum ismert tulajdonsága alapján

$$]\sup H-\varepsilon, \sup H[\cap H\neq\emptyset.$$

$\sup H$ felső korlátja a H halmaznak, ezért

$$]\sup H, \sup H+\varepsilon[\cap H = \emptyset.$$

Mivel $G_\varepsilon(\sup H)=]\sup H-\varepsilon, \sup H+\varepsilon[$, a fenti összefüggéseket így is írhatjuk:

$$G_\varepsilon(\sup H)\cap H\neq\emptyset, \quad G_\varepsilon(\sup H)\cap H^{\complement}\neq\emptyset,$$

következésképpen $\sup H$ érintkezési pontja H-nak is és $H^{\complement}$-nek is, így határpontja H-nak. ■

Természetesen ebből az is adódik, hogy ha H nem üres, alulról korlátos részhalmaza $\mathbb{R}$-nek, akkor $\inf H$ határpontja H-nak.

2.8. Definíció *A $\mathbb{K}^N$ egy részhalmaza*

(1) ***nyílt****, ha minden pontja belső pont,*

(2) ***zárt****, ha tartalmazza minden érintkezési pontját, vagy ami ezzel egyenértékű, ha tartalmazza minden torlódási pontját.*

Megjegyzések (i) Az eddig használt nyílt és zárt jelzők a gömbökkel és téglákkal kapcsolatban megfelelnek az itteni definiciónak.

• A nyílt gömbök nyílt halmazok $\mathbb{K}^N$-ben: ha $y \in G_r(x)$, akkor $r - d(y,x) > 0$, és

$$G_{r-d(y,x)}(y) \subset G_r(x)$$

a háromszög-egyenlőtlenség alapján.

• A zárt gömbök zárt halmazok $\mathbb{K}^N$-ben. Ugyanis, ha y érintkezési pontja $B_r(x)$-nek, akkor minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $z_\varepsilon \in G_\varepsilon(y) \cap B_r(x)$. Mivel

$$d(x,y) \leq d(x, z_\varepsilon) + d(z_\varepsilon, y) < r + \varepsilon,$$

és ε tetszőleges, az is igaz, hogy $d(x,y) \leq r$, tehát $y \in B_r(x)$.

• A téglákra vonatkozóan a 2.15.17. feladatra utalunk.

(ii) A valós számok nem korlátos intervallumaira is a nyílt és zárt jelzők megfelelnek az itteni definíciónak, amint azt egyszerűen ellenőrizhetjük: $a \in \mathbb{R}$ esetén

• $]a, \infty[$ és $]-\infty, a[$ nyílt halmaz,

• $[a, \infty[$ és $]-\infty, a]$ nyílt halmaz.

(iii) Olyan halmaz, melynek nincs torlódási pontja, zárt. A 2.5. állítás következménye szerint a véges halmazok – speciálisan az egyelemű halmazok is – zártak.

(iv) A valós számok egy felülről korlátos, zárt részhalmaza tartalmazza szuprémumát az előző állítás szerint. Más szóval, ilyen halmaznak van maximuma.

(v) A következőkben sokat beszélünk nyílt halmazokról és zárt halmazokról. Ne higgyük azonban, hogy egy halmaz feltétlenül nyílt vagy zárt. Például $[0, 1[$ se nem nyílt, se nem zárt.

(v) Egy pont ***környezetének*** hívunk minden a pontot tartalmazó nyílt halmazt. Egy nyílt halmaz tehát minden pontjának környezete.

2.9. 1. Állítás *$H \subset \mathbb{K}^N$ esetén $x \in \mathbb{K}^N$ pontosan akkor*

(1) belső pontja H-nak, ha nem érintkezési pontja $H^\flat$-nek,

(2) érintkezési pontja H-nak, ha nem belső pontja $H^\flat$-nek.

Bizonyítás (1) Mindkét feltétel ekvivalens azzal, hogy létezik olyan $r > 0$, amellyel

$$G_r(x) \subset H \quad \text{azaz} \quad G_r(x) \cap H^\flat = \emptyset.$$

(2) Ez egyenértékű az előzővel, H és $H^\flat$ szerepét felcserélve.

2. Állítás *(1) H pontosan akkor nyílt, ha $H^\flat$ zárt.*

(2) H pontosan akkor zárt, ha $H^\flat$ nyílt.

Bizonyítás (1) Tegyük fel, hogy H nyílt, és legyen x érintkezési pontja $H^{\flat}$-nek; ekkor x nem belső pontja H-nak, ezét x nem eleme H-nak, azaz x eleme $H^{\flat}$-nek; következésképpen $H^{\flat}$ zárt.

Tegyük fel, hogy $H^{\flat}$ zárt, és legyen $x \in H$; ekkor x nem eleme $H^{\flat}$-nek, így x nem érintkezési pontja $H^{\flat}$-nek, tehát x belső pontja H-nak; következésképpen H nyílt.

(2) Ez egyenértékű az előzővel, H és $H^{\flat}$ szerepét felcserélve.

2.10. 1. Állítás

(1) $\emptyset$ és $\mathbb{K}^N$ nyíltak.
(2) Nyílt halmazok tetszőleges, nem üres rendszerének uniója nyílt.
(3) Nyílt halmazok véges, nem üres rendszerének metszete nyílt.

Bizonyítás (1) $\mathbb{K}^N$ nyilvánvalóan nyílt. Az üres halmaz is nyílt, mivel nincs olyan eleme (egyáltalán nincs eleme), mely nem belső pont.

(2) Legyen $(A_i)_{i \in I}$ nyílt halmazok rendszere.

Ha $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, akkor létezik $i \in I$, amelyre $x \in A_i$. A_i nyílt, így létezik $r > 0$ úgy, hogy $G_r(x) \subset A_i$. Nyilvánvaló, hogy

$$G_r(x) \subset \bigcup_{i \in I} A_i,$$

következésképpen x belső pontja a $\bigcup_{i \in I} A_i$ halmaznak.

(3) Legyen $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ nyílt halmazok rendszere.

Ha $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, akkor minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén $x \in A_i$, tehát létezik $r_i > 0$ úgy, hogy $G_{r_i}(x) \subset A_i$.

Az $r := \min\{r_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ szám pozitív, és

$$G_r(x) \subset \bigcap_{i=1}^{n} G_{r_i}(x) \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i,$$

következésképpen x belső pontja a $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ halmaznak. ■

Ebből és az előző állításból a de-Morgan azonosságok segítségével kapjuk:

2. Állítás

(1) $\emptyset$ és $\mathbb{K}^N$ zártak.
(2) Zárt halmazok tetszőleges, nem üres rendszerének metszete zárt.
(3) Zárt halmazok véges, nem üres rendszerének uniója zárt.

Megjegyzés Nyílt halmazok tetszőleges rendszerének metszete nem feltétlenül nyílt, zárt halmazok tetszőleges rendszerének uniója nem feltétlenül zárt. Például $\mathbb{R}$-ben

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]-1/n, 1/n[= \{0\} \qquad \text{és} \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0, 1-1/n] = [0, 1[.$$

2.11. Állítás *$\mathbb{K}^N$ minden nem üres nyílt részhalmaza előáll megszámlálható sok nyílt gömb uniójaként.*

Bizonyítás Használjuk a 2.4-ben bevezetett $\mathbb{P}$ jelölést. Mivel $\mathbb{P}^N$ megszámlálható, a

$$\mathcal{G} := \{G_r(x) \mid x\in\mathbb{P}^N, r\in\mathbb{Q}^+\}$$

nyílt gömbökből álló halmazrendszer is megszámlálható.

Legyen $A\subset\mathbb{K}^N$ nyílt részhalmaz. Nyilvánvaló, hogy $\bigcup\{G \in \mathcal{G} \mid G \subset A\} \subset A$; megmutatjuk, hogy az ellenkező tartalmazás is teljesül, azaz egyenlőség áll fenn.

Ha $y\in A$, akkor y belső pontja A-nak, ezért van olyan $r\in\mathbb{Q}^+$, hogy $G_r(y)\subset A$. A 2.4. állításból következik, hogy létezik $x_0\in G_{r/2}(y)\cap\mathbb{P}^N$. Tehát $G_{r/2}(x_0)\in\mathcal{G}$, továbbá $y\in G_{r/2}(x_0)$, és végül a háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$G_{r/2}(x_0)\subset G_r(y)\subset A,$$

és az imént felsorolt három tényt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzés Hasonlóan bebizonyíthatjuk azt is, hogy $\mathbb{K}^N$ minden nyílt halmaza előáll megszámlálható sok nyílt tégla uniójaként.

2.12. Definíció *Ha H a $\mathbb{K}^N$ tetszőleges részhalmaza, akkor*

*(1) a H halmaz **belsejének** nevezzük mindazon nyílt halmazok unióját, melyek részei H-nak. Jelölje $\overset{\circ}{H}$ a H halmaz belsejét.*

*(2) a H halmaz **lezártjának** nevezzük mindazon zárt halmazok metszetét, melyek tartalmazzák H-t. Jelölje $\overline{H}$ a H halmaz lezártját.*

Megjegyzés (i) A 2.10.1. állítás szerint $\overset{\circ}{H}$ nyílt halmaz $\mathbb{K}^N$-ben, és a legbővebb a H által tartalmazott nyílt halmazok közül, tehát ha N nyílt halmaz, és $N\subset H$, akkor $N\subset\overset{\circ}{H}$; továbbá H pontosan akkor nyílt, ha $\overset{\circ}{H}=H$, ami egyenértékű azzal, hogy $H\subset\overset{\circ}{H}$.

(ii) A 2.10.2. állítás szerint $\overline{H}$ zárt halmaz $\mathbb{K}^N$-ben, és a legszűkebb a H-t tartalmazó zárt halmazok közül, tehát ha Z zárt halmaz, és $H\subset Z$, akkor $\overline{H}\subset Z$; továbbá H pontosan akkor zárt, ha $\overline{H}=H$, ami egyenértékű azzal, hogy $\overline{H}\subset H$.

Állítás *Bármely $H\subset\mathbb{K}^N$ esetén*

(1) $x\in\mathring{H}$ pontosan akkor, ha x belső pontja H-nak,
(2) $x\in\overline{H}$ pontosan akkor, ha x érintkezési pontja H-nak,
(3) $\overline{H} = H \cup \{H$ torlódási pontjai$\}$.

Bizonyítás (1) Ha x belső pontja H-nak, akkor létezik $r{>}0$ úgy, hogy $G_r(x)\subset H$. $G_r(x)$ nyílt halmaz, ezért $G_r(x)\subset\mathring{H}$, tehát $x\in\mathring{H}$.

Ha $x\in\mathring{H}$, akkor – lévén $\mathring{H}$ nyílt – x belső pontja $\mathring{H}$-nak, így belső pontja H-nak is.

(2) Ha x érintkezési pontja H-nak, akkor érintkezési pontja $\overline{H}$-nak is, mert $H\subset\overline{H}$. $\overline{H}$ zárt, ezért $x\in\overline{H}$.

Ha x nem érintkezési pontja H-nak, akkor létezik $r{>}0$ úgy, hogy $G_r(x)\cap H=\emptyset$. Ekkor $H\subset G_r(x)^{\complement}$. $G_r(x)^{\complement}$ zárt, ezért $\overline{H}\subset G_r(x)^{\complement}$, azaz $G_r(x)\cap\overline{H}=\emptyset$, így $x\notin\overline{H}$.

(3) Mivel a $\mathbb{K}^N$ egy eleme pontosan akkor érintkezési pontja H-nak, ha eleme vagy torlódási pontja, az előbbi megállapításunk maga után vonja az állított egyenlőséget.

2.13 Állítás *Legyen F és G a $\mathbb{K}^N$ két részhalmaza.*

(1) Ha $F\subset G$, akkor $\mathring{F}\subset\mathring{G}$ és $\overline{F}\subset\overline{G}$,
(2) $\mathring{\overbrace{F\cup G}}\supset\mathring{F}\cup\mathring{G}$ és $\overline{F\cup G}=\overline{F}\cup\overline{G}$,
(3) $\mathring{\overbrace{F\cap G}}=\mathring{F}\cap\mathring{G}$ és $\overline{F\cap G}\subset\overline{F}\cap\overline{G}$.

Bizonyítás (1) $\mathring{F}\subset F\subset G$; mivel $\mathring{F}$ nyílt, és $\mathring{G}$ a legbővebb G-beli nyílt halmaz, fennáll az $\mathring{F}\subset\mathring{G}$ összefüggés.

$F\subset G\subset\overline{G}$; mivel $\overline{G}$ zárt, és $\overline{F}$ a legszűkebb F-et tartalmazó zárt halmaz, teljesül, hogy $\overline{F}\subset\overline{G}$.

(2) $\mathring{F}\subset F$, $\mathring{G}\subset G$, tehát $\mathring{F}\cup\mathring{G}\subset F\cup G$; mivel $\mathring{F}\cup\mathring{G}$ nyílt halmaz, igaz a $\mathring{F}\cup\mathring{G}\subset\mathring{\overbrace{F\cup G}}$ tartalmazás.

$F\subset\overline{F}$, $G\subset\overline{G}$, tehát $F\cup G\subset\overline{F}\cup\overline{G}$; mivel $\overline{F}\cup\overline{G}$ zárt halmaz, igaz, hogy $\overline{F\cup G}\subset\overline{F}\cup\overline{G}$. Viszont $F\subset F\cup G$ és $G\subset F\cup G$, így $\overline{F}\subset\overline{F\cup G}$ és $\overline{G}\subset\overline{F\cup G}$, amiből $\overline{F}\cup\overline{G}\subset\overline{F\cup G}$.

(3) Az olvasóra bízzuk, hogy az előző érvek mintájára lássa be ezeket az összefüggéseket is.

Megjegyzés (2)-ben és (3)-ban a tartalmazás helyett általában nem állhat egyenlőség. Íme a példák: $F:=]0,1[$ és $G:=[1,2[$ esetén

$$\mathring{\overbrace{F\cup G}}=]0,2[,\quad \text{de} \quad \mathring{F}\cup\mathring{G}=]0,2[\setminus\{1\},$$

$$\overline{F\cap G}=\emptyset,\quad \text{de} \quad \overline{F}\cap\overline{G}=\{1\}.$$

2.14. Definíció *Legyen H és F a $\mathbb{K}^N$ két részhalmaza. Azt mondjuk, hogy H* ***sűrű*** *F-ben, ha $H \subset F \subset \overline{H}$. H* ***mindenütt sűrű****, ha sűrű $\mathbb{K}^N$-ben, azaz $\overline{H} = \mathbb{K}^N$.*

Megjegyzés A 2.12. állítás szerint H akkor és csak akkor mindenütt sűrű, ha minden $x \in \mathbb{K}^N$ és $r > 0$ esetén $G_r(x) \cap H \neq \emptyset$. A 2.4. állítás szerint a racionális koordinátájú pontok halmaza sűrű $\mathbb{K}^N$-ben, azaz $\overline{\mathbb{P}^N} = \mathbb{K}^N$.

2.15. Feladatok

1. Adjuk meg a következő halmazok belső pontjait, érintkezési pontjait, határpontjait, torlódási pontjait, izolált pontjait.
(i) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy\le 1\}$,
(ii) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x<1\}$,
(iii) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y=0\}$,
(iv) $\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 \mid |x|=|y|\}$,
(v) $\{1/n \mid n\in\mathbb{N}\}\subset\mathbb{R}$.

2. Ha x belső pontja a $\mathbb{K}^N$ H részhalmazának, akkor x torlódási pontja is H-nak.

3. Igazoljuk, hogy
(i) $G_r(x)$ határpontjainak halmaza $S_r(x)$,
(ii) $\overline{G_r(x)}=B_r(x)$.

4. Mutassuk meg, hogy minden $x\in\mathbb{K}^N$ és $r>0$ esetén $S_r(x)$ zárt halmaz (a komplementere nyílt).

5. Mi az 1. feladatban szereplő halmazok belseje és lezártja?

6. Bizonyítsuk be, hogy $\mathring{\mathbb{Q}}=\emptyset$ és $\overset{\circ}{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}=\emptyset$.

7. Igazoljuk, hogy $\mathbb{K}^N$ bármely H részhalmazára

$$\left(\mathring{H}\right)^{\complement}=\overline{H^{\complement}} \quad \text{és} \quad \left(\overline{H}\right)^{\complement}=\mathring{\overline{H^{\complement}}}.$$

Ezekből következik, hogy

$$\mathring{H}=\left(\overline{H^{\complement}}\right)^{\complement} \quad \text{és} \quad \overline{H}=\left(\overset{\circ}{H^{\complement}}\right)^{\complement}.$$

8. Ha F nyílt, H zárt halmaz, akkor $F\setminus H$ nyílt, $H\setminus F$ zárt.

9. Bármely $H\subset\mathbb{K}^N$, $x\in\mathbb{K}^N$ és $0\ne\alpha\in\mathbb{K}$ esetén
(i) ha H nyílt, akkor $x+H$ és αH is nyílt,
(ii) ha H zárt, akkor $x+H$ és αH is zárt.
Mit tudunk mondani, ha $\alpha=0$?

10. Ha $F,G\subset\mathbb{K}^N$, $A\subset\mathbb{K}$, $0\notin A$, és F nyílt, akkor $F+G$ és AF is nyílt. (Nyílt halmazok uniója nyílt.)
Ha F zárt, $F+G$ és AF nem feltétlenül zárt. (Például, ha F egy elemű, G és A nyílt.)

11. Mutassuk meg, hogy
(i) $G_r(x)$ átmérője $2r$ (vegyünk egy x-en áthaladó egyenest).
(ii) $G_r(x)$ és $G_s(y)$ távolsága $\max\{0, d(y,x)-r-s\}$ (vegyünk egy x-en és y-on áthaladó egyenest).

12. Legyen $x\in H$, $\operatorname{diam}(H)<r$; ekkor $H\subset G_r(x)$.

13. Bizonyítsuk be, hogy

(i) ha $H\subset\mathbb{R}$ korlátos, akkor $\sup\overline{H}=\sup H$ és $\inf\overline{H}=\inf H$.

(ii) ha $H\subset\mathbb{K}^N$, akkor $\mathrm{diam}(\overline{H})=\mathrm{diam}(H)$. (Tegyük fel, hogy van olyan $x,y\in\overline{H}$, amelyre $d(x,y)>\mathrm{diam}(H)$, és jussunk ellentmondásra a 11. feladat segítségével.) Következésképpen korlátos halmaz lezártja is korlátos.

14. A $H\subset\mathbb{K}^N$ pontosan akkor korlátos, ha minden $x\in\mathbb{K}^N$ esetén létezik $r>0$ úgy, hogy $H\subset G_r(x)$.

15. Bármely $H\subset\mathbb{K}^N$ és $x\in\mathbb{K}^N$ esetén $d(x,\overline{H})=d(x,H)$, továbbá $d(x,H)=0$ pontosan akkor, ha $x\in\overline{H}$.

16. Legyen $x\in\mathbb{K}^N$ és $y\in\mathbb{K}^M$, $r,s>0$. Ekkor $G_r(x)\times G_s(y)\supset G_t(x,y)$, ahol $t:=\min\{r,s\}$.

17. Ha $F\subset\mathbb{K}^N$ és $G\subset\mathbb{K}^M$ nyíltak (zártak), akkor $F\times G$ nyílt (zárt) $\mathbb{K}^{N+M}$-ben.

3. Kompakt halmazok

3.1. Definíció *Egy $\mathbb{K}^N$ részhalmazaiból álló $(G_i)_{i\in I}$ rendszert a $H\subset\mathbb{K}^N$ részhalmaz **lefedésének** nevezünk, ha*

$$H\subset\bigcup_{i\in I}G_i.$$

*Ha $J\subset I$ olyan részhalmaz, hogy $(G_i)_{i\in J}$ is lefedése H-nak, akkor a $(G_i)_{i\in J}$ rendszert a $(G_i)_{i\in I}$ lefedés **részlefedésének** nevezzük.*

*A H halmaz $(G_i)_{i\in I}$ lefedése **nyílt**, ha minden $i\in I$ esetén G_i nyílt halmaz.*

*A H halmaz $(G_i)_{i\in I}$ lefedése **véges**, ha az I indexhalmaz véges.*

3.2. Definíció *A $K\subset\mathbb{K}^N$ halmaz **kompakt**, ha minden nyílt lefedésének létezik véges részlefedése.*

Tehát a $K\subset\mathbb{K}^N$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha minden $(G_i)_{i\in I}$ nyílt lefedése esetén létezik az I indexhalmaznak olyan F véges részhalmaza, hogy $(G_i)_{i\in F}$ is lefedése K-nak.

Az üres halmaz nyilvánvalóan kompakt. Kompaktak a véges részhalmazok is. $\mathbb{K}^N$ nem kompakt, mert $(G_n(\mathbf{0}))_{n\in\mathbb{N}}$ olyan nyílt lefedése, amelynek nem létezik véges részlefedése.

3.3. Állítás *Kompakt halmaz zárt.*

Bizonyítás Az üres halmazra igaz az állítás. Legyen $\emptyset \neq K \subset \mathbb{K}^N$ kompakt halmaz és $a \notin K$.

Minden $x \in K$ esetén $r_x := d(x,a)/2 > 0$, és $(G_{r_x}(x))_{x \in K}$ nyílt lefedése K-nak, ezért létezik K-nak Z véges részhalmaza úgy, hogy $\bigcup_{z \in Z} G_{r_z}(z) \supset K$.

Világos, hogy

$$r := \min\{r_z \mid z \in Z\} > 0,$$

és $G_r(a) \cap G_{r_z}(z) = \emptyset$ minden $z \in Z$ esetén, azaz

$$G_r(a) \subset \left(\bigcup_{z \in Z} G_{r_z}(z)\right)^{\flat} \subset K^{\flat},$$

tehát a belső pontja $K^{\flat}$-nek. Következésképpen $K^{\flat}$ nyílt, így K zárt. ■

Nem zárt halmaz tehát nem lehet kompakt; ez azt jelenti, hogy van olyan nyílt lefedése, amelynek nincs véges részlefedése. Például a $]0,1[$ nyílt intervallum $(]1/n, 1-1/n[)_n \in \mathbb{N}$ nyílt lefedése ilyen. Ugyanis ha volna véges részlefedés, akkor létezne $n \in \mathbb{N}$ úgy, hogy

$$]0,1[\subset \bigcup_{k=1}^{n}]1/k, 1-1/k[\subset]1/n, 1-1/n[,$$

ami nem lehet.

3.4. Állítás *Kompakt halmaz korlátos.*

Bizonyítás Legyen $K \subset \mathbb{K}^N$ kompakt halmaz. Ekkor tetszőleges $x \in \mathbb{K}^N$ esetén $(G_n(x))_n \in \mathbb{N}$ nyílt lefedése K-nak, következésképpen létezik $F \subset \mathbb{N}$ véges részhalmaz úgy, hogy

$$\bigcup_{n \in F} G_n(x) \supset K.$$

Legyen $m := \max F$; ekkor $K \subset G_m(x)$, következésképpen K korlátos. ■

Nem korlátos halmaz tehát nem kompakt. Például $(]n-1/n, n+1+1/n[)_{n \in \mathbb{N}}$ az $\mathbb{R}^+$-nak olyan nyílt lefedése, amelynek nincs véges részlefedése.

3.5. Állítás *Kompakt halmaz zárt részhalmaza kompakt.*

Bizonyítás Legyen $K \subset \mathbb{K}^N$ kompakt halmaz és $A \subset K$ zárt részhalmaz. Ha A üres, akkor nincs mit bizonyítani. Legyen tehát $A \neq \emptyset$, továbbá $(G_i)_{i \in I}$ nyílt lefedése A-nak.

A zárt, ezért $A^{\flat}$ nyílt, és

$$\left(\bigcup_{i \in I} G_i\right) \cup A^{\flat} \supset K.$$

K kompakt, így létezik $F\subset I$ véges úgy, hogy

$$\left(\bigcup_{i\in F} G_i\right) \cup A^{\circ} \supset K.$$

Ha $x\in A$, akkor $x\notin A^{\circ}$, viszont $x\in K$, így $x\in \bigcup_{i\in F} G_i$, tehát

$$\bigcup_{i\in F} G_i \supset A.$$

3.6. Állítás *Kompakt halmaz végtelen részhalmazának van torlódási pontja a kompakt halmazban.*

Bizonyítás Legyen $K\subset\mathbb{K}^N$ kompakt halmaz és $H\subset K$. Tegyük fel, hogy K egyetlen pontja sem torlódási pontja H-nak. Ekkor minden $x\in K$ esetén létezik $r_x>0$ úgy, hogy

$$G_{r_x}(x)\setminus\{x\})\cap H = \emptyset, \qquad (*)$$

azaz $G_{r_x}(x)\cap H$ legfeljebb egyelemű.

$(G_{r_x}(x))_{x\in K}$ nyílt lefedése K-nak, ezért létezik a K-nak olyan véges Z részhalmaza, hogy

$$\bigcup_{z\in Z} G_{r_z}(z) \supset K.$$

Ezért

$$\bigcup_{z\in Z} (G_{r_z}(z)\cap H) \supset H,$$

Ebből pedig $(*)$ miatt következik, hogy H véges.

3.7. Állítás ***(Cantor-féle közösrész-tétel)*** *Legyen $(K_i)_{i\in I}$ kompakt halmazok olyan rendszere, hogy az I minden F véges részhalmaza esetén $\bigcap_{i\in F} K_i\neq\emptyset$. Ekkor $\bigcap_{i\in I} K_i\neq\emptyset$.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy $\bigcap_{i\in I} K_i=\emptyset$, és legyen $i_0\in I$ tetszőleges. Ekkor

$$\bigcap_{i\in I} K_i = K_{i_0}\cap\left(\bigcap_{i\in I\setminus\{i_0\}} K_i\right) = \emptyset,$$

következésképpen

$$K_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I\setminus\{i_0\}} K_i^{\circ}.$$

K_{i_0} kompakt, és minden $i{\in}I\setminus\{i_0\}$ esetén $K_i{}^{\flat}$ nyílt, következésképpen létezik $F{\subset}I\setminus\{i_0\}$ véges részhalmaz úgy, hogy

$$K_{i_0} \subset \bigcup_{i\in F} K_i{}^{\flat}.$$

Ekkor $F{\cup}\{i_0\}{\subset}I$ véges részhalmaz, és

$$\bigcap_{i\in F\cup\{i_0\}} K_i = \emptyset,$$

ami ellentmondás.

Megjegyzések (i) A kompakt halmazok rendszerének metszete kompakt, hiszen zárt halmazok metszete zárt, és a metszet része a rendszer bármelyik tagjának, tehát a 3.4. állítás szerint kompakt.

(ii) Gyakran előforduló speciális eset az, amikor adott a $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nem üres kompakt halmazok monoton fogyó ("egymásba skatulyázott") rendszere, azaz minden $n{\in}\mathbb{N}$ esetén $K_{n+1}{\subset}K_n$. Ekkor nyilvánvaló, hogy véges részrendszerek metszete nem üres, tehát $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n{\neq}\emptyset$.

3.8. Az előbbi megjegyzésünk szerint nem üres kompakt halmazok monoton fogyó rendszerének metszete nem üres. Tudjuk továbbá, hogy kompakt halmaz korlátos és zárt.

A valós számokkal kapcsolatban már megismerkedtünk a Cantor-féle közösrész-tétellel, amely ott úgy szólt, hogy korlátos és zárt intervallumok monoton fogyó rendszerének metszete nem üres. Egyszerű következménye ennek, hogy $\mathbb{K}^N$-beli korlátos és zárt téglák monoton fogyó rendszerének metszete nem üres, azaz ha $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos és zárt téglák olyan rendszere, hogy minden $n{\in}\mathbb{N}$ esetén $T_{n+1}{\subset}T_n$, akkor $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n{\neq}\emptyset$.

Nem meglepő tehát a következő eredmény.

Állítás *$\mathbb{K}^N$-beli korlátos és zárt tégla kompakt.*

Bizonyítás Legyen T korlátos és zárt tégla $\mathbb{K}^N$-ben. Tegyük fel, hogy T nem kompakt. Ekkor létezik T-nek olyan $(G_i)_{i\in I}$ nyílt lefedése, amelynek nincs véges részlefedése.

A T összes projekcióját megfelezve és a fele nagyságú zárt oldalak meghatározta téglákat véve a T-t előállítjuk 2^N illetve 2^{2N} darab zárt tégla uniójaként, attól függően, hogy $\mathbb{K}{=}\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{K}{=}\mathbb{C}$. Ezek közül legalább egy nem fedhető le a $(G_i)_{i\in I}$ rendszer véges sok elemével, mert ellenkező esetben volna $(G_i)_{i\in I}$-nek a T-t lefedő véges részrendszere. Legyen T_1 egy ilyen tulajdonságú zárt tégla. Ekkor tehát

$$T_1{\subset}T, \qquad \operatorname{diam}(T_1) = \frac{1}{2}\operatorname{diam}(T).$$

Ha a T_1 projekcióit is megfelezzük, akkor kapunk legalább egy olyan 2^N-ed illetve 2^{2N}-ed részt, amely nem fedhető le a $(G_i)_{i\in I}$ rendszer véges sok elemével, legyen ez T_2.

Az eljárást folytatva, $\mathbb{K}^N$-beli korlátos és zárt téglák olyan $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rendszerét kapjuk, amelyre teljesülnek a következők:

(1) $T_{n+1}\subset T_n$,

(2) $\operatorname{diam}(T_n) = \dfrac{1}{2^n}\operatorname{diam}(T)$,

(3) T_n nem fedhető le a $(G_i)_{i\in I}$ rendszer véges sok elemével.

Az így megadott egymásba skatulyázott korlátos és zárt téglák metszete nem üres, azaz létezik $x\in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n$.

Mivel $x\in T$, létezik $i_0\in I$ úgy, hogy $x\in G_{i_0}$. G_{i_0} nyílt, ezért van olyan $r>0$, hogy $G_r(x)\subset G_{i_0}$.

A $\{2^n \mid n\in\mathbb{N}\}$ halmaz nem korlátos $\mathbb{R}$-ben, így létezik $n\in\mathbb{N}$ úgy, hogy

$$2^n > \frac{\operatorname{diam}(T)}{r}.$$

Ekkor

$$\operatorname{diam}(T_n) = \frac{1}{2^n}\operatorname{diam}(T) < r,$$

és $x\in T_n$, következésképpen (lásd a 2.14.11. feladatot)

$$T_n \subset G_r(x) \subset G_{i_0},$$

ez pedig ellentmond (3)-nak, tehát T kompakt.

3.9. Ha $H\subset\mathbb{K}^N$ korlátos halmaz, $x\in H$ és $\alpha>\operatorname{diam}(H)$, akkor $H\subset G_\alpha(x)\subset T_\alpha(x)$ (lásd 2.2.). Ez azt is maga után vonja, hogy minden korlátos halmaz benne van egy korlátos és zárt téglában.

1. Állítás *(**Heine–Borel-tétel**)* $\mathbb{K}^N$ *egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

Bizonyítás Kompakt halmaz a 3.3. és 3.5. állítások szerint korlátos és zárt.

Ha viszont $H\subset\mathbb{K}^N$ korlátos és zárt, akkor benne van egy korlátos és zárt téglában, amely kompakt 3.8. szerint. Ezért H, mint kompakt halmaz zárt részhalmaza a 3.4. szerint kompakt.

2. Állítás *(**Bolzano–Weierstrass-tétel**)* $\mathbb{K}^N$*-ben korlátos és végtelen halmaznak van torlódási pontja.*

Bizonyítás Legyen H korlátos és végtelen halmaz $\mathbb{K}^N$-ben.

H korlátossága miatt létezik $T\subset\mathbb{K}^N$ korlátos és zárt tégla úgy, hogy $H\subset T$. T kompakt, ezért a 3.6. szerint H-nak van torlódási pontja T-ben. ■

Jegyezzük meg, hogy ha H nem zárt, akkor a torlódási pontja nem feltétlenül tartozik H-hoz.

3.10. Feladatok

1. Igazoljuk a kompakt halmazok definíciójából (nyílt lefedéssel), hogy
(i) akárhány kompakt halmaz metszete kompakt,
(ii) véges sok kompakt halmaz uniója kompakt.

2. Ugyancsak nyílt lefedéssel bizonyítsuk be, hogy ha $K\subset\mathbb{K}^N$ kompakt halmaz, $x\in\mathbb{K}^N$ és $0\neq\alpha\in\mathbb{K}$, akkor $x+K$ és αK is kompakt.

3. Legyen $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nemüres kompakt halmazok rendszere úgy, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $K_{n+1}\subset K_n$. Igazoljuk, hogy a $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$ halmaz pontosan akkor egyelemű, ha $\inf\{\mathrm{diam}(K_n) \mid n\in\mathbb{N}\}=0$.

4. Mutassuk meg, hogy ha K kompakt, H zárt halmaz $\mathbb{K}^N$-ben és $K\cap H=\emptyset$, akkor $d(K,H)>0$. Hozzunk példát arra, ez nem igaz, ha K-tól csak azt követeljük meg, hogy legyen zárt.

4. Összefüggő, konvex és csillagszerű halmazok

4.1. Emlékeztetünk, hogy a $\mathbb{K}^N$ x és y elemét összekötő szakasz

$$[x,y]=x+[0,1](y-x)=\{(1-\alpha)x+\alpha y \mid \alpha\in[0,1]\}. \qquad (*)$$

Definíció *A $\mathbb{K}^N$-beli H részhalmaz*

(1) ***konvex****, ha minden $x,y\in H$ esetén $[x,y]\subset H$,*

(2) ***csillagszerű****, ha létezik olyan $x_0\in H$* ***csillagcentrum****, hogy minden $x\in H$ esetén $[x_0,x]\subset H$.*

Nyilvánvaló, hogy az üres halmaz konvex, és nem üres konvex halmaz minden eleme csillagcentrum, következésképpen konvex halmaz csillagszerű. Magától értetődik, hogy $\mathbb{K}^N$ konvex, sőt $\mathbb{K}^N$ minden lineáris altere konvex.

4.2. Állítás *Minden gömb és minden tégla konvex.*

Bizonyítás Legyen $x\in\mathbb{K}^N$ és $r>0$.

A $G_r(x)$ bármely y és z elemét összekötő szakasz tetszőleges $(1-\alpha)y+z$ alakú pontjára

$$|\big((1-\alpha)y+\alpha z\big)-x|=|(1-\alpha)(y-x)+\alpha(z-x)|\leq$$
$$\leq(1-\alpha)|y-x|+\alpha|z-x|<(1-\alpha)r+\alpha r=r,$$

tehát $[y, z] \subset G_r(x)$.

Ha $y, z{\in}T_r(x)$, akkor minden $k{=}1, 2, \ldots, N$ esetén

$$|\mathrm{Re}((1{-}\alpha)y_k{+}\alpha z_k){-}\mathrm{Re}(x_k)| = |(1{-}\alpha)\mathrm{Re}(y_k{-}x_k){+}\alpha\mathrm{Re}(z_k{-}x_k)| \leq$$
$$\leq (1{-}\alpha)|\mathrm{Re}(y_k{-}x_k)|{+}\alpha|\mathrm{Re}(z_k{-}x_k)| < (1{-}\alpha)r{+}\alpha r = r,$$

és ugyanígy járhatunk el a képzetes részeket illetően, tehát az $[y, z]$ minden eleme benne van $T_r(x)$-ben.

4.3. Definíció *Az E és F $\mathbb{K}^N$-beli részhalmazok* ***szétesők****, ha*

$$\overline{E}{\cap}F{=}\emptyset \quad \textit{és} \quad E{\cap}\overline{F}{=}\emptyset.$$

$H{\subset}\mathbb{K}^N$ ***összefüggő****, ha nem áll elő két nem üres, szétesző halmaz uniójaként.*

Az üres halmaz összefüggő. Szétesző halmazok diszjunktak, viszont diszjunkt halmazok nem szükségképpen szétesők; példa erre $[0, 1[$ és $[1, 2]$. Természetesen diszjunkt zárt halmazok szétesők. Az az érdekes, hogy ez nyílt halmazokra is igaz.

Állítás *Diszjunkt nyílt halmazok szétesők.*

Bizonyítás Legyenek E és F diszjunkt nyílt halmazok. $E{\cap}F{=}\emptyset$ azt jelenti, hogy $E{\subset}F^{\flat}$. $F^{\flat}$ zárt, ezért $\overline{E}{\subset}F^{\flat}$, azaz $\overline{E}{\cap}F{=}\emptyset$. Hasonlóan látható be, hogy $E{\cap}\overline{F}{=}\emptyset$.

4.4. Állítás *Ha H_i $(i \in I)$ összefüggő halmazok és $\bigcap\limits_{i\in I} H_i \neq \emptyset$, akkor $\bigcup\limits_{i\in I} H_i$ összefüggő.*

Bizonyítás Jelölje H az uniót, és tegyük fel, hogy szétesző, azaz van olyan E és F nemüres halmaz, hogy $H = E{\cup}F$, $E{\cap}\overline{F} = \emptyset$, $\overline{E}{\cap}F = \emptyset$. Ekkor a halmazműveletek disztributivitása miatt

$$H = \bigcup_{i\in I}\big((H_i \cap E) \cup (H_i \cap F)\big).$$

Minden i-re $H_i = (H_i \cap E) \cup (H_i \cap F)$, és az unióban szereplő halmazok szétesők (egyik lezártja sem metsz bele a másikba); a H_i-k összefüggősége miatt tehát $H_i \cap E = \emptyset$ vagy $H_i \cap F = \emptyset$. Bármely $x \in \bigcap\limits_{i\in I} H_i$ a H eleme, ezért vagy az E-hez, vagy az F-hez tartozik; legyen például $x \in E$. Ekkor minden $i \in I$ esetén $x \in H_i \cap E$ és így $H_i \cap F = \emptyset$, tehát $F = \bigcup\limits_{i\in I}(H_i \cap F) = \emptyset$, ami ellentmondás.

4.5. Definíció *Legyen H a $\mathbb{K}^N$ tetszőleges részhalmaza. A H egy C részhalmazát a H* ***összefüggő komponensének*** *nevezzük, ha C összefüggő és maximális a tartalmazás tekintetében, azaz ha A összefüggő, $C \subset A \subset H$, akkor $A = C$.*

Állítás *(1) A H halmaz különböző összefüggő komponensei diszjunktak.*

(2) Minden $x \in H$ esetén létezik egyetlen olyan összefüggő komponens, amelynek x az eleme, nevezetesen

$$\bigcup\{C{\subset}H \mid x \in C, C \text{ összefüggő}\}.$$

Bizonyítás (1) Ha C_1 és C_2 a H összefüggő komponense és $C_1{\cap}C_2 \neq \emptyset$, akkor az előzőek szerint $C_1{\cup}C_2$ is összefüggő, amely tartalmazza C_1-et is és C_2-t is, és léven ezek maximális összefüggő részhalmazai H-nak, $C_1 = C_1{\cup}C_2 = C_2$.

(2) Az eddigiekből nyilvánvaló.

4.6. Állítás *$\mathbb{K}^N$ csillagszerű részhalmaza összefüggő.*

Bizonyítás Megmutatjuk, hogy nem összefüggő halmaz nem lehet csillagszerű.

Legyen $H{\subset}\mathbb{K}^N$ nem összefüggő halmaz. Ekkor léteznek E és F nem üres halmazok úgy, hogy

$$H{=}E{\cup}F, \qquad \overline{E}{\cap}F{=}\emptyset \quad \text{és} \quad E{\cap}\overline{F}{=}\emptyset.$$

Legyen $x{\in}E$ és $y{\in}F$ és

$$\beta := \sup\{\alpha{\in}[0,1] \mid (1{-}\alpha)x{+}\alpha y{\in}E\},$$

$$z := (1{-}\beta)x{+}\beta y.$$

A szuprémum ismert tulajdonsága alapján minden $r{>}0$ esetén létezik olyan $\alpha{\in}]\beta{-}r/|y{-}x|, \beta]$, hogy

$$(1{-}\alpha)x{+}\alpha y \in E.$$

Ekkor $|\alpha{-}\beta| < r/|y{-}x|$, így

$$|(1{-}\alpha)x{+}\alpha y{-}z| = |\alpha{-}\beta||y{-}x| < r,$$

azaz $G_r(z){\cap}E{\neq}\emptyset$. Következésképpen $z{\in}\overline{E}$, és így $z{\notin}F$.

Most két esetet kell megkülönböztetnünk.

(1) Ha $z{\notin}E$, akkor

$$(1{-}\beta)x{+}\beta y = z \notin E{\cup}F{=}H,$$

(2) Ha $z{\in}E$, akkor $z{\notin}\overline{F}$, így létezik $r{>}0$ úgy, hogy $G_r(z){\cap}F{=}\emptyset$. Ekkor bármely $\alpha{\in}]\beta,\beta{+}r/|y{-}x|[$ esetén

$$(1{-}\alpha)x{+}\alpha y \notin E{\cup}F{=}H.$$

A fentiek alapján megállapíthatjuk, hogy ha $x{\in}E$ és $y{\in}F$, akkor $[x,y]{\cap}H^{\flat}{\neq}\emptyset$, következésképpen sem E-beli, sem F-beli csillagcentruma nincs H-nak, tehát H nem csillagszerű.

4.7. Összefoglalva az eddigieket: konvex halmaz csillagszerű, csillagszerű halmaz összefüggő.

Eredményünk egy érdekes következménye:

Állítás *$\mathbb{K}^N$-ben csak az üres halmaz és maga $\mathbb{K}^N$ lehet egyszerre nyílt és zárt.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy H nem üres valódi részhalmaza $\mathbb{K}^N$-nek, amely nyílt is, zárt is. Ekkor $H^{\flat}$ is nem üres valódi részhalmaza $\mathbb{K}^N$-nek, amely nyílt is, zárt is, így a H és $H^{\flat}$ halmazok szétesők, és $H{\cup}H^{\flat}{=}\mathbb{K}^N$. Ez azt jelenti, hogy $\mathbb{K}^N$ nem összefüggő, ami nem lehet, mert $\mathbb{K}^N$ konvex.

4.8 A valós számok összefüggő részhalmazairól az eddigieknél több mondható.

1. Állítás *$\mathbb{R}$ összefüggő részhalmaza konvex.*

Bizonyítás Legyen $H{\subset}\mathbb{R}$ nem konvex halmaz. Ekkor létezik $x,y{\in}H$, $x{<}y$ és $\alpha{\in}[0,1]$ úgy, hogy

$$z := (1{-}\alpha)x{+}\alpha y{\notin}H.$$

Legyen

$$E := H{\cap}]{-}\infty,z[\quad \text{és} \quad F := H{\cap}]z,+\infty[.$$

Ekkor $z{\notin}H$ miatt $E{\cup}F{=}H$, $x{\in}E$ és $y{\in}F$ miatt $E{\neq}\emptyset$, $F{\neq}\emptyset$, és triviális, hogy $\overline{E}{\cap}F{=}\emptyset$, $E{\cap}\overline{F}{=}\emptyset$, azaz H nem összefüggő.

2. Állítás *$\mathbb{R}$ nemüres részhalmaza pontosan akkor konvex, ha intervallum vagy egypont-halmaz.*

Bizonyítás Mivel az $\mathbb{R}$-beli szakaszok éppen a korlátos és zárt intervallumok, az intervallumok és egy elemű halmazok nyilvánvalóan konvexek.

Ha viszont I konvex és nem egy elemű, akkor minden $x,y{\in}I$, $x{<}y$ esetén $[x,y]{\subset}I$. Nyilvánvaló, hogy $I{\subset}[\inf I,\sup I]$. Legyen $x{\in}]\inf I,\sup I[$. A szuprémum és az infimum ismert tulajdonsága alapján létezik $y,z{\in}I$ úgy, hogy $y{<}x{<}z$. Az I konvexsége miatt $x{\in}I$, tehát

$$]\inf I,\sup I[\subset I \subset [\inf I,\sup I],$$

azaz I intervallum $\inf I$ és $\sup I$ végpontokkal.

Az előző pont és az itteni állítások szerint tehát az $\mathbb{R}$ egy nemüres részhalmazára a következők ekvivalensek:

(i) konvex, (ii) csillagszerű, (iii) összefüggő, (iv) interallum vagy egypont-halmaz.

4.9. Feladatok

1. Döntsük el, hogy a következő halmazok közül melyik konvex, csillagszerű, összefüggő:
(i) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$,
(ii) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy\leq 1\}$,
(iii) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=1\}$,
(iv) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=|x|\}$.

2. Legyen $a>0$. Milyen $b>a$ esetén csillagszerű az

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leq x^2+y^2\leq b, x\geq 0, y\geq 0\}$$

halmaz? Mutassuk meg, hogy ilyen halmaz nem lehet konvex.

3. Bizonyítsuk be, hogy konvex halmaz lezártja is konvex. (Útmutatás: legyen H nem üres és nem egy elemű konvex halmaz, $x,y\in\overline{H}$, $x\neq y$. Legyen $\alpha\in[0,1]$ és $z := (1-\alpha)x+\alpha y$. Bármely $r>0$ esetén van $x'\in G_r(x)\cap H$, $y'\in G_r(y)\cap H$. Mutassuk meg, hogy $(1-\alpha)x'+\alpha y'\in G_r(z)$, azaz $z\in\overline{H}$.)

4. Igazoljuk, hogy összefüggő halmaz lezártja is összefüggő.

5. Bizonyítsuk be, hogy egy nyílt halmaz összefüggő komponensei is nyíltak.

6. **Törött vonalnak** hívunk $\mathbb{K}^N$-ben egy Z részhalmazt, ha van olyan $n\in\mathbb{N}$ és $a_0, a_1, \ldots, a_n\in\mathbb{K}^N$, hogy $Z=\bigcup_{i=i}^{n}[a_i, a_{i-1}]$. Általánosítsuk a 4.6. állítást így: ha egy halmaz bármely két pontja törött vonallal összeköthető (azaz van olyan törött vonal, amely tartalmazza a két pontot), akkor a halmaz összefüggő.

7. Igazoljuk, hogy a $\mathbb{K}^N$ összefüggő nyílt részhalmazának bármely két pontja törött vonallal összeköthető.

8. Ha $F\subset\mathbb{K}^N$ és $G\subset\mathbb{K}^M$ konvex (csillagszerű), akkor $F\times G$ is konvex (csillagszerű).

5. Részhalmazra vonatkozó nyíltság, zártság

5.1. Definíció *Legyen R a $\mathbb{K}^N$ tetszőleges részhalmaza és $H{\subset}R$. Az $x{\in}R$*

(1) ***belső pontja H-nak R-re nézve****, ha létezik $r{>}0$ úgy, hogy*

$$G_r(x){\cap}R{\subset}H,$$

(2) ***érintkezési pontja H-nak R-re nézve****, ha minden $r{>}0$ esetén*

$$G_r(x){\cap}R{\cap}H{\neq}\emptyset.$$

Megjegyzés Mivel $H{\subset}R$, az igaz, hogy $G_r(x){\cap}R{\cap}H{=}G_r(x){\cap}H$, következésképpen $x{\in}R$ pontosan akkor érintkezési pontja H-nak R-re nézve, ha érintkezési pontja H-nak. Ezért H-nak az R-re vonatkozó érintkezési pontjaiból álló halmaz $\overline{H}{\cap}R$.

5.2. Definíció *Legyen R a $\mathbb{K}^N$ tetszőleges részhalmaza és $H{\subset}R$.*

(1) H ***nyílt R-re nézve****, ha minden pontja belső pont R-re nézve,*

(2) H ***zárt R-re nézve****, ha tartalmazza minden R-re vonatkozó érintkezési pontját.*

Adott $H{\subset}\mathbb{K}^N$ halmaznak egy R-re vonatkozó nyíltsága illetve zártsága erősen függ R-től. Például önmagára nézve minden halmaz nyílt is és zárt is.

A $]0,1[{\subset}\mathbb{C}$ halmaz nyílt $\mathbb{R}$-ben, de nem nyílt $\mathbb{C}$-ben.

Állítás *Legyen $R{\subset}\mathbb{K}^N$ tetszőleges részhalmaz. A $H{\subset}R$ halmaz pontosan akkor nyílt (zárt) R-re nézve, ha létezik $A{\subset}\mathbb{K}^N$ nyílt (zárt) halmaz úgy, hogy $H{=}A{\cap}R$.*

Bizonyítás Legyen $A{\subset}\mathbb{K}^N$ nyílt halmaz úgy, hogy $H{=}A{\cap}R$.

Minden $x{\in}H$ esetén $x{\in}A$, így A nyíltsága miatt létezik $r{>}0$ úgy, hogy $G_r(x){\subset}A$. Ekkor $G_r(x){\cap}R{\subset}A{\cap}R{=}H$, tehát x belső pontja H-nak R-re nézve, következésképpen H nyílt R-re nézve.

Ha H nyílt R-re rézve, akkor minden $x{\in}H$ esetén létezik $r_x{>}0$ úgy, hogy $G_{r_x}(x){\cap}R{\subset}H$. Ekkor

$$A := \bigcup_{x\in H} G_{r_x}(x)$$

olyan nyílt halmaz $\mathbb{K}^N$-ben, hogy $H{=}A{\cap}R$.

Legyen $A\subset\mathbb{K}^N$ zárt halmaz úgy, hogy $H=A\cap R$. $H\subset A$, így $\overline{H}\subset A$. Ha x érintkezési pontja H-nak R-re nézve, akkor az előző megjegyzés szerint $x\in\overline{H}\cap R\subset A\cap R=H$, tehát H zárt R-re nézve.

Ha H zárt R-re nézve, akkor $A:=\overline{H}$ zárt $\mathbb{K}^N$-ben, és $H=A\cap R$.

Következmény Ha $R\subset\mathbb{K}^N$ nyílt (zárt) halmaz, akkor $H\subset R$ pontosan akkor nyílt (zárt) R-re nézve, ha nyílt (zárt) $\mathbb{K}^N$-ben.

5.3. Állítás *Legyen R a $\mathbb{K}^N$ tetszőleges részhalmaza. A $K\subset R$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha minden R-re nézve nyílt halmazokból álló lefedésének létezik véges részlefedése.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy K kompakt, és legyen $(A_i)_{i\in I}$ R-re nézve nyílt halmazokból álló lefedése K-nak. Ekkor az 5.2.állítás szerint minden $i\in I$ esetén létezik $G_i\subset\mathbb{K}^N$ nyílt halmaz úgy, hogy $A_i=G_i\cap R$. Mivel $(G_i)_{i\in I}$ nyílt lefedése K-nak, létezik $F\subset I$ véges részhalmaz úgy, hogy $\bigcup\limits_{i\in F} G_i\supset K$. Ekkor $R\supset K$ miatt

$$\bigcup_{i\in F} A_i=\bigcup_{i\in F}(G_i\cap R)=\left(\bigcup_{i\in F} G_i\right)\cap R\supset K.$$

Megfordítva, legyen $K\subset R$ olyan halmaz, melynek minden R-re nézve nyílt halmazokból álló lefedésének létezik véges részlefedése, és legyen $(G_i)_{i\in I}$ nyílt lefedése K-nak. Ekkor $(G_i\cap R)_{i\in I}$ R-re nézve nyílt halmazokból álló lefedése K-nak, így létezik $F\subset I$ véges részhalmaz úgy, hogy $\bigcup\limits_{i\in F}(G_i\cap R)\supset K$. Nyilván $\bigcup\limits_{i\in F} G_i\supset K$ még inkább teljesül, tehát K kompakt. ■

Az állításban szereplő feltétellel értelmezhetnénk azt a fogalmat, hogy “K kompakt R-re nézve”. Azonban az állítás szerint ez a tulajdonság független lenne R-től abban az értelemben, hogy adott $K\subset\mathbb{K}^N$ halmaz esetén K minden $R\supset K$ halmazra nézve egyszerre lenne kompakt vagy nem kompakt. Ilyen értelemben a kompaktság abszolút fogalom, nem úgy, mint a nyíltság vagy zártság.

5.4. Feladatok

1. Melyek a nyílt illetve zárt halmazok $\mathbb{N}$-ben, mint $\mathbb{R}$ részhalmazában?

2. Nyílt-e, zárt-e $[0,1[$-re nézve a $[0,1/2[$ illetve az $[1/2,1[$ halmaz?

3. Legyen $R\subset\mathbb{K}^N$ tetszőleges részhalmaz, és $H\subset R$. Igazoljuk, hogy H-nak R-beli lezártja – vagyis a legszűkebb H-t tartalmazó R-re nézve zárt halmaz – megegyezik a $\overline{H}\cap R$ halmazzal. Mutassuk meg, hogy H-nak R-beli belsejére nem áll fenn hasonló összefüggés.

4. Nyílt-e, zárt-e $\mathbb{Q}$-ban az $\{x\in\mathbb{Q}\mid 2\le x^2\le 3\}$ halmaz?

5. Egy $H\subset\mathbb{K}^N$ halmaz **lokálisan zárt**, ha minden H-beli pontnak van olyan V környezete, hogy $V\cap H$ zárt V-re nézve. Mutassuk meg, hogy a lokálisan zárt halmazok éppen az $U\cap F$ alakú halmazok, ahol $U\subset\mathbb{K}^N$ nyílt és $F\subset\mathbb{K}^N$ zárt.

II. SOROZATOK

6. Sorozatok konvergenciája

6.1. Ugyanúgy, mint valós és komplex értékű függvények esetében, $\mathbb{K}^N$ értékű függvényekre is értelmezhetjük a pontonkénti műveleteket. Ha X nem üres halmaz, $f, g : X \rightarrowtail \mathbb{K}^N$, $\phi : X \rightarrowtail \mathbb{K}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor

$$\begin{aligned}
f+g &: \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \to \mathbb{K}^N, & x &\mapsto f(x)+g(x), \\
\phi f &: \mathrm{Dom}(\phi) \cap \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{K}^N, & x &\mapsto \phi(x) f(x), \\
\alpha f &: \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{K}^N, & x &\mapsto \alpha f(x), \\
\langle f, g \rangle &: \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \to \mathbb{K}, & x &\mapsto \langle f(x), g(x) \rangle, \\
|f| &: \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}_0^+, & x &\mapsto |f(x)|.
\end{aligned}$$

Az $f{:}X \rightarrowtail \mathbb{K}^N$ függvényt **korlátosnak** nevezzük, ha $\mathrm{Ran}(f)$ a $\mathbb{K}^N$ korlátos részhalmaza.

1.9 szerint az f függvény pontosan akkor korlátos, ha $\sup\{|f(x)| \mid x \in \mathrm{Dom}(f)\} < \infty$, vagy ami ezzel egyenértékű, létezik olyan $K > 0$ valós szám, hogy $|f(x)| \leq K$ minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén.

6.2. Ebben a részben $\mathbb{N} \to \mathbb{K}^N$ függvényekkel foglalkozunk, amelyeket **sorozatoknak** nevezünk. E vonatkozásban $\mathbb{N}$ elemeit **indexeknek** nevezzük; az $a{:}\mathbb{N} \to \mathbb{K}^N$ sorozatnak az n indexen felvett értékét általában a_n-nel jelöljük és a sorozat n-edik **tagjának** hívjuk. Magát a sorozatot sokszor az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ formában adjuk meg.

6.3. Definíció *Az $x \in \mathbb{K}^N$* ***sűrűsödési helye*** *az $a{:}\mathbb{N} \to \mathbb{K}^N$ sorozatnak, ha minden $r > 0$ esetén az*

$$\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in G_r(x)\}$$

halmaz végtelen.

Más szóval egy pont akkor sűrűsödési helye a sorozatnak, ha a pont minden környezetébe eső tagok indexeinek halmaza végtelen. Vegyük azonban észre, ez nem jelenti azt, hogy az

$$\{a_n \mid n{\in}\mathbb{N}\}{\cap}G_r(x)$$

halmaz azaz $\mathrm{Ran}(a){\cap}G_r(x)$ végtelen. Például az $\mathbb{N}{\to}\mathbb{R}$, $n{\mapsto}(-1)^n$ sorozatnak 1 és -1 sűrűsödési helye, azonban $\mathrm{Ran}(a){=}\{1,-1\}$ véges.

Ha viszont $\mathrm{Ran}(a){\cap}G_r(x)$ végtelen minden $r>0$ esetén, akkor x sűrűsödési helye a sorozatnak, hiszen nyilvánvaló, hogy az $\{n{\in}\mathbb{N} \mid a_n{\in}G_r(x)\}$ halmaz nagyobb vagy egyenlő számosságú a fenti halmaznál. A 2.5. állítás szerint a mondottakat így fogalmazhatjuk át:

Állítás *Egy sorozat értékkészletének torlódási pontjai a sorozat sűrűsödési helyei.*

6.4. Állítás *Egy sorozat sűrűsödési helyeinek halmaza zárt $\mathbb{K}^N$-ben.*

Bizonyítás $x{\in}\mathbb{K}^N$ az $a{:}\mathbb{N}{\to}\mathbb{K}^N$ sorozatnak akkor és csak akkor sűrűsödési helye, ha minden $r{>}0$ és $m{\in}\mathbb{N}$ esetén

$$\{a_n \mid n{\geq}m\}{\cap}G_r(x){\neq}\emptyset,$$

ami azzal egyenértékű, hogy minden $m{\in}\mathbb{N}$ esetén $x{\in}\overline{\{a_n \mid n{\geq}m\}}$, ami viszont azzal egyenértékű, hogy

$$x{\in}\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\overline{\{a_n \mid n{\geq}m\}}.$$

6.5.

1. Állítás *$\mathbb{K}^N$-ben korlátos sorozatnak van sűrűsödési helye.*

Bizonyítás Legyen $a{:}\mathbb{N}{\to}\mathbb{K}^N$ korlátos sorozat.

Ha $\mathrm{Ran}(a)$ véges, akkor létezik $x{\in}\mathrm{Ran}(a)$ úgy, hogy $\{k{\in}\mathbb{N} \mid a_k{=}x\}$ végtelen, tehát x sűrűsödési helye a-nak.

Ha $\mathrm{Ran}(a)$ végtelen, akkor a Bolzano–Weierstrass-tétel szerint létezik torlódási pontja, mely az előző állítás szerint sűrűsödési helye a-nak.

2. Állítás *$\mathbb{K}^N$ kompakt részhalmazában futó sorozatnak van sűrűsödési helye, amely a kompakt halmaz eleme.*

Bizonyítás Legyen K kompakt halmaz, és $a{:}\mathbb{N}{\to}K$ sorozat.

Ha $\mathrm{Ran}(a)$ véges, akkor létezik $x{\in}\mathrm{Ran}(a)$ úgy, hogy $\{k{\in}\mathbb{N} \mid a_k{=}x\}$ végtelen, tehát x sűrűsödési helye a-nak.

Ha $\mathrm{Ran}(a)$ végtelen, akkor a 3.6. állítás szerint létezik torlódási pontja K-ban, és ez sűrűsödési helye a-nak.

6.6. Definíció *Az* $x{\in}\mathbb{K}^N$ *az* $a{:}\mathbb{N}{\to}\mathbb{K}^N$ *sorozat* ***határértéke****, ha minden* $\varepsilon{>}0$ *esetén létezik* $n_\varepsilon{\in}\mathbb{N}$ *úgy, hogy minden* $n{\ge}n_\varepsilon$ *esetén* $d(a_n, x) < \varepsilon$*, vagy másképpen ugyanez,*

$$\{a_n \mid n{\ge}n_\varepsilon\}{\subset}G_\varepsilon(x).$$

A sorozat ***konvergens****, ha létezik határértéke.*

n_ε-t szokás az ε-hoz tartozó **küszöbindexnek** nevezni.

Konstans sorozat, vagyis olyan, amelynek minden tagja ugyanaz, konvergens; határértéke a sorozat konstans értéke.

Nem konvergens sorozatot **divergensnek** is mondunk. Továbbá gyakori szóhasználat, hogy a sorozat **tart** a határértékéhez, azt minden határon túl megközelíti.

A definíció szerint a határérték sűrűsödési hely. Méghozzá, mint látni fogjuk, különleges sűrűsödési hely.

Állítás $x{\in}\mathbb{K}^N$ *akkor és csak akkor határértéke az* $a{:}\mathbb{N}{\to}\mathbb{K}^N$ *sorozatnak, ha minden* $\varepsilon{>}0$ *esetén az* $\{n{\in}\mathbb{N} \mid a_n{\notin}G_\varepsilon(x)\}$ *halmaz véges, azaz az* x *pont minden környezetén kívül eső tagok indexeinek halmaza véges.*

Bizonyítás Legyen x az a sorozat határértéke, és $\varepsilon{>}0$ esetén legyen $n_\varepsilon{\in}\mathbb{N}$ olyan, hogy $\{a_n \mid n{\ge}n_\varepsilon\}{\subset}G_\varepsilon(x)$. Ekkor

$$\{n{\in}\mathbb{N} \mid a_n{\notin}G_\varepsilon(x)\}{\subset}\{n{\in}\mathbb{N} \mid n{<}n_\varepsilon\}$$

és a jobb oldalon álló halmaz véges.

Tegyük fel most, hogy $\varepsilon{>}0$ esetén $\{n{\in}\mathbb{N} \mid a_n{\notin}G_\varepsilon(x)\}$ véges. Nyilvánvaló, hogy

$$n_\varepsilon{:=}\max\{n{\in}\mathbb{N} \mid a_n{\notin}G_\varepsilon(x)\}{+}1$$

jó lesz ε-hoz tartozó küszöbindexnek.

6.7. Állítás *Egy sorozat határértéke – ha létezik – a sorozat egyetlen sűrűsödési helye.*

Bizonyítás Legyen $x{\in}\mathbb{K}^N$ határértéke az $a{:}\mathbb{N}{\to}\mathbb{K}^N$ sorozatnak.

Ha $y{\in}\mathbb{K}^N$, $y{\ne}x$, akkor

$$r{:=}\frac{d(x,y)}{2} > 0,$$

és $G_r(x){\cap}G_r(y){=}\emptyset$, következésképpen

$$\{n{\in}\mathbb{N} \mid a_n{\in}G_\varepsilon(y)\}{\subset}\{n{\in}\mathbb{N} \mid a_n{\notin}G_\varepsilon(x)\}.$$

Mivel x határértéke a-nak, a jobb oldali halmaz véges, így a bal oldali is, tehát y nem sűrűsödési helye a-nak.

Következmény Konvergens sorozat határértéke egyértelmű.

Ha $a{:}\mathbb{N}\to\mathbb{K}^N$ konvergens sorozat és $x\in\mathbb{K}^N$ az a határértéke, akkor a

$$\lim a := \lim_{n\to\infty} a_n := \lim_n a_n := x$$

jelöléseket használjuk.

6.8. Állítás *Konvergens sorozat korlátos.*

Bizonyítás Legyen $x\in\mathbb{K}^N$ az $a{:}\mathbb{N}\to\mathbb{K}^N$ konvergens sorozat határértéke. Ekkor létezik $n_1\in\mathbb{N}$ úgy, hogy

$$\{a_n \mid n\geq n_1\}\subset G_1(x)$$

Az $\{a_n \mid n<n_1\}$ halmaz véges, így korlátos, és $G_1(x)$ is korlátos, következésképpen

$$\mathrm{Ran}(a)\subset\{a_n \mid n<n_1\}\cup G_1(x)$$

korlátos halmaz $\mathbb{K}^N$-ben.

6.9. Most megadunk a konvergenciára vonatkozó néhány egyszerű ismeretet, amelyeknek jó hasznát vesszük a továbbiakban.

1. Állítás *Legyen $a{:}\mathbb{N}\to\mathbb{K}^N$ sorozat és $x\in\mathbb{K}^N$. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(1) x határértéke a-nak,

(2) minden $\varepsilon>0$ esetén létezik $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n\geq n_\varepsilon$ természetes számra

$$d(a_n,x)\leq\varepsilon,$$

(3) létezik $\alpha>0$, hogy minden $\varepsilon>0$ esetén létezik $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ úgy, hogyminden $n\geq n_\varepsilon$ természetes számra $d(a_n,x)<\alpha\varepsilon$.

Bizonyítás (1)-ből nyilvánvalóan következik (2) a határérték definíciója szerint. (2)-ből következik (3) $\alpha := 2$ választással. Megmutatjuk, hogy (3)-ból következik (1).

Legyen $\alpha>0$ a megadott tulajdonságú. $\varepsilon>0$ esetén $\varepsilon/\alpha>0$ ezért (3) szerint létezik $n_{\varepsilon/\alpha}\in\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n\geq n_{\varepsilon/\alpha}$ esetén

$$d(a_n,x) < \alpha\frac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon,$$

tehát x határértéke a-nak.

2. Állítás *Legyen a:$\mathbb{N}\to\mathbb{K}^N$ és b:$\mathbb{N}\to\mathbb{K}^M$ sorozat, $x\in\mathbb{K}^N$ és $y\in\mathbb{K}^M$. Ekkor a következők egyenértértékűek:*

(1) $\lim a = x$ és $\lim b = y$,

(2) minden $\varepsilon>0$ esetén létezik $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n\geq n_\varepsilon$ természetes számra $d(a_n, x)<\varepsilon$ és $d(b_n, y)<\varepsilon$.

Bizonyítás (2) nyilván maga után vonja (1)-et. Ha pedig (1) teljesül, akkor van az ε-hoz az a sorozatnak n_ε^a, a b sorozatnak n_ε^b küszöbindexe, és $n_\varepsilon := \max\{n_\varepsilon^a, n_\varepsilon^b\}$. ■

Nyilvánvaló, hogy értelemszerű átfogalmazással igaz az állítás kettő helyett véges sok sorozatra is.

6.10. A konvergencia a sorozatok legfontosabb tulajdonsága. Az eddigiektől egy kicsit eltérő szóhasználattal úgy is fogalmazhatunk, hogy az a:$\mathbb{N}\to\mathbb{K}^N$ sorozatnak $x\in\mathbb{K}^N$ pontosan akkor határértéke, ha minden $\varepsilon>0$ esetén $a_n\in G_\varepsilon(x)$ teljesül véges sok $n\in\mathbb{N}$ kivételével.

Ezért a konvergencia tényét nem befolyásolja, ha egy sorozat véges sok tagját megváltoztatjuk. Pontosabban, ha a konvergens és $b_n{=}a_n$ véges sok n kivételével, akkor b is konvergens és

$$\lim a = \lim b.$$

Így a konvergencia szempontjából érdektelen, hogyan van értelmezve a sorozat az "elején", és az is, hogy van-e egyáltalán értelmezve. Sorozatnak szoktunk tekinteni ezért olyan $\mathbb{N}\rightarrowtail\mathbb{K}^N$ függvényeket is, amelyek véges sok indexre nincsenek értelmezve. Például, ha az α:$\mathbb{N}\to\mathbb{K}$ sorozatnak csak véges sok tagja nulla, akkor

$$\frac{1}{\alpha} : \mathbb{N}\rightarrowtail\mathbb{K}$$

is sorozat.

Végül megemlítjük, hogy olykor $\mathbb{N}_0\to\mathbb{K}^N$ függvényeket célszerű tekinteni; természetesen ez is lényegtelen módosítás, ezeket is sorozatoknak nevezzük.

6.11. Feladatok

1. Igazoljuk, hogy $\lim_n \frac{1}{n} = 0$! Adjunk küszöbindexet 10^{-3}-hoz! (Útmutatás: legyen $\varepsilon>0$; használjuk ki $\mathbb{N}$ arkhimédeszi tulajdonságát $\frac{1}{\varepsilon}$-ra vonatkozóan!)

2. Konvergens-e az $\mathbb{N}\to\mathbb{C}$, $n\mapsto n + \frac{i}{n}$ sorozat?

3. Konvergens-e az $\mathbb{N}\to\mathbb{C}$, $n\mapsto i^n$ sorozat?

4. Legyen a olyan sorozat, amelynek az értékkészlete véges. Igazoljuk, hogy a pontosan akkor konvergens, ha véges sok indextől eltekintve konstans sorozat, azaz van olyan $n_0\in\mathbb{N}$, hogy minden $n\geq n_0$ esetén $a_n{=}a_{n_0}$.

7. A konvergencia kapcsolata $\mathbb{K}^N$ struktúrájával

7.1. Emlékeztetünk arra, hogy $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$ esetén

$$\mathrm{pr}_k : \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}, \quad (x_1, x_2, \ldots, x_N) \mapsto x_k$$

a k-adik kanonikus projekció.

Világos, hogy ha a $\mathbb{K}^N$ értékű sorozat, akkor $\mathrm{pr}_k \circ a$ $\mathbb{K}$ értékű sorozat, amelyet a k-adik **koordináta-sorozatnak** hívunk. Maga a sorozat mint függvény a koordináta-sorozatok együttese.

Állítás *Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^N$ sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha minden $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$ esetén a $\mathrm{pr}_k \circ a$ sorozat konvergens, és ekkor*

$$\mathrm{pr}_k(\lim a) = \lim(\mathrm{pr}_k \circ a) \qquad (k=1, 2, \ldots, N).$$

Bizonyítás Tegyük fel, hogy a konvergens, és legyen $x := \lim a$. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n \geq n_\varepsilon$ természetes számra $|a_n - x| < \varepsilon$. Ezért, ha $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$ akkor

$$|\mathrm{pr}_k(a_n) - \mathrm{pr}_k(x)| \leq |a_n - x| < \varepsilon,$$

így $\mathrm{pr}_k(x)$ a $\mathrm{pr}_k \circ a$ sorozat határértéke.

Tegyük fel, hogy minden $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$ esetén a $\mathrm{pr}_k \circ a$ sorozat konvergens, és legyen $x_k := \lim(\mathrm{pr}_k \circ a)$, $x := (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{K}^N$.

Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor a 6.9.2. állítás szerint létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n \geq n_\varepsilon$ természetes számra $|\mathrm{pr}_k(a_n) - \mathrm{pr}_k(x)| < \varepsilon$ $(k = 1, \ldots, N)$. Ekkor $n \geq n_\varepsilon$ esetén

$$|a_n - x| \leq \sqrt{N}\ \max\{|\mathrm{pr}_k(a_n) - x_k| \mid 1 \leq k \leq N\} < \sqrt{N}\ \varepsilon,$$

így a 6.9.1. állítás szerint a konvergens és $\lim a = x$. ■

Mivel $\mathbb{C}$ mint halmaz megegyezik $\mathbb{R}^2$-vel, egy komplex értékű sorozatot felfoghatunk $\mathbb{R}^2$ értékű sorozatnak is, ezért az eredményünk szerint az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha valós és képzetes része, vagyis a $\mathrm{Re} \circ a$ és $\mathrm{Im} \circ a$ sorozatok konvergensek $\mathbb{R}$-ben, és ekkor

$$\mathrm{Re}(\lim a) = \lim(\mathrm{Re} \circ a), \qquad \mathrm{Im}(\lim a) = \lim(\mathrm{Im} \circ a).$$

7.2. Állítás *Legyenek $a, b : \mathbb{N}\to\mathbb{K}^N$ és $\alpha : \mathbb{N}\to\mathbb{K}$ konvergens sorozatok. Ekkor az $a+b$, αb, $\langle a, b\rangle$, α^*, $|a|$ sorozatok is konvergensek, és*

(1) $\lim(a+b) = \lim a + \lim b$,
(2) $\lim(\alpha b) = (\lim \alpha)(\lim b)$,
(3) $\lim \langle a, b\rangle = \langle \lim a, \lim b\rangle$,
(4) $\lim |a| = |\lim a|$.
(5) $\lim \alpha^* = (\lim \alpha)^*$.

Továbbá, ha $\lim \alpha \neq 0$, akkor $\dfrac{1}{\alpha}$ véges sok indexet kivéve értelmezve van, konvergens, és

(6) $\lim \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{\lim \alpha}$.

Bizonyítás (1) A 6.9.2. állítás szerint minden $\varepsilon>0$ esetén létezik $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n\geq n_\varepsilon$ természetes számra $|a_n - \lim a|<\varepsilon$ és $|b_n - \lim b|<\varepsilon$, tehát ekkor

$$|(a+b)_n - (\lim a + \lim b)| = |a_n - \lim a + b_n - \lim b| \leq$$
$$\leq |a_n - \lim a| + |b_n - \lim b| < 2\varepsilon.$$

(2) A 6.8. állítás szerint α korlátos sorozat, így $K:=\sup\{|\alpha_n| \mid n\in\mathbb{N}\} < +\infty$. Továbbá minden $\varepsilon>0$ esetén létezik $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n\geq n_\varepsilon$ természetes számra $|\alpha_n - \lim \alpha|<\varepsilon$ és $|b_n - \lim b|<\varepsilon$, tehát ekkor

$$|\alpha_n b_n - (\lim \alpha)(\lim b)| \leq |\alpha_n b_n - \alpha_n \lim b| + |\alpha_n \lim b - (\lim \alpha)(\lim b)| \leq$$
$$\leq |\alpha_n|\ |b_n - \lim b| + |\alpha_n - \lim \alpha|\ |\lim b| < (K + |\lim b|)\varepsilon.$$

(3) A Cauchy–Schwarz-féle egyenlőtlenség alapján minden n-re

$$|\langle a_n, b_n\rangle - \langle \lim a, \lim b\rangle| \leq |\langle a_n, b_n\rangle - \langle a_n, \lim b\rangle| + |\langle a_n, \lim b\rangle - \langle \lim a, b\rangle| \leq$$
$$\leq |\langle a_n, b_n - \lim b\rangle| + |\langle a_n - \lim a, \lim b\rangle| \leq$$
$$\leq |a_n|\,|b_n - \lim b| + |a_n - \lim a|\,|\lim b|.$$

Ezután ugyanúgy érvelhetünk, mint (2)-ben.

(4) Minden $\varepsilon>0$ esetén létezik $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n\geq n_\varepsilon$ természetes számra $|a_n - \lim a|<\varepsilon$. Ezért, ha $n\geq n_\varepsilon$, akkor

$$\big||a_n| - |\lim a|\big| \leq |a_n - \lim a| < \varepsilon.$$

(5) Ennek roppant egyszerű bizonyítását az olvasóra bízzuk.

(6) Ha $\lim \alpha\neq 0$, akkor $\dfrac{1}{2}|\lim \alpha|>0$, ezért létezik $n_0\in\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n\geq n_0$ természetes számra

$$|\alpha_n - \lim \alpha| < \frac{1}{2}|\lim \alpha|,$$

amiből a háromszög-egyenlőtlenség alapján azonnal adódik, hogy

$$\frac{1}{2}|\lim\alpha| < |\alpha_n|.$$

Tehát a sorozat tagjai véges sok kivételével nem nullák, így értelmes az $\frac{1}{\alpha}$ sorozat.

Minden $\varepsilon>0$ esetén létezik $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n\geq n_\varepsilon$ természetes számra $|\alpha_n - \lim\alpha| < \varepsilon$. Ezért $n\geq \max\{n_\varepsilon, n_0\}$ esetén

$$\left|\frac{1}{\alpha_n}-\frac{1}{\lim\alpha}\right| = \frac{|\alpha_n-\lim\alpha|}{|\alpha_n|\,|\lim\alpha|} \leq \frac{2}{|\lim\alpha|^2}|\alpha_n-\lim\alpha| < \frac{2}{|\lim\alpha|^2}\varepsilon.$$

Megjegyzés Az állítás (2) pontjának speciális eseteként, ha $\alpha\in\mathbb{K}$ és $b:\mathbb{N}\to\mathbb{K}^N$ konvergens sorozat, akkor az αb sorozat is konvergens, és

$$\lim(\alpha b) = \alpha\lim b.$$

Természetesen az (1) és (3) esetben is tekinthetjük azt a speciális esetet, amikor az egyik sorozat konstans.

7.3. Konvergens sorozatok összege konvergens. Vigyázzunk, nehogy azt higygyük, hogy a fordítottja is igaz; ha két sorozat összege konvergens, abból nem következik, hogy a sorozatok konvergensek. Íme: $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(-(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergens sorozatok, az összegük a nulla sorozat, amely konvergens.

Viszont konvergens és divergens sorozat összege nem lehet konvergens; ugyanis, ha a és $a+b$ konvergensek, akkor $b=(a+b)-a$ is konvergens.

Konvergens sorozat abszolút értéke is konvergens. Ennek sem igaz a fordítottja. A $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergens sorozat abszolút értéke az 1 konstans sorozat, amely konvergens.

Ha azonban az abszolút-érték sorozat határértéke nulla, akkor maga a sorozat is konvergens és a nullához tart: ha $\lim|a|=0$, akkor (és csak akkor) $\lim a=0$. Kérjük az olvasót, bizonyítsa be ezt gyakorlásképpen.

Konvergens sorozatok szorzata is konvergens. Itt is előfordulhat persze, hogy nem konvergens sorozatok szorzata konvergens: a $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergens sorozat négyzete konvergens. Ellentétben az összeggel, ha α és αb konvergens, illetve b és αb konvergens, abból még nem következik, hogy b illetve α is konvergens, csak akkor, ha az egyik határérték sem nulla.

Állítás *Legyenek $\alpha:\mathbb{N}\to\mathbb{K}$ és $b:\mathbb{N}\to\mathbb{K}^N$ sorozatok, melyek közül az egyik korlátos, a másik konvergens és a határértéke nulla. Ekkor az αb sorozat konvergens és a határértéke nulla.*

Bizonyítás Legyen például α korlátos és $\lim b=0$. Minden $\varepsilon>0$ esetén létezik $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n\geq n_\varepsilon$ természetes számra $|b_n| < \varepsilon$, tehát ekkor

$$|\alpha_n b_n| \leq (\sup\{|\alpha_n| \mid n\in\mathbb{N}\})|b_n| \leq (\sup\{|\alpha_n| \mid n\in\mathbb{N}\})\varepsilon.$$

Hasonlóan érvelhetünk, ha $\lim \alpha=0$ és b korlátos.

7.4. Feladatok

1. Igaz-e, hogy ha egy $\mathbb{K}^N$-beli sorozat divergens, akkor minden koordináta-sorozata divergens?

2. Igazoljuk, hogy az $a:\mathbb{N}\to\mathbb{K}^N$ sorozat pontosan akkor konvergens és $\lim a=x$, ha $a-x$ (azaz $n\mapsto a_n-x$) konvergens és $\lim(a-x)=0$.

3. Adjunk meg olyan $a, b:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ sorozatokat, hogy $\lim a=0$ és b nem korlátos, de ab konvergens!

4. Legyen $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}_0^+$, $\alpha\in\mathbb{R}^+$. Vegyük ismertnek a valós kitevőjű hatványozás azonosságait. Igazoljuk, hogy ha a konvergens, akkor

$$a^\alpha:\mathbb{N}\to\mathbb{R}_0^+, \quad n\mapsto(a_n)^\alpha$$

konvergens és $\lim a^\alpha=(\lim a)^\alpha$.

5. Idézzük fel emlékezetünkben a vektoriális szorzást $\mathbb{R}^3$-ban. Mutassuk meg, hogy ha $a, b:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^3$ konvergens sorozatok, akkor $a\times b$ is konvergens és $\lim(a\times b) = (\lim a)\times(\lim b)$.

6. Mutassuk meg, hogy két valós értékű konvergens sorozat alsó és felső burkolója is konvergens: $\lim(a \wedge b) = \min\{\lim a, \lim b\}$, $\lim(a \vee b) = \max\{\lim a, \lim b\}$.

8. Konvergencia-kritériumok

8.1. Sokszor nem egyszerű eldönteni egy sorozatról, konvergens-e vagy sem. Most olyan összefüggéseket ismerünk meg, amelyek megkönnyítik ezt a feladatot.

Állítás ***(majoráns-kritérium)*** *Legyenek a és b $\mathbb{K}^N$-beli sorozatok úgy, hogy $\lim b=0$ és*

$$|a_n|\le|b_n|$$

véges sok $n\in\mathbb{N}$ kivételével. Ekkor $\lim a=0$.

Bizonyítás Létezik $n_0\in\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n\ge n_0$ esetén $|a_n|\le|b_n|$ teljesül. Legyen $\varepsilon>0$. Ekkor létezik $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n\ge n_\varepsilon$ esetén $|b_n| < \varepsilon$. Ha tehát $n\ge \max\{n_0, n_\varepsilon\}$, akkor

$$|a_n|\le|b_n|<\varepsilon. \blacksquare$$

Ez a konvergencia-kritérium sokkal szélesebb körben alkalmazható, mint ahogy azt az első pillantásra gondolnánk. Ugyanis minden konvergens sorozat visszavezethető olyanra, amelynek a határértéke nulla (lásd a 7.4.2. feladatot).

Ha b konvergens sorozat, akkor $b-\lim b$ (azaz $n\mapsto b_n-\lim b$) olyan sorozat, amelynek nulla a határértéke. Tehát ha a $\mathbb{K}^N$-beli sorozat és $x\in\mathbb{K}^N$ olyan, hogy $|a_n-x|\le|b_n-\lim b|$ véges sok n kivételével, akkor a konvergens és $\lim a=x$.

8.2. Állítás *Legyenek a és b $\mathbb{R}$-beli sorozatok úgy, hogy* $\lim a < \lim b$. *Ekkor $a_n < b_n$ véges sok $n \in \mathbb{N}$ kivételével.*

Bizonyítás Az $\varepsilon := \dfrac{\lim b - \lim a}{2} > 0$ számhoz létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n \geq n_\varepsilon$ esetén

$$|a_n - \lim a| < \varepsilon, \quad |b_n - \lim b| < \varepsilon,$$

amiből ilyen n-ekre

$$a_n < \lim a + \varepsilon = \frac{\lim a + \lim b}{2} = \lim b - \varepsilon < b_n.$$

Következmény Ha a és b olyan konvergens sorozatok $\mathbb{R}$-ben, hogy $a_n \leq b_n$ véges sok $n \in \mathbb{N}$ kivételével, akkor $\lim a \leq \lim b$.

Megjegyzés Abból, hogy $a_n < b_n$ minden n-re, nem következik $\lim a < \lim b$. Például $\dfrac{1}{n} > 0$ minden n-re és $\lim\limits_n \dfrac{1}{n} = 0$.

8.3. Állítás *(**Közrefogási elv**) Legyenek a b és c $\mathbb{R}$-beli sorozatok úgy, hogy a és c konvergensek,* $\lim a = \lim c$ *és*

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

véges sok $n \in \mathbb{N}$ kivételével. Ekkor b konvergens és

$$\lim b = \lim a \ (= \lim c).$$

Bizonyítás Véges sok n kivételével

$$0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n,$$

így a majoráns kritérium alapján

$$\lim(b-a) = \lim(c-a) = 0.$$

$b-a$ és a konvergensek, ezért $b = a + (b-a)$ is konvergens és

$$\lim b = \lim a + \lim(b-a) = \lim a.$$

8.4. Definíció *Az* $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ *sorozat*

(1) ***monoton növő*** *(**monoton fogyó**), ha minden* $n\in\mathbb{N}$ *esetén*

$$a_n\le a_{n+1} \qquad (a_n\ge a_{n+1}).$$

Ha (1)-ben szigorú egyenlőtlenség teljesül, akkor ***szigorúan monoton növő*** *illetve* ***szigorúan monoton fogyó*** *sorozatról beszélünk.*

(2) ***felülről korlátos*** *(**alulról korlátos**), ha* $\mathrm{Ran}(a)$ *felülről korlátos (alulról korlátos) részhalmaza* $\mathbb{R}$*-nek.*

Nyilvánvaló, hogy a pontosan akkor korlátos, ha felülről is, alulról is korlátos. A továbbiakban használni fogjuk a

$$\sup a := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n := \sup \mathrm{Ran}(a),$$

$$\inf a := \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n := \inf \mathrm{Ran}(a)$$

jelöléseket.

Állítás *Az* $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ *monoton növő (fogyó) sorozat pontosan akkor konvergens, ha felülről (alulról) korlátos, és ekkor*

$$\lim a = \sup a \qquad (\lim a = \inf a).$$

Bizonyítás Konvergens sorozat a 6.8. állítás szerint korlátos (még akkor is, ha nem monoton növő).

Legyen a monoton növő, felülről korlátos. A szuprémum ismert tulajdonsága alapján minden $\varepsilon>0$ esetén létezik $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ úgy, hogy

$$\sup a-\varepsilon<a_{n_\varepsilon}.$$

Ekkor minden $n\ge n_\varepsilon$ esetén

$$\sup a-\varepsilon < a_{n_\varepsilon} \le a_n \le \sup a,$$

azaz $|a_n-\sup a|<\varepsilon$, vagyis $\sup a$ határértéke a-nak.

Hasonlóan érvelhetünk, ha a monoton fogyó, alulról korlátos.

8.5. Sokszor előfordul, hogy a konvergencia-kritériumok alkalmazásánál két sorozatnak nem azonos indexű tagjait, hanem bizonyos számmal "elcsúsztatott" indexű tagjait tudjuk összehasonlítani; például a_n-et b_{n+1}-gyel. Ez nem baj, amint ez az alábbiakból kiderül.

Legyen $a:\mathbb{N}\to\mathbb{K}^N$ sorozat és $m\in\mathbb{N}$. Vezessük be az

$$L_m a : \mathbb{N}\setminus\{1,2,\ldots,m\}\to\mathbb{K}^N, \quad n\mapsto a_{n-m},$$

$$L_{-m} a : \mathbb{N}\to\mathbb{K}^N, \quad n\mapsto a_{n+m}$$

sorozatokat.

Állítás *Ha a konvergens, akkor minden $m\in\mathbb{N}$ esetén $L_m a$ és $L_{-m} a$ is konvergensek és*

$$\lim L_m a = \lim L_{-m} a = \lim a.$$

Bizonyítás Minden $\varepsilon>0$ esetén létezik $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ úgy, hogy

$$\{a_n \mid \geq n_\varepsilon\}\subset G_\varepsilon(\lim a).$$

Ekkor

$$\{(L_m a)_n \mid n\geq n_\varepsilon+m\}\subset G_\varepsilon(\lim a),$$

$$\{(L_{-m} a)_n \mid n\geq n_\varepsilon\}\subset G_\varepsilon(\lim a).$$

8.6. Feladatok

1. Tudjuk hogy $\lim_n \frac{1}{n}=0$ (lásd a 6.10.1.feladatot). Bizonyítsuk be a majoráns kritérium segítségével, hogy

(i) $\lim_n \frac{1}{2^n}=0$, (ii) $\lim_n \frac{n-1}{n^2+1}=0$, (iii) $\lim_n \frac{1}{n!}=0$.

2. Igazoljuk a majoráns kritériummal a 8.5. állítás alapján, hogy $\lim_n \frac{1}{n^2-2}=0$.

3. Mutassuk meg bizonyos átalakításokkal, hogy $\lim_n \frac{n-i}{n^2+i}=0$ (itt i a képzetes egységet jelöli $\mathbb{C}$-ben).

4. Adjuk meg az $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ sorozatot az

$$a_1 := \frac{3}{2}, \qquad a_{n+1} := \frac{a_n^3+6}{7} \quad (n\in\mathbb{N})$$

rekurziós formulával. Igazoljuk, hogy a szigorúan monoton fogyó és korlátos. Mi a határértéke?

9. Részsorozatok, Cauchy-sorozatok

9.1. Ha egy sorozatból "egymás után kiválogatunk" tagokat, ismét sorozatot kapunk. Ha bizonyos szempont szerint ügyesen válogatunk, "rossz" sorozatnak "jó" részéhez juthatunk. Például $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergens sorozat, de ha kiválogatjuk a páros indexű tagokat, a konstans 1 sorozatot kapjuk.

A válogatás alapja az, hogy vissza nem léphetünk: ha egy tagot kiválasztottunk, utána csak nagyobb indexűt vehetünk. Pontos meghatározást a mondottakra a következőképpen adhatunk.

Definíció *Az $i{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ sorozatot* ***indexsorozatnak*** *nevezzük, ha szigorúan monoton növő, azaz minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $i_n<i_{n+1}$ teljesül.*

Ha $a{:}\mathbb{N}\to\mathbb{K}^N$ sorozat és $i{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ indexsorozat, akkor az $a\circ i{:}\mathbb{N}\to\mathbb{K}^N$ sorozatot az a egy ***részszorozatának*** *nevezzük.*

Jegyezzük meg, hogy ha i indexsorozat, akkor $i_n\geq n$ $(n\in\mathbb{N})$. Ezt teljes indukcióval látjuk be. Nyilvánvaló, hogy $i_1\geq 1$.

Tegyük fel hogy $i_n\geq n$. Ekkor $i_{n+1}>i_n\geq n$, tehát $i_{n+1}\geq n+1$.

9.2. Állítás *Ha $a{:}\mathbb{N}\to\mathbb{K}^N$ konvergens sorozat, akkor minden i indexsorozat esetén $a\circ i$ konvergens és $\lim(a\circ i)=\lim a$.*

Bizonyítás Minden $\varepsilon>0$ esetén létezik $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ úgy, hogy

$$\{a_n \mid n\geq n_\varepsilon\}\subset G_\varepsilon(\lim a).$$

Mivel $i_n\geq n$, az is igaz, hogy

$$\{(a\circ i)_n \mid n\geq n_\varepsilon\}\subset G_\varepsilon(\lim a).$$

9.3. Állítás *Legyen a $\mathbb{K}^N$-beli sorozat és i indexsorozat. Ha x sűrűsödési helye $a\circ i$-nek, akkor sűrűsödési helye a-nak is.*

Bizonyítás Legyen $\varepsilon>0$. Ekkor a $\{k\in\mathbb{N} \mid a_{i_k}\in G_\varepsilon(x)\}$ halmaz végtelen, és lévén i injekció, ez azt jelenti, hogy $\{n\in\mathbb{N} \mid a_n\in G_\varepsilon(x)\}$ is végtelen, tehát x sűrűsödési helye a-nak.

9.4. Állítás *Legyen a $\mathbb{K}^N$-beli sorozat. x pontosan akkor sűrűsödési helye a-nak, ha létezik i indexsorozat úgy, hogy $x=\lim(a\circ i)$.*

Bizonyítás Ha $x=\lim(a\circ i)$, akkor x sűrűsödési helye $a\circ i$-nek, így az előző állítás szerint a-nak is.

Ha x sűrűsödési helye a-nak, akkor minden $n\in\mathbb{N}$ esetén a

$$\{k\in\mathbb{N} \mid a_k\in G_{1/n}(x)\}$$

halmaz végtelen, sőt minden $m \in \mathbb{N}$ esetén a $\{k \in \mathbb{N} \mid k > m \text{ és } a_k \in G_{1/n}(x)\}$ halmaz is végtelen, így nem üres, következésképpen létezik minimuma, mely nagyobb m-nél. Legyen

$$i_1 := \min\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in G_1(x)\},$$

és

$$i_{n+1} := \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > i_n \text{ és } a_k \in G_{1/(n+1)}(x)\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Nyilvánvalóan $i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat, és minden n természetes számra

$$|a_{i_n} - x| < \frac{1}{n},$$

következesképpen $\lim(a \circ i) = x$. ■

Eredményünkből és 6.5-ből következik: $\mathbb{K}^N$-ben minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

9.5. Az eddigi kritériumok alapján csak azt tudjuk eldönteni, hogy a $\mathbb{K}^N$ egy eleme határértéke-e vagy sem a sorozatnak. Ha tehát egy sorozat konvergenciáját akarjuk bizonyítani, akkor "rá kell érezni", mi lehet a határértéke. Most egy olyan fogalmat vezetünk be, amelyben nem a határértéktől való távolságra, hanem a tagok egymástól való távolságára adunk feltételt. Ezzel majd olyan jellemzést adunk a konvergenciára, amely csak a sorozat elemeit használja, a határértéket nem.

Definíció *Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^N$ sorozat* ***Cauchy-féle****, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $m, n \geq n_\varepsilon$ természetes számra $d(a_m, a_n) < \varepsilon$.*

9.6. Állítás *Minden konvergens sorozat Cauchy-féle.*

Bizonyítás Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^N$ konvergens sorozat. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n \geq n_\varepsilon$ természetes számra $d(a_n, \lim a) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ezért, ha $m, n \geq n_\varepsilon$, akkor

$$d(a_m, a_n) \leq d(a_m, \lim a) + d(\lim a, a_n) < \varepsilon,$$

tehát a Cauchy-sorozat.

9.7. Állítás *Minden Cauchy-sorozat korlátos.*

Bizonyítás Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^N$ Cauchy-sorozat. Ekkor létezik $n_1 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $m, n \geq n_1$ esetén $d(a_m, a_n) < 1$. Speciálisan, ha $n \geq n_1$, akkor $d(a_n, a_{n_1}) < 1$, azaz $a_n \in G_1(a_{n_1})$. Így

$$\mathrm{Ran}(a) \subset \{a_n \mid n < n_1\} \cup G_1(a_{n_1}),$$

s emiatt a korlátos sorozat.

9.8. Állítás *Ha egy Cauchy-sorozatnak van sűrűsödési helye, akkor konvergens.*

Bizonyítás Legyen x az $a:\mathbb{N}\to\mathbb{K}^N$ Cauchy-sorozat sűrűsödési helye. Megmutatjuk, hogy x határértéke a sorozatnak.

Minden $\varepsilon>0$ esetén

– létezik $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ úgy, hogy ha $m, n\geq n_\varepsilon$, akkor $d(a_m, a_n)<\varepsilon$,

– létezik $m_0\geq n_\varepsilon$ úgy, hogy $d(a_{m_0}, x)<\varepsilon$.

Ezért, ha $n\geq n_\varepsilon$, akkor

$$d(a_n, x) \leq d(a_n, a_{m_0}) + d(a_{m_0}, x) < 2\varepsilon,$$

következésképpen a konvergens és $\lim a=x$.

9.9. A 9.7., a 9.8. és a 6.5. állítás eredményezi:

Állítás *$\mathbb{K}^N$-ben minden Cauchy-sorozat konvergens.*

A 9.6. és 9.9. állításokat együttesen **Cauchy-féle konvergencia-kritériumnak** nevezzük. Ezen kritérium szerint egy $\mathbb{K}^N$-beli sorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-féle.

A Cauchy-kritérium segítségével esetenként bizonyítani tudjuk egy $\mathbb{K}^N$-beli sorozat konvergenciáját akkor is, ha sejtésünk sincs, hogy mi lehet a határértéke.

9.10. Feladatok

1. Cauchy-féle sorozat-e $n\mapsto\dfrac{n^2+1}{n+1}$?

2. Igazoljuk, hogy $n\mapsto\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^4$ Cauchy-sorozat. Adjuk meg 10^{-3}-hoz a 9.5. definíció szerinti küszöbindexet!

10. Konvergencia és zártság

10.1. A 6.3. állítás szerint egy sorozat értékkészletének minden torlódási pontja sűrűsödési helye a sorozatnak. Láttuk azt is, hogy fordítva nem igaz: a $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{R}$-beli sorozatnak 1 és -1 sűrűsödési helye, azonban a sorozat értékkészletének, a $\{-1, 1\}$ kételemű halmaznak nincs torlódási pontja.

Akármilyen (nem szükségképpen megszámlálható) halmaz torlódási (érintkezési) pontjait jól tudjuk jellemezni sorozatokkal.

Állítás *A $H \subset \mathbb{K}^N$ halmaznak x akkor és csak akkor torlódási (érintkezési) pontja, ha létezik $a:\mathbb{N} \to H \setminus \{x\}$ $(a:\mathbb{N} \to H)$ sorozat úgy, hogy $\lim a = x$.*

Bizonyítás Legyen $a:\mathbb{N} \to H \setminus \{x\}$ $(a:\mathbb{N} \to H)$ sorozat úgy, hogy $\lim a = x$. Minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $\{a_n \mid n \geq n_\varepsilon\} \subset G_\varepsilon(x)$. Ekkor

$$\{a_n \mid n \geq n_\varepsilon\} \subset G_\varepsilon(x) \cap (H \setminus \{x\}) \qquad \big(\{a_n \mid n \geq n_\varepsilon\} \subset G_\varepsilon(x) \cap H\big),$$

így a jobb oldalon álló halmaz nem üres, ezért x torlódási (érintkezési) pontja H-nak.

Legyen x torlódási (érintkezési) pontja H-nak. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $G_{1/n}(x) \cap (H \setminus \{x\})$ $(G_{1/n}(x) \cap H)$ halmaz nem üres; így a kiválasztási axióma szerint létezik $n \mapsto a_n \in G_{1/n}(x) \cap (H \setminus \{x\})$ $(n \mapsto a_n \in G_{1/n}(x) \cap H)$ sorozat; erre

$$|a_n - x| < \frac{1}{n}$$

teljesül, következésképpen $\lim a = x$.

10.2. Állítás *A $H \subset \mathbb{K}^N$ halmaz akkor és csak akkor zárt, ha minden $a:\mathbb{N} \to H$ konvergens sorozat esetén $\lim a \in H$.*

Bizonyítás Legyen H zárt és $a:\mathbb{N} \to H$ konvergens sorozat, $x := \lim a$. Ekkor az előző állítás bizonyításának első része szerint x érintkezési pontja H-nak, ezért eleme is H-nak.

Tegyük fel, hogy a kimondott feltétel teljesül, és legyen $x$érintkezési pontja H-nak. Ekkor az előző állítás szerint létezik $a:\mathbb{N} \to H$ sorozat úgy, hogy $\lim a = x$. Feltételünk szerint tehát $x = \lim a \in H$, azaz H zárt.

10.3. Állítás *A $K \subset \mathbb{K}^N$ halmaz akkor és csak akkor korlátos, ha minden K-beli sorozatnak van konvergens részsorozata.*

Bizonyítás Ha K korlátos, akkor minden K-beli sorozat korlátos, így a 9.4. következmény szerint létezik konvergens részsorozata.

Ha K nem korlátos, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $K \cap G_n(\mathbf{0})^{\flat} \neq \emptyset$, így a kiválasztási axióma szerint létezik $n \mapsto a_n \in K \cap G_n(\mathbf{0})^{\flat}$ sorozat. Tetszőleges i indexsorozatra és minden n-re

$$|(a \circ i)_n| = |a_{i_n}| \geq |i_n| \geq n,$$

tehát az $a \circ i$ sorozat nem korlátos, így nem lehet konvergens.

10.4. Állítás *A $K \subset \mathbb{K}^N$ halmaz akkor és csak akkor kompakt, ha minden $a:\mathbb{N} \to K$ sorozat esetén létezik i indexsorozat úgy, hogy $a \circ i$ konvergens és $\lim(a \circ i) \in K$.*

Bizonyítás Ha K kompakt, akkor 6.5.2 és 9.4 szerint minden K-beli a sorozatnak létezik konvergens részsorozata, amelynek határértéke K-ban van.

Ha K rendelkezik a sorozatokkal jellemzett tulajdonsággal, akkor 10.3. állítás szerint K korlátos. Legyen $a:\mathbb{N}\to K$ konvergens sorozat; a feltétel miatt létezik olyan i indexsorozat, hogy $\lim(a\circ i)\in K$. Mivel $\lim a = \lim(a\circ i)$, a 10.2. állítás szerint K zárt. K tehát korlátos és zárt, azaz kompakt.

10.5. Állítás *Ha $H\subset\mathbb{K}^N$ és $K\subset\mathbb{K}^M$ kompakt, akkor $H\times K$ kompkat részhalmaza $\mathbb{K}^{N+M}$-nek.*

Bizonyítás Legyen $(a,b) : \mathbb{N}\to H \times K$ sorozat, azaz $a : \mathbb{N}\to H$, $b : \mathbb{N}\to K$. Mivel H kompakt, van olyan i indexsorozat, hogy $a \circ i$ konvergens és $\lim(a \circ i) \in H$. Tekintsük a $b \circ i : \mathbb{N} \to K$ sorozatot; a K kompaktsága miatt van olyan j indexsorozat, hogy $(b \circ i) \circ j$ konvergens és $\lim\big((b \circ i) \circ j\big) \in K$. Viszont $(a \circ i) \circ j$ is konvergens és $\lim((a \circ i) \circ j) = \lim(a \circ i)$.

Mindezt összevetve, $(a,b) \circ (i \circ j)$ olyan részsorozat, amely konvergens és a határértéke $H\times K$-ban van, tehát az előző állítás szerint $H\times K$ kompakt.

10.6. Feladatok

1. Legyen F zárt és K kompakt részhalmaza $\mathbb{K}^N$-nek. Igazoljuk, hogy $F+K$ zárt.

2. Legyen H és K a $\mathbb{K}^N$ két kompakt részhalmaza. Igazoljuk, hogy $H+K$ kompakt.

3. Ha F és G zárt részhalmaza $\mathbb{K}^N$-nek, $F+G$ nem szükségképpen zárt. Mutassuk meg ezt az $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0, y\geq 0\}$ és az $\{(x,1/x) \mid x>0\}$ halmazok segítségével.

11. $\overline{\mathbb{R}}$-beli sorozatok konvergenciája

11.1. Definíció *A kiterjesztett valós számegyenesen ($\overline{\mathbb{R}}$-on) $\varepsilon>0$ esetén a*

$$G_\varepsilon(+\infty):=]1/\varepsilon,+\infty] \quad \text{és} \quad G_\varepsilon(-\infty):=[-\infty,-1/\varepsilon[$$

halmazokat $+\infty$ illetve $-\infty$ középpontú, ε sugarú ki nyílt gömböknek nevezzük.

11.2. Definíció *Azt mondjuk, hogy $x \in \overline{\mathbb{R}}$ az $a:\mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ sorozatnak*

(1) ***sűrűsödési helye****, ha minden $\varepsilon>0$ esetén az $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in G_\varepsilon(x)\}$ halmaz végtelen,*

(2) ***határértéke****, ha minden $\varepsilon>0$ esetén létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy*

$$\{a_n \mid n \geq n_\varepsilon\} \subset G_\varepsilon(x).$$

A félreértések elkerülése végett – különösen, amikor $a:\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatról van szó, amelyet $a:\mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ sorozatnak tekintünk – $\overline{\mathbb{R}}$-beli sűrűsödési helyet illetve határértéket **általánosított sűrűsödési helynek** illetve **általánosított határértéknek** mondunk. Az általánosított határértékre a $(g) \lim a$ jelölést használjuk. Egy $a:\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat minden (a korábbi értelmezés szerinti) sűrűsödési helye általánosított sűrűsödési helye. Ha a konvergens, akkor $(g) \lim a = \lim a \in \mathbb{R}$.

Az előző fejezetekben megismert állítások bizonyításához hasonlóan láthatjuk be, hogy

– ha $x \in \overline{\mathbb{R}}$ általánosított határértéke az $a:\mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ sorozatnak, akkor x az egyetlen általánosított sűrűsödési helye a-nak,

– az általánosított határérték, ha létezik, egyértelmű,

– $x \in \overline{\mathbb{R}}$ pontosan akkor általánosított sűrűsödési helye az $a:\mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ sorozatnak, ha létezik i indexsorozat úgy, hogy $x = (g) \lim(a \circ i)$,

– ha az $a:\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatnak létezik általánosított határértéke, akkor minden i indexsorozat esetén $(g) \lim(a \circ i) = (g) \lim a$.

11.3. A definíciók szerint $(g) \lim a = +\infty$ azt jelenti, hogy minden $\varepsilon>0$ esetén létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $\{a_n \mid n \geq n_\varepsilon\} \subset]1/\varepsilon, +\infty[$, vagy másképpen ugyanez: minden $K>0$ esetén létezik $n_K \in \mathbb{N}$ úgy, hogy ha $n \geq n_K$, akkor $a_n > K$.

Hasonlóan, $(g) \lim a = -\infty$ azt jelenti, hogy minden $\varepsilon>0$ esetén létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $\{a_n \mid n \geq n_\varepsilon\} \subset]-\infty, -1/\varepsilon[$, vagy másképpen ugyanez: minden $K>0$ esetén létezik $n_K \in \mathbb{N}$ úgy, hogy ha $n \geq n_K$, akkor $a_n < -K$.

Az olvasóra bízzuk, hogy ezek alapján bizonyítsa be a következő két állítást.

11.4. Állítás *Legyenek a és b valós értékű sorozatok, melyeknek létezik általánosított határértékük. Ekkor, feltéve, hogy az alábbi formulák jobb oldali kifejezéseiben a kijelölt műveletek értelmezve vannak,*

(1) $(g)\lim(a+b) = (g)\lim a + (g)\lim b,$

(2) $(g)\lim(ab) = \big((g)\lim a\big)\big((g)\lim b\big).$

Ha $a_n \neq 0$ véges sok $n \in \mathbb{N}$ kivételével, akkor

(3) $(g)\lim \frac{1}{a} = \frac{1}{(g)\lim a}.$

Továbbá, ha $(g)\lim a=0$ és véges sok $n \in \mathbb{N}$ kivételével $a_n > 0$ illetve $a_n < 0$, akkor

(4) $(g)\lim \frac{1}{a} = +\infty$ *illetve* $(g)\lim \frac{1}{a} = -\infty.$

11.5. Állítás *Legyen a monoton növő illetve monoton fogyó $\mathbb{R}$-beli sorozat. Ekkor*

$$(g)\lim a = \sup a \quad \textit{illetve} \quad (g)\lim a = \inf a.$$

11.6. Feladatok

1. Van-e általánosított sűrűsödési helye az
(i) $n \mapsto (-1)^n n$, (ii) $n \mapsto n^{(-1)^n}$
sorozatoknak? Van-e általánosított határértékük?

3. Adjunk meg két olyan sorozatot, amelyeknek van általánosított határértékük, de az összegüknek nincs!

4. Igazoljuk, hogy $(g)\lim_n \sqrt{n} = +\infty$.

5. Miért nem lehet definiálni az $\mathbb{N} \to \overline{(\mathbb{R})}$ sorozat Cauchy-féle tulajdonságát?

12. Alsó és felső határértékek

12.2. Definíció *Az $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ sorozat esetén*

$$\limsup a := \inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup\{a_k \mid k\geq n\}),$$

$$\liminf a := \sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf\{a_k \mid k\geq n\})$$

az a sorozat ***felső határértéke (limes superiorja)*** *illetve* ***alsó határértéke (limes inferiorja)****.*

Szokásosak a

$$\limsup_n a_n \qquad \text{illetve} \qquad \liminf_n a_n$$

jelölések is, amelyek különösen konkrét formulával megadott sorozatok esetén alkalmasak. Az irodalomban használják még a

$$\overline{\lim}\, a \quad \text{illetve} \quad \underline{\lim}\, a$$

jelöléseket is.

Nyilvánvaló, hogy

$$\inf a \leq \liminf a \leq \limsup a \leq \sup a,$$

továbbá

$$\mathbb{N}\to\overline{\mathbb{R}}, \quad n\mapsto \sup\{a_k \mid k\geq n\} \quad \text{monoton fogyó},$$

$$\mathbb{N}\to\overline{\mathbb{R}}, \quad n\mapsto \inf\{a_k \mid k\geq n\} \quad \text{monoton növő},$$

így $\limsup a$ illetve $\liminf a$ megegyezik ezen két sorozat $\overline{\mathbb{R}}$-beli általánosított határértékével.

A szuprémum illetve infimum hasonló tulajdonságai alapján nyilvánvaló, hogy

$$\liminf a = -(\limsup(-a)),$$

ezért szinte minden a $\liminf$-re és $\limsup$-ra kimondott állítást elég $\limsup$-ra bizonyítani.

12.3. Állítás *Legyen $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ sorozat és $x\in\overline{\mathbb{R}}$. Ekkor*

(1) $x>\limsup a$ esetén a $\{k\in\mathbb{N} \mid a_k\geq x\}$ halmaz véges,
(2) $x<\limsup a$ esetén a $\{k\in\mathbb{N} \mid a_k>x\}$ halmaz végtelen.

Bizonyítás (1) Tegyük fel, hogy $\{k\in\mathbb{N} \mid a_k\geq x\}$ halmaz végtelen. Ez azt jelenti, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén létezik $k\geq n$ úgy, hogy $a_k\geq x$. Ezért $\sup\{a_k\in\mathbb{N} \mid k\geq n\}\geq x$, amiből $\limsup a\geq x$.

(2) Tegyük fel, hogy $\{k\in\mathbb{N} \mid a_k>x\}$ véges. Ekkor létezik $n\in\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $k\geq n$ esetén $a_k\leq x$. Ezért $\sup\{a_k \mid k\geq n\}\leq x$, amiből $\limsup a\leq x$. ■

Hasonlóan bizonyítható, hogy

(1) $x<\liminf a$ esetén a $\{k\in\mathbb{N} \mid a_k\leq x\}$ halmaz véges,

(2) $x>\liminf a$ esetén a $\{k\in\mathbb{N} \mid a_k<x\}$ halmaz végtelen.

12.4. Állítás *Bármely $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ sorozat esetén*

(1) $\limsup a$ és $\liminf a$ általánosított sűrűsödési helyei a-nak,

(2) ha $x\in\overline{\mathbb{R}}$ általánosított sűrűsödési helye a-nak, akkor

$$\liminf a \leq x \leq \limsup a.$$

Bizonyítás (1) Legyen $\varepsilon>0$.

(a) Ha $\limsup a=+\infty$, akkor $1/\varepsilon<\limsup a$, így az előző állítás szerint $\{k\in\mathbb{N} \mid a_k\in G_\varepsilon(+\infty)\}$ végtelen halmaz.

(b) Ha $\limsup a=-\infty$, akkor $-1/\varepsilon>\limsup a$, így a $\{k\in\mathbb{N} \mid a_k\notin G_\varepsilon(-\infty)\}$ halmaz véges, ezért $\{k\in\mathbb{N} \mid a_k\in G_\varepsilon(-\infty)\}$ végtelen.

(c) Ha $\limsup a\in\mathbb{R}$, akkor a $\{k\in\mathbb{N} \mid a_k\geq \limsup a+\varepsilon\}$ halmaz véges, és $\{k\in\mathbb{N} \mid a_k>\limsup a-\varepsilon\}$ végtelen, ezért $\{k\in\mathbb{N} \mid a_k\in G_\varepsilon(\limsup a)\}$ végtelen.

Tehát mindhárom esetben $\limsup a$ sűrűsödési helye a-nak. Alsó határértékre a bizonyítás hasonló, ezt az olvasóra bízzuk.

(2) Legyen $x\in\overline{\mathbb{R}}$ olyan hogy $x>\limsup a$. Megmutatjuk, hogy x nem lehet sűrűsödési helye a-nak.

(a) $\limsup a=+\infty$ esetén nincs mit bizonyítani.

(b) Ha $\limsup a=-\infty$, akkor tetszőleges $\varepsilon>0$ esetén

- $x-\varepsilon>\limsup a$, ha $x\in\mathbb{R}$,
- $1/\varepsilon>\limsup a$, ha $x=+\infty$,

így a 12.3. állítás szerint a $\{k\in\mathbb{N} \mid a_k\in G_\varepsilon(x)\}$ halmaz véges.

(c) Ha $\limsup a\in\mathbb{R}$, akkor

- $x\in\mathbb{R}$ esetén legyen $\varepsilon>0$ olyan, hogy $x-\varepsilon>\limsup a$,
- $x=+\infty$ esetén legyen $\varepsilon>0$ olyan, hogy $1/\varepsilon>\limsup a$,

Így a 12.3. állítás szerint a $\{k\in\mathbb{N} \mid a_k\in G_\varepsilon(x)\}$ halmaz véges.

Tehát mindhárom esetben x nem sűrűsödési helye a-nak. Alsó határértékre a bizonyítás hasonló, ezt az olvasóra bízzuk.

Megjegyzések (1) Legyen $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ sorozat, és jelölje S_a az a-nak $\overline{\mathbb{R}}$-beli sűrűsödési helyeiből álló halmazt. Eredményünk szerint $\limsup a$ a maximuma, $\liminf a$ pedig a minimuma az S_a halmaznak $\overline{\mathbb{R}}$-ban.

(2) Bármely $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ sorozat esetén

(i) ha i indexsorozat úgy, hogy $a\circ i$-nek létezik általánosított határértéke, akkor

$$\liminf a \leq (g)\lim(a\circ i) \leq \limsup a\ ;$$

(ii) létezik i és j indexsorozat úgy, hogy

$$(g)\lim(a\circ i){=}\liminf a, \quad \text{és} \quad (g)\lim(a\circ j){=}\limsup a.$$

12.5. Állítás *Az $a{:}\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ sorozatnak akkor és csak akkor létezik általánosított határtértéke, ha* $\liminf a{=}\limsup a$, *és ekkor*

$$(g)\lim a = \liminf a = \limsup a.$$

Bizonyítás Ha létezik $x{:=}(g)\lim a{\in}\overline{\mathbb{R}}$, akkor a x az egyetlen sűrűsödési helye a-nak, így a 12.4. állítás miatt

$$x = \liminf a = \limsup a.$$

Ha $\liminf a{=}\limsup a{=}:x$, akkor minden $\varepsilon{>}0$ esetén $\{k{\in}\mathbb{N} \mid a_k{\notin}G_\varepsilon(x)\}$ véges halmaz a 12.3. állítás szerint, ugyanis

(a) $x{=}{+}\infty$ esetén

$$\{k{\in}\mathbb{N} \mid a_k{\notin}G_\varepsilon(x)\} = \{k{\in}\mathbb{N} \mid a_k{\leq}1/\varepsilon\},$$

(b) $x{=}{-}\infty$ esetén

$$\{k{\in}\mathbb{N} \mid a_k{\notin}G_\varepsilon(x)\} = \{k{\in}\mathbb{N} \mid a_k{\geq}{-}1/\varepsilon\},$$

(c) $x{\in}\mathbb{R}$ esetén

$$\{k{\in}\mathbb{N} \mid a_k{\notin}G_\varepsilon(x)\} \subset \{k{\in}\mathbb{N} \mid a_k{\geq}x{+}\varepsilon\}{\cup}\{k{\in}\mathbb{N} \mid a_k{\leq}x{-}\varepsilon\}.$$

Tehát x általánosított határértéke az a sorozatnak.

12.6. Feladatok

1. Mi az alsó és felső határértéke a következő sorozatoknak:
(i) $n{\mapsto}(-1)^n n$, (ii)$n{\mapsto}n^{(-1)^n}$, (iii) $n{\mapsto}(-1)^n$.

2. Igazoljuk, hogy ha $a_n{>}0$ és $b_n{>}0$ véges sok $n{\in}\mathbb{N}$ kivételével, akkor

$$\limsup(ab) \leq (\limsup a)\,(\limsup b),$$

$$\liminf(ab) \geq (\liminf a)\,(\liminf b).$$

3. Bizonyítsuk be, hogy ha a és b valós értétű sorozatok, akkor

$$\liminf(a+b) \leq (\liminf a) + (\limsup b) \leq \limsup(a+b).$$

4. Legyen a és b valós értékű sorozat, b konvergens; ekkor

$$\limsup(a+b) = (\limsup a) + (\lim b), \qquad \liminf(a+b) = (\liminf a) + (\lim b).$$

5. Legyen a és b valós értékű sorozat, b konvergens;
(i) ha $\lim b > 0$, akkor

$$\limsup(ab) = (\limsup a)(\lim b), \quad \liminf(ab) = (\liminf a)(\lim b),$$

(ii) ha $\lim b < 0$, akkor

$$\limsup(ab) = (\liminf a)(\lim b), \quad \liminf(ab) = (\limsup a)(\lim b).$$

6. Adjunk meg olyan a és b valós sorozatokat, hogy

$$\limsup(a+b) \neq (\limsup a)+(\limsup b).$$

7. Legyen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathbb{R}_0^+$-ban, hogy

$$c_{n+m} \leq c_n c_m \quad (n, m\in\mathbb{N}).$$

Bizonyítsuk be, hogy ekkor $(c_n^{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens és

$$\lim_n c_n^{1/n} = \inf_n c_n^{1/n}.$$

(Útmutatás: minden $n, m\in\mathbb{N}$, $m\leq n$ esetén legyen $p(n,m), q(n,m)\in\mathbb{N}_0$ olyan, hogy $n=p(n,m)m+q(n,m)$ és $0\leq q(n,m)<m$. Lássuk be, hogy

$$\limsup_n c_n^{1/n} \leq \inf_n c_n^{1/n}.)$$

13. Speciális sorozatok

13.1. Egyelőre még csak a racionális kitevőjű hatványokat ismerjük az egész kitevőjű hatványozás és gyökvonás értelmezéséből. Később bevezetjük a valós kitevőjű hatványokat is. Most megelőlegezzük ezeket, hogy alkalmas formában tárgyalhassunk a gyakorlat számára fontos sorozatokat.

Állítás *Minden $\alpha>0$ esetén*

$$\lim_n \frac{1}{n^\alpha}=0.$$

Bizonyítás Legyen $\varepsilon>0$. Az archimedészi tulajdonság szerint létezik $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ úgy, hogy $n_\varepsilon>(1/\varepsilon)^{1/\alpha}$. Ekkor $n\geq n_\varepsilon$ esetén $n>(1/\varepsilon)^{1/\alpha}$, ezért

$$\frac{1}{n^\alpha}<\varepsilon.$$

13.2. Állítás *Minden $a>0$ esetén*

$$\lim_n \sqrt[n]{a}=1.$$

Bizonyítás Ha $a\geq 1$, akkor $x_n:=\sqrt[n]{\alpha}-1\geq 0$ minden $n\in\mathbb{N}$ esetén. A Bernoulli-egyenlőtlenség szerint

$$a=(1+x_n)^n\geq 1+nx_n,$$

következésképpen

$$0\leq x_n\leq \frac{a-1}{n},$$

így a majoráns kritérium szerint $\lim_n x_n=0$, ezért $\lim_n \sqrt[n]{a}=1$.

Ha $a<1$, akkor $1/a>1$, így

$$\lim_n \sqrt[n]{a}=\lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{1/a}}=\frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{1/a}}=1.$$

13.3. Állítás $\lim_n \sqrt[n]{n}=1.$

Bizonyítás Minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $x_n:=\sqrt[n]{n}-1\geq 0$. A binomiális tétel szerint

$$n=(1+x_n)^n\geq 1+\frac{n(n-1)}{2}x_n^2,$$

következésképpen, ha $n\geq 2$, akkor

$$0\leq x_n\leq\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{n}},$$

így a 13.1. és a majoráns kritérium szerint $\lim\limits_n x_n=0$, ezért $\lim\limits_n \sqrt[n]{n}=1$.

13.4. Állítás *Ha* $q\in\mathbb{C}$ *és* $|q|<1$, *akkor*

$$\lim_n q^n=0.$$

Bizonyítás $q=0$ esetén az állítás nyilvánvaló.

Ha $q\neq 0$, akkor $\dfrac{1}{|q|}>1$, és így $\beta:=\dfrac{1}{|q|}-1>0$. A Bernoulli-egyenlőtlenség szerint minden n-re

$$|q^n| = \frac{1}{(1+\beta)^n} \leq \frac{1}{1+n\beta} \leq \frac{1}{\beta}\frac{1}{n},$$

így a 13.1. állítás és a majoráns kritérium alapján $\lim\limits_n q^n=0$.

13.5. Állítás *Minden* $q\in\mathbb{C}$, $|q|<1$ *és* $\alpha>0$ *esetén* $\lim\limits_n n^\alpha q^n=0$.

Bizonyítás Legyen $x_n:=n^\alpha|q|^n$ és $y_n:=\dfrac{x_n+1}{x_n}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^\alpha |q|$.

Létezik $\beta\in\mathbb{R}$ úgy, hogy $|q|<\beta<1$. Mivel a 7.4.4. feladat szerint $\lim\limits_n y_n=|q|$, létezik $m\in\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n\geq m$ esetén $y_n<\beta$, azaz $x_n+1<\beta\, x_n$. Ebből következik, hogy ha $n\geq m$, akkor

$$x_n \leq \left(\frac{x_m}{\beta^m}\right)\beta^n.$$

$\beta<1$ miatt az előző állítás szerint $\lim\limits_n \beta^n=0$, így a majoráns kritérium alapján $\lim\limits_n x_n=0$, és ezt akartuk bizonyítani.

13.6. Állítás *Minden* $z\in\mathbb{C}$ *esetén* $\lim\limits_n \dfrac{z^n}{n!}=0$.

Bizonyítás Legyen $m:=\mathrm{int}|z|+1$. Ha $k\geq m$, akkor $|z|<k$ miatt $\dfrac{|z|}{k}<1$, így $n>m$ esetén

$$\frac{|z^n|}{n!} = \frac{|z|}{1}\frac{|z|}{2}\cdots\frac{|z|}{m}\cdots\frac{|z|}{n} \leq \frac{|z|^m}{m!}\frac{|z|}{n},$$

tehát a sorozat tagjait véges sok kivételével egy nullához tartó sorozat tagjaival majorálhatjuk.

13.7. Feladatok

1. Igazoljuk (például 8.5. és a majoráns kritérium segítségével), hogy minden $x \in \mathbb{R}^+$ és $\alpha > 0$ esetén

$$\lim_n \frac{1}{(n+x)^\alpha} = 0 \quad \text{és} \quad \lim_n \frac{1}{n^\alpha + x} = 0.$$

2. Mutassuk meg, hogy $\lim\limits_n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$. (Útmutatás: bővítsük az n-edik tagot $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$-nel.)

3. Mi a következő sorozatok határértéke?

(i) $n \mapsto \dfrac{2n^3+5}{1-n^3}$, (ii) $n \mapsto \dfrac{n}{n^3+n^2+1}$, (iii) $n \mapsto \sqrt{n^2+6n+1} - n$.

14. Kettős indexű sorozatok

14.1. Sok alkalmazásban felbukkannak az úgynevezett **kettős indexű sorozatok**, azaz $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{K}^N$ függvények. Egy ilyen a sorozatnak az (m, n) indexpáron felvett értékét a sorozat (m, n)-edik **tagjá**nak nevezzük, és általában a_{mn}-nel jelöljük.

Definíció $x \in \mathbb{K}^N$ ***határértéke*** *az* $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{K}^N$ *kettős indexű sorozatnak, ha minden* $\varepsilon > 0$ *esetén létezik* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *úgy, hogy minden* $m, n \geq n_\varepsilon$ *természetes számra* $d(a_{mn}, x) < \varepsilon$, *vagy ugyanez másképpen,*

$$\{a_{mn} \mid m \geq n_\varepsilon,\ n \geq n_\varepsilon\} \subset G_\varepsilon(x);$$

a ***konvergens***, *ha létezik határértéke* $\mathbb{K}^N$*-ben.*

A 6.7. állítás bizonyításához hasonlóan belátható, hogy konvergens kettős indexű sorozat határértéke egyértelmű. Ha $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{K}^N$ konvergens és x a határétéke, akkor a

$$\lim a := \lim_{m,n} a_{mn} := \lim_{m,n \mapsto \infty} a_{mn} := x$$

jelöléseket fogjuk használni.

14.2. Legyen $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{K}^N$ kettős indexű sorozat. Ha rögzített $m \in \mathbb{N}$ esetén az

$$\mathbb{N} \to \mathbb{K}^N, \quad n \mapsto a_{mn}$$

sorozat konvergens, akkor jelölje ennek határértékét $\lim\limits_n a_{mn} \in \mathbb{K}^N$.

Ha minden $m \in \mathbb{N}$ esetén létezik $\lim\limits_n a_{mn}$, és az

$$\mathbb{N} \to \mathbb{K}^N, \quad m \mapsto \lim_n a_{mn}$$

sorozat konvergens, akkor jelölje ennek határértékét $\lim_m \lim_n a_{mn} \in \mathbb{K}^N$.

Hasonló módon értelmezhető $\lim_n \lim_m a_{mn} \in \mathbb{K}^N$.

Felmerül a kérdés, van-e összefüggés az a sorozat konvergenciája és ezen (úgynevezett ismételt) határértékek létezése között. Erre ad bizonyos választ a következő állítás.

Állítás *Ha az $a{:}\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{K}^N$ kettős indexű sorozat konvergens és minden $m\in\mathbb{N}$ esetén létezik $\lim_n a_{mn}$, akkor az*

$$\mathbb{N}\to\mathbb{K}^N, \quad m\mapsto \lim_n a_{mn}$$

sorozat konvergens és

$$\lim_m \lim_n a_{mn} = \lim_{m,n} a_{mn}.$$

Bizonyítás Legyen $x := \lim_{m,n} a_{mn}$ és minden $m\in\mathbb{N}$ esetén $b_m := \lim_n a_{mn}$. Azt kell megmutatnunk, hogy $\lim_m b_m = x$. Ehhez megbecsüljük b_m-nek x-től való eltérését. Legyen $\varepsilon>0$. Ekkor létezik $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n, m\geq n_\varepsilon$ természetes számra $d(a_{mn}, x) < \varepsilon$. Továbbá, rögzített $m\in\mathbb{N}$ esetén létezik $n_\varepsilon^{(m)}\in\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n\geq n_\varepsilon^{(m)}$ természetes számra $d(a_{mn}, b_m) < \varepsilon$.

Ezért, ha $m\geq n_\varepsilon$ és $n := \max\{n_\varepsilon, n_\varepsilon^{(m)}\}$, akkor $d(a_{mn}, b_m)<\varepsilon$ és $d(a_{mn}, x)<\varepsilon$, tehát a háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$d(b_m, x) \leq d(b_m, a_{mn}) + d(a_{mn}, x) < 2\varepsilon,$$

amivel bebizonyítottuk, amit akartunk.

14.3. Az előző állításnál több általában nem mondható. Bár ez nem túl erős eredmény, mégis igen hasznos, ha megemlítjük két következményét.

(1) Ha valamelyik ismételt határérték létezik, és a kettős indexű sorozat határértéke létezik, akkor ezek egyenlők.

(2) Ha mindkét ismételt határérték létezik, és nem egyenlők, akkor a kettős indexű sorozat nem konvergens.

Íme a példák, hogy az előző állítás nem javítható.

(1) $\lim_n \lim_m \frac{mn}{m^2+n^2} = \lim_m \lim_n \frac{mn}{m^2+n^2} = 0$, azonban a kettős indexű sorozatnak nem létezik határéretéke, mivel ha létezne, csak a nulla lehetne, viszont a sorozat végtelen sok tagja $1/2$: minden $m=n$ esetén.

(2) $\lim_n \lim_m \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{m}\right) = 0$, $\lim_{m,n} \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{m}\right) = 0$, viszont a másik ismételt határérték nem létezik;

(3) $\lim_{m,n} \left(\frac{(-1)^m}{n} + \frac{(-1)^n}{m}\right) = 0$, de egyik ismételt határérték sem létezik;

(4) $\lim\limits_{n}\lim\limits_{m}\left(\dfrac{mn}{m^2+n^2}+\dfrac{(-1)^n}{m}\right)=0$, azonban sem a másik ismételt határérték, sem a kettős indexű sorozat határértéke nem létezik.

14.4. Definíció *Az $a:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ kettős indexű sorozat* ***monoton növő (fogyó)****, ha minden $i,k,m,n\in\mathbb{N}$, $i\le m, k\le n$ esetén*

$$a_{ik}\le a_{mn}\qquad (a_{ik}\ge a_{mn}).$$

Hasonlóan, mint 8.4.-ben, beláthatjuk, hogy monoton növő (fogyó) kettős indexű sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha felülről (alulról) korlátos, és ekkor határértéke az értékkészlet szuprémuma (infimuma).

Monoton kettős indexű sorozatok ismételt határértékeire is több mondható, mint általában.

Állítás *Legyen $a:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ monoton kettős indexű sorozat. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(1) létezik $\lim\limits_{m,n} a_{mn}$,

(2) létezik $\lim\limits_{m}\lim\limits_{n} a_{mn}$,

(3) létezik $\lim\limits_{n}\lim\limits_{m} a_{mn}$.

Bizonyítás Nyilván elég megmutatni, hogy (1) és (2) ekvivalensek, hiszen (1) és (3) viszonya hasonló.

Legyen a monoton növő.

Ha (1) teljesül, akkor a korlátos, továbbá minden $m\in\mathbb{N}$ esetén az $n\mapsto a_{mn}$ sorozat monoton növő és korlátos, következésképpen létezik $\lim\limits_{n} a_m$, így a 14.2. állítás szerint létezik $\lim\limits_{m}\lim\limits_{n} a_{mn}$.

Ha (2) teljesül, akkor minden $m\in\mathbb{N}$ esetén létezik $\lim\limits_{n} a_{mn}=: b_m$. Ha $k\le m$, akkor minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $a_{kn}\le a_{mn}$, ezért $b_k\le b_m$. Tehát a $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sorozat is monoton növő, így minden m-re

$$b_m\le\lim_{m} b_m =: x.$$

Továbbá, minden $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$a_{mn}\le b_m\le x,$$

azaz a felülről korlátos, így létezik $\lim\limits_{m,n} a_{mn}$.

A bizonyítás hasonló, ha a monoton fogyó.

14.5. A kettős indexű sorozatok részsorozatai ugyanolyan fontos, vagy talán még fontosabb szerepet játszanak, mint a sorozatok részsorozatai.

Legyenek i és j indexsorozatok. Emlékeztetünk arra, hogy az indexsorozatok (mint függvények) Descartes-szorzata

$$i{\times}j : \mathbb{N}{\times}\mathbb{N}{\to}\mathbb{N}{\times}\mathbb{N},\ (m,n){\mapsto}(i_m, j_n),$$

és együttese

$$(i,j) : \mathbb{N}{\to}\mathbb{N}{\times}\mathbb{N},\ n{\mapsto}(i_n, j_n).$$

$a{:}\mathbb{N}{\times}\mathbb{N}{\to}\mathbb{K}^N$ kettős indexű sorozat esetén $a{\circ}(i{\times}j)$ az a **kétindexű részsorozata**, $a{\circ}(i,j)$ az a **egyindexű részsorozata**.

Hasonlóan, mint a 9.2-ben, bebizonyíthatjuk, hogy ha egy kettős indexű sorozat konvergens, akkor minden egyindexű és kétindexű részsorozata konvergens, és határértéke ugyanaz, mint magának a kettős indexű sorozatnak.

14.6. Feladatok

1. Van-e határértékük, ismételt határértékük a következő kettős indexű sorozatoknak?
(i) $(m,n){\mapsto}\dfrac{1}{mn}$, (ii) $(m,n){\mapsto}\dfrac{1}{m{+}n}$,
(iii) $(m,n){\mapsto}\dfrac{m}{n}$, (iv) $(m,n){\mapsto}\dfrac{m}{m{+}n}$.

2. Az a és b $\mathbb{K}^N$-beli sorozatok **tenzorösssszege** az

$$a{\oplus}b : \mathbb{N}{\times}\mathbb{N}{\to}\mathbb{K}^N, \quad (m,n){\mapsto}a_m{+}b_n$$

kettős indexű sorozat. Igazoljuk, hogy $a{\oplus}b$ pontosan akkor konvergens, ha a és b konvergensek, és ekkor

$$\lim a{\oplus}b = \lim a + \lim b.$$

3. Az a és b $\mathbb{K}$-beli sorozatok **tenzorszorzata** az

$$a{\otimes}b : \mathbb{N}{\times}\mathbb{N}{\to}\mathbb{K}, \quad (m,n){\mapsto}a_m\, b_n$$

kettős indexű sorozat. Igazoljuk, hogy ha a és b konvergensek, akkor $a{\otimes}b$ is, és

$$\lim a{\otimes}b = (\lim a)(\lim b).$$

Viszont, ha $a{\otimes}b$ konvergens és $\lim a{\otimes}b{\neq}0$, akkor a és b is konvergensek.

4. Az $a{:}\mathbb{N}{\to}\mathbb{K}^N$ sorozat pontosan akkor Cauchy-féle, ha az $(m,n){\mapsto}d(a_m, a_n)$ kettős indexű sorozatnak nulla a határértéke.

5. Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be kettős indexű sorozatokra a majoráns kritériumot!

6. Az $a{:}\mathbb{N}{\times}\mathbb{N}{\to}\mathbb{K}^N$ kettős indexű sorozat **Cauchy-féle**, ha minden $\varepsilon{>}0$ esetén létezik $n_\varepsilon{\in}\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $k,l,m,n{\geq}n_\varepsilon$ esetén $d(a_{kl}, a_{mn}){<}\varepsilon$. Bizonyítsuk be a kettős indexű sorozatokra vonatkozó Cauchy-kritériumot, azaz az $a{:}\mathbb{N}{\times}\mathbb{N}{\to}\mathbb{K}^N$

kettős indexű sorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-féle. (Útmutatás: ha a Cuachy-féle, akkor az $a\circ(\mathrm{id}_{\mathbb{N}},\mathrm{id}_{\mathbb{N}})$ egyindexes részsorozat is Cauchy-féle, legyen $x{:=}\lim\limits_{n} a_{nn}$; mutassuk meg, hogy ekkor az a kettős indexű sorozat is x-hez konvergál.)

III. SOROK

15. Sorok alapvető tulajdonságai

15.1. Definíció *Legyen $a{:}\mathbb{N}\to\mathbb{K}^N$ sorozat. Ekkor a*

$$\sum a : \mathbb{N}\to\mathbb{K}^N, \quad n\mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k$$

*sorozatot az a-hoz rendelt **sornak** nevezzük. Használjuk még a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jelöléseket is. $\left(\sum a\right)_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ a sor n-edik **részletösszege** ($n\in\mathbb{N}$).*

*Az a sorozat **összegezhető**, ha $\sum a$ konvergens, és ekkor a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n := \sum a := \lim\left(\sum a\right)$$

*$\mathbb{K}^N$-beli elemet a $\sum a$ sor **összegének** nevezzük.*

Ahelyett, hogy a összegezhető, azt is mondjuk, hogy létezik a $\sum a$ összeg.

Megjegyzések (i) Természetesen, ahogy megengedtük, hogy egy sorozat indexei nem csak 1-től, hanem 0-tól vagy más természetes számtól kezdődhessenek (vagyis értelmezési tartománya $\mathbb{N}_0$, illetve adott $n_0\in\mathbb{N}$ esetén $\{n\in\mathbb{N} \mid n\geq n_0\}$ legyen), olykor célszerű ilyen sorozatokból készített sorokkal foglalkoznunk, vagyis az összegzést nullától, illetve valamilyen más természetes számtól kezdjük.

Világos, hogy ha létezik a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ összeg, akkor minden $m{\in}\mathbb{N}$ esetén létezik a $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$ összeg is.

(ii) A 15.1. Definíció szerint a $\sum a$ sor konvergens és $A{\in}\mathbb{K}^N$ az összege akkor és csak akkor, ha minden $\varepsilon{>}0$ esetén létezik $n_\varepsilon{\in}\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n{\geq}n_\varepsilon$ természetes számra

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - A\right| < \varepsilon.$$

(iii) Bármely $m, n{\in}\mathbb{N}$, $m < n$ esetén

$$\left(\sum a\right)_n - \left(\sum a\right)_m = \sum_{k=m+1}^{n} a_k,$$

így a Cauchy kritérium (9.6. és 9.9. állítások) szerint $\sum a$ pontosan akkor konvergens, ha minden $\varepsilon{>}0$ esetén létezik $n_\varepsilon{\in}\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $m, n{\geq}n_\varepsilon$, $m < n$ természetes számra

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon,$$

amiből

$$\left|\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k\right| \leq \varepsilon.$$

Ezt szemléletesen úgy szoktuk megfogalmazni, hogy "konvergens sor hátsó szelete elég kicsi, ha elég messze vágjuk le".

15.2. Jelöljük az $\mathbb{N}{\to}\mathbb{K}^N$ sorozatok összességét a szokásos módon $\left(\mathbb{K}^N\right)^{\mathbb{N}}$-nel. Emlékeztetünk arra, hogy $a, b{\in}\left(\mathbb{K}^N\right)^{\mathbb{N}}$ és $\alpha{\in}\mathbb{K}$ esetén a pontonkénti műveletek definíciója szerint

$$a{+}b : \mathbb{N}{\to}\mathbb{K}^N, \quad n{\mapsto}a_n{+}b_n,$$
$$\alpha a : \mathbb{N}{\to}\mathbb{K}^N, \quad n{\mapsto}\alpha a_n.$$

$(\mathbb{K}^N)^{\mathbb{N}}$ a pontonkénti (tagonkénti) összeadással, illetve $\mathbb{K}$-beli elemmel való szorzással ellátva vektortér a $\mathbb{K}$ test felett.

Állítás *A*

$$\sum : (\mathbb{K}^N)^{\mathbb{N}}{\to}(\mathbb{K}^N)^{\mathbb{N}}, \quad a{\mapsto}\sum a$$

leképezés lineáris bijekció.

Bizonyítás A pontonkénti műveletek, valamint a $\sum$ leképezés definíciója szerint nyilvánvaló, hogy $\sum$ lineáris.

Ha $\sum a = 0$, akkor a_1=0, a_1+a_2=0, a_1+a_2+a_3=0 stb., azaz a=0, tehát $\sum$ injektív.

Ha b:$\mathbb{N} \to \mathbb{K}^N$ tetszőleges sorozat, akkor az

$$a_1{:=}b_1, \qquad a_{n+1}{:=}b_{n+1}{-}b_n \quad (n{\in}\mathbb{N})$$

sorozatra $\sum a = b$, tehát $\sum$ szürjektív is.

15.3. A 7.2. állítás közvetlen következményeként megállapíthatjuk:

Állítás *Legyenek a és b összegezhető sorozatok $\mathbb{K}^N$-ben $\alpha{\in}\mathbb{K}$. Ekkor*

(1) $a{+}b$ összegezhető, és $\sum(a{+}b) = \sum a + \sum b$,
(2) αa összegezhető, és $\sum(\alpha a) = \alpha\left(\sum a\right)$.

15.4. Állítás *Az a:$\mathbb{N}{\to}\mathbb{K}^N$ sorozat pontosan akkor összegezhető, ha minden k=1, . . . , N esetén a $\mathrm{pr}_k{\circ}a$ koordináta-sorozat összegezhető, és ekkor minden k-ra*

$$\mathrm{pr}_k\left(\sum a\right) = \sum\left(\mathrm{pr}_k{\circ}a\right)$$

Bizonyítás Ez a 7.1. állításból következik, mivel minden k-ra $\mathrm{pr}_k{\circ}\left(\sum a\right) = \sum\left(\mathrm{pr}_k{\circ}a\right)$. ■

Speciálisan az a:$\mathbb{N}{\to}\mathbb{C}$ sorozat pontosan akkor összegezhető, ha a $\mathrm{Re}{\circ}a$ és $\mathrm{Im}{\circ}a$ sorozatok összegezhetők, és ekkor

$$\mathrm{Re}\left(\sum a\right) = \sum\left(\mathrm{Re}{\circ}a\right), \qquad \mathrm{Im}\left(\sum a\right) = \sum\left(\mathrm{Im}{\circ}a\right).$$

15.5. Állítás *Ha az a:$\mathbb{N}{\to}\mathbb{K}^N$ sorozat összegezhető, akkor $\lim a$=0.*

Bizonyítás Minden ε>0 esetén a Cauchy-kritérium szerint létezik $n_\varepsilon{\in}\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n, m{\geq}n_\varepsilon$, $m < n$ természetes számra

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon,$$

tehát speciálisan $n := m + 1$ esetére

$$|a_{m+1}| = \left|\sum_{k=m+1}^{m+1} a_k\right| < \varepsilon,$$

és lévén $m \geq n_\varepsilon$ tetszőleges, ez azt jelenti, hogy $\lim a=0$. ■

Ezt az eredményt a sorokra vonatkozó **alapvető konvergencia-kritériumnak nevezzük**: ha egy sorozat nem tart a nullához, akkor a belőle készített sor nem konvergens.

15.6. Állítás *Az $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}_0^+$ sorozat esetén $\sum a$ pontosan akkor konvergens, ha felülről korlátos.*

Bizonyítás Mivel a tagjai nemnegatívak, $\sum a$ monoton növő, ezért alkalmazhatjuk a 8.4. állítást.

15.7. Állítás *(**Összehasonlító vagy majoráns kritérium**) Legyenek $a:\mathbb{N}\to\mathbb{K}^N$ és $b:\mathbb{N}\to\mathbb{R}_0^+$ sorozatok úgy, hogy véges sok $n\in\mathbb{N}$ kivételével $|a_n|\leq b_n$ teljesül. Ha $\sum b$ konvergens, akkor $\sum a$ is konvergens.*

Bizonyítás Minden $\varepsilon>0$ esetén a Cauchy-kritérium szerint létezik $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $m, n\geq n_\varepsilon$, $m < n$ természetes számra

$$\sum_{k=m+1}^{n} b_k < \varepsilon.$$

Továbbá, létezik $n_0\in\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n\geq n_0$ esetén $|a_n|\leq b_n$ teljesül. Ha $n>m\geq \max\{n_\varepsilon, n_0\}$, akkor

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} b_k < \varepsilon,$$

tehát a Cauchy-kritérium szerint $\sum a$ konvergens.

15.8.Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$, (ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$,

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

2. Konvergensek-e a következő sorok?

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+(-1)^{n+1}}$, (ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$.

16. Speciális sorok

16.1. Állítás *Legyen $q\in\mathbb{C}$. A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ sor*

(1) $|q|\geq 1$ esetén divergens;
(2) $|q|<1$ esetén konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}\,. \tag{$*$}$$

Bizonyítás (1) Ha $|q|\geq 1$, akkor minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $|q^n|=|q|^n\geq 1$, így a $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem nullasorozat, ezért a 15.5. állítás alapján nem lehet összegezhető.

(2) Ha $|q|<1$, akkor minden $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$q\left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) = \sum_{k=1}^{n+1} q^k = \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) + q^{n+1}-1,$$

így, lévén $q\neq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

A 13.4. állítás szerint $\lim q^n=0$, következésképpen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ konvergens, és fennáll a $(*)$ egyenlőség. ■

A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ sort q hányadosú **geometriai sornak** nevezzük.

16.2. Állítás *Legyen $\alpha\in\mathbb{R}^+$. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sor*

(1) $\alpha\leq 1$ esetén divergens;
(2) $\alpha>1$ esetén konvergens, és

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{2^\alpha}{2^\alpha-2}.$$

Bizonyítás (1) Minthogy

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

a Cauchy-kritérium szerint a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ sor divergens. Ha $\alpha\leq 1$, akkor $\frac{1}{n}\leq\dfrac{1}{n^{\alpha}}$, így az összehasonlító-kritérium szerint a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ sor divergens.

(2) Ha $\alpha>1$, akkor minden $n\in\mathbb{N}$ esetén létezik $m\in\mathbb{N}$ úgy, hogy $n\leq 2^m$; ezért

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}}\leq\sum_{k=1}^{2^m}\frac{1}{k^{\alpha}}=$$
$$=1+\left(\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}\right)+\left(\frac{1}{4^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{7^{\alpha}}\right)+\left(\frac{1}{8^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{(2^m)^{\alpha}}\right)\leq$$
$$\leq 1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\frac{1}{4^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{1}{(2^m)^{\alpha-1}}=\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{k}.$$

Mivel $\alpha>1$ esetén $\dfrac{1}{2^{\alpha-1}}<1$, a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{n}$ geometriai sor konvergens, így

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}}\leq\frac{2^{\alpha}}{2^{\alpha}-2},$$

ezért a 15.6. állítás szerint igaz, amit állítottunk. ■

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ sort **harmonikus sor**nak, a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ sort $\alpha<1$ esetén **szuperharmonikus sornak**, $\alpha>1$ esetén **szubharmonikus sornak** nevezzük.

16.3. 1. Állítás *A* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ *sor konvergens, és*

$$2<\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\leq 3. \qquad (*)$$

Bizonyítás Ha $n\geq 2$, akkor

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}<2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=2+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}<2+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}=3,$$

ahol az utolsó egyenlőségnél felhasználtuk a 16.1. eredményét; következésképpen a szóban forgó sor konvergens, és igaz rá a $(*)$ összefüggés.

2. Állítás $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}=\lim\limits_{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}.$

Bizonyítás A binomiális tétel szerint

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-1)!}\frac{1}{n^k}=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!n^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

A fenti kifejezés jobb oldala jól mutatja, hogy

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

hiszen az $(n+1)$-re olyan összeget kapunk, amelyben az itteni tagok szerepelnek úgy, hogy n helyett $n+1$ áll, tehát ezek a tagok mind nagyobbak lesznek, plusz megjelenik még egy $(n+1)$-ik tag, amely szintén pozitív. Tehát a szóban forgó sorozat szigorúan monoton nő, és a fenti egyenlőség azt is mutatja, hogy

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!},$$

tehát konvergens, és a határértéke kisebb vagy egyenlő, mint az előző állításban szereplő sorösszeg.

Rögzített $m\in\mathbb{N}$ és $n>m$ esetén

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)>$$
$$>\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right),$$

amiből, véve mindkét oldal határértékét, miközben n tart a végtelenhez,

$$\lim_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!},$$

és most véve az $m\to\infty$ hatértéket látjuk, hogy szóban forgó sorozat határértéke nagyobb vagy egyenlő, mint az előző állításban szereplő sorösszeg. ■

Az $e:=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\lim\limits_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ szám fontos szerepet játszik az analízisben, amint ezt később látni fogjuk.

16.4. Feladatok

1. Milyen c komplex számra konvergens a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c^2+n^2}$ sor?

2. Bizonyítsuk be, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ sor konvergens.

3. Igazoljuk, hogy minden $c \in \mathbb{C}$ esetén a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!}$ sor konvergens. (Útmutatás: legyen $k_c := \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \frac{|c|}{k} < 1 \right\}$; az összegzendő sorozatnak k_c-nél nagyobb indexű tagjait a $q_c := \frac{|c|}{k_c}$ hányadosú geometriai sorozat tagjainak számszorosával lehet felülről becsülni.)

4. Konvergensek-e az alábbi sorok:
(i) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{n} \right)^n$, (ii) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2n + n\sin n}$, (iii) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{2 - \frac{\sin n}{n}}{n + \sqrt{n}}$.

5. Mutassuk meg, hogy ha $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}_0^+$ monoton fogyó sorozat, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ és a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} 2^n a_{2^n}$ sorok egyszerre konvergensek illetve divergensek. (Útmutatás: lásd a 16.2. állítás második részének a bizonyítását.) Az állítást **kondenzációs kritériumnak** nevezik. Igazoljuk a 16.2. állítást ennek segítségével!

17. Abszolút konvergencia

17.1. Definíció *Az $a:\mathbb{N}\to\mathbb{K}^N$ sorozatot **abszolút összegezhetőnek** nevezzük, ha az $|a|:\mathbb{N}\to\mathbb{R}_0^+$ sorozat összegezhető, azaz a $\sum |a|$ sorozat konvergens. Ekkor a $\sum a$ sort **abszolút konvergensnek** hívjuk.*

Megjegyzések (i) A 15.1. állítás szerint az $a:\mathbb{N}\to\mathbb{K}^N$ sorozat pontosan akkor abszolút összegezhető, ha a $\sum |a|$ sor felülről korlátos.

(ii) Az összehasonlító kritérium (15.7. állítás) úgy is fogalmazható (pontosítható), hogy ha $\sum b$ konvergens, akkor $\sum a$ abszolút konvergens.

Az összehasonlító kritériumból azonnal következik:

Állítás *$\mathbb{K}^N$-beli abszolút összegezhető sorozat összegezhető.*

17.2. Emlékeztetünk arra, hogy tetszőleges X nem üres halmaz esetén minden $X\to X$ bijekciót az X permutációjának nevezünk. Tudjuk, hogy az összeadás $\mathbb{K}^N$-ben asszociatív és kommutatív művelet. A kommutativitást úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}^N$ és p az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz egy permutációja, akkor

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{p(k)}.$$

Kérdés, vajon a "végtelen összegzés" is rendelkezik-e ilyen tulajdonsággal? Látni fogjuk, hogy általában nem.

Definíció *Ha $a:\mathbb{N}\to\mathbb{K}^N$ sorozat és $p:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ bijekció, akkor a $\sum(a\circ p)$ sort a $\sum a$ sor (p szerinti)* ***átrendezésének*** *nevezzük. A $\sum a$ sor* ***feltétlen konvergens****, ha minden átrendezése konvergens;* ***feltételesen konvergens****, ha konvergens, de nem feltétlen konvergens (azaz van nemkonvergens átrendezése).*

Állítás *Ha a $\sum a$ sor abszolút konvergens, akkor feltétlen konvergens, és minden $p:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ permutáció esetén*

$$\sum(a\circ p) = \sum a.$$

Bizonyítás Legyen $p:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ permutáció $\varepsilon>0$. Mivel a $\sum|a|$ sor konvergens, a Cauchy-kritérium következményeként (lásd 15.1. megjegyzését) létezik $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $m\geq n_\varepsilon$ természetes számra

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon.$$

Legyen $n_\varepsilon^{(p)} := \max \overset{-1}{p}\big(\{1,2,\ldots,n_\varepsilon\}\big)$. Ha $n>n_\varepsilon^{(p)}$, akkor

$$\{1,2,\ldots,n_\varepsilon\} \subset p[\{1,2,\ldots,n\}],$$

és $p(n)>n_\varepsilon$, így

$$H_n := \{j\in\{1,\ldots,n\} \mid p(j)>n_\varepsilon\} \neq \emptyset,$$

ezért

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{p(j)} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| = \left|\sum_{j\in H_n} a_{p(j)} - \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} a_k\right| \leq$$

$$\leq \sum_{j\in H_n} |a_{p(j)}| + \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} |a_k| < 2\varepsilon,$$

így $\sum(a\circ p)$ konvergens, és $\sum(a\circ p) = \sum a$.

17.3. Állítás *$\mathbb{K}^N$-beli feltétlen konvergens sor abszolút konvergens.*

Bizonyítás Azt mutatjuk meg, hogy konvergens de nem abszolút konvergens sor nem feltétlen konvergens, azaz létezik divergens átrendezése.

(i) Tekintsünk először valós értékű sorokat, azaz legyen $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy a $\sum a$ sor konvergens és $\sum |a|$ divergens.

Legyen
$$a_n^+ := \max\{a_n, 0\} \qquad a_n^- := \max\{-a_n, 0\}.$$

Ekkor $\sum a = \sum a^+ - \sum a^-$ konvergens, $\sum |a| = \sum a^+ + \sum a^-$ divergens, ami csak úgy lehet, hogy $\sum a^+$ és $\sum a^-$ divergensek, azaz nem korlátosak. Speciálisan, az $\{n\in\mathbb{N} \mid a_n \geq 0\}$ és az $\{n\in\mathbb{N} \mid a_n < 0\}$ halmazok végtelenek.

Legyen $i:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ illetve $j:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ az az egyértelműen meghatározott indexsorozat, melynek értékkészlete az $\{n\in\mathbb{N} \mid a_n > 0\}$ illetve az $\{n\in\mathbb{N} \mid a_n < 0\}$ halmaz, és

$$P := a^+ \circ i, \qquad Q := a^- \circ j.$$

Mivel P illetve Q az a^+ illetve a^- sorozattól csak nulla tagok hiányában különbözik, $\sum P$ és $\sum Q$ divergensek, azaz nem korlátosak.

Vegyünk α és β valós számokat úgy, hogy $\alpha < \beta$, és legyen

$$n_1 := \min\left\{ n\in\mathbb{N} \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} P_k > \beta \right\}, \qquad n_2 := \min\left\{ n\in\mathbb{N} \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n_1} P_k - \sum_{k=1}^{n} Q_k < \alpha \right\},$$
$$n_3 := \min\left\{ n\in\mathbb{N} \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} P_k - \sum_{k=1}^{n_2} Q_k > \beta \right\},$$

és hasonlóan értelmezzük az $n_4, n_5, \ldots$ természetes számokat.

Ekkor a $\sum a$ sornak a

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_{n_1} - Q_1 - Q_2 - \ldots - Q_{n_2} + P_{n_1+1} + \ldots$$

átrendezése olyan, hogy végtelen sok részletösszege nagyobb β-nál és végtelen sok részletösszege kisebb α-nál, ezért divergens.

(ii) Legyen $a:\mathbb{N}\to\mathbb{K}^N$ olya sorozat, hogy a $\sum a$ sor konvergens, $\sum |a|$ divergens. Mivel minden $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$|a_n| = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} |\mathrm{pr}_k(a_n)|^2} \leq \sum_{k=1}^{N} |\mathrm{pr}_k(a_n)| \leq \sum_{k=1}^{N} \left(|\mathrm{Re}(\mathrm{pr}_k(a_n))| + |\mathrm{Im}(\mathrm{pr}_k(a_n))| \right),$$

a majoráns-kritérium szerint létezik $k\in\{1, \ldots, N\}$ úgy, hogy a $\sum |\mathrm{Re}\circ\mathrm{pr}_k\circ a|$ és a $\sum |\mathrm{Im}\circ\mathrm{pr}_k\circ a|$ sorok egyike divergens. Ekkor az előző eredményünk szerint létezik olyan $p:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ permutáció, hogy $\sum(\mathrm{Re}\circ\mathrm{pr}_k\circ a\circ p)$ vagy $\sum(\mathrm{Im}\circ\mathrm{pr}_k\circ a\circ p)$ divergens. Ekkor a 15.4. állítás alapján a $\sum a\circ p$ sor divergens, tehát $\sum a$ nem feltétlen konvergens.

17.4. Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=2\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots\right).$$

2. Bizonyítsuk be, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ sor konvergens, melynek az

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\ldots$$

átrendezettje divergens.

18. Abszolútkonvergencia-kritériumok

18.1. Állítás (***Cauchy-féle gyökkritérium***) *Legyen $a:\mathbb{N}\to\mathbb{K}^N$ sorozat.*

(1) Ha $\limsup\limits_n \sqrt[n]{|a_n|}<1$, akkor a $\sum a$ sor abszolút konvergens.

(2) Ha $\limsup\limits_n \sqrt[n]{|a_n|}>1$, akkor a $\sum a$ sor divergens.

Bizonyítás (1) Létezik olyan $q\in\mathbb{R}$, hogy $\limsup\limits_n \sqrt[n]{|a_n|}<q<1$. A 12.3. állítás szerint ekkor $\sqrt[n]{|a_n|}<q$, azaz $|a_n|<q^n$ véges sok $n\in\mathbb{N}$ kivételével, így a 15.7. és a 16.1. állítások szerint $\sum a$ abszolút konvergens.

(2) A 12.3. állítás szerint $\sqrt[n]{|a_n|}\geq 1$, azaz $|a_n|\geq 1$ végtelen sok $n\in\mathbb{N}$ esetén, így a nem lehet nulla-sorozat, következésképpen $\sum a$ divergens.

Megjegyzés Ha $\limsup\limits_n \sqrt[n]{|a_n|}=1$, akkor a $\sum a$ sor lehet konvergens is, divergens is. Például a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ sor $\alpha>1$ esetén konvergens, $\alpha\leq 1$ esetén divergens, és mindkét esetben

$$\limsup_n \sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}}=1.$$

18.2. Legyen $a:\mathbb{N}\to\mathbb{K}^N\setminus\{\mathbf{0}\}$ sorozat. Ekkor

(1) $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$,

(2) $\liminf_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \le \liminf_n \sqrt[n]{|a_n|}$.

Bizonyítás (1) Legyen $\alpha := \limsup_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. Ha $\alpha = +\infty$, akkor az egyenlőtlenség triviálisan teljesül, ezért feltehetjük, hogy $\alpha < +\infty$.

Legyen $\beta > \alpha$ tetszőleges. A 12.3. állítás szerint ekkor létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n \ge n_0$ esetén

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \beta,$$

amiből

$$|a_n| < \beta |a_{n-1}| < \beta^2 |a_{n-2}| < \cdots < \beta^{n-n_0} |a_{n_0}|,$$

így

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \beta \sqrt[n]{\beta^{-n_0} |a_{n_0}|}.$$

A 13.2. állítás szerint

$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \le \beta \limsup_n \sqrt[n]{\beta^{-n_0} |a_{n_0}|} = \beta \lim_n \sqrt[n]{\beta^{-n_0} |a_{n_0}|} = \beta.$$

Mivel $\beta > \alpha$ tetszőleges, ebből következik, hogy

$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \le \alpha.$$

(2) Az előzőhöz hasonlóan érvelhetünk; a részleteket az olvasóra bízzuk.

18.3. Állítás *(**D'Alembert-féle hányadoskritérium**) Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^N \setminus \{\mathbf{0}\}$ sorozat.*

(1) Ha $\limsup_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, akkor a $\sum a$ sor abszolút konvergens.

(2) Ha $\liminf_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, akkor a $\sum a$ sor divergens.

Bizonyítás (1) Az előző állítás alapján most

$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1,$$

így a gyökkritérium szerint $\sum a$ abszolút konvergens.

(2) Szintén az előző állítás miatt

$$1 < \liminf_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \le \liminf_n \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|},$$

így a gyökkritérium szerint $\sum a$ divergens.

Megjegyzések (i) A bizonyításból látszik, hogy a hányadoskritérium a gyökkritérium és a 18.2. állítás egyenlőtlenségeinek következménye. Így a gyökkritérium erősebb a hányadoskritériumnál abban az értelemben, hogy ha a $\sum a$ sor abszolút konvergens (ill. divergens) a hányadoskritérium szerint, akkor abszolút konvergens (ill. divergens) a gyökkritérium szerint is, továbbá, ha a gyökkritérium nem mond semmit a konvergenciáról ($\limsup\limits_n \sqrt[n]{|a_n|}=1$), akkor a hányadoskritériummal sem tudunk semmit mondani.

(ii) Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a gyökkritérium (1) és (2) pontjában egyaránt lim sup szerepel, míg a hányadoskritérium (1) pontjában lim sup, (2) pontjában pedig lim inf áll.

18.4. Bizonyítás nélkül közöljük a következő tényt: ha $\beta>0$ és $x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$ olyan sorozat, hogy $\lim\limits_n x_n=0$, akkor

$$\lim_n \frac{(1+x_n)^\beta-1}{x_n} = \beta.$$

(Ugyanis a differenciálszámításban látni fogjuk, hogy

$$\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^\beta-1}{h} = (\mathrm{id}^\beta_{\mathbb{R}^+})'(1) = \beta.)$$

Állítás *(**Raabe-kritérium**) Legyen $a:\mathbb{N}\to\mathbb{K}^N\setminus\{\mathbf{0}\}$ sorozat.*

(1) Ha $\liminf\limits_n n\left(\dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}-1\right)>1$, akkor a $\sum a$ sor abszolút konvergens.

(2) Ha $\limsup\limits_n n\left(\dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}-1\right)<1$, akkor a $\sum |a|$ sor divergens.

Bizonyítás (1) Létezik $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ úgy, hogy

$$\liminf_n n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}-1\right) > \alpha > \beta > 1.$$

A 12.3. állítás szerint ekkor van olyan $n_0\in\mathbb{N}$, hogy minden $n\ge n_0$ esetén

$$n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}-1\right) > \alpha, \quad \text{azaz} \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{-1}.$$

Alkalmazzuk az állítás előtt közölt tényt az $x_n := \dfrac{1}{n}$ sorozatra:

$$\lim_n n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta -1\right) = \beta < \alpha,$$

tehát létezik $m \geq n_0$ természetes szám úgy, hogy minden $n \geq m$ esetén

$$n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\beta}-1\right) < \alpha \quad \text{azaz} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\beta} < 1+\frac{\alpha}{n}.$$

Ezért, ha $n \geq m$, akkor

$$\frac{|a_{n+1}|(n+1)^{\beta}}{|a_n|n^{\beta}} < \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\beta}}{1+\frac{\alpha}{n}} < 1,$$

következésképpen

$$|a_n| < \frac{|a_m|m^{\beta}}{n^{\beta}}.$$

$\beta>1$ miatt $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^{\beta}}$ konvergens, így az összehasonlító kritérium alapján $\sum a$ abszolút konvergens.

(2) Létezik $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$$\limsup_{n} n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}-1\right) < \alpha < \beta < 1.$$

Az (1) bizonyításához hasonlóan belátható, van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy minden $n>m$ esetén

$$|a_n| > \frac{|a_m|m^{\beta}}{n^{\beta}}.$$

$\beta<1$ miatt a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^{\beta}}$ sor divergens, így az összehasonlító kritérium alapján $\sum |a|$ divergens.

Megjegyzés Mivel a $\sum |a|$ sor divergenciájából általában nem következik, hogy $\sum a$ is divergens, a 18.4. állítás második felében szereplő feltételt csak pozitív tagú sorok divergenciájának bizonyítására szokás használni.

A Raabe-kritérium esetenként használható olyan $\sum a$ sor abszolút konvergenciájának eldöntésére, melyre a gyökkritérium használhatatlan $\limsup\limits_{n} \sqrt[n]{|a_n|}=1$ miatt.

18.5. Feladatok

Konvergensek-e az alábbi sorok:

(i) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2}{2^n}$, (ii) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n(i+1)^{-n^2}$, (iii) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$.

19. Abel-kritérium, Leibniz-kritérium

19.1. Fel fogjuk használni a következő tényt, amelyet a könyvünk második részében bizonyítunk be (lásd B.10.11.): ha $B{:}\mathbb{K}^M\times\mathbb{K}^N\to\mathbb{K}^P$ $\mathbb{R}$-bilineáris leképezés, akkor létezik $\beta\geq 0$ szám úgy, hogy minden $x\in\mathbb{K}^M$ és $y\in\mathbb{K}^N$ esetén

$$|B(x,y)|\leq\beta|x|\,|y|.$$

Például
(i) $\mathbb{K}\times\mathbb{K}^N\to\mathbb{K}^N$, $(\alpha,x)\mapsto\alpha x$ olyan $\mathbb{R}$-bilineáris leképezés, amelyre

$$|\alpha x|{=}|\alpha|\,|x|.$$

(ii) $\mathbb{K}^N\times\mathbb{K}^N\to\mathbb{K}$, $(x,y)\mapsto\langle x,y\rangle$ olyan $\mathbb{R}$-bilineáris leképezés, amelyre

$$|\langle x,y\rangle|{\leq}|x|\,|y|.$$

19.2. Definíció *A* $b{:}\mathbb{N}\to\mathbb{K}^N$ *sorozat* **korlátos változású**, *ha a* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}(b_n-b_{n+1})$ *sor abszolút konvergens.*

Állítás *(1) Korlátos változású sorozat konvergens.*
(2) Valós értékű monoton sorozat pontosan akkor korlátos változású, ha korlátos (tehát konvergens).

Bizonyítás (1) Ha $b{:}\mathbb{N}\to\mathbb{K}^N$ korlátos változású, akkor $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}(b_n-b_{n+1})$ konvergens, és minden n-re

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-b_{k+1})=b_1-b_{n+1},$$

tehát b konvergens.

(2) Az (1) pont szerint elég azt megmutatnunk, hogy monoton korlátos sorozat korlátos változású. Legyen b monoton csökkenő. Ekkor

$$\sum_{k=1}^{n}|b_k-b_{k+1}|=\sum_{k=1}^{n}(b_k-b_{k+1})=b_1-b_{n+1},$$

következésképpen $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}|b_n-b_{n+1}|{=}b_1-\lim b$, tehát b korlátos változású. Egy előjeltől eltekintve ugyanígy érvelhetünk monoton növő sorozatra is.

19.3. Állítás *(**Abel-kritérium**) Legyenek $a:\mathbb{N}\to\mathbb{K}^M$ és $b:\mathbb{N}\to\mathbb{K}^N$ olyan sorozatok, hogy*

(1) $\sum a$ korlátos;
(2) b korlátos változású;
(3) $\lim b=0$.

Ekkor minden $B:\mathbb{K}^M\times\mathbb{K}^N\to\mathbb{K}^P$ $\mathbb{R}$-bilineáris leképezés esetén a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} B(a_n,b_n)$ sor konvergens.

Bizonyítás Vezessük be az $A := \sum a$ jelölést; a feltételeink szerint

$$M:=\sup_{n\in\mathbb{N}}|A_n| < +\infty.$$

Legyen β olyan szám, amelyről a 19.1. pontban beszéltünk.

Ha $m,n\in\mathbb{N}$ olyan, hogy $m<n$, akkor

$$\begin{aligned}\sum_{k=m+1}^{n} B(a_k,b_k) = \sum_{k=m+1}^{n} B(A_k,b_k) - \sum_{k=m+1}^{n} B(A_{k-1},b_k) &= \\ = \sum_{k=m+1}^{n} B(A_k,b_k) - \sum_{k=m}^{n-1} B(A_k,b_{k+1}) &= \\ = \sum_{k=m+1}^{n} B(A_k,b_k-b_{k+1}) + B(A_n,b_{n+1}) - B(A_m,b_{m+1}),\end{aligned}$$

következésképpen

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=m+1}^{n} B(a_k,b_k)\right| \le \sum_{k=m+1}^{n} \beta|A_k|\,|b_k-b_{k+1}| + \beta|A_n|\,|b_{n+1}| + \beta|A_m|\,|b_{m+1}| \le \\ \le\beta M\left(\sum_{k=m+1}^{n} |b_k-b_{k+1}| + |b_{n+1}| + |b_{m+1}|\right).\end{aligned}$$

A (2) és (3) feltételek szerint a jobb oldal mindhárom tagja nullához tart $m,n\to\infty$ esetén, így a Cauchy-kritérium szerint a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} B(a_n,b_n)$ sor konvergens $\mathbb{K}^P$-ben.

19.4. Állítás *(**Leibniz-kritérium**) Legyen $b:\mathbb{N}\to\mathbb{R}_0^+$ monoton csökkenő sorozat. A $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n b_n$ sor pontosan akkor konvergens, ha $\lim b=0$.*

Bizonyítás Ha a szóbanforgó sor konvergens, akkor az alapvető konvergencia-kritérium szerint $\lim b = 0$.

Ha $\lim b=0$, akkor b korlátos változású a 19.2. szerint.

Továbbá

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = \begin{cases} -1 & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ 0 & \text{ha } n \text{ páros,} \end{cases}$$

tehát a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n$ sor korlátos.

Mivel az $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ szorzás $\mathbb{R}$-bilineáris leképezés, az Abel-kritérium alapján a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n b_n$ sor konvergens. ■

A legegyszerűbb Leibniz-sor $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\dfrac{(-1)^n}{n}$ jó példát szolgáltat feltételesen konvergens sorra.

20. Kettős indexű sorok

20.1. Definíció *Legyen a:$\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{K}^N$ kettős indexű sorozat. Ekkor a*

$$\sum a : \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{K}^N, (m,n)\mapsto \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}$$

kettős indexű sorozatot az a-hoz rendelt ***kettős indexű sornak*** *nevezzük, és használjuk rá a $\sum\limits_{m,n\in\mathbb{N}} a_{mn}$ jelölést is. Az a kettős indexű sorozat* ***összegezhető****, ha $\sum a$ konvergens, és ekkor a*

$$\sum_{m,n\in\mathbb{N}} a_{mn} := \sum a := \lim_{m,n}\left(\sum a\right)_{mn}$$

$\mathbb{K}^N$-beli elemet a $\sum a$ kettős indexű sor ***összegé****nek nevezzük.*

Ahelyett, hogy a összegezhető, azt is mondjuk, hogy létezik a $\sum a$ összeg.

$\sum a$ ***abszolút konvergens****, ha a $\sum |a|$ kettős indexű sor konvergens.*

Értelemszerűen érvényben marad a ketős indexű sorokra az alapvető konvergiencia-kritérium (csak nulla-sorozatból készíthető konvergens sor), a majoráns kritérium, és az, hogy abszolút konvergens kettős indexű sor konvergens.

20.2. Legyen a:$\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{K}^N$ kettős indexű sorozat. Ha rögzített $m\in\mathbb{N}$ esetén az $\mathbb{N}\to\mathbb{K}^N$, $n\mapsto a_{mn}$ sorozat összegezhető, akkor jelölje ennek összegét $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_{mn}$.

Ha minden $m{\in}\mathbb{N}$ esetén létezik $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_{mn}$, és az

$$\mathbb{N}{\to}\mathbb{K}^N, \quad m{\mapsto}\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{mn}$$

sorozat összegezhető, jelölje ennek összegét

$$\sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{mn} \in \mathbb{K}^N.$$

Hasonló módon értelmezhető

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{mn} \in \mathbb{K}^N.$$

Felmerül a kérdés, van-e összefüggés a $\sum a$ sor konvergenciája ezen (úgynevezett sorrendi) összegek létezése között. Erre egy részleges választ ad a 14.2. állítás a $\sum a$ kettős indexű sorozatra alkalmazva:
Ha létezik $\sum\limits_{m,n\in\mathbb{N}} a_{mn}$, és minden $m{\in}\mathbb{N}$ esetén létezik $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_{mn}$, akkor az

$$\mathbb{N}{\to}\mathbb{K}^N, \quad m{\mapsto}\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{mn}$$

sorozat összegezhető, és

$$\sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{mn} = \sum_{m,n\in\mathbb{N}} a_{mn}.$$

Azonban ennél több is mondható az abszolút konvergencia segítségével.

Állítás *Legyen $a{:}\mathbb{N}{\times}\mathbb{N}{\to}\mathbb{K}^N$ kettős indexű sorozat. $\sum\limits_{m,n\in\mathbb{N}} |a_{mn}|$ pontosan akkor létezik, ha létezik a $\sum\limits_{m\in\mathbb{N}}\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_{mn}|$ vagy a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\sum\limits_{m\in\mathbb{N}} |a_{mn}|$ sorrendi összeg, továbbá ekkor a $\sum\limits_{m,n\in\mathbb{N}} a_{mn}$ sor konvergens, és*

$$\sum_{m,n\in\mathbb{N}} a_{mn} = \sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{mn} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{mn}. \qquad (*)$$

Bizonyítás Mivel a $\sum\limits_{m,n\in\mathbb{N}} |a_{mn}|$ kettős indexű sorozat monoton növő, az állításban megfogalmazott ekvivalencia a 14.4. állítás következménye.

Ha létezik a $\sum\limits_{m\in\mathbb{N}}\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}|a_{mn}|$ sorrendi összeg, akkor a 17.1. állítás kétszeri alkalmazásával kapjuk, hogy létezik $\sum\limits_{m\in\mathbb{N}}\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}a_{mn}$ is.

Ha létezik $\sum\limits_{m,n\in\mathbb{N}}|a_{mn}|$, akkor $\sum\limits_{m,n\in\mathbb{N}}a_{mn}$ is létezik. Ezért a 14.2. állítás szerint fennáll a $(*)$ egyenlőség.

20.3. Feladatok

1. Véges sok konvergens sorozat összege is; ezért egy véges és végtelen összegzés – ha ez utóbbi értelmes – sorrendje mindig felcserélhető, azaz ha $N\in\mathbb{N}$, és minden $n=1,\ldots,N$ esetén létezik $\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{mn}$, akkor

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{\infty}a_{mn}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{N}a_{mn}.$$

21. Sorok szorzata

21.1. Legyenek $a,b:\mathbb{N}\to\mathbb{K}$ sorozatok. Ekkor a 14.6.3. feladat jelölésével

$$\left(\boldsymbol{\sum} a\right)\otimes\left(\boldsymbol{\sum} b\right)=\boldsymbol{\sum}(a\otimes b),$$

ugyanis minden $m,n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\left[\left(\boldsymbol{\sum} a\right)\otimes\left(\boldsymbol{\sum} b\right)\right]_{mn}=\left(\boldsymbol{\sum} a\right)_m\left(\boldsymbol{\sum} b\right)_n=\left(\sum_{j=1}^{m}a_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)=$$
$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_jb_k=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(a\otimes b)_{jk}=\left[\boldsymbol{\sum}(a\otimes b)\right]_{mn}.$$

Következésképpen (14.6.3.feladat), ha $\boldsymbol{\sum} a$ és $\boldsymbol{\sum} b$ konvergensek, akkor a $\boldsymbol{\sum}(a\otimes b)$ kettős indexű sor konvergens, és

$$\sum(a\otimes b)=\left(\sum a\right)\left(\sum b\right).$$

21.2. Legyenek $a,b:\mathbb{N}_0\to\mathbb{K}$ sorozatok. Ekkor

$$\left(\boldsymbol{\sum} a\right)\left(\boldsymbol{\sum} b\right)=\left(\boldsymbol{\sum}(a\otimes b)\right)\circ(\mathrm{id}_{\mathbb{N}},\mathrm{id}_{\mathbb{N}}),$$

azaz $\left(\sum a\right)\left(\sum b\right)$ egyindexes részsorozata $\sum(a\otimes b)$-nek; szokás ezt a sorozatot a $\sum a$ és $\sum b$ sorok **téglányszorzatának** nevezni. Az elnevezést a következő szemléltetés sugallja. Rendezzük $a\otimes b$ tagjait az alábbi sémába:

$$\begin{matrix} a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & a_0b_3 & \dots \\ a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots \\ a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots \\ a_3b_0 & a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix} \tag{$*$}$$

A szóban forgó egy indexes részsorozat n-edik tagja $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_jb_k$, amit úgy kapunk, hogy e séma bal felső $n\times n$-es négyzetében lévő számokat összegezzük.

Ha $\sum a$ és $\sum b$ konvergensek, akkor a 7.2. állítás szerint a $\left(\sum a\right)\left(\sum b\right)$ sorozat konvergens határértéke $\left(\sum a\right)\left(\sum b\right)$.

21.3. Definíció *Legyenek $a,b:\mathbb{N}_0\to\mathbb{K}$ sorozatok. Az*

$$a*b\ :\ \mathbb{N}_0\to\mathbb{K},\quad n\mapsto\sum_{j=0}^{n}a_jb_{n-j}$$

*sorozatot az a és b sorozatok **konvolúciójának**, a $\sum a*b$ sort pedig a $\sum a$ és $\sum b$ sorok **Cauchy-szorzatának** nevezzük.*

Az előbbi $(*)$ szemléltetésben a Cauchy-szorzat n-edik részletösszege a bal felső $n\times n$-es háromszögben levő számok összege.

Állítás *Ha $a,b:\mathbb{N}_0\to\mathbb{K}$ olyan sorozatok, hogy a $\sum a$ és $\sum b$ sorok abszolút konvergensek, akkor a $\sum a*b$ sor is abszolút konvergens, és*

$$\sum a*b=\left(\sum a\right)\left(\sum b\right)\ . \tag{$*$}$$

Bizonyítás Legyen $\alpha:=\sum|a|$ és $\beta:=\sum|b|$. Minden $m\in\mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=0}^{m}|(a*b)_k|=\sum_{k=0}^{m}\left|\sum_{j=0}^{k}a_jb_{k-j}\right|\le\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k}|a_j|\,|b_{k-j}|\le\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{m}|a_j|\,|b_k|\le\alpha\beta,$$

következésképpen $\sum(a*b)$ abszolút konvergens.

Legyen $\varepsilon>0$. Ekkor létezik $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $m\ge n_\varepsilon$ esetén

$$\sum_{j=m+1}^{2m}|a_j|<\varepsilon\quad\text{és}\quad\sum_{j=m+1}^{2m}|b_j|<\varepsilon.$$

Ha $m \geq n_\varepsilon$, akkor

$$\left|\sum_{k=0}^{2m}(a*b)_k - \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m} a_j b_k\right| \leq \sum_{j=m+1}^{2m}\sum_{k=0}^{2m}|a_j|\,|b_k| + \sum_{j=0}^{2m}\sum_{k=m+1}^{2m}|a_j|\,|b_k| \leq$$
$$\leq \sum_{j=m+1}^{2m}|a_j|\beta + \sum_{k=m+1}^{2m}|b_k|\alpha < (\alpha+\beta)\varepsilon.$$

Következésképpen, a 21.2. szerint

$$\lim_m \sum_{k=0}^{2m}(a*b)_k = \lim_m \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m} a_j b_k = \lim_m \left(\sum_{j=0}^{m} a_j\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_k\right) =$$
$$= \left(\sum a\right)\left(\sum b\right).$$

A $\sum(a*b)$ sor abszolút konvergens, így konvergens, tehát határértéke megegyezik a $m \mapsto \sum\limits_{k=0}^{2m}(a*b)_k$ részsorozatának a hatértékével, ezért fennáll a $(*)$ egyenlőség.

21.4. Bizonyítás nélkül megemlítjük a következőket. Legyenek $a, b: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{K}$ sorozatok.

(1) Ha $\sum a$ és $\sum b$ konvergensek, és közülük legalább az egyik abszolút konvergens, akkor $\sum(a*b)$ konvergens, és

$$\sum(a*b) = \left(\sum a\right)\left(\sum b\right).$$

(2) Ha $\sum a$, $\sum b$ és $\sum(a*b)$ konvergensek, akkor

$$\sum(a*b) = \left(\sum a\right)\left(\sum b\right).$$

22. Tizedestörtek. A Cantor-féle halmaz

22.1. Elemi ismereteink közé tartozik, hogy a valós számok törtrészét (végtelen) tizedestört formájában is magadhatjuk. Most azt tárgyaljuk, mit is jelent ez pontosan.

Jelölje T_{10} az $a: \mathbb{N} \to \{0, 1, \ldots, 9\}$ sorozatok összességét.

Ha $a \in T_{10}$, akkor akkor létezik $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{a_n}{10^n}$, hiszen ezt a sort a $\dfrac{9}{10}$ hányadosú geometriai sor majorálja. Ezért azt is tudjuk, hogy az összeg a $[0, 1]$ intervallum eleme. A nullát akkor kapjuk, ha $a_n = 0$ minden n-re, az egyet akkor, ha $a_n = 9$ minden n-re. Egy tizedestört nem más, mint egy ilyen összeg, amit a

$$0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{10^n}$$

jelöléssel tükrözhetünk; ekkor az n számot az a_n helyiértékének szokás nevezni.

1. Állítás *A* $t_{10}{:}T_{10} \to [0,1]$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$ *leképezés szürjektiv.*

Bizonyítás . Legyen $x\in[0,1]$. Zárjuk ki az $x=1$ triviális esetet. Osszuk föl a $[0,1[$ intervallumot 10 egyenlő részre; az x benne lesz az egyikben. Pontosaban: létezik (egyértelműen) egy $0 \le a_1 \le 9$ természetes szám úgy, hogy

$$x \in \left[\frac{a_1}{10}, \frac{a_1+1}{10}\right[.$$

Ezt az intervallumot is tíz egyenlő részre osztva, megismételhetjük, amit az előbb mondtunk, azaz létezik (egyértelműen) egy $0 \le a_2 \le 9$ természetes szám úgy, hogy

$$x \in \left[\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100}, \frac{a_1}{10} + \frac{a_2+1}{100}\right[.$$

Tovább folytatva ezt a rekurzív eljárást, minden n-re megadunk egy a_n természetes számot, és

$$\left| x - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} \right| \le \frac{1}{10^n},$$

azaz

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{10^n}.$$

2. Állítás *t_{10} nem injektív; $a \ne b$ esetén $t_{10}(a) = t_{10}(b)$ pontosan akkor, ha létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy*

(1) $a_n = b_n$ ha $n < n_0$,
(2) $a_{n_0} = b_{n_0} + 1$,
(3) $a_n = 0$ és $b_n = 9$ ha $n > n_0$,

vagy természetesen ugyanez áll az a és b szerepének a felcserélésével.

Bizonyítás Mivel $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} \dfrac{9}{10^n} = \dfrac{1}{10^{n_0}}$, ha a sorozatokra teljesülnek a fenti feltételek, akkor $t_{10}(a) = t_{10}(b)$.

Tegyük most föl, hogy $t_{10}(a)=t_{10}(b)$. Mivel a két sorozat nem egyenlő, van olyan legkisebb n_0, hogy (1) teljesül, de $a_{n_0}\neq b_{n_0}$. Könnyű látni, hogy ha e két tag között a különbség nem egy, akkor $t_{10}(a)=t_{10}(b)$ nem állhat fönn. Ha a különbség egy, mondjuk (2) teljesül, akkor viszont a b sorozat n_0-nál nagyobb helyiértékű tagjai szükségszerűen minden 9-esek, viszont ekkor az a sorozat további tagjai pedig csak nullák lehetnek hogy $t_{10}(a)=t_{10}(b)$ teljesüljön.

22.2. Teljesen hasonlóan, a $[0,1]$ elemeit előállíthatjuk bármely egynél nagyobb természetes szám reciprokának hatványai szerinti törtek formájában is.

A harmados törtek $\frac{1}{3}$ hatványait használják. Pontosan ezeket így írhatjuk le.

Jelölje T_3 az $a{:}\mathbb{N} \to \{0,1,2\}$ sorozatok összességét.

Ha $a \in T_3$, akkor akkor létezik az

$$0, a_1a_2a_3 \dots a_n \dots := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{3^n}$$

összeg.

Ugyanúgy, mint az előbb, a $t_3 : T_3 \to [0,1]$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto 0, a_1a_2a_3 \dots a_n \dots$ leképezés szürjektív de nem injektív; $a\neq b$ esetén $t_2(a)=t_2(b)$ pontosan akkor, ha létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy

(1) $a_n=b_n$ ha $n < n_0$,

(2) $a_{n_0}=b_{n_0} + 1$,

(3) $a_n=0$ és $b_n=2$ ha $n > n_0$,

vagy fordítva az a és b felcserélésével.

A bináris törteket úgy kapjuk, hogy az $a{:}\mathbb{N} \to \{0,1\}$ sorozatok összességéből indulunk ki, amelyet T_2-vel jelölünk.

Ha $a \in T_2$, akkor akkor létezik az

$$0, a_1a_2a_3 \dots a_n \dots := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{2^n}$$

összeg.

Ugyanúgy, mint az előbb, a $t_2 : T_2 \to [0,1]$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto 0, a_1a_2a_3 \dots a_n \dots$ leképezés szürjektív de nem injektív; $a\neq b$ esetén $t_2(a)=t_2(b)$ pontosan akkor, ha létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy

(1) $a_n=b_n$ ha $n < n_0$ (tehát $a_n=b_n=0$),

(2) $a_{n_0}=b_{n_0} + 1$ (tehát $a_{n_0}=1, b_{n_0}=0$),

(3) $a_n=0$ és $b_n=1$ ha $n\geq n_0$,

vagy fordítva, az a és b felcserélésével.

22.3. Harmadoljuk el a $[0,1]$ intervallumot, és távolítsuk el a középső nyílt részt; a maradék tehát

$$C_1 := \left[0, \frac{1}{3}\right] \uplus \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Harmadoljuk el a C_1 mindkét részintervallumát, és távolítsuk el a középső nyílt részeket; a maradék tehát

$$C_2 := \left[0, \frac{1}{9}\right] \uplus \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \uplus \left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3} + \frac{1}{9}\right] \uplus \left[\frac{2}{3} + \frac{2}{9}, 1\right].$$

Harmadoljuk el a C_2-nek mind a négy részintervallumát, távolítsuk el a középső nyílt részeket; a maradék, C_3 tehát nyolc diszjunkt zárt intervallum uniója, mindegyik hossza $\frac{1}{27}$.

Folytatva ezt az eljárást, minden n természetes számra megadhatunk egy C_n halmazt, amely 2^n darab olyan diszjunkt zárt intervallumból áll, amelyek hossza $\frac{1}{3^n}$, és $C_{n+1} \subset C_n$.

A

$$C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

halmazt **Cantor-féle halmaznak** nevezzük.

Mivel $C_n \neq \emptyset$ és kompakt minden n-re, a 3.7. állítás utáni megjegyzések értelmében $C \neq \emptyset$ kompakt halmaz.

22.4. Használjuk a $[0, 1]$ intervallum elemeinek harmadostört alakban való előállítását. Ekkor

$$0 = 0,00000\ldots, \qquad 1 = 0,22222\ldots,$$

$$\frac{1}{3} = 0,10000\cdots = 0,02222\ldots, \qquad \frac{2}{3} = 0,20000\ldots,$$

$$\frac{1}{9} = 0,01000\cdots = 0,00222\ldots, \qquad \frac{2}{9} = 0,02000\ldots,$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{9} = 0,20222\ldots, \qquad \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = 0,22000\ldots.$$

Ennek mintájára nem nehéz belátni, hogy minden n-re a C_n-et alkotó diszjunkt intervallumok végpontjainak van olyan haramdostört alakja, amelyben az 1 nem szerepel. Közelebbről, egy ilyen intervallum

alsó végpontja $0, a_1 a_2 \ldots a_{n-1} 02222\ldots$,

felső végpontja $0, a_1 a_2 \ldots a_{n-1} 20000\ldots$,

ahol $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in \{0, 2\}$.

Az is egyszerű tény, hogy egy olyan szám, amelynek harmadostört alakjában az 1 nem szerepel, és egy helyiértéktől kezdve csupa 0 vagy csupa 2 áll, valamely C_n egy intervallumának a végpontja.

Állítás

$$C = \left\{ x \in [0,1] \;\middle|\; x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{3^n}, a_n \in \{0,2\}, n\in\mathbb{N} \right\}.$$

Bizonyítás Jelölje Z a fenti egyenlőség jobb oldalán álló halmazt és ∂C_n a C_n határpontjait. Megmutatjuk, hogy

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \partial C_n} = Z.$$

Ha x egy $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \partial C_n$-beli sorozat határértéke, akkor minden k természetes számhoz – az $\frac{1}{3^k}$ küszöbhöz – létezik olyan n_k, hogy a sorozat n_k-ik tagja már $\frac{1}{3^k}$-nál közelebb van x hez, tehát x-nek az n_k-nál kisebb helyiértékű számjegyei 0 vagy 2. Ebből adódik, hogy $x \in Z$, azaz $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \partial C_n} \subset Z$. Ha viszont $x{=}0,a_1a_2a_3\dots a_na_{n+1}a_{n+2}\dots$ a Z eleme, akkor az $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \partial C_n$ halmazban fut és x a határértéke annak a sorozatnak, amelynek n-ik tagja $0,a_1a_2a_3\dots a_n000\dots$, azaz $Z \subset \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \partial C_n}$.

Most megmutatjuk, hogy Z maga a Cantor-halmaz. A Cantor halmaz tartalmazza a C_n-ek határpontjait, és lévén zárt, világos, hogy $C \supset \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \partial C_n}{=}Z$.

Ha viszont $x{\in}C$, akkor $x{\in}C_n$ minden n-re, ami azt jelenti, akárhogy is válaszszunk egy n-et, x benne van egy olyan intervallumban, amelynek végpontjait az előbb jellemeztük, tehát x-nek az n-nél kisebb helyiértékű számjegyei 0 vagy 2. Mivel ez minden n-re igaz, $x{\in}Z$.

22.5. **Állítás** *A Cantor-halmaz kompakt, kontinuum számosságú, a belseje üres.*

Bizonyítás Azt már mondtuk 22.3. végén, hogy C kompakt, csak azért szerepel itt újra, hogy egy állításban foglaljuk össze a legfontosabb tulajdonságait.

Vegyük a $[0,1]$ elemeinek bináris előállítását (ahol többféle is lehetséges, rögzítsünk egyet akárhogy). Rendeljük hozzá a $0,a_1a_2a_3\dots a_n\dots$ bináris törthöz a $0,b_1b_2b_3\dots b_n\dots b_n\dots$ harmadostörtet, ahol $b_n := a_n$ ha $a_n{=}0$ és $b_n := 2$ ha $a_n{=}1$ ($n{\in}\mathbb{N}$). Ezzel bijekciót létesítettünk $[0,1]$ és C között, tehát a Cantor-halmaz kontinuum számosságú.

Legyen $x \in C$ és vegyük olyan $0,a_1a_2a_3\dots a_n\dots$ harmadostört alakját, amelyben minden számjegy 0 vagy 2. Minden $m{\in}\mathbb{N}$ esetén $0,a_1a_2\dots a_m011000\dots$ olyan szám, amely nem eleme C-nek és x-hez $\frac{1}{3^m}$-nél közelebb van, tehát x nem belső pontja C-nek.

23. Függvénysorozatok, függvénysorok

23.1. Most függvénysorozatokkal fogunk foglalkozni, vagyis olyan sorozatokkal, amelyeknek a tagjai függvények. Pontosabban: legyen X nemüres halmaz, és jelölje a szokásos módon $\left(\mathbb{K}^N\right)^X$ az $X{\to}\mathbb{K}^N$ függvények halmazát. Egy $\mathbb{N}{\to}\left(\mathbb{K}^N\right)^X$ leképezést $\mathbb{K}^N$-beli **függvénysorozatnak** nevezünk, és ilyeneket tárgyalunk.

Definíció *Az $f_n{:}X\to\mathbb{K}^N$ $(n{\in}\mathbb{N})$ függvénysorozat* ***konvergenciahalmaza***

$$\left\{x{\in}X \mid (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \textit{ konvergens } \mathbb{K}^N\textit{-ben}\right\}.$$

Azt mondjuk, hogy a függvénysorozat ***pontonként konvergens*** *a $H{\subset}X$ halmazon, ha H része a konvergenciahalmaznak, és ekkor a függvénysorozat H halmazon* ***pontonként konvergál ('tart')*** *az*

$$f{:}H\to\mathbb{K}^N,\quad x\mapsto\lim_n f_n(x)$$

függvényhez.

Megjegyzés A definíció szerint a függvénysorozat akkor és csak akkor konvergál pontonként f-hez a H halmazon, ha minden $x{\in}H$ esetén

$$\lim_n d(f_n(x),f(x))=0.$$

23.2. Definíció *Az $f_n{:}X\to\mathbb{K}^N$ $(n{\in}\mathbb{N})$ függvénysorozat a $H{\subset}X$ halmazon* ***egyenletesen konvergál*** *az $f{:}H\to\mathbb{K}^N$ függvényhez, ha*

$$\lim_n\left(\sup_{x\in H} d(f_n(x),f(x))\right)=0.$$

Megjegyzések (i) Nyilvánvaló, hogy ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $H{\subset}X$ halmazon egyenletesen konvergál az f függvényhez, akkor H-n pontonként is konvergál f-hez.

(ii) Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor konvergál egyenletesen a H halmazon az f függvényhez, ha minden $\varepsilon{>}0$ esetén létezik $n_\varepsilon{\in}\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n{\geq}n_\varepsilon$ természetes számra

$$\sup_{x\in H} d(f_n(x),f(x))\leq\varepsilon,$$

azaz minden $x{\in}H$ esetén $d(f_n(x),f(x)){\leq}\varepsilon$.

(iii) A definíció szerint nyilvánvaló, hogy ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $H{\subset}X$ halmazon, akkor egyenletesen konvergens H minden részhalmazán.

Az is egyszerű tény, hogy ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $H_1,\dots,H_m$ részhalmazokon, akkor egyenletesen konvergens az $\bigcup_{i=1}^{m} H_i$ halmazon is: minden $i = 1,\dots,m$ és ε esetén van n^i_ε küszöbindex az (ii) szerint, és $n_\varepsilon := \max\{n^1_\varepsilon,\dots,n^m_\varepsilon\}$ megfelelő küszöbindex a halmazok uniójára.

(iv) A pontonkénti és az egyenletes konvergencia különbségének a jobb megértése érdekében részletesen kifejtjük, mit jelent az egyik, mit a másik.

Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat

• pontonként tart a H halmazon az f függvényhez, ha minden $x\in H$ és minden $\varepsilon>0$ esetén létezik $n_{x,\varepsilon}\in\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n\geq n_{x,\varepsilon}$ természetes számra $d(f_n(x), f(x))<\varepsilon$;

• egyenletesen tart a H halmazon az f függvényhez, ha minden $\varepsilon>0$ esetén létezik $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n\geq n_\varepsilon$ természetes számra és a H minden x elemére $d(f_n(x), f(x))<\varepsilon$.

23.3. Állítás *(**Az egyenletes konvergencia Cauchy-kritériuma**) Az $f_n{:}X \to \mathbb{K}^N$ $(n\in\mathbb{N})$ függvénysorozat pontosan akkor konvergens egyenletesen a $H\subset X$ halmazon, ha minden $\varepsilon>0$ esetén létezik $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $m, n\geq n_\varepsilon$ természetes számra*

$$\sup_{x\in H} d(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon. \tag{$*$}$$

Bizonyítás Ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergál H-n az f függvényhez, akkor minden $m, n\in\mathbb{N}$ esetén a háromszög egyenlőtlenség miatt

$$\sup_{x\in H} d(f_m(x), f_n(x)) \leq \sup_{x\in H} d(f_m(x), f(x)) + \sup_{x\in H} d(f_n(x), f(x))$$

így teljesül a $(*)$ feltétel.

Ha teljesül a $(*)$ feltétel, akkor minden $x\in H$ esetén $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat $\mathbb{K}^N$-ben, így a Cauchy-kritérium szerint létezik

$$f(x) := \lim_n f_n(x).$$

A $(*)$ összefüggésből a H minden x elemére és minden $n\geq n_\varepsilon$ természetes számra

$$d(f(x), f_n(x)) = \lim_m d(f_m(x), f_n(x)) \leq \varepsilon,$$

azaz

$$\sup_{x\in H} d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon,$$

tehát az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat H-n egyenletesen konvergál f-hez.

23.4. Definíció *Legyen $X \subset \mathbb{K}^M$. Az $f_n{:}X \to \mathbb{K}^N$ $(n{\in}\mathbb{N})$ függvénysorozat* ***lokálisan egyenletesen konvergál*** *a $H \subset X$ halmazon az $f{:}H \to \mathbb{K}^N$ függvényhez, ha minden $x{\in}X$ esetén létezik $r{>}0$ úgy, hogy a függvénysorozat egyenletesen konvergál f-hez a $G_r(x) \cap H$ halmazon.*

Állítás *Legyen $X{\subset}\mathbb{K}^M$. Az $f_n{:}X \to \mathbb{K}^N$ $(n{\in}\mathbb{N})$ függvénysorozat akkor és csak akkor konvergál lokálisan egyenletesen a $H{\subset}X$ nyílt halmazon az f függvényhez, ha minden $K{\subset}H$ kompakt halmaz esetén $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergál f-hez K-n.*

Bizonyítás Mivel H nyílt, minden $x{\in}H$ esetén van olyan $r{>}0$, hogy $\overline{G_r(x)}{\subset}H$. Ha a függvénysorozat a H minden kompakt részhalmazán egyenletesen konvergens, akkor $\overline{G_r(x)}$-en is, tehát $G_r(x)$-en is.

Ha a függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens H-n, akkor a H bármely K kompakt részhalmazát lefedik az elemeinek azok a környezetei, amelyeken a függvénysorozat egyenletesen konvergens; tehát véges sok ilyen környezet is lefedi. Ennek a véges sok környezetnek az unióján is egyenletesen konvergens a függvénysorozat, ezért az unió részén, a K kompakt halmazon is.

23.5. Definíció *Legyen X nemüres halmaz, $f_n{:}X \to \mathbb{K}^N$ $(n{\in}\mathbb{N})$ függvénysorozat. A függvénysorozathoz rendelt* ***függvénysor*** *az a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ függvénysorozat, amelynek n-ik tagja $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k$.*

A $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ függvénysor ***pontonként abszolút konvergens****, ha minden $x{\in}X$ esetén a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ sor abszolút konvergens $\mathbb{K}^N$-ben.*

Állítás *(**Weierstrass-kritérium**) Legyen $f_n{:}X \to \mathbb{K}^N$ $(n{\in}\mathbb{N})$ függvényorozat és H az X részhalmaza. Ha minden $n{\in}\mathbb{N}$ esetén*

$$c_n := \sup_{x\in H} |f_n(x)| < \infty,$$

és a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n$ sor konvergens, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ függvénysor pontonként abszolút konvergens és egyenletesen konvergens a H halmazon.

Bizonyítás $m < n$ és $x{\in}H$ esetén

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| \le \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \le \sum_{k=m+1}^{n} c_k.$$

A második egyenlőtlenség szerint $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ pontonként abszolút konvergens H-n, az első egyenlőtlenség és a Cauchy-kritérium szerint egyenletesen konvergens H-n.

Megjegyzés Egyenletesen konvergens függvénysor nem szükségképpen pontonként abszolút konvergens.

23.6. Feladatok

1. Mi a konvergenciahalmaza az $(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ és az $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatnak? Mi a határértékfüggvény?

2. Vizsgáljuk meg az $(\mathrm{Exp}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ és az $(\exp^n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatokat konvergencia szempontjából.

3. Mutassuk meg, hogy az (1) és (2) példában szereplő függvénysorozatok a teljes konvergenciahalmazon nem egyenletesen konvergensek, de a konvergenciahalmaz belsején lokálisan egyenletesen konvergensek.

4. Mi a következő függvénysorozatok konvergenciahalmaza és határértékfüggvénye?

(i) $(\chi_{[-n,n]})_{n\in\mathbb{N}}$ (ii) $(n\chi_{[-n,n]})_{n\in\mathbb{N}}$

(iii) $(\chi_{[-1/n,1/n]})_{n\in\mathbb{N}}$ (iv) $(n\chi_{[-1/n,1/n]})_{n\in\mathbb{N}}$

(v)

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x<0, \\ nx & \text{ha } 0\le x\le 1/n, \\ -nx+2 & \text{ha } 1/n\le x\le 2/n, \\ 0 & \text{ha } 2/n<x. \end{cases}$$

Egyenletes-e, lokálisan egyenletes-e a konvergencia a konvergenciahalmazon?

5. Mi a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2}{(1+\mathrm{id}^2)^n}$ függvénysor konvergenciahalmaza és összegfüggvénye?

6. Előlegezzük meg a sin függvény ismeretét. Mutassuk meg, hogy

(i) a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(x \mapsto \sin \frac{x}{n^2}\right)$ függvénysor egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en,

(ii) a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(x \mapsto \sin x^n\right)$ függvénysor lokálisan egyenletesen konvergens $[0,1[$-en.

7. Előlegezzük meg a logaritmusfüggvény ismeretét. A $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(x \mapsto \log(1+x^n)\right)$ függvénysor lokálisan egyenletesen konvergens $\mathbb{R}_0^+$-n.

24. Hatványsorok

24.1. A polinomok igen egyszerű és jó tulajdonságú függvények. Kérdés, milyenek azok a függvények, amelyek polinomsorozat határértékei. Ha p n-ed fokú (valós vagy komplex) polinom, akkor minden $a \in \mathbb{K}$ esetén léteznek egyértelműen meghatározott $c_0, c_1, \ldots, c_n$ számok úgy, hogy $p = \sum_{k=0}^{n} c_k(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - a)^k$. A "végtelen fokú" polinomok a hatványsorok, amelyeket pontosan a következőképp határozunk meg.

Definíció *Legyen* $a{\in}\mathbb{K}$ *és* $c_n \in \mathbb{K}$ $(n{\in}\mathbb{N}_0)$. *A*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\mathrm{id}_{\mathbb{K}}{-}a)^n$$

$\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ *függvénysort* a *középpontú,* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *együtthatórendszerű* ***hatványsornak*** *nevezzük. Az*

$$R := \begin{cases} 0 & \text{ha } \limsup\limits_n \sqrt[n]{|c_n|}{=}{+}\infty\ , \\ +\infty & \text{ha } \limsup\limits_n \sqrt[n]{|c_n|}{=}0\ , \\ \dfrac{1}{\limsup\limits_n \sqrt[n]{|c_n|}} & \text{egyébként} \end{cases}$$

$\overline{\mathbb{R}}_0^+$*-beli elemet a hatványsor* ***konvergenciasugarának*** *hívjuk.*

24.2. $R{\in}\mathbb{R}^+$ esetén a szokásos módon $G_R(a)$ jelöli az a középpontú, R sugarú nyílt gömböt, és legyen

$$G_0(a){:=}\{a\} \quad \text{illetve} \quad G_{+\infty}(a){:=}\mathbb{K}.$$

Állítás *(**Cauchy–Hadamard-tétel**) Az R konvergenciasugarú*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\mathrm{id}_{\mathbb{K}}{-}a)^n$$

hatványsor

(i) pontonként abszolút konvergens a $G_R(a)$ halmazon és divergens a $\left(\overline{G_R(a)}\right)^{\complement}$ halmazon,

(ii) lokálisan egyenletesen konvergens a $G_R(a)$ nyílt halmazon, ha $R \neq 0$.

Bizonyítás (i) A hatványsor nyilván konvergens az a pontban, az értéke c_0. Ha $z{\in}\mathbb{K}$ és $z{\neq}a$, akkor

$$\limsup_n \sqrt[n]{|c_n(z{-}a)^n|} = |z{-}a| \limsup_n \sqrt[n]{|c_n|},$$

így a Cauchy-féle gyökkritérium szerint a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ sor abszolút konvergens, ha $|z-a|<R$, és divergens, ha $|z-a|>R$.

(ii) Ha $0<r<R$, akkor $z\in\mathbb{K}$ és $|z-a|\leq r$ esetén

$$|c_n(z-a)^n| \leq |c_n|r^n,$$

és

$$\limsup_n \sqrt[n]{|c_n|r^n} = r \limsup_n \sqrt[n]{|c_n|} < 1$$

miatt a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n|r^n$ sor konvergens, így a Weierstrass-kritérium szerint a hatványsor egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ zárt gömbön, amiből következik (sőt egyenértékű azzal), hogy a hatványsor lokálisan egyenletesen konvergens $G_R(a)$-n.

24.3. Azonos középpontú hatványsorok összege szintén hatványsor,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\mathrm{id}_{\mathbb{K}}-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n(\mathrm{id}_{\mathbb{K}}-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(c_n + d_n)(\mathrm{id}_{\mathbb{K}}-a)^n,$$

amelynek a konvergenciasugara nem kisebb, mint a két konvergenciasugár közül a kisebb, hiszen konvergens sorok összege konvergens.

Azonos középpontú hatványsorok Cauchy-szorzata szintén hatványsor (itt nyer igazán fontos értelmet a Caucyhy-szorzat),

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\mathrm{id}_{\mathbb{K}}-a)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n(\mathrm{id}_{\mathbb{K}}-a)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} c_j d_{n-j}\right)(\mathrm{id}_{\mathbb{K}}-a)^n,$$

amelynek a konvergenciasugara nem kisebb, mint a két konvergenciasugár közül a kisebb, hiszen abszolút konvergens sorok Cauchy-szorzata abszolút konvergens.

Egy hatványsor reciproka – az alábbi értelemben – szintén hatványsor.

Ha a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(\mathrm{id}_{\mathbb{K}}-a)^n$ hatványsor konvergenciasugara nagyobb nullánál és $c_0 \neq 0$, akkor a hatványsorral előállított függvény nem nulla az a egy környezetében. Ennek a függvénynek a reciprokát a

$$d_0 := \frac{1}{c_0}, \quad d_n := -\frac{1}{c_0}\sum_{k=1}^{n-1} d_i c_{n-i} \tag{$*$}$$

rekurzióval meghatározott $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n(\mathrm{id}_{\mathbb{K}}-a)^n$ hatványsor állítja elő.

Azt ugyanis egyszerű látni, hogy ennek és az eredeti hatványsornak a Cauchy-szorzata a konstans 1 függvényt állítja elő. Csak azt kellene belátni, hogy a $(*)$

együtthatóknak megfelelő konvergenciasugár nem nulla. Erre későbbi tanulmányainkban (lásd Analízis VI.) visszatérünk.

24.4. Mint 24.1-ben mondtuk, tetszőleges $a\in\mathbb{K}$ esetén bármely polinom előállítható $\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - a$ hatványainak lineáris kombinációjaként. Egy kis pontosítással hatványsorokra is igaz ez: egy nem nulla konvergenciasugarú hatványsor összegfüggvényét a konvergenciatartományon belüli körben más középpontú hatványsor összegeként is előállíthatjuk.

Állítás *Legyen $R>0$ a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k(id_{\mathbb{K}}-b)^k$ hatványsor konvergenciasugara. Ha $a\in G_R(b)$, akkor minden $x\in G_{R-|a-b|}(a)$ esetén*

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k(x-b)^k = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n,$$

ahol

$$c_n := \sum_{k=n}^{\infty} d_k \binom{k}{n} (b-a)^{k-n} \qquad (n\in\mathbb{N}_0).$$

Bizonyítás

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k(x-b)^k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k\big((x-a)+(a-b)\big)^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} d_k \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} (x-a)^n (a-b)^{k-n} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} d_k \binom{k}{n} (x-a)^n (a-b)^{k-n},$$

ahol $\binom{k}{n}$:=0, ha $n>k$.

Mivel $|x-a|<R-|a-b|$, azaz $|x-a|+|a-b|<R$, létezik a

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |d_k| \binom{k}{n} |x-a|^n |a-b|^{k-n} = \sum_{k=0}^{\infty} |d_k| \big(|x-a|+|a-b)|\big)^k$$

összeg. A 20.2. állítás szerint az összegzés sorrendje felcserélhető, így

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k(x-b)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} d_k \binom{k}{n} (x-a)^n (a-b)^{k-n} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} d_k \binom{k}{n} (a-b)^{k-n} \right) (x-a)^n.$$

24.5. Feladatok

1. Mi a konvergenciasugara a következő hatványsoroknak?

(i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^n$, (ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(i+n)^n(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}-1)^n$,

(iii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sqrt[n]{n}\,(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}-3)^n$, (iv) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2^n+n)\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^n$.

2. Bizonyítsuk be, hogy $a>0$ esetén a

$$\sqrt{a}+\frac{1}{2\sqrt{a}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}-a)-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-3)!!}{2^n n!}\frac{1}{(\sqrt{a})^{2n-1}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}-a)^n$$

hatványsor konvergenciasugara a , és a hatványsorral előállított függvény értéke a $0<x<2a$ helyen $\sqrt{x}$.

25. Elemi függvények

25.1. Állítás *A következő komplex hatványsorok konvergenciasugara $+\infty$:*

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^n}{n!}$,

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^{2n}}{(2n)!}$, *(3)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^{2n}}{(2n)!}$, *(5)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Bizonyítás Legyen $c_n:=\frac{1}{n!}$ $(n\in\mathbb{N})$. A 18.2. állítás szerint

$$\limsup_n\sqrt[n]{|c_n|}\le\limsup_n\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=\limsup_n\frac{n!}{(n+1)!}=\limsup_n\frac{1}{n+1}=0,$$

következésképpen az (1) hatványsor konvergenciasugara $+\infty$. Hasonló a bizonyítás a (2)-(5) hatványsorok esetén is.

Definíció *Az előző állításban szereplő komplex hatványsorok (egész $\mathbb{C}$-n értelmezett) összegfüggvényét jelölje rendre*

$$\mathrm{Exp}, \quad \mathrm{Cos}, \quad \mathrm{Sin}, \quad \mathrm{Ch}, \quad \mathrm{Sh},$$

*amelyeket rendre **exponenciális, koszinusz, szinusz, koszinusz hiperbolikusz** és **szinusz hiperbolikusz** függvényeknek nevezünk. Legyen továbbá*

$$\exp := \mathrm{Exp}|_{\mathbb{R}}, \quad \cos := \mathrm{Cos}|_{\mathbb{R}}, \quad \sin := \mathrm{Sin}|_{\mathbb{R}}, \quad \mathrm{ch} := \mathrm{Ch}|_{\mathbb{R}}, \quad \mathrm{sh} := \mathrm{Sh}|_{\mathbb{R}}.$$

Mivel az (1)-(5) komplex hatványsorok valós együtthatósak, az utóbbi függvények valós értékűek, és például exp megegyezik a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^n}{n!}$ valós hatványsor összegfüggvényével.

25.2. Állítás *Tetszőleges $u, v \in \mathbb{C}$ esetén*

$$\mathrm{Exp}(u+v) = \mathrm{Exp}(u)\mathrm{Exp}(v) \tag{0}$$

Bizonyítás A binomiális tétel és az abszolút konvergens sorok Cauchy-szorzatára vonatkozó 20.3. állítás szerint

$$\begin{aligned} \mathrm{Exp}(u+v) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(u+v)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} \frac{v^{n-k}}{(n-k)!} \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^n}{n!} \right) = \\ &= \mathrm{Exp}(u)\ \mathrm{Exp}(v). \end{aligned}$$

25.3. Állítás *Minden z komplex számra*

$$\mathrm{Exp}(iz) = \mathrm{Cos}(z) + i\mathrm{Sin}(z), \tag{1}$$

$$\mathrm{Exp}(z) = \mathrm{Ch}(z) + \mathrm{Sh}(z). \tag{2}$$

Bizonyítás

$$\begin{aligned}\mathrm{Cos}(z)+i\mathrm{Sin}(z) &=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}+i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}=\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iz)^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}=\\ &=\mathrm{Exp}(iz),\end{aligned}$$

és hasonlóan látható be (2) is.

25.4. (1) alapján minden $z\in\mathbb{C}$ esetén

$$\mathrm{Exp}(-iz)=\mathrm{Cos}(z)-i\mathrm{Sin}(z),$$

és ebből valamint (1)-ből egyrészt kifejezhető $\mathrm{Cos}(z)$ és $\mathrm{Sin}(z)$:

$$\mathrm{Cos}(z)=\frac{\mathrm{Exp}(iz)+\mathrm{Exp}(-iz)}{2}, \tag{3}$$

$$\mathrm{Sin}(z)=\frac{\mathrm{Exp}(iz)-\mathrm{Exp}(-iz)}{2i}, \tag{4}$$

másrészt, felhasználva (0)-t és az $\mathrm{Exp}(0)=1$ nyilvánvaló tényt, azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{Cos}^2+\mathrm{Sin}^2=1. \tag{5}$$

Hasonlóan, (2)-ből kifejezhetők a Ch és Sh függvények is az Exp függvény segítségével:

$$\mathrm{Ch}(z)=\frac{\mathrm{Exp}(z)+\mathrm{Exp}(-z)}{2}, \tag{6}$$

$$\mathrm{Sh}(z)=\frac{\mathrm{Exp}(z)-\mathrm{Exp}(-z)}{2}, \tag{7}$$

és

$$\mathrm{Ch}^2-\mathrm{Sh}^2=1. \tag{8}$$

25.5. Az (5) formula alapján $x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\mathrm{Exp}(ix)=\cos(x)+i\sin(x)$$

egységnyi abszolút értékű komplex szám, és ha $x,y\in\mathbb{R}$, akkor

$$\mathrm{Exp}(x+iy)=\exp(x)\big(\cos y+i\sin y\big).$$

25.6. A 16.3. szerint

$$\exp(1)=e,$$

így (0) alapján minden $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\exp(n)=e^n,$$

továbbá

$$\left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \exp(1) = e,$$

következésképpen

$$\exp\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{e} = e^{1/n},$$

így ha $r\in\mathbb{Q}$, akkor

$$\exp(r)=e^r.$$

Ezért észszerűnek látszik $z\in\mathbb{C}$ esetén az

$$e^z:=\mathrm{Exp}(z)\in\mathbb{C}$$

meghatározás.

25.7. Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy minden $z\in\mathbb{C}$ esetén
(i) $\mathrm{Ch}(iz)=\mathrm{Cos}(z)$, $\quad\mathrm{Cos}(iz)=\mathrm{Ch}(z)$,
(ii) $\mathrm{Sh}(iz)=i\mathrm{Sin}(z)$, $\quad\mathrm{Sin}(iz)=i\mathrm{Sh}(z)$.

2. A Cos és Ch függvények párosak, a Sin és Sh függvények páratlanok, azaz $\mathrm{Cos}(-z)=\mathrm{Cos}(z)$, $\mathrm{Sin}(-z)=-\mathrm{Sin}(z)$, stb.

3. Igazoljuk, hogy minden $u,v\in\mathbb{C}$ esetén
(i) $\mathrm{Cos}(u+v)=\mathrm{Cos}(u)\mathrm{Cos}(v)-\mathrm{Sin}(u)\mathrm{Sin}(v)$,
(ii) $\mathrm{Sin}(u+v)=\mathrm{Sin}(u)\mathrm{Cos}(v)+\mathrm{Cos}(u)\mathrm{Sin}(v)$,
(iii) $\mathrm{Ch}(u+v)=\mathrm{Ch}(u)\mathrm{Ch}(v)+\mathrm{Sh}(u)\mathrm{Sh}(v)$,
(iv) $\mathrm{Sh}(u+v)=\mathrm{Sh}(u)\mathrm{Ch}(v)+\mathrm{Ch}(u)\mathrm{Sh}(v)$.

4. Az eddigiekből már a függvények sorának ismerete nélkül is levezethető az összes trigonometrikus és hiperbolikus azonosság, mint például

$$\mathrm{Cos}(y)-\mathrm{Cos}(x)=-\,2\mathrm{Sin}\left(\frac{y+x}{2}\right)\mathrm{Sin}\left(\frac{y-x}{2}\right).$$

Számoljunk ki még néhány ilyen összefüggést!

IV. FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK

26. Függvények határértéke

26.1. Definíció *Legyen $a \in \mathbb{K}^M$ az $f: \mathbb{K}^M \rightarrowtail \mathbb{K}^N$ függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy $b \in \mathbb{K}^N$ a* ***határértéke f-nek az a pontban****, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta_\varepsilon > 0$ úgy, hogy minden $a \neq x \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén, melyre $0 < d(x,a) < \delta_\varepsilon$ teljesül, $d(f(x), b) < \varepsilon$ áll fenn, vagy másképpen ugyanez,*

$$f[G_{\delta_\varepsilon}(a) \setminus \{a\}] \subset G_\varepsilon(b).$$

Lássunk két egyszerű példát.

(1) $\mathrm{id}_{\mathbb{K}}$ értelmezési tartománynak minden pontja torlódási pont, a függvénynek minden pontban van határértéke, és az megegyezik a függvényértékkel.

(2) A $\mathrm{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek a 0-ban nincs határértéke, minden más pontban van, és megegyezik a függvényértékkel.

26.2. Állítás *(**Átviteli elv**) Legyen a az $f: \mathbb{K}^M \rightarrowtail \mathbb{K}^N$ függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. $b \in \mathbb{K}^N$ pontosan akkor határértéke f-nek az a pontban, ha minden olyan $x: \mathbb{N} \to \mathrm{Dom}(f) \setminus \{a\}$ sorozat esetén, melyre $\lim\limits_n x_n = a$ teljesül, $\lim\limits_n f(x_n) = b$ áll fenn.*

Bizonyítás Legyen b az f határértéke az a pontban és $x: \mathbb{N} \to \mathrm{Dom}(f) \setminus \{a\}$ olyan sorozat, hogy $\lim\limits_n x_n = a$. Minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta_\varepsilon > 0$ úgy, hogy

$$f[G_{\delta_\varepsilon}(a) \setminus \{a\}] \subset G_\varepsilon(b).$$

Továbbá, $\lim\limits_n x_n = a$ miatt létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy

$$\{x_n \mid n \geq n_\varepsilon\} \subset G_{\delta_\varepsilon}(a).$$

Ekkor

$$\{f(x_n) \mid n \geq n_\varepsilon\} \subset G_\varepsilon(b),$$

következésképpen $\lim\limits_n f(x_n) = b$.

Fordítva, tegyük fel, hogy b nem határértéke f-nek az a pontban. Ekkor létezik $\varepsilon > 0$ úgy, hogy minden $\delta > 0$ esetén

$$f[G_\delta(a) \setminus \{a\}] \not\subset G_\varepsilon(b);$$

speciálisan minden $n \in \mathbb{N}$ esetén (az $\dfrac{1}{n}$-et véve δ szerepére)

$$\{x \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \{a\} \mid d(x,a) < 1/n,\ d(f(x), b) \geq \varepsilon\} \neq \emptyset.$$

A kiválasztási axióma szerint ezért létezik olyan $n \mapsto x_n \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \{a\}$ sorozat, amelynek tagjaira $d(x_n, a) < 1/n$ és $d(f(x_n), b) \geq \varepsilon$ teljesül. Világos, hogy $\lim_n x_n = a$, de $\lim_n f(x_n) \neq b$. ■

Az átviteli elv segítségével függvények határértékére vonatkozó állításokat konvergens sorozatokra vonatkozó hasonló állítások segítségével tudunk bebizonyítani. A következőkben felsorolunk néhány ilyen állítást. A továbbiakban a $H \subset \mathbb{K}^M$ halmaz torlódási pontjainak összességét H' jelöli, és megemlítjük azt a két egyszerű tényt, hogy

(i) $(F \cap H)' \subset F' \cap H'$,

(ii) ha $F \subset H$, akkor $F' \subset H'$.

26.3. Állítás *Az $f : \mathbb{K}^M \rightarrowtail \mathbb{K}^N$ függvénynek az $a \in (\mathrm{Dom}(f))'$ pontban a határértéke (ha létezik) egyértelmű.*

Ezért, ha $b \in \mathbb{K}^N$ az f határétéke az a pontban, akkor a

$$\lim_a f := \lim_{x \to a} f(x) := b$$

jelölést fogjuk használni.

26.4. Állítás *Az $f : \mathbb{K}^M \rightarrowtail \mathbb{K}^N$ függvénynek akkor és csak akkor létezik határértéke az $a \in (\mathrm{Dom}(f))'$ pontban, ha létezik $\lim_a \mathrm{pr}_k \circ f$ minden $k \in \{1, \ldots, N\}$ esetén, és ekkor*

$$\mathrm{pr}_k \left(\lim_a f \right) = \lim_a \mathrm{pr}_k \circ f \quad (k=1, \ldots, N).$$

Speciálisan $f : \mathbb{K}^M \rightarrowtail \mathbb{C}$ függvény és $a \in \mathrm{Dom}(f)'$ esetén pontosan akkor létezik $\lim_a f$, ha létezik $\lim_a (\mathrm{Re} \circ f)$ és $\lim_a (\mathrm{Im} \circ f)$, és ekkor

$$\mathrm{Re} \left(\lim_a f \right) = \lim_a \mathrm{Re} \circ f \quad \text{és} \quad \mathrm{Im} \left(\lim_a f \right) = \lim_a \mathrm{Im} \circ f.$$

26.5. Állítás *Legyenek $f, g\colon\mathbb{K}^M \rightarrowtail \mathbb{K}^N$ és $\phi\colon\mathbb{K}^M \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények.*

(1) Ha $a\in(\mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g))'$, és létezik f-nek és g-nek határértéke a-ban, akkor az $f+g$ és $\langle f, g\rangle$ függvényeknek is létezik határértékük a-ban, és

$$\lim_a(f+g)=\lim_a f + \lim_a g \ , \qquad \lim_a \langle f, g\rangle=\left\langle \lim_a f, \lim_a g \right\rangle.$$

(2) Ha $a\in(\mathrm{Dom}(\phi)\cap\mathrm{Dom}(f))'$, és létezik ϕ-nek és f-nek határértéke a-ban, akkor a ϕf függvénynek is létezik határértéke a-ban, és

$$\lim_a \phi f = \left(\lim_a \phi\right)\left(\lim_a f\right).$$

(3) Ha $a\in\mathrm{Dom}(f)'$, és létezik f-nek határértéke a-ban, akkor az $|f|$ függvénynek is létezik határértéke a-ban, és

$$\lim_a |f| = |\lim_a f|.$$

(4) Ha $a\in\mathrm{Dom}(\phi)'$, és létezik ϕ-nek határértéke a-ban, akkor a ϕ^* függvénynek is létezik határértéke a-ban, és

$$\lim_a \phi^* = \left(\lim_a \phi\right)^*.$$

(5) Ha $a\in\{x\in\mathrm{Dom}(\phi) \mid \phi(x)\neq 0\}'$, és ϕ-nek létezik határértéke a-ban, mely nem nulla, akkor az $\dfrac{1}{\phi}$ függvénynek is létezik határértéke a-ban, és

$$\lim_a \frac{1}{\phi} = \frac{1}{\lim_a \phi}.$$

Megjegyzések (i) Az állítás (2) pontjának speciális eseteként, ha $a\in\mathrm{Dom}(f)'$, és f-nek létezik határértéke a-ban, akkor $\alpha\in\mathbb{K}$ esetén az αf függvénynek is létezik határértéke a-ban, és $\lim_a \alpha f=\alpha\left(\lim_a f\right)$.

Hasonlóan, (1)-ben is tekinthetjük azt a speciális esetet, amikor g konstans függvény.

(ii) A 26.1-beli első példa és az itteni állításunk (2) pontja alapján minden $n\in\mathbb{N}$ esetén az $\mathrm{id}_{\mathbb{K}}^n$ függvénynek az értelmezési tartománya minden pontjában van határértéke és az megegyezik a függvény értékével; ugyanez igaz továbbá minden polinomra az (1) pont alapján.

(iii) Ugyancsak az itteni (5) pont szerint az $\dfrac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^n}$ $(n\in\mathbb{N})$ függvénynek az értelmezési tartománya minden pontjában van határértéke, és az megegyezik a függvényértékkel. A 0 torlódási pontja függvény értelmezési tartományának, és a függvénynek a 0-ban nincs határértéke.

26.6. Állítás *Legyen* $f{:}\mathbb{K}^M\rightarrowtail\mathbb{K}^N$, $g{:}\mathbb{K}^N\rightarrowtail\mathbb{K}^P$ *és* $a\in\mathrm{Dom}(g\circ f)'$. *Ha*

(i) létezik f*-nek határértéke az* a *pontban és* $b{:=}\lim\limits_a f\in\mathrm{Dom}(g)'\cap\mathrm{Dom}(g)$,

(ii) létezik g*-nek határértéke a* b *pontban és* $\lim\limits_b g{=}g(b)$,

akkor létezik a $g\circ f$ *függvénynek határértéke az* a *pontban, és*

$$\lim_a(g\circ f) = \lim_b g.$$

Bizonyítás Legyen $\varepsilon{>}0$ tetszőleges. $\lim\limits_b g{=}g(b)$ miatt létezik $\delta{>}0$ úgy, hogy

$$g[G_\delta(b)\setminus\{b\}] \subset G_\varepsilon(g(b)).$$

Mivel $g(b)\in G_\varepsilon(g(b))$, az is igaz, hogy

$$g[G_\delta(b)] \subset G_\varepsilon(g(b)).$$

Továbbá, $b{=}\lim\limits_a f$ miatt létezik $\rho{>}0$ úgy, hogy

$$f[G_\rho(a)\setminus\{a\}] \subset G_\delta(b).$$

Ekkor

$$(g\circ f)[G_\rho(a)\setminus\{a\}] \subset G_\varepsilon(g(b)).$$

Megjegyzés Nem volna igaz az állítás, ha nem követelnénk meg azt, hogy b legyen a g értelmezési tartományában és $\lim\limits_b g{=}g(b)$ teljesüljön. Legyenek ugyanis

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto 0\quad \text{és}\quad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\begin{cases}1 & \text{ha } x\neq 0,\\ 0 & \text{ha } x=0.\end{cases}$$

Ekkor $\lim\limits_0 f{=}0$, $\lim\limits_0 g{=}1$, de $\lim\limits_0(g\circ f){=}0$.

26.7. Definíció *Legyen H az $f:\mathbb{K}^M \rightarrowtail \mathbb{K}^N$ függvény értelmezési tartományának a része, $a \in H'$. Azt mondjuk, hogy f-nek* ***létezik határértéke az a pontban H mentén****, ha az $f|_H$ függvénynek létezik határértéke a-ban, és ekkor*

$$\lim_{\substack{x \mapsto a \\ x \in H}} f(x) := \lim_a f|_H .$$

Speciálisan, ha $f:\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{K}^N$ függvény, akkor $a \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{a-0} f := \lim f|_{]-\infty,a[}, \qquad \lim_{a+0} f := \lim f|_{]a,+\infty[}$$

(ha léteznek) az f-nek a-beli ***bal oldali*** *illetve* ***jobb oldali határértéke****.*

Például a sign függvénynek a 0 pontban a bal oldali határértéke -1, a jobb oldali határértéke 1.

Az

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{ha } x_1 x_2 > 0, \\ 1 & \text{ha } x_1 x_2 \leq 0 \end{cases}$$

függvénynek a $(0,0)$ pontban nincs határértéke, de például az

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 0\}$$

halmaz mentén a határértéke ebben a pontban 1.

Állítás *Legyen a az $f:\mathbb{K}^M \rightarrowtail \mathbb{K}^N$ függvény értelmezési tartományának a torlódási pontja.*

(i) Ha létezik f-nek határértéke az a pontban, akkor minden olyan $H \subset \mathrm{Dom}(f)$ esetén, melynek a torlódási pontja, létezik f-nek határértéke a-ban H mentén, és

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in H}} f(x) = \lim_a f.$$

(ii) Ha $H \subset \mathrm{Dom}(f)$ olyan halmaz, hogy a torlódási pontja H-nak is, $(\mathrm{Dom}(f) \setminus H)$-nak is, és létezik f-nek a-ban H mentén is, $\mathrm{Dom}(f) \setminus H$ mentén is határértéke, és a két halmaz menti határérték megegyezik, akkor létezik f-nek határértéke a-ban.

Bizonyítás (i) Nyilvánvaló.

(ii) Ha

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in H}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \notin H}} f(x) =: b,$$

akkor minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\eta > 0$ és $\rho > 0$ úgy, hogy

$$f[(G_\eta(a) \cap H) \setminus \{a\}] \subset G_\varepsilon(b) \quad \text{és} \quad f[(G_\rho(a) \setminus H) \setminus \{a\}] \subset G_\varepsilon(b).$$

Ha $\delta{:=}\min\{\eta,\rho\}$, akkor

$$f[G_\delta(a)\backslash\{a\}]\subset G_\varepsilon(b).\ \blacksquare$$

Speciálisan egy $f{:}\mathbb{R}{\rightarrowtail}\mathbb{K}^N$ függvénynek egy olyan a pontban, amely torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)\cap]-\infty,a[$-nak is, $\mathrm{Dom}(f)\cap]a,\infty[$-nek is, pontosan akkor létezik határértéke, ha létezik jobb és bal oldali határértéke, és ezek megegyeznek.

26.8. A 11. pontban értelmeztük az $\overline{\mathbb{R}}$ kiterjesztett valós számegyenesen a $+\infty$ és $-\infty$ középpontú nyílt gömböket; ezeknek a segítségével az eddigiek mintájára definiálhatjuk $\mathbb{R}$-ben értelmezett függvények határértékét a plusz és minusz végtelenben.

Definíció *Legyen $f{:}\mathbb{R}{\rightarrowtail}\mathbb{K}^N$ olyan függvény, hogy $+\infty{\in}\mathrm{Dom}(f)'$. Azt mondjuk, hogy $b{\in}\mathbb{K}^N$ **határértéke f-nek a $+\infty$ pontban**, ha minden $\varepsilon{>}0$ esetén létezik $\delta_\varepsilon{>}0$ úgy, hogy*

$$f[G_{\delta_\varepsilon}(+\infty)]\subset G_\varepsilon(b). \tag{$*$}$$

Belátható, hogy ha f-nek létezik határértéke a $+\infty$ pontban, akkor az egyértelmű; jelölje ezt a $\mathbb{K}^N$-beli vektort $\lim\limits_{+\infty} f$. Hasonlóan értelmezhető $\lim\limits_{-\infty} f{\in}\mathbb{K}^N$.

Például $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{1}{\mathrm{id}_\mathbb{R}}=\lim\limits_{-\infty}\dfrac{1}{\mathrm{id}_\mathbb{R}}=0$.

Megjegyzések (i) Az eddigiekkel való jobb összhang kedvéért írhattuk volna $(*)$ helyett, hogy

$$f[G_{\delta_\varepsilon}(+\infty)\setminus\{+\infty\}]\subset G_\varepsilon(b),$$

hiszen $+\infty$ nincs benne az f értelmezési tartományában. Mindenképpen ezt kell írnunk azonban, ha $f{:}\overline{\mathbb{R}}{\rightarrowtail}\mathbb{K}^N$ függvény határértékét akarjuk definiálni a végtelenben.

(ii) $+\infty{\in}\mathrm{Dom}(f)'$ akkor és csak akkor, ha $\mathrm{Dom}(f)$ felülről nem korlátos.

(iii) $b{=}\lim\limits_{+\infty} f$ akkor és csak akkor, ha minden $\varepsilon{>}0$ esetén létezik $K_\varepsilon{>}0$ úgy, hogy minden $x{\in}\mathrm{Dom}(f)$ és $x{>}K_\varepsilon$ esetén $d(f(x),b){<}\varepsilon$.

26.9. Definíció *Legyen $f{:}\mathbb{K}^M{\rightarrowtail}\mathbb{R}$ és $a{\in}\mathrm{Dom}(f)'$. Azt mondjuk, hogy az f **általánosított határértéke az a pontban** $+\infty$, ha minden $\varepsilon{>}0$ esetén létezik $\delta_\varepsilon{>}0$ úgy, hogy*

$$f[G_\delta(a)\backslash\{a\}]\subset G_\varepsilon(+\infty)\ .$$

Azt a tényt, hogy az f általánosított határértéke az a pontban $+\infty$, a $(g)\lim\limits_{a} f{=}{+\infty}$ jelöléssel fejezzük ki.

A $+\infty$ pont környezeteinek definíciója szerint $(g)\lim\limits_a f{=}{+}\infty$ pontosan akkor teljesül, ha minden $K{>}0$ esetén létezik $\delta_K{>}0$ úgy, hogy minden $x{\in}\mathrm{Dom}(f)\setminus\{a\}$ és $0{<}d(x,a){<}\delta_K$ esetén $f(x){>}K$.

Hasonlóan értelmezhető az, hogy f általánosított határértéke az a pontban $-\infty$.

Például az $\dfrac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$ függvénynek nincs általánosított határértéke a 0 pontban, de

$$(g)\lim_0 \frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2} = +\infty.$$

26.10. Az eddigiek mintájára értelmezhető az $f{:}\mathbb{R}{\rightarrowtail}\mathbb{R}$ függvények
(i) általánosított határértéke $+\infty$-ben és $-\infty$-ben,
(ii) általánosított jobb és bal oldali határértéke egy $\mathbb{R}$-beli pontban.
A részleteket az olvasóra bízzuk.
Például

$$(g)\lim_{+\infty}\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}} = 0, \qquad (g)\lim_{0+0}\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}} = +\infty, \qquad (g)\lim_{0-0}\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}} = -\infty.$$

26.11. Bár $\mathbb{K}^M$-ben nem értelmeztük a végtelent, bevezetjük a $\mathbb{K}^M{\rightarrowtail}\mathbb{K}^N$ függvények végtelenbeli határértékének fogalmát is.

Definíció *Legyen az $f{:}\mathbb{K}^M{\rightarrowtail}\mathbb{K}^N$ függvény értelmezési tartománya nem korlátos. Azt mondjuk, hogy f **határértéke a végtelenben** $b{\in}\mathbb{K}^N$, ha minden $\varepsilon{>}0$ esetén létezik $K_\varepsilon{>}0$ úgy, hogy minden $x{\in}\mathrm{Dom}(f)$, $|x|{>}K_\varepsilon$ esetén $|f(x){-}b|{<}\varepsilon$.*

26.12. Soroljuk $\mathbb{K}^M$ elemeinek koordinátáit két csoportba, legyen $K,L{\in}\mathbb{N}$, $K{+}L{=}M$, és tekintsük $\mathbb{K}^M$ helyett $\mathbb{K}^K{\times}\mathbb{K}^L$-t.
Legyen $f{:}\mathbb{K}^K{\times}\mathbb{K}^L{\rightarrowtail}\mathbb{K}^N$ függvény és $(a_1,a_2){\in}\mathbb{K}^K{\times}\mathbb{K}^L$ olyan, hogy
(i) (a_1,a_2) torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek,
(ii) a_2 egy környezetében levő minden x_2-re a_1 torlódási pontja a

$$\mathbb{K}^L{\rightarrowtail}\mathbb{K}^N, \quad x_1{\mapsto}f(x_1,x_2)$$

függvény értelmezési tartományának.
Ekkor értelmesek a következő kérdések:
(1) Létezik-e f-nek határértéke (a_1,a_2)-ben?
(2) Létezik-e minden x_2-re $\lim\limits_{x_1\to a_1} f(x_1,x_2)$? Ha igen, létezik-e

$$\lim_{x_2\to a_2}\left(\lim_{x_1\to a_1} f(x_1,x_2)\right)\ ?$$

(3) Ha léteznek mindezek a határértékek, milyen kapcsolat van közöttük? Válaszunk hasonló, mint a kettős indexű sorozatokra feltett hasonló kérdés esetén.

Állítás *Ha létezik f-nek határértéke az (a_1, a_2) pontban, és a_2 egy környezetében minden x_2-re létezik $\lim\limits_{x_1\to a_1} f(x_1, x_2)$, akkor*

$$\lim_{x_2\to a_2}\left(\lim_{x_1\to a_1} f(x_1, x_2)\right) = \lim_{(a_1,a_2)} f,$$

ami úgy értendő, hogy létezik a bal oldalon levő határérték, és egyenlő a jobb oldallal.

BIZONYÍTÁS Legyen $b:=\lim\limits_{(a_1,a_2)} f$ és $\rho>0$ olyan, hogy minden $x_2\in G_\rho(a_2)$ esetén létezik $g(x_2):=\lim\limits_{x_1\to a_1} f(x_1, x_2)$.

Minden $\varepsilon>0$ esetén létezik $\delta>0$ úgy, hogy

$$f[G_\delta((a_1, a_2))\setminus\{(a_1, a_2)\}] \subset G_\varepsilon(b).$$

Ha $\eta:=\min\{\rho, \delta/\sqrt{2}\}$, akkor minden $x_1\in G_{\delta/\sqrt{2}}(a_1)\setminus\{a_1\}$ és $x_2\in G_\eta(a_2)\setminus\{a_2\}$ esetén

$$0 < d((x_1, x_2), (a_1, a_2)) = \sqrt{d(x_1, a_1)^2 + d(x_2, a_2)^2} < \delta,$$

következésképpen

$$d(f(x_1, x_2), b) < \varepsilon.$$

Rögzített x_2 esetén így

$$d(g(x_2), b) = d\big(\lim_{x_1\to a_1} f(x_1, x_2), b\big) = \lim_{x_1\to a_1} d\big(f(x_1, x_2), b\big) \le \varepsilon < 2\varepsilon,$$

következésképpen $\lim\limits_{x_2\to a_2} g(x_2)=b$, és ezt akartuk bizonyítani. ■

Természetesen hasonlót állíthatunk a másik ismételt határértékre is. Az állítás következményei:

(1) Ha a függvény határértéke és valamelyik ismételt határérték létezik, akkor ezek megegyeznek.

(2) Ha a függvény mindkét ismételt határértéke létezik, és ezek nem egyenlők, akkor a függvénynek nincs határtértéke a szóban forgó pontban.

26.13. Feladatok

2. Léteznek-e a következő határértékek?

(i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$, (ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$, (iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}$,

(iv) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4}{x-2}$, (v) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, (vi) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3. Igazoljuk, hogy minden $m\in\mathbb{N}$ esetén $\lim\limits_{x\to+\infty} x^m e^{-x}=0$. (Útmutatás: tudjuk, hogy $\lim\limits_{n} n^m e^{-n}=0$, lásd 13.5.)

4. Van-e határértékük a következő függvényeknek a végtelenben?

(i) $\mathbb{K}^N\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\dfrac{1}{1+|x|}$, (ii) $\mathbb{K}^N\to\mathbb{R}$, $x\mapsto e^{-|x|}$,

(iii) $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $x\mapsto\dfrac{1}{x+i}$.

5. Mutassuk meg, hogy az

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x/2<y<2x\}\to\mathbb{R}, \quad (x,y)\mapsto\frac{x^4+y^4}{(2y-x)(2x-y)}$$

függvénynek a $(0,0)$-ban nulla a határértéke, de fel sem vethető az ismételt határértékek létezésének kérdése.

6. Mutassuk meg, hogy az

$$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \quad (x,y)\mapsto\begin{cases} 1 & \text{ha } 0<y<x^2, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvénynek a $(0,0)$-ban minden egyenes mentén a határértéke 0, de nincs határértéke.

7. Léteznek-e a következő határértékek?

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\sin\left(\dfrac{1}{y}\right)$, (ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)$,

(iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)$, (iv) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \left(\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\right)$.

8. Igazoljuk, hogy

(i) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$, (ii) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

(Használjuk a függvények hatványsorát.)

27. Függvények folytonossága

27.1. Definíció *Legyen $f:\mathbb{K}^M\rightarrowtail\mathbb{K}^N$ és $a\in\mathrm{Dom}(f)$. Azt mondjuk, hogy f **folytonos az a pontban**, ha minden $\varepsilon>0$ esetén létezik $\delta_\varepsilon>0$ úgy, hogy minden $x\in\mathrm{Dom}(f)$ esetén, melyre $d(x,a)<\delta_\varepsilon$ teljesül, $d(f(x),f(a))<\varepsilon$ áll fenn, vagy másképpen ugyanez,*

$$f[G_{\delta_\varepsilon}(a)]\subset G_\varepsilon(f(a)).$$

*Továbbá, f **folytonos a $H\subset\mathrm{Dom}(f)$ halmazon**, ha folytonos H minden pontjában; és f **folytonos**, ha folytonos a $\mathrm{Dom}(f)$ halmazon.*

Megjegyzések (i) Ha H tetszőleges részhalmaza $\mathbb{K}^M$-nek, akkor $a\in H$ esetén a vagy torlódási pontja, vagy izolált pontja H-nak. Továbbá, a 27.1. Definíció szerint

(1) ha a izolált pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek, akkor f folytonos a-ban,

(2) ha a torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek, akkor f pontosan akkor folytonos a-ban, ha $\lim\limits_a f=f(a)$.

(ii) Ezért a 26.5. megjegyzés alapján minden $\mathbb{K}\to\mathbb{K}$ polinom folytonos.

Sőt a szokásos hiedelemmel ellentétben folytonosak az $\dfrac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{K}}^n}$ $(n\in\mathbb{N})$ függvények is. Az igaz mindössze, hogy ezek a függvények nem terjeszthetők ki az egész $\mathbb{K}$-ra folytonos függvénnyé.

27.2. Az előző megjegyzés (i) pontjában mondottak szerint a határértékekre vonatkozó ismereteink birtokában egyszerűen igazolhatunk a folytonosságra vonatkozó néhány állítást, speciálisan az itt következő kettőt.

Állítás *(**Átviteli elv**) Az $f:\mathbb{K}^M\rightarrowtail\mathbb{K}^N$ függvény pontosan akkor folytonos az $a\in\mathrm{Dom}(f)$ pontban, ha minden olyan $x:\mathbb{N}\to\mathrm{Dom}(f)$ sorozat esetén, melyre $\lim\limits_n x_n=a$ fennáll, $\lim\limits_n f(x_n)=f(a)$ teljesül.*

27.3. Állítás *Az $f:\mathbb{K}^M\rightarrowtail\mathbb{K}^N$ függvény pontosan akkor folytonos az $a\in\mathrm{Dom}(f)$ pontban, ha minden $k\in\{1,\dots,N\}$ esetén $\mathrm{pr}_k\circ f$ folytonos a-ban.*

Speciálisan, az $f:\mathbb{K}^M\rightarrowtail\mathbb{C}$ függvény pontosan akkor folytonos az $a\in\mathrm{Dom}(f)$ pontban, ha a $\mathrm{Re}\circ f$ és $\mathrm{Im}\circ f$ függvények folytonosak a-ban.

27.4. Állítás *Legyenek $f,g:\mathbb{K}^M \rightarrowtail \mathbb{K}^N$ és $\phi:\mathbb{K}^M \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények.*

(1) Ha $a \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ és f illetve g folytonosak a-ban, akkor az $f+g$ és $\langle f,g \rangle$ függvények is folytonosak a-ban.

(2) Ha $a \in \mathrm{Dom}(\phi) \cap \mathrm{Dom}(f)$ és ϕ illetve f folytonosak a-ban, akkor a ϕf függvény is folytonos a-ban.

(3) Ha $a \in \mathrm{Dom}(f)$ és f folytonos a-ban, akkor az $|f|$ függvény is folytonos a-ban.

(4) Ha $a \in \mathrm{Dom}(\phi)$ és ϕ folytonos a-ban, akkor a ϕ^* függvény is folytonos a-ban.

(5) Ha $a \in \mathrm{Dom}(\phi)$ és ϕ folytonos a-ban, továbbá $\phi(a) \neq 0$, akkor az $\dfrac{1}{\phi}$ függvény is folytonos a-ban.

27.5. Állítás *Legyenek $f:\mathbb{K}^M \rightarrowtail \mathbb{K}^N$, $g:\mathbb{K}^N \rightarrowtail \mathbb{K}^P$ függvények és $a \in \mathrm{Dom}(g \circ f) = \mathrm{Dom}(f) \cap \overset{-1}{f}(\mathrm{Dom}(g))$. Ha f folytonos a-ban és g folytonos $f(a)$-ban, akkor a $g \circ f$ függvény folytonos a-ban .*

27.6. Állítás *A következő függvények folytonosak (azaz mindenütt folytonosak):*

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N, &\quad (x,y) \mapsto x+y,\\
\mathbb{K} \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N, &\quad (\alpha,x) \mapsto \alpha x,\\
\mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}, &\quad (x,y) \mapsto \langle x,y \rangle,\\
\mathbb{K}^N \to \mathbb{R}, &\quad x \mapsto |x|,\\
\mathrm{pr}_k:\mathbb{K}^N \to \mathbb{K} &\quad (k=1,2,\ldots,N).
\end{aligned}$$

27.7. A folytonos függvények (tehát olyan függvények, amelyek az értelmezési tartományuk minden pontjában folytonosak) egy igen gyakran használt tulajdonságát mondja ki a következő állítás.

Állítás *Legyen $f:\mathbb{K}^M \rightarrowtail \mathbb{K}^N$ folytonos függvény, $a \in \mathrm{Dom}(f)$ és $b \in \mathbb{K}^N$ olyan, hogy $f(a) \neq b$. Ekkor létezik $r>0$ úgy, hogy minden $x \in G_r(a) \cap \mathrm{Dom}(f)$ esetén $f(x) \neq b$.*

Bizonyítás Egyszerű tény, hogy $\varepsilon := d(f(a),b) > 0$ és $b \notin G_\varepsilon(f(a))$. Az f-nek a-beli folytonossága miatt létezik $r>0$ úgy, hogy

$$f[G_r(a)] \subset G_\varepsilon(f(a)).$$

Ekkor $b{\notin}f[G_r(a)]$, így minden $x{\in}G_r(a){\cap}\mathrm{Dom}(f)$ esetén $f(x){\neq}b$.

27.8. A folytonos függvények egy alaptulajdonságát fogalmazzuk most meg.

Állítás *Az $f{:}\mathbb{K}^M{\rightarrowtail}\mathbb{K}^N$ függvény pontosan akkor folytonos, ha minden $A{\subset}\mathbb{K}^N$ nyílt (zárt) halmaz esetén $\overset{-1}{f}(A)$ nyílt (zárt) $\mathrm{Dom}(f)$-ben.*

Bizonyítás Az egyszerűség kedvéért vezessük be a $H{:=}\mathrm{Dom}(f)$ jelölést.

Tegyük fel, hogy f folytonos, és legyen $A{\subset}\mathbb{K}^N$ nyílt halmaz. Ha $a{\in}\overset{-1}{f}(A)$, akkor $f(a){\in}A$, így létezik $\varepsilon{>}0$ úgy, hogy $G_\varepsilon(f(a)){\subset}A$. f a-beli folytonossága miatt létezik $\delta{>}0$ úgy, hogy

$$f[G_\delta(a)] \subset G_\varepsilon(f(a)) \subset A.$$

Ekkor

$$H{\cap}G_\delta(a) \subset \overset{-1}{f}(f[G_\delta(a)]) \subset \overset{-1}{f}(A),$$

tehát a belső pontja $\overset{-1}{f}(A)$-nak H-ban.

Fordítva, tegyük fel, hogy minden $\mathbb{K}^N$-beli nyílt halmaz f általi ősképe nyílt H-ban. Legyen $\varepsilon{>}0$. Ekkor $G_\varepsilon(f(a)){\subset}\mathbb{K}^N$ nyílt, következésképpen $\overset{-1}{f}\big(G_\varepsilon(f(a))\big)$ nyílt H-ban, mely tartalmazza az a pontot, így létezik $\delta{>}0$ úgy, hogy

$$G_\delta(a){\cap}H \subset \overset{-1}{f}\big(G_\varepsilon(f(a))\big).$$

Ekkor

$$f[G_\delta(a)] \subset G_\varepsilon(f(a)),$$

azaz f folytonos az a pontban.

A zárt halmazokra vonatkozó állítás nyilvánvaló következménye az eddigieknek, mivel tetszőleges $A{\subset}\mathbb{K}^N$ halmaz esetén

$$\overset{-1}{f}(A^{\flat}) = H\setminus\overset{-1}{f}(A).$$

27.9. Definíció *Azt mondjuk, hogy az $f{:}\mathbb{K}^M{\rightarrowtail}\mathbb{K}^N$ függvény **nyílt (zárt)**, ha $\mathrm{Dom}(f)$ minden nyílt (zárt) részhalmazának f általi képe nyílt (zárt) $\mathbb{K}^N$-ben.*

Egy függvény lehet nyílt (zárt) és emellett nem folytonos, továbbá lehet folytonos és emellett nem nyílt (zárt). Íme:

(1) Az $\mathrm{id}_\mathbb{R}$ függvény folytonos, nyílt és zárt.

(2) A $\mathrm{pr}_1{:}\mathbb{R}{\times}\mathbb{R}{\to}\mathbb{R}$ függvény folytonos és nyílt, de nem zárt, mert

$$\{(x,1/x) \mid x{\in}\mathbb{R}_0^+\}{\subset}\mathbb{R}{\times}\mathbb{R}$$

zárt halmaz, de

$$\mathrm{pr}_1[\{(x,1/x) \mid x\in\mathbb{R}^+\}] = \mathbb{R}^+$$

nem zárt $\mathbb{R}$-ben.

(3) Az $\dfrac{1}{1+\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2}$ függvény folytonos, de se nem nyílt, se nem zárt, mert $\mathbb{R}$ nyílt és egyben zárt részhalmaza $\mathbb{R}$-nek, de képe, a $]0,1]$ intervallum se nem nyílt, se nem zárt $\mathbb{R}$-ben.

(4) Bármely nyílt halmazon értelmezett konstans függvény folytonos és zárt, de nem nyílt.

(5) Az

$$\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto\begin{cases} 0 & \text{ha } x<0, \\ 1 & \text{ha } x\geq 0 \end{cases}$$

függvény zárt, de nem folytonos és nem nyílt.

27.10. Definíció *$f{:}\mathbb{K}^M\rightarrowtail\mathbb{K}^N$ függvény, $H\subset\mathrm{Dom}(f)$ és $a\in H$ esetén azt mondjuk, hogy f* ***folytonos az a pontban H mentén****, ha az $f|_H$ függvény folytonos a-ban .*

Speciálisan, ha $f{:}\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbb{K}^N$ függvény és $a\in\mathrm{Dom}(f)$, akkor azt mondjuk, hogy f ***balról (jobbról) folytonos az a pontban****, ha f folytonos a-ban a $\mathrm{Dom}(f)\cap]-\infty,a]$ ($\mathrm{Dom}(f)\cap[a,+\infty[$) halmaz mentén. A függvény* ***balról (jobbról) folytonos****, ha értelmezési tartományának minden pontjában balról (jobbról) folytonos.*

Például az int (egészrész) függvény jobbról folytonos.

27.11. Még egy fogalmat érdemes bevezetni a valós számokon értelmezett függvényekre.

Definíció *Az $f:\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbb{K}^N$ függvény* ***szakaszosan folytonos****, ha*

(i) értelmezési tartománya intervallum,

(ii) létezik véges sok $x_1 < x_2, \cdots < x_n$ elem $\mathrm{Dom}(f)$-ben úgy, hogy

– f folytonos az $\{x\in\mathrm{Dom}(f) \mid x<x_1\}$, $]x_1,x_2[$, ..., $\{x\in\mathrm{Dom}(f) \mid x_n<x\}$ intervallumokon,

– létezik f-nek jobb és bal oldali határértéke az $x_1,\ldots,x_n$ pontokban.

Például az int (egészrész) függvény szakaszosan folytonos.

27.12. Feladatok

1. Folytonosak-e a következő függvények?

(i)

$$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \quad (x,y)\mapsto\begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{ha } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{ha } (x,y)=(0,0), \end{cases}$$

(ii) $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\mathrm{sign}$,
(iii) $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $\quad z\mapsto \mathrm{Im}(z)+\mathrm{Re}(z)^2$.
2. Emlékeztetünk a

$$\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto\begin{cases} 1 & \text{ha } x\in\mathbb{Q} \\ 0 & \text{ha } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

Dirichlet-függvényre. Mutassuk meg, hogy ez a függvény sehol sem folytonos, és $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\chi_{\mathbb{Q}}$ csak egyetlen pontban folytonos.
3. Mutassuk meg, hogy ha $f{:}\mathbb{K}^M\rightarrowtail\mathbb{K}^N$ folytonos, akkor minden $E\subset\mathbb{K}^N$ esetén

$$\overline{\overset{-1}{f}(E)}\cap\mathrm{Dom}(f) \subset \overset{-1}{f}(\overline{E}).$$

4. Bizonyítsuk be, hogy $f{:}\mathbb{K}^M\rightarrowtail\mathbb{K}^N$ akkor és csak akkor folytonos, ha minden $H\subset\mathrm{Dom}(f)$ esetén

$$f\left[\,\overline{H}\,\right] \subset \overline{f[H]}.$$

5. Legyen $f{:}\mathbb{K}^M\rightarrowtail\mathbb{K}^N$ és $H\subset\mathrm{Dom}(f)$.
(i) Adjunk példát arra, hogy $f|_H$ folytonos, de f nem folytonos H-n.
(ii) Igazoljuk, hogy ha $f|_H$ folytonos, és x belső pontja H-nak $\mathrm{Dom}(f)$-re nézve, akkor f folytonos x-ben.

28. Egyenletes folytonosság, Lipschitz-tulajdonság

28.1. Definíció *Azt mondjuk, hogy az $f{:}\mathbb{K}^M\rightarrowtail\mathbb{K}^N$ függvény* ***egyenletesen folytonos a*** *$H\subset\mathrm{Dom}(f)$* ***halmazon****, ha minden $\varepsilon>0$ esetén létezik $\delta_e>0$ úgy, hogy minden $x,y\in H$ és $d(x,y)<\delta_e$ esetén $d(f(x),f(y))<\varepsilon$. f* ***egyenletesen folytonos****, ha egyenletesen folytonos $\mathrm{Dom}(f)$-en.*

Állítás *Ha f egyenletesen folytonos H-n, akkor f folytonos H mentén a H minden pontjában.*

Bizonyítás Legyen f egyenletesen folytonos H-n. Ha $\varepsilon>0$, akkor létezik $\delta_e>0$ a fenti tulajdonsággal. Így minden $x\in H$ esetén

$$f[G_{\delta_\varepsilon}(x)\cap H] \subset G_\varepsilon(f(x)),$$

azaz f folytonos H mentén az x pontban.

28.2. Definíció *Az* $f:\mathbb{K}^M \rightarrowtail \mathbb{K}^N$ *függvény*

(1) ***Lipschitz-tulajdonságú az*** $a\in\mathrm{Dom}(f)$ ***pontban****, ha létezik* $r>0$ *és* $L>0$ *úgy, hogy minden* $x\in G_r(a)$ *esetén*

$$d(f(x), f(a)) \leq L\, d(x, a)\ ;$$

(2) ***Lipschitz-tulajdonságú a*** $H\subset\mathrm{Dom}(f)$ ***halmazon****, ha létezik* $L>0$ *úgy, hogy minden* $x, y\in H$ *esetén*

$$d(f(x), f(y)) \leq L\, d(x, y).$$

Állítás *Ha az* $f:\mathbb{K}^M \rightarrowtail \mathbb{K}^N$ *függvény*

(1) Lipschitz-tulajdonságú az $a\in\mathrm{Dom}(f)$ *pontban, akkor folytonos* a*-ban,*

(2) Lipschitz-tulajdonságú a $H\subset\mathrm{Dom}(f)$ *halmazon, akkor egyenletesen folytonos* H*-n.*

Bizonyítás Bármely $\varepsilon>0$ számra

(1) minden $x\in\mathrm{Dom}f$, $d(x,a)<\dfrac{\varepsilon}{L}$ esetén $d(f(x),(f(a))<\varepsilon$;

(2) minden $x,y\in H$, $d(x,y)<\dfrac{\varepsilon}{L}$ esetén $d(f(x),f(y))<\varepsilon$.

28.3. Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy a sin és cos függvények Lipschitz- tulajdonságúak az egész értelmezési tartományukon. (Használjuk a 25.7.4. feladat eredményét.)

2. Igazoljuk, hogy $\dfrac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$ nem egyenletesen folytonos a $]0,+\infty[$ intervallumon, de ha $\alpha>0$, akkor az $]\alpha,+\infty[$ halmazon egyenletesen folytonos, sőt Lipschitz-tulajdonságú.

3. Lássuk be, hogy a $\sqrt{.}$ függvény egyenletesen folytonos, de nem Lipschitz-tulajdonságú az egész értelmezési tartományán, de ha $\alpha>0$, akkor az $]\alpha,+\infty[$ halmazon Lipschitz-tulajdonságú.

29. Folytonosság és kompaktság

29.1. Állítás *Legyen* $K\subset\mathbb{K}^M$ *kompakt halmaz és* $f:K\to\mathbb{K}^N$ *folytonos függvény. Ekkor* $f[K]$ *kompakt halmaz* $\mathbb{K}^N$*-ben.*

BIZONYÍTÁS Legyen $(G_i)_{i\in I}$ $\mathbb{K}^N$-beli nyílt halmazok rendszere úgy, hogy

$$f[K]\subset\bigcup_{i\in I}G_i.$$

Ekkor

$$K\subset \overset{-1}{f}(f[K])\subset \overset{-1}{f}\left(\bigcup_{i\in I}G_i\right)=\bigcup_{i\in I}\overset{-1}{f}(G_i).$$

Mivel f folytonos, minden $i{\in}I$ esetén $\overset{-1}{f}(G_i)$ nyílt K-ban, így létezik $N_i{\subset}\mathbb{K}^M$ nyílt halmaz úgy, hogy $\overset{-1}{f}(G_i){=}K{\cap}N_i$. Ekkor

$$K\subset\bigcup_{i\in I}N_i.$$

Mivel K kompakt, létezik olyan $F{\subset}I$ véges halmaz, hogy

$$K{\subset}\bigcup_{i\in F}N_i.$$

Ekkor

$$K=\bigcup_{i\in F}K{\cap}N_i=\bigcup_{i\in F}\overset{-1}{f}(G_i),$$

következésképpen

$$f[K]=f\left[\bigcup_{i\in F}\overset{-1}{f}(G_i)\right]=\bigcup_{i\in F}f[\overset{-1}{f}(G_i)]\subset\bigcup_{i\in F}G_i,$$

tehát $f[K]$ kompakt halmaz $\mathbb{K}^N$-ben.

29.2. Állítás *(**Weierstrass-tétel**) Legyen $K{\subset}\mathbb{K}^M$ kompakt halmaz és $f{:}K{\to}\mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor létezik $p,q{\in}K$ úgy, hogy*

$$f(p){=}\inf f[K]\quad\textit{és}\quad f(q){=}\sup f[K].$$

BIZONYÍTÁS Az előző állítás szerint $f[K]{\subset}\mathbb{R}$ kompakt halmaz, így korlátos és zárt, következésképpen

$$\sup f[K]{<}{+}\infty\quad\text{és}\quad\sup f[K]\in\overline{f[K]}=f[K],$$

így van olyan $q{\in}K$, hogy $f(q){=}\sup f[K]$; hasonló a bizonyítás az infimumra is. ■

A Weierstrass-tétel szerint tehát kompakt halmazon értelmezett valós értékű folytonos függvény felveszi minimumát és maximumát.

29.3. Állítás *Legyen $K \subset \mathbb{K}^M$ kompakt halmaz és $f:K \to \mathbb{K}^N$ folytonos injekció. Ekkor f^{-1} folytonos.*

Bizonyítás Legyen $A \subset \mathbb{K}^M$ zárt halmaz. Ekkor $A \cap K$ zárt részhalmaza a K kompakt halmaznak, ezért kompakt, így az előző állítás szerint az

$$\overset{-1}{f^{-1}}(A) = f[A \cap K]$$

halmaz kompakt, következésképpen zárt $\mathbb{K}^N$-ben, így $f[K]$-ban is. f^{-1} folytonossága így a 27.8. állítás következménye.

29.4. Állítás *(**Heine tétele**) Legyen $K \subset \mathbb{K}^M$ kompakt halmaz és $f:K \to \mathbb{K}^N$ folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor minden $x \in K$ esetén létezik $\delta_{x,\varepsilon} > 0$ úgy, hogy

$$f[G_{\delta_{x,\varepsilon}}(x) \cap K] \subset G_\varepsilon(f(x)).$$

Nyilvánvaló, hogy $\left\{G_{\delta_{x,\varepsilon}/2}(x) \mid x \in K\right\}$ a K nyílt lefedése, ezért létezik olyan $Z \subset K$ véges halmaz, hogy

$$K \subset \bigcup_{z \in Z} G_{\delta_{z,\varepsilon}/2}(z). \tag{$*$}$$

Ekkor

$$\delta_\varepsilon := \min\{\delta_{z,\varepsilon}/2 \mid z \in Z\} > 0,$$

és ha $x, y \in K$ olyan, hogy $d(x,y) < \delta_\varepsilon$, akkor $(*)$ szerint létezik $z \in Z$ úgy, hogy $x \in G_{\delta_{z,\varepsilon}/2}(z)$. A háromszög-egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z) < \delta_\varepsilon + \delta_{z,\varepsilon}/2 \leq \delta_{z,\varepsilon},$$

következésképpen

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(z)) + d(f(z), f(y)) < 2\varepsilon.$$

30. Folytonosság és összefüggőség

30.1. Állítás *Legyen $\mathbb{K}^M \rightarrowtail \mathbb{K}^N$ folytonos függvény és $C \subset \mathrm{Dom}(f)$ összefüggő halmaz. Ekkor $f[C]$ összefüggő halmaz $\mathbb{K}^N$-ben.*

BIZONYÍTÁS Tegyük fel, hogy $f[C]$ nem összefüggő, azaz léteznek E és F nem üres halmazok úgy, hogy $\overline{E}\cap F=\emptyset$, $E\cap\overline{F}=\emptyset$ és $f[C]=E\cup F$. Nyilvánvaló, hogy

$$C=\left(\overset{-1}{f}(E)\cap C\right)\cup\left(\overset{-1}{f}(F)\cap C\right).$$

Tegyük fel, hogy $\overset{-1}{f}(E)\cap C=\emptyset$. Ekkor $E=f[C]\cap E=\emptyset$ volna, ami ellentmondás, tehát $\overset{-1}{f}(E)\cap C\neq\emptyset$.

Továbbá, f folytonossága miatt (lásd a 27.12.3. feladatot)

$$C\cap\overline{\overset{-1}{f}(E)}\subset\mathrm{Dom}(f)\cap\overline{\overset{-1}{f}(E)}\subset\overset{-1}{f}(\overline{E}),$$

így

$$\overline{\left(C\cap\overset{-1}{f}(E)\right)}\cap\left(C\cap\overset{-1}{f}(F)\right)\subset C\cap\left(\overline{\overset{-1}{f}(E)}\right)\cap\left(\overset{-1}{f}(F)\right)\subset$$
$$\subset\overset{-1}{f}\left(\overline{E}\right)\cap\overset{-1}{f}(F)=\overset{-1}{f}\left(\overline{E}\cap F\right)=\emptyset.$$

Hasonló összefüggést írhatunk fel E és F szerepét felcserélve, amiből következik, hogy $\overset{-1}{f}(E)\cap C$ és $\overset{-1}{f}(F)\cap C$ nem üres széteső halmazok, tehát C nem összefüggő.

Következmény Ha $f:\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor minden $\mathrm{Dom}(f)$-beli I intervallum esetén $f[I]$ intervallum.

Ha tehát $f:\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbb{R}$ folytonos és $[x,y]\subset\mathrm{Dom}(f)$, akkor f felveszi $[x,y]$-on a minimumát, maximumát és a kettő között minden értéket; speciálisan az $f(x)$ és $f(y)$ közötti minden értéket is.

30.2. Állítás *Ha $I\subset\mathbb{R}$ intervallum és $f:I\to\mathbb{R}$ folytonos injekció, akkor f szigorúan monoton.*

BIZONYÍTÁS Elég megmutatni, hogy f szigorúan monoton az I tetszőleges $[a,b]$ korlátos részintervallumán.

Mivel f injektív, $f(a)\neq f(b)$, legyen például $f(a)<f(b)$.

Tegyük fel, hogy f nem szigorúan monoton növő; ekkor létezik $c\in]a,b[$ úgy, hogy $f(c)\leq f(a)$ vagy $f(c)\geq f(b)$.

Egyenlőség egyik esetben sem állhat, mert a függvény injektív. Ha $f(c)<f(a)$, akkor az $[f(c),f(a)]\subset[f(c),f(b)]$. A függvény folytonossága miatt (intervallum képe intervallum) minden $u\in[f(c),f(a)]$ esetén létezik $x\in[a,c]$ és $y\in[c,b]$ úgy, hogy $u=f(x)=f(y)$, és ez ellentmond a függvény injektivitásának. Ugyanígy ellentmondásra jutunk, ha $f(c)>f(b)$, tehát f szigorúan monoton nő.

Hasonlóan láthatjuk be, hogy $f(a)>f(b)$ esetén f szigorúan monoton fogy.

30.3. Legyen I és J intervallum, $J \subset I$. Tegyük fel, hogy J nyílt I-re nézve. Ha $x \in J$ alsó végpontja J-nek, akkor alsó végpontja I-nek is.

Ugyanis tegyük fel, hogy x nem alsó végpontja I-nek. Ekkor létezik $y \in I$ úgy, hogy $y < x$. Mivel x belső pontja J-nek I-re nézve, van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I \subset J$. I intervallum, ezért létezik $z \in I$ úgy, hogy $x-\varepsilon < z < x$. Ekkor $z \in J$, és mivel $z < x$, így x nem alsó végpontja J-nek.

Hasonló mondható, ha $x \in J$ felső végpontja J-nek.

Állítás *Ha $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos injekció, akkor f^{-1} folytonos.*

Bizonyítás Az előző állítás szerint f szigorúan monoton, legyen például szigorúan monoton növő.

Legyen $J \subset I$ részintervallum, mely nyílt I-re nézve, és legyen $y \in f[J]$. Ekkor létezik egyetlen $x \in J$ úgy, hogy $y = f(x)$.

Ha x nem végpontja J-nek, akkor létezik $x_1, x_2 \in J$ úgy, hogy $x_1 < x < x_2$. Ekkor $f(x_1) < f(x) < f(x_2)$, így $f(x)$ belső pontja $f[J]$-nek.

Ha x alsó végpontja J-nek, akkor I-nek is alsó végpontja, következésképpen y alsó végpontja $f[I]$-nek, így belső pontja $f[J]$-nek $f[I]$-re nézve. Hasonló a helyzet, ha x felső végpontja J-nek.

Tehát ha J olyan részintervalluma I-nek, amely nyílt I-re nézve, akkor $f[J]$ nyílt $f[I]$-re nézve.

Ha $\emptyset \neq N \subset I$ az I-re nézve nyílt halmaz, akkor 2.11. és 5.2. szerint van $J_n \subset I$ ($n \in \mathbb{N}$) az I-re nézve nyílt intervallum, amelyek uniója N. Ekkor

$$\overset{-1}{f^{-1}}(N) = f[N] = f\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n\right] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f[J_n],$$

és a jobb oldalon álló halmaz nyílt $\mathrm{Dom}(f^{-1}) = f[I]$-re nézve. A 27.8. állítás szerint tehát f^{-1} folytonos.

Megjegyzések (i) Ha f nem valós értékű, akkor az állítás nem igaz. Példa erre a

$$]-\pi, \pi] \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto e^{ix}$$

függvény, amely folytonos, injektív, értékkészlete az egységkör, de inverze nem folytonos a -1 pontban.

(ii) Tudjuk, hogy ha n páratlan akkor az

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n,$$

ha n páros, akkor az

$$\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto x^n$$

függvény injektív és folytonos, így inverze, az $\sqrt[n]{\ }$ függvény is folytonos.

31. Folytonos függvények sorozata

31.1. Állítás *Legyen $H \subset \mathbb{K}^M$ tetszőleges nem üres halmaz, a torlódási pontja H-nak és $f_n : H \to \mathbb{K}^N$ $(n \in \mathbb{N})$ a H-n egyenletesen konvergens függvénysorozat. Ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén f_n-nek létezik határértéke a-ban, akkor $\lim_n f_n$-nek is, és*

$$\lim_a \left(\lim_n f_n \right) = \lim_n \left(\lim_a f_n \right).$$

Bizonyítás Legyen $f := \lim_n f_n$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén $b_n := \lim_a f_n$. Az egyenletes konvergenciára vonatkozó Cauchy-kritérium szerint minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $m, n \geq N$ természetes számra

$$\sup_{x \in H} d(f_m(x), f_n(x)) \leq \varepsilon.$$

Ezért, ha $m, n \geq n_\varepsilon$, akkor

$$d(b_m, b_n) = \lim_{x \to a} d(f_m(x), f_n(x)) \leq \varepsilon,$$

következésképpen a $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens; legyen $b := \lim_n b_n$.

Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor létezik $m \in \mathbb{N}$ úgy, hogy

$$d(b_m, b) < \varepsilon \quad \text{és} \quad \sup_{x \in H} d(f_m(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Továbbá $\lim_a f_m = b_m$ miatt létezik $\delta_\varepsilon > 0$ úgy, hogy ha $x \in H$, $d(x, b_m) < \delta_\varepsilon$, akkor

$$d(f_m(x), b_m) < \varepsilon.$$

Ezért ilyen x-ekre

$$d(f(x), b) \leq d(f(x), f_m(x)) + d(f_m(x), b_m) + d(b_m, b) < 3\varepsilon,$$

következésképpen $\lim_a f = b$.

31.2. Állítás *Legyen $H \subset \mathbb{K}^M$ és $f_n : H \to \mathbb{K}^N$ $(n \in \mathbb{N})$ folytonos függvények sorozata, mely lokálisan egyenletesen konvergál az $f : H \to \mathbb{K}^N$ függvényhez. Ekkor f folytonos.*

Bizonyítás Legyen $a{\in}H$. Ha a izolált pontja H-nak, akkor f folytonos a-ban. Legyen a torlódási pontja H-nak, és legyen G az a olyan környezete, hogy a függvénysorozat egyenletesen konvergens a $G\cap H$-n. Világos, hogy a torlódási pontja $G\cap H$-nak is.

Az előző állítás szerint

$$\lim_a f=\lim_n\left(\lim_a f_n\right)=\lim_n f_n(a)=f(a),$$

tehát f folytonos az a pontban. ■

Ebből adódik az a fontos eredmény, hogy ha a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(\mathrm{id}_{\mathbb{K}}-a)^n$ hatványsor R konvergenciasugara nem nulla, akkor a

$$G_R(a){\to}\mathbb{K},\quad x{\mapsto}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\mathrm{id}_{\mathbb{K}}-a)^n$$

összegfüggvény folytonos.

Speciálisan, az Exp, Cos, Sin, Ch, Sh függvények folytonosak.

31.3. Feladat

Adjuk meg folytonos függvények olyan sorozatát, amelynek pontonkénti határértéke nem folytonos (lásd a 23.6.5. feladatot).

32. A Ludolf-féle szám (π)

32.1. Emlékeztetünk arra, hogy a

$$\mathrm{Cos}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^{2n}}{(2n)!},\qquad \mathrm{Sin}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^{2n+1}}{(2n{+}1)!}$$

függvények az egész komplex számsíkon értelmezve vannak, folytonosak, továbbá

$$\cos:=\mathrm{Cos}|_{\mathbb{R}},\qquad \sin:=\mathrm{Sin}|_{\mathbb{R}}.$$

Állítás *Létezik egyetlen olyan $x_0{\in}]0,2[$ szám, hogy $\cos(x_0){=}0$.*

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy $\cos(0){=}1$. Megmutatjuk, hogy $\cos(2){<}0$. Ugyanis

$$\begin{aligned}\cos(2)&=1-\frac{2^2}{2!}+\frac{2^4}{4!}-\frac{2^6}{6!}+\frac{2^8}{8!}-\cdots=\\&=1-\frac{2^2}{2!}\left(1{-}\frac{4}{3{\cdot}4}\right)-\frac{2^6}{6!}\left(1{-}\frac{4}{7{\cdot}8}\right)-\cdots=\\&=-\frac{1}{3}-\frac{2^6}{6!}\left(1{-}\frac{4}{7{\cdot}8}\right)-\cdots<0,\end{aligned}$$

mivel az összeg minden tagja negatív. Így a 30.1. állítás következménye szerint létezik $x_0 \in]0,2[$ úgy, hogy $\cos(x_0)=0$.

Az egyértelműséghez először belátjuk, hogy minden $x \in]0,2[$ esetén $\sin(x)>0$. Ugyanis

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots =$$
$$= x\left(1-\frac{x^2}{2\cdot 3}\right) + \frac{x^5}{5!}\cdot\left(1-\frac{x^2}{6\cdot 7}\right) + \cdots > 0,$$

mivel az összeg minden tagja pozitív.

Ha $x, y \in [0,2]$ és $x<y$, akkor $\dfrac{y+x}{2} \in]0,2[$ és $\dfrac{y-x}{2} \in]0,1]$, következésképpen

$$\cos(y) - \cos(x) = -2\sin\left(\frac{y+x}{2}\right)\sin\left(\frac{y-x}{2}\right) < 0.$$

Tehát a cos függvény a $[0,2]$ intervallumon szigorúan monoton fogyó, ezért injektív. Következésképpen egyetlen olyan $x_0 \in]0,2[$ létezik, melyre $\cos(x_0)=0$ teljesül.

Definíció *Jelölje $\pi/2$ azt az egyetlen $]0,2[$-beli számot, melyre $\cos(\pi/2)=0$ teljesül.*

A

$$\sin^2(\pi/2) + \cos^2(\pi/2) = 1$$

azonosság alapján $\sin^2(\pi/2)=1$. Mivel $\pi/2 \in]0,2[$, így az előző bizonyítás szerint $\sin(\pi/2)>0$, következésképpen

$$\sin(\pi/2)=1.$$

32.2. A 25.3. szerint minden z komplex számra

$$e^{iz} = \mathrm{Cos}(z) + i\,\mathrm{Sin}(z).$$

Speciálisan,

$$e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i.$$

Ebből következik, hogy $e^{i\pi} = -1$ és $e^{2\pi i}=1$. A 25.2. állítás szerint ezért minden $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$\mathrm{Exp}(z+2\pi i) = \mathrm{Exp}(z).$$

Ez pedig maga után vonja, hogy

$$\mathrm{Ch}(z+2\pi i) = \mathrm{Ch}(z), \qquad \mathrm{Sh}(z+2\pi i) = \mathrm{Sh}(z),$$

és

$$\mathrm{Cos}(z+2\pi) = \mathrm{Cos}(z), \qquad \mathrm{Sin}(z+2\pi) = \mathrm{Sin}(z).$$

Speciálisan tehát a cos és sin függvények 2π szerint periodikusak.

B. METRIKUS TEREK

I. METRIKUS TEREK TULAJDONSÁGAI

1. Metrika, norma, skalárszorzat

1.1. Könyvünk első részében $\mathbb{K}^N$-nel foglalkoztunk, amelyek elemeinek távolsága "természetszerűleg" adódott. A matematika igen sok alkalmazásában felvetődik az igény, hogy egészen más, olykor meglehetősen "bonyolult" halmaz elemeire értelmezzük, mit jelent a távolságuk. Az általános távolságfogalmat a $\mathbb{K}^N$-en megismert távolság tulajdonságaival vezetjük be.

Definíció *Legyen M nem üres halmaz. Egy*

$$d : M\times M\to\mathbb{R}_0^+$$

*leképezést M-en adott **metrikának** vagy **távolságfüggvénynek** nevezünk, ha minden $x, y, z\in M$ esetén*

*(**M1**) $d(x, y)=0$ pontosan akkor teljesül, ha $x=y$,*
*(**M2**) $d(x, y)=d(y, x)$,*
*(**M3**) $d(x, y)\leq d(x, z)+d(z, y)$.*

*Az (M, d) párt **metrikus tér**nek nevezzük, ha M nem üres halmaz, és d metrika M felett.*

Az (**M2**) tulajdonságot a metrika **szimmetrikusságának**, az (**M3**) tulajdonságot pedig a metrikára vonatkozó **háromszög-egyenlőtlenségnek** nevezzük. Ebből viszonylag könnyen beláthatjuk, hogy a következő **négyszög-egyenlőtlenség** is teljesül: minden $x, y, u, v\in M$ esetén

$$|d(x, u)-d(y, v)| \leq d(x, y) + d(u, v),$$

hiszen egyrészt

$$d(x, u) \leq d(x, y) + d(y, u) \leq d(x, y) + d(y, v) + d(v, u),$$

másrészt

$$d(y,v) \leq d(y,x) + d(x,v) \leq d(y,x) + d(x,u) + d(u,v),$$

amelyeket átrendezve, figyelembe véve a metrika szimmetrikusságát, megkapjuk a kívánt eredményt.

1.2. Példák metrikára:

(1) $\mathbb{K}^N$-en az ismert euklidészi távolságfüggvény, azaz

$$\mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N, \quad (x,y) \mapsto \sqrt{\sum_{k=1}^{N} |x_k - y_k|^2}$$

metrika.

(2) Bármely $M \neq \emptyset$ halmazon megadhatjuk az úgynevezett **diszkrét** metrikát az

$$M \times M \to \mathbb{R}_0^+, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{ha } x=y \\ 1 & \text{ha } x \neq y \end{cases}$$

formulával. Bármely legalább kételemű halmazt a diszkrét metrikával ellátva **diszkrét metrikus térnek** nevezünk.

(3) A $[0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}_0^+$, $(x,y) \mapsto |\sin(x) - \sin(y)|$ leképezés is metrika.

1.3. Vektortereken általában olyan metrikát adunk meg, amely "illeszkedik" a lineáris struktúrához. Ilyen metrikákhoz normákon kereszetül jutunk el.

Definíció *Legyen V vektortér (a $\mathbb{K}$ test felett). Egy*

$$V \to \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto \|x\|$$

*leképezést V-n adott **normának** nevezünk, ha minden $x, y \in V$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén*

*(**N**) $\|x\| = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x = \mathbf{0}$,*
*(**NP**) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$,*
*(**NA**) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.*

*A $(V, \| \,.\, \|)$ párt ($\mathbb{K}$ feletti) **normált térnek** nevezzük, ha V vektortér és $\| \,.\, \|$ norma V-n.*

Itt az (**NA**) tulajdonságot hívjuk a normára vonatkozó **háromszög-egyenlőtlenségnek**. Ennek fontos következménye, hogy minden $x, y \in V$ esetén

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\|.$$

Ennek belátásához az

$$\|x\| = \|y + (x-y)\| \leq \|y\| + \|x-y\|$$

és az

$$\|y\| = \|x + (y-x)\| \leq \|x\| + \|y-x\|$$

egyenlőtlenségeket kell csak figyelembe vennünk.

Állítás *Ha $\|\ .\ \|$ norma a V vektortéren, akkor a*

$$V\times V\to\mathbb{R}_0^+, \quad (x,y)\mapsto\|x-y\|$$

leképezés metrika.

Ezért a továbbiakban egy normált teret a fenti metrikával ellátva metrikus térnek tekintünk.

1.4. Példák normára:

(1) $\mathbb{K}^N$-en a szokásos euklidészi abszolút-érték , azaz

$$\mathbb{K}^N\to\mathbb{R}_0^+, \quad x\mapsto|x|_2:=\sqrt{\sum_{k=1}^{N}|x_k|^2}$$

norma, amelyet ezentúl a $|\ .\ |_2$ szimbólummal jelölünk. Továbbá a

$$\mathbb{K}^N\to\mathbb{R}_0^+, \quad x\mapsto|x|_1:=\sum_{k=1}^{n}|x_k|,$$
$$\mathbb{K}^N\to\mathbb{R}_0^+, \quad x\mapsto|x|_\infty:=\max_{1\leq k\leq N}|x_k|$$

leképezések is normák.

(2) Legyen

$$l^1:=\{a\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n| < +\infty\},$$
$$l^2:=\{a\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|^2 < +\infty\},$$
$$l^\infty:=\{a\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n| < +\infty\}.$$

Ezek vektorterek a pontonkénti műveletekre nézve: az ilyen sorozatok számszorosa szintén ilyen sorozat, továbbá $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n|$ miatt l^1-beli és l^∞-beli sorozatok összege is l^1-ben, illetve l^∞-ben van; végül $|a_n + b_n|^2 = |a_n|^2 + a_n^* b_n + a_n b_n^* + |b_n|^2 \leq 4\max\{|a_n|^2, |b_n|^2\}$ miatt l^2-beli sorozatok összege is l^2-ben van. Rajtuk rendre bevezethetők a következő normák:

$$
\begin{aligned}
l^1 &\to \mathbb{R}_0^+, \quad a \mapsto \|a\|_1 := \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|,\\
l^2 &\to \mathbb{R}_0^+, \quad a \mapsto \|a\|_2 := \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2},\\
l^\infty &\to \mathbb{R}_0^+, \quad a \mapsto \|a\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.
\end{aligned}
$$

Egyszerű belátni, hogy $\|\,.\,\|_1$ és $\|\,.\,\|_\infty$ teljesíti a normára kirótt követelményeket; $\|\,.\,\|_2$-ről a következő pontban látjuk be, hogy norma.

(3) Jelölje $C([a,b])$ az $[a,b]\to\mathbb{K}$ folytonos függvények halmazát. $C([a,b])$ a pontonkénti műveletekre nézve vektortér $\mathbb{K}$ felett, melyen bevezethető a következő három norma:

$$
\begin{aligned}
C([a,b]) &\to \mathbb{R}_0^+, \quad f \mapsto \|f\|_1 := \int_a^b |f|,\\
C([a,b]) &\to \mathbb{R}_0^+, \quad f \mapsto \|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b |f|^2},\\
C([a,b]) &\to \mathbb{R}_0^+, \quad f \mapsto \|f\|_\infty := \max_{[a,b]} |f|.
\end{aligned}
$$

Itt sem okoz nehézséget megmutatni, hogy $\|\,.\,\|_1$ és $\|\,.\,\|_\infty$ teljesíti a normára kirótt követelményeket; $\|\,.\,\|_2$-ről a következő pontban látjuk be, hogy norma.

(4) Jelölje $C^1([a,b])$ az $[a,b]\to\mathbb{K}$ folytonosan differenciálható függvények halmazát. $C^1([a,b])$ a pontonkénti műveletekre nézve vektortér $\mathbb{K}$ felett (a $C([a,b])$ lineáris altere), melyen bevezetjük a következő normát:

$$
f \mapsto \max_{[a,b]} |f| + \max_{[a,b]} |f'|.
$$

1.5. Definíció *Legyen V vektortér ($\mathbb{K}$ felett). Egy*

$$V\times V\to\mathbb{K}, \quad (x,y)\mapsto\langle x,y\rangle$$

leképezést V-n adott ***skalárszorzatnak*** *nevezünk, ha minden $x,y,z\in V$, és $\alpha\in\mathbb{K}$ esetén*

*(**S1**) $\langle x,x\rangle\in\mathbb{R}_0^+$, és $\langle x,x\rangle=0$ pontosan akkor teljesül, ha $x=\mathbf{0}$,*
*(**S2**) $\langle y,x\rangle=\langle x,y\rangle^*$,*
*(**SA**) $\langle x,y+z\rangle=\langle x,y\rangle+\langle x,z\rangle$,*
*(**SP**) $\langle x,\alpha y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle$.*

A $(V,\langle .,.\rangle)$ párt ***skalárszorzatos térnek*** *nevezzük, ha V vektortér és $\langle .,.\rangle$ skalárszorzat V-n.*

Megjegyzés (**SA**) és (**SP**) együttesen azt jelentik, hogy az $(x,y)\mapsto\langle x,y\rangle$ leképezés a második változójában $\mathbb{K}$-lineáris. E tulajdonságokat (**S2**)-vel kombinálva könnyen láthatjuk, hogy a skalárszorzat az első változójában konjugált lineáris, azaz minden $x,y,z\in V$ és $\alpha\in\mathbb{K}$ esetén
(**SA'**) $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$, (**SP'**) $\langle\alpha x,y\rangle=\alpha^*\langle x,y\rangle$.

1.6. A skalárszorzatra vonatkozó alábbi két állítást ugyanúgy lehet bizonyítani, mint az A.1.5. illetve az A.1.6. állítást.

1. Állítás *(**Cauchy–Schwarz egyenlőtlenség**) Legyen $(V,\langle .,.\rangle)$ skalárszorzatos tér. Ekkor minden $x,y\in V$ esetén*

$$|\langle x,y\rangle|\leq\sqrt{\langle x,x\rangle}\,\sqrt{\langle y,y\rangle},$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha x és y párhuzamosak.

2. Állítás *Legyen $(V,\langle .,.\rangle)$ skalárszorzatos tér. Ekkor a*

$$V\to\mathbb{R}_0^+, \quad x\mapsto\sqrt{\langle x,x\rangle}=:\|x\|$$

leképezés norma V-n.

A továbbiakban egy skalárszorzatos teret a fenti normával ellátva normált térnek tekintünk.

1.7. Példák skalárszorzatra
(1) $\mathbb{K}^N$-en ismert a

$$\mathbb{K}^N\times\mathbb{K}^N\to\mathbb{K}, \quad (x,y)\mapsto\langle x,y\rangle:=\sum_{k=1}^{N}x_k^*y_k$$

skalárszorzat.

(2) l^2-n az

$$l^2 \times l^2 \to \mathbb{K}, \quad (a,b) \mapsto \langle a,b\rangle := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^* b_n$$

jól definiált leképezés (a szóban forgó sor abszolút konvergens az $|a_n|\ |b_n| \leq \frac{1}{2}(|a_n|^2 + |b_n|^2)$ egyenlőtlenség miatt) skalárszorzat. Ezért az 1.4.2-ben adott $\|\ .\ \|_2$ leképezés valóban norma.

(3) $C([a,b])$-n a

$$C([a,b]) \times C([a,b]) \to \mathbb{K}, \quad (f,g) \mapsto \langle f,g\rangle := \int_a^b f^* g$$

leképezés skalárszorzat. Ezért az 1.4.3-ban adott $\|\ .\ \|_2$ leképezés valóban norma.

(4) $\mathbb{K}^{N\times N}$-en (az $N \times N$-es mátrixok, vagyis a $\mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N$ lineáris leképezések vektorterén) a

$$\mathbb{K}^{N\times N} \times \mathbb{K}^{N\times N} \to \mathbb{K}, \quad (A,B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^* B)$$

leképezés skalárszorzat. Ez valójában az euklideszi skalalárszorzat $\mathbb{K}^{N\times N}$-en.

1.8. Definíció *Legyen (M,d) metrikus tér.*

(1) Az M nemüres F és G részhalmazának a ***távolsága***

$$d(F,G) := \inf\{d(x,y) \mid x\in F,\ y\in G\}.$$

Speciálisan, az M egy x elemének és egy H nemüres részhalmazának a ***távolsága***

$$d(x,H) := d(\{x\},H).$$

Ha H az M akármilyen részhalmaza, akkor

$$d(\emptyset,H) := 0.$$

(2) Az M egy nemüres H részhalmazának az ***átmérője***

$$\mathrm{diam}(H) := \sup\{d(x,y) : x\in H \text{ és } y\in H\}.$$

Azt mondjuk, hogy H ***korlátos****, ha $\mathrm{diam}(H) < +\infty$. Az üres halmazt nulla átmérőjűnek és így korlátosnak tekintjük.*

Az (M,d) metrikus teret, illetve a d metrikát ***korlátosnak*** *mondjuk, ha M korlátos.*

Korlátos metrikus tér minden részhalmaza korlátos. Például diszkrét metrikus tér korlátos; a $\mathbb{K}^N$-en általunk bevezetett három metrika egyike sem korlátos.

1.9. Feladatok

1. Metrika-e $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_0^+$, $\quad (x,y)\mapsto\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|^2}$?

2. Bizonyítsuk be, hogy ha d metrika M-en és $\phi{:}M\to M$ injektív leképezés, akkor $d\circ(\phi\times\phi)$ is metrika M-en.

3. Ha d_1 és d_2 metrika M-en és $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}^+$, akkor $\alpha_1 d_1+\alpha_2 d_2$ is metrika M-en. Igazoljunk hasonlót normákra is.

4. Mutassuk meg, hogy ha $d{:}M\times M\to\mathbb{R}_0^+$ metrika, és $f{:}\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}_0^+$ olyan szigorúan monoton növő függvény, hogy $f(0)=0$ és $f(\alpha+\beta)\leq f(\alpha)+f(\beta)$ teljesül minden $\alpha,\beta\in\mathbb{R}_0^+$ esetén, akkor $f\circ d$ is metrika M-en.

5. Norma-e $\mathbb{R}\to\mathbb{R}_0^+$, $\quad x\mapsto|\mathrm{arctg}(x)|$?

6. Norma-e $C^1([a,b])$-n az $f\mapsto\max\limits_{[a,b]}\big(|f|+|f'|\big)$ leképezés?

7. Ha U és V vektortér és $\|\ .\ \|$ norma V-n, valamint $L{:}U\to V$ lineáris injekció, akkor $\|L(.)\|$ norma U-n.

8. Legyen $h{:}[a,b]\to\mathbb{R}^+$ Lebesgue-integrálható függvény. Mutassuk meg, hogy $(f,g)\mapsto\displaystyle\int_a^b f^*gh$ skalárszorzat $C([a,b])$-n.

9. Legyen $\|\ .\ \|$ norma a V vektortéren, és legyen M a V zárt lineáris altere. Mutassuk meg, hogy a V/M faktortéren

$$\|x+M\|:=\inf\{\|x-z\|\ \mid z\in M\}$$

formulával normát definiálunk, amellyel V/M teljes, ha V teljes.

2. Metrikus terek topológiája

2.1. Definíció *Legyen (M,d) metrikus tér. Ekkor $x\in M$ és $r>0$ esetén a*

$$G_r^d(x):=\{y\in M\mid d(y,x)<r\},$$
$$B_r^d(x)=\{y\in M\mid d(y,x)\leq r\},$$
$$S_r^d(x):=\{y\in M\mid d(y,x)=r\}$$

*halmazokat rendre x középpontú, r sugarú **nyílt gömbnek**, **zárt gömbnek**, és **gömbhéjnak** nevezzük.*

A továbbiakban, ha félreértést nem okoz, a d jelölést elhagyjuk, és egyszerűen $G_r(x)$-et, stb. írunk.

Diszkrét metrikus tér minden x elemére $G_r(x)=\{x\}$ ha $r\leq 1$ és $G_r(x)=M$ ha $r>1$; $B_r(x)=\{x\}$ ha $r<1$ és $B_r(x)=M$ ha $r\geq 1$.

2.2. Miután értelmeztük a nyílt gömböket egy metrikus térben, az A.2. fejezet definícióinak és állításainak nagy részét megismételhetjük, $\mathbb{K}^N$ helyett a metrikus tér alaphalmazát, a $\mathbb{K}^N$-beli euklidészi távolság helyett a metrikus tér metrikáját véve.

Az A.2.5. definícióhoz hasonlóan értelmezzük egy metrikus tér részhalmazára nézve a **belső pont**, **érintkezési pont**, **határpont**, **torlódási pont**, **izolált pont** fogalmát. Érvényesek az A.2.5-ben felsorolt egyszerű tények, az ottani állítás és annak következménye metrikus terekre is.

Diszkrét metrikus térben egy részhalmaz minden pontja izolált pont és belső pont is egyben. Ezért a halmaznak nincs se határpontja, se torlódási pontja.

Az A.2.8. definícióhoz hasonlóan értelmezhető metrikus térben a **nyílt halmaz** és a **zárt halmaz** fogalma. Az A.2.9. állításai, valamint az A.2.10. állítás változatlanul érvényes metrikus terekre.

Diszkrét metrikus térben minden egyelemű halmaz nyílt, ezért minden halmaz nyílt, és így egyben zárt is, hiszen egy másik nyílt halmaz komplementere.

Az A.2.12-höz hasonlóan értelmezhető halmazok **belseje** és **lezártja** metrikus térben, és ezekre igazak maradnak az A.2.12. és az A.2.13. állítások.

Itt is igaz, hogy $G_r(x)$ nyílt halmaz, $B_r(x)$ zárt halmaz, továbbá $\overline{G_r(x)}\subset B_r(x)$, de általában nem áll egyenlőség. Ugyanis például diszkrét metrikus térben $\overline{G_1(x)}=G_1(x)=\{x\}$ és $B_1(x)=M$ bármely $x\in M$ esetén.

Az A.2.14-hez hasonlóan értelmezhető, hogy egy metrikus tér valamely részhalmaza **sűrű** egy másik halmazban, valamint az, hogy egy részhalmaz **mindenütt sűrű**.

Az A.2.11. állítás lényegesen felhasználja $\mathbb{K}^N$ egy speciális tulajdonságú részhalmazát (a racionális koordinátájú pontokat). Ezért az álítás megfelelője általában nem lesz igaz. Például ha $\mathbb{R}$-et a diszkrét metrikával látjuk el, csak az egész $\mathbb{R}$ vagy egy megszámlálható részhalmaza állítható elő megszámlálható sok nyílt gömb uniójaként. A szóban forgó részhalmazból eredő tulajdonságot külön értelmezzük metrikus terekre.

Definíció *Az (M,d) metrikus teret* ***szeparábilisnak*** *nevezzük, ha létezik megszámlálható mindenütt sűrű részhalmaza M-nek.*

Most már az A.2.11-hez hasonlóan láthatjuk be, az ott szereplő $\mathbb{P}^N$ halmaz helyett M-nek egy megszámlálható mindenütt sűrű részhalmazát véve:

Állítás *Ha (M,d) szeparábilis metrikus tér, akkor M minden nyílt részhalmaza előáll megszámlálható sok nyílt gömb uniójaként.*

2.3. Az A.3.2. definícióhoz hasonlóan értelmezhetők a **kompakt** halmazok metrikus térben. Érvényesek az A.3.3., A.3.4., A.3.5., A.3.6. és az A.3.7. állítás. Azonban az A.3.8. a $\mathbb{K}^N$ speciális tulajonságú részhalmazaira (zárt téglákra) vonatkozik, és ezt használja fel az A.3.9. állításának a bizonyítása; tetszőleges metrikus térben nem igaz a Heine–Borel-tétel (korlátos és zárt részhalmaz nem feltétlenül kompakt), sem a Bolzano–Weierstrass-tétel (korlátos végtelen halmaznak nem feltétlenül létezik torlódási pontja).

Diszkrét metrikus tér bármely részhalmaza korlátos és zárt, de csak a véges halmazok kompaktak. Ugyanis ha H egy diszkrét metrikus tér végtelen részhalmaza, akkor $\bigcup_{x\in H} G_1(x)$ a H-nak nyílt lefedése, azonban $G_1(x)=\{x\}$ miatt ennek nincs véges részlefedése. Továbbá semmilyen részhalmaznak nincs torlódási pontja.

Az A.4.3.-hoz hasonlóan definiálható metrikus tér részhalmazának **összefüggősége**. Érvényben marad az A.4.3. és az A.4.4. állítás, ez utóbbinak az értelmében definiáljuk álalában is egy részhalmaz **összefüggő komponenseit**, amelyekre igaz marad az A.4.5. állítás.

Diszkrét metrikus térben bármely nem egyelemű részhalmaz széteső (nem összefüggő).

A **csillagszerű** és a **konvex** halmazok definíciója felhasználja $\mathbb{K}^N$ speciális tulajdonságú részhalmazait (a szakaszokat), ezért általában metrikus térre ezek a fogalmak értelmetlenek. Viszont normált terekben ugyanúgy értelmezhetjük ezeket a halmazokat, és igaz marad, hogy a gömbök konvexek, valamint igaz marad az A.4.6. állítás is.

2.4. A fejezetet a fejezet címének magyarázatával zárjuk. Ha elfelejtenénk, hogyan van megadva egy halmazon egy metrika, csak azt tudnánk, mik a nyílt halmazok, akkor is mindent, ami ebben a fejezetben szerepelt, meg tudnánk fogalmazni azáltal, hogy a nyílt gömbök helyett nyílt halmazt mondunk.

Definíció *Egy metrikus tér nyílt halmazainak összességét a metrikus tér **topológiájának** hívjuk.*

2.5. Feladatok

1. Vizsgáljuk meg, az A.1-A.4. fejezetek azon feladatait, amelyek nem $\mathbb{K}^N$ konkrét részhalmazaira valamint nem Descartes-szorzatokra vonatkoznak: melyek maradnak érvényben általánosabb keretek között is? Világos, hogy ahol felhasználjuk $\mathbb{K}^N$ lineáris szerkezetét (összeadást vagy számmal szorzást), az legfeljebb normált térben lehet igaz. Az “értelemszerű” a következőkben erre utal.

Az A.1.10. feladatainak állításai értelemszerűen érvényben maradnak, kivéve az 8.(i)-t, amely csak nem korlátos metrikus térre igaz.

Az A.2.15. feldatainak állításai közül értelemszerűen érvényben marad 4., 7., 8., 9., 10., 12., 14. és 15.. Csak normált térben lesz igaz 2., 3., és 11.. Mit tudunk állítani ezek helyett metrikus térben?

Az A.3.10. feladatainak állításai értelemszerűen érvényben maradnak.

Az A.4.9. feladatainak állításai értelemszerűen érvényben maradnak.

2. Mutassuk meg, hogy normált térben minden x elemre és $r>0$ valós számra

(i) $G_r(x){=}x{+}G_r(\mathbf{0})$, (ii) $G_r(\mathbf{0}){=}r\,G_1(\mathbf{0})$.

3. Normált tér bármely H részhalmazára

$$\overline{H}{=}\bigcap_{r>0}(H{+}G_r(\mathbf{0})).$$

4. Igazoljuk, hogy $C^1[a,b]$ (a folytonosan differenciálható függvények halmaza) a $C([a,b])$ térben értelmezett egyik normára nézve sem zárt, a belseje pedig üres.

5. Legyen

$$M := \{f \in C([a,b]) \mid f \text{ monoton növő}\},$$

$$S := \{f \in C([a,b]) \mid f \text{ szigorúan monoton növő}\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy mindhárom normára nézve M és S beleseje üres, $\overline{S} = M$.

6. Legyen $\alpha \geq 0$ esetére

$$H_\alpha := \{f \in C([a,b]) \mid \mathrm{Re} f \geq \alpha\}, \qquad G_\alpha := \{f \in C([a,b]) \mid \mathrm{Re} f > \alpha\}.$$

Mutassuk meg, hogy mindhárom normára nézve

$$\overset{\circ}{H}_0 = G_0, \quad \overline{G_0} = H_0,$$

valamint

$$\bigcup_{\alpha>0} G_\alpha = \bigcup_{\alpha>0} H_\alpha = G_0.$$

7. Legyen $\alpha \geq 0$ esetére

$$H_\alpha := \{a \in l^\infty \mid \mathrm{Re} a_n \geq \alpha \ (n{\in}\mathbb{N})\}, \qquad G_\alpha := \{a \in l^\infty \mid \mathrm{Re} a_n > \alpha \ (n{\in}\mathbb{N})\}.$$

Mutassuk meg, hogy

$$\overset{\circ}{H}_0 = \overset{\circ}{G}_0 = \bigcup_{\alpha>0} G_\alpha = \bigcup_{\alpha>0} H_\alpha \subsetneqq G_0,$$

$$\overline{G_0} = H_0.$$

8. Legyen $p := 1, 2$, és

$$H_0 := \{a \in l^p \mid \mathrm{Re} a_n \geq 0 \ (n{\in}\mathbb{N})\}, \qquad G_0 := \{a \in l^p \mid \mathrm{Re} a_n > \alpha \ (n{\in}\mathbb{N})\}.$$

Mutassuk meg, hogy

$$\overset{\circ}{H}_0 = \overset{\circ}{G}_0 = \emptyset, \qquad \overline{G_0} = H_0.$$

3. Metrika és norma leszűkítése, szorzatmetrikák, szorzatnormák

3.1. Legyen (M,d) metrikus tér és $R\subset M$. Ekkor $d|_{R\times R}$ metrika R-en, amelynek neve: d-nek R-re való **leszűkítése**.

Hasonlóan, ha $(V,\|\ .\ \|)$ normált tér és $X\subset V$ lineáris altér, akkor a $\|\ .\ \|$ normának az X-re való leszűkítése norma X-en.

A továbbiakban, ha az ellenkezőjét nem mondjuk, egy metrikus tér részhalmazát, (illetve egy normált tér alterét) mindig a leszűkített metrikával (illetve normával) tekintjük metrikus térnek (illetve normált térnek).

Az A.5. fejezetben bevezett részhalmazra vonatkozó belső pont, nyíltság stb. annak felel meg, hogy az $(R,d|_{R\times R})$ metrikus tér részhalmazainak belső pontjait, nyíltságát stb. tekintjük. Mivel $x\in R$ és $r>0$ esetén

$$G_r^{d|_{R\times R}}(x) = G_r^d(x)\cap R,$$

egyszerűen látható, hogy az A.5. állításai érvényesek metrikus terekre is.

3.2. Többféle lehetőség kínálkozik, hogy véges sok – N darab – metrikus (normált) tér Descartes-szorzatán metrikát (normát) határozzunk meg. Az alábbi állítások bizonyítása igen egyszerű, az olvasóra bízzuk.

1. Állítás *Legyenek és (M_i,d_i) metrikus terek ($i=1,\dots,N$), és $M:=\mathop{\times}\limits_{i=1}^{N} M_i$. Az $x,y\in M$ esetére a*

$$D_{(1)}(x,y):=\sum_{i=1}^{N} d_i(\mathrm{pr}_i(x),\mathrm{pr}_i(y)),$$
$$D_{(2)}(x,y):=\sqrt{\sum_{i=1}^{N} d_i(\mathrm{pr}_i(x),\mathrm{pr}_i(y))^2}\ ,$$
$$D_{(\infty)}(x,y):=\max_{1\le i\le N} d_i(\mathrm{pr}_i(x),\mathrm{pr}_i(y))$$

formulákkal meghatározott $D_{(1)}$, $D_{(2)}$ és $D_{(\infty)}$ leképezések metrikák M-en.

2. Állítás *Legyenek* $(V_i, \| \,.\, \|_i)$ *normált terek* $(i{=}1,\dots,N)$, *és* $V{:=}\bigtimes_{i=1}^{N} V_i$. *Az* $x{\in}V$ *esetére a*

$$\|x\|_{(1)}{:=}\sum_{i=1}^{N}\|\mathrm{pr}_i(x)\|_i,$$
$$\|x\|_{(2)}{:=}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\|\mathrm{pr}_i(x)\|_i^2},$$
$$\|x\|_{(\infty)}{:=}\max_{1\le i\le N}\|\mathrm{pr}_i(x)\|_i$$

formulákkal meghatározott $\| \,.\, \|_{(1)}$, $\| \,.\, \|_{(2)}$ *és* $\| \,.\, \|_{(\infty)}$ *leképezések normák* V*-n.*

A későbbiekben látni fogjuk, hogy ezen metrikák illetve normák a szorzathalmazon ugyanazt a topológiát határozzák meg.

3.3. Feladatok

1. Igazoljuk, hogy a 3.2. pont jelöléseivel $x{\in}M$ és $r{>}0$ esetén

$$G_r^{(\infty)}(x)=\bigtimes_{i=1}^{N} G_r^{(i)}(\mathrm{pr}_i(x)),$$

ahol a felső indexek arra utalnak, mely metrikára vonatkozó gömbökről van szó.

2. Mutassuk meg, hogy

$$D_{(\infty)}\le D_{(2)}\le D_{(1)}\le\sqrt{N}\,D_{(2)}\le N\,D_{(\infty)},$$

és hasonlóan

$$\| \,.\, \|_{(\infty)}\le\| \,.\, \|_{(2)}\le\| \,.\, \|_{(1)}\le\sqrt{N}\| \,.\, \|_{(2)}\le N\| \,.\, \|_{(\infty)}.$$

3. A $C^1([a,b]){\to}C([a,b]){\times}C([a,b])$, $f{\mapsto}(f,f')$ leképezés lineáris injekció. Adjunk meg ennek alapján (lásd az 1.9.7. feladatot) a szorzatnormák segítségével normákat $C^1([a,b])$-n. Vessük össze ezeket az 1.4.4-ben adott normával.

4. Legyen (M_1,d_1) és (M_2,d_2) metrikus tér. Bizonyítsuk be, hogy ha $H_1{\subset}M_1$ és $H_2{\subset}M_2$ nyíltak (zártak), akkor $H_1{\times}H_2$ is nyílt (zárt) akármelyik szorzatmetrikában.

5. Legyen H_i az (M_i,d_i) metrikus tér részhalmaza $(i=1,2)$. Ekkor $\overline{H_1{\times}H_2}=\overline{H_1}{\times}\overline{H_2}$ és $\overset{\circ}{\overbrace{H_1{\times}H_2}}=\overset{\circ}{H_1}{\times}\overset{\circ}{H_2}$.

6. Legyen $(V_i, \langle , \rangle_i)$ skalárszorzatos tér, $i = 1, \ldots, N$, és $V := \mathop{\times}\limits_{i=1}^{N} V_i$. Mutassuk meg, hogy

$$V \times V \to \mathbb{K}, \quad (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{N} \langle \mathrm{pr}_i(x), \mathrm{pr}_i(y) \rangle$$

skalárszorzat. Milyen normát határoz ez meg a szorzattéren?

4. Sorozatok metrikus terekben

4.1. Az A.6.3. és A.6.6. definíciókhoz hasonlóan értelmezhető metrikus térbeli sorozatok **sűrűsödési helye, határértéke** és **konvergenciá**ja. Az A.6.3., A.6.4., A.6.6., A.6.7., A.6.8. és az A.6.9. állítások és következményeik metrikus terekre változatlanul érvényesek. Nem igaz viszont az A.6.5. állítás, amely a Bolzano–Weierstrass-tételen alapszik; ehelyett csak azt tudjuk mondani, hogy *kompakt halmazban futó sorozatnak van sűrűsödési helye, méghozzá a kompakt halmazban* (mert kompakt halmaz végtelen részhalmazának van torlódási pontja a kompakt halmazban).

Például diszkrét metrikus térben egy sorozat pontosan akkor konvergens, ha egy indextől kezdve állandó. Ezért, ha $\mathbb{R}$-et ellátjuk a diszkrét metrikával, akkor az $\mathbb{N}{\to}\mathbb{R}$, $n{\mapsto}n$ sorozat korlátos, de nincs konvergens részsorozata.

A **részsorozatokat** ugyanúgy definiáljuk, mint A.9.1-ben. Érvényben maradnak rájuk az A.9.2., A.9.3. és A.9.4. állítások, de az A.9.4. állítás következménye nem igaz; ehelyett csak azt tudjuk mondani, hogy kompakt halmazban futó sorozatnak van konvergens részsorozata (amelynek a határértéke szükségszerűen a kompakt halmaz eleme).

Érvényes továbbá metrikus terekben egy részhalmaz zártságát sorozatokkal jellemző A.10.2. állítás is, azonban a korlátosság és a kompaktság jellemzésére vonatkozó A.10.3. és A.10.4. állítás nem igaz.

Egyelőre bizonyítás nélkül közöljük azt a fontos tényt, hogy az A.10.5. állítás (noha a kompakt halmazok sorozatokkal való jellemzésével bizonyítottuk, ami általában nem igaz) érvényben marad (lásd az 5.9.6. feladatot):

Állítás *Kompakt halmazok Descartes-szorzata (a 3.2-ben adott akármelyik szorzatmetrikában) kompakt.*

4.2. Az A.9.5-en adott definícióhoz hasonlóan értelmezzük metrikus terekben a **Cauchy-féle** sorozatokat. Érvényben maradnak az A.9.6., A.9.7. és A.9.8. állítások metrikus terekben is. Azonban az A.9.9. állítás nem: metrikus térbeli Cauchy-sorozat nem feltétlenül konvergens.

Vegyük például az $\mathbb{R}^+$-t a szokásos metrikával. Ebben $n \mapsto \dfrac{1}{n}$ Cauchy-sorozat, de nem konvergens.

Definíció *Azt mondjuk, hogy egy metrikus tér* ***teljes****, ha benne minden Cauchy-sorozat konvergens.*

4.3. Az A.9.9. állítás szerint $\mathbb{K}^N$ az euklidészi távolsággal teljes metrikus tér. Későbbi tanulmányaink során látni fogjuk, hogy l^1, l^2 és l^∞ is teljes az 1.4.2-ben adott normákkal.

1. Állítás *A $C([a,b])$ vektortér a $\|\ .\ \|_\infty$ normával ellátva teljes.*

Bizonyítás Egy $C([a,b])$-beli függvényzorozatnak a $\|\ .\ \|_\infty$ normában való konvergenciája az $[a,b]$-n egyenletes konvergenciát jelenti. Ha f_n $(n\in\mathbb{N})$ a $\|\ .\ \|_\infty$ szerint Cauchy-sorozat, akkor minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, hogy minden $m, n > n_\varepsilon$ természetes számra

$$\max_{x\in[a,b]} |f_m(x) - f_n(x)| = \|f_m - f_m\| \leq \varepsilon,$$

és ez pontosan az egyenletes konvergencia Cauchy-kritériuma. Tehát a függvénysorozat egyenletesen konvergál egy f függvényhez, amely az A.31.2. szerint folytonos, vagyis a függvénysorozat a $\|\ .\ \|_\infty$ normában konvergál f-hez.

2. Állítás *A $C^1([a,b])$ vektortér az 1.4.4-ben meghatározott normával teljes.*

Bizonyítás Ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat $C^1([a,b])$-ben az adott normára vonatkozóan, akkor mind $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mind $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens $[a,b]$-n, és ezért a határérték-függvények folytonosak; az Analízis IV.A.4.1. szerint $f{:=}\lim\limits_n f_n$ differenciálható is és $f'{=}\lim\limits_n f'_n$, amiből azonnal következik, hogy $f{\in}C^1([a,b])$, és a szóban forgó Cauchy-sorozat f-hez konvergál az adott norma szerint.

4.4.1. Állítás *Legyen (M,d) metrikus tér, és H olyan részhalmaza M-nek, hogy a $(H, d|_{H\times H})$ metrikus tér teljes. Ekkor H zárt M-ben.*

Bizonyítás Legyen $a{:}\mathbb{N}{\to}H$ M-ben konvergens sorozat. Ekkor a Cauchy-sorozat a $(H, d|_{H\times H})$ metrikus térben, következésképpen konvergens is. Ha $x{\in}H$ jelöli az a határértékét ezen metrikus térben, akkor x határértéke a-nak az (M,d) metrikus térben is. Így H zárt részhalmaza M-nek.

2. Állítás *Legyen (M,d) teljes metrikus tér, és H zárt részhalmaza M-nek. Ekkor a $(H, d|_{H\times H})$ metrikus tér teljes.*

Bizonyítás Legyen a Cauchy-sorozat H-ban. Ekkor a Cauchy-sorozat M-ben, így konvergens is, és H zártsága miatt $x{:=}\lim_n a_n{\in}H$. Ekkor nyilvánvaló, hogy x határértéke a-nak a $(H, d|_{H\times H})$ metrikus térben is.

4.5. Állítás *Metrikus tér kompakt részhalmaza teljes.*

Bizonyítás Legyen K kompakt halmaz és $a{:}\mathbb{N} \to K$ Cauchy-sorozat. A 4.1-ben mondottak szerint van a-nak sűrűsödési helye K-ban. Azonban, ha egy Cauchy-sorozatnak van sűrűsödési helye, akkor konvergens is, határértéke a sűrűsödési hely.

4.6. Állítás *Legyenek (M_i, d_i) metrikus terek $(i{=}1, \dots, N)$ és $M{:=}\bigtimes_{i=1}^{N} M_i$. Jelölje D a 3.2.-ben definiált $D_{(1)}, D_{(2)}, D_{(\infty)}$ metrikák akármelyikét, és legyen $a{:}\mathbb{N}{\to}M$ sorozat.*

(1) a pontosan akkor konvergens (M, D)-ben, ha $\mathrm{pr}_i{\circ}a$ konvergens (M_i, d_i)-ben minden $i{=}1, \dots, N$ esetén, és ekkor

$$\mathrm{pr}_i(\lim a) = \lim \mathrm{pr}_i{\circ}a.$$

(2) a pontosan akkor Cauchy-féle (M, D)-ben, ha $\mathrm{pr}_i{\circ}a$ Cauhcy-féle (M_i, d_i)-ben minden $i{=}1, \dots, N$ esetén.

Bizonyítás (1) Tegyük fel, hogy a konvergens, és legyen $x{:=}\lim a$. Ekkor minden $\varepsilon{>}0$ számhoz létezik $n_\varepsilon{\in}\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n{\geq}n_\varepsilon$ esetén $D(a_n, x){<}\varepsilon$. Ekkor minden $i{=}1, \dots, N$ és $n{\geq}n_\varepsilon$ esetén

$$d_i(\mathrm{pr}_i(a_n), \mathrm{pr}_i(x)) < \varepsilon,$$

következésképpen $\mathrm{pr}_i{\circ}a$ konvergens, és $\lim \mathrm{pr}_i{\circ}a{=}\mathrm{pr}_i(x)$.

Fordítva, tegyük fel, hogy minden $i{=}1, \dots, N$ esetén $\mathrm{pr}_i{\circ}a$ konvergens, legyen $x_i{:=}\lim \mathrm{pr}_i{\circ}a$, és $x{:=}(x_1, \dots, x_n){\in}M$. Ekkor a metrikus terekre is értelemszerűen érvényben levő A.6.9.2. állítás szerint minden $\varepsilon{>}0$ esetén létezik $n_\varepsilon{\in}\mathbb{N}$ úgy, hogy ha $n{\geq}n_\varepsilon^{(i)}$, akkor $d_i(\mathrm{pr}_i(a_n), x_i){<}\varepsilon$ minden i-re, és így

$$D(a_n, x){<}\begin{cases} N\varepsilon & \text{ha } D = D_1, \\ \sqrt{N}\varepsilon & \text{ha } D = D_2, \\ \varepsilon & \text{ha } D = D_\infty, \end{cases}$$

következésképpen a konvergens, és $\lim a = x$.

(2) bizonyítása hasonló az (1) bizonyításához.

Következmény (M,D) pontosan akkor teljes, ha minden $i{=}1,\dots,N$ esetén (M_i,d_i) teljes.

4.7. Az előző állítás az A.7.1. állítás egy megfelelője. Annak a fejezetnek a további eredményeit nyilvánvalóan csak normált terekre lehet általánosítani.

Érvényben marad $(V,\|\,.\,\|)$ normált térre, hogy ha $a,b{:}\mathbb{N}{\to}V$ és $\alpha{:}\mathbb{N}{\to}\mathbb{K}$ konvergens sorozatok, akkor az $a{+}b$, αb, $\|a\|$ sorozatok is konvergensek, és

$$\lim(a{+}b){=}\lim a{+}\lim b,$$
$$\lim(\alpha b){=}\lim\alpha\lim b,$$
$$\lim\|a\|{=}\|\lim a\|,$$

és ha $(V,\langle .,.\rangle)$ skalárszorzatos tér, akkor $\langle a,b\rangle$ is konvergens, és

$$\lim\langle a,b\rangle=\langle\lim a,\lim b\rangle.$$

Igaz marad normált térre az A.7.3. állítás is.

Megfogalmazzuk az A.7.1. egy megfelelőjét normált térre. Bizonyításához felhasználunk valamit, amit csak 10.2-ben igazolunk. Emlékeztetünk, hogy egy V vektortér V^* duálisa a $V\to\mathbb{K}$ lineáris leképezések összessége.

Állítás *Legyen $(V,\|\,.\,\|)$ véges dimenziós normált tér. Egy $a{:}\mathbb{N}\to V$ sorozatra a következők egyenértékűek:*

(1) konvergens,

(2) minden $p\in V^*$ esetén $p\circ a$ konvergens,

(3) a V^* egy $p_1,\dots,p_N$ bázisára $p_1\circ a,\dots,p_N\circ a$ konvergens.

Bizonyítás Mivel véges dimenziós normált téren minden lineáris leképezés folytonos (lásd 10.2.), (1)-ből következik (2), az pedig nyilvánvalóan maga után vonja (3)-at.

Tegyük fel, hogy (3) teljesül, legyen $\alpha_i:=\lim_n(p_i|a_n)$ $(i=1,\dots,N)$ és $v_1,\dots,v_N$ a V-nek az a bázisa, amelynek duálisa $p_1,\dots,p_N$. Ekkor (lásd Analízis II.12.4.)

$$\left\|a_n-\sum_{i=1}^N\alpha_iv_i\right\|=\left\|\sum_{i=1}^N(p_i|a_n)v_i-\sum_{i=1}^N\alpha_iv_i\right\|\le\max_{1\le i\le N}|(p_i|a_n)-\alpha_i|\sum_{i=1}^N\|v_i\|,$$

ami mutatja, hogy (1) is teljesül, és az előbb mndottak szerint akkor (2) is.

4.8. Az A.15. és A.17. fejezetben mondottakhoz hasonlóan értelmezzük normált térben a **sorokat**, a sorok **konvergenciáját** és **abszolút konvergenciáját**. Az ottani eredmények általánosításánál óvatosnak kell lennünk, mert ott egyes bizonyításokban felhasználtuk a Cauchy-kritériumot (azaz $\mathbb{K}^N$ teljességét).

(1) Ha a $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ V-beli sor konvergens, akkor $\lim_n a_n{=}0$.

(2) Ha $(V, \| \; . \; \|)$ teljes, és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ abszolút konvergens, akkor konvergens, sőt feltétlen konvergens V-ben.

Ha $(V, \| \; . \; \|)$ nem teljes, akkor abszolút konvergens sor nem szükségképpen konvergens.

(3) Ha V véges dimenziós, és a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor feltétlen konvergens, akkor abszolút konvergens.

(4) V-beli sorok abszolút konvergenciájára igaz marad a gyök- és hányadoskritérium.

(5) Érvényben marad a kettős indexű sorok abszolút konvergenciájáról és az összegzési sorrend felcseréléséről szóló állítás.

4.9. Feladatok

1. Diszkrét metrikus térben egy sorozat pontosan akkor Cauchy-féle, ha egy indextől kezdve állandó. Mit lehet mondani ennek alapján diszkrét metrikus terek teljességéről?

2. Mutassuk meg, hogy $C([a, b])$ az $\| \; . \; \|_1$ és a $\| \; . \; \|_2$ normával nem teljes. Útmutatás az $\| \; . \; \|_1$ normára: legyen $a{:=}0$ és $b{:=}1$, és $n{\in}\mathbb{N}$ esetén

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{ha } 0{\le}x{\le}1/2, \\ n(x-1/2) & \text{ha } 1/2{\le}x{\le}1/2{+}1/n, \\ 1 & \text{ha } 1/2{+}1/n{\le}x{\le}1. \end{cases}$$

Ekkor $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, mert $m, n{\in}\mathbb{N}$ esetén

$$\|f_m{-}f_n\|_1 = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| .$$

Tegyük fel, hogy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál egy $f{\in}C([a, b])$ függvényhez, azaz

$$\lim_n \int_0^1 |f_n{-}f| = 0 \; .$$

Mutassuk meg, hogy erre függvényre $x{\in}]0, 1/2[$ esetén $f(x){=}0$, $x{\in}]1/2, 1[$ esetén $f(x){=}1$ kell, hogy teljesüljön, ami lehetetlen.

3. Mutassuk meg, hogy normált tér bármely F és G részhalmazára, valamint minden α számra

(i) $\overline{F}{+}\overline{G} \subset \overline{F{+}G}$, (ii) $\overline{\alpha F} = \alpha\overline{F}$.

4. Bizonyítsuk be a 4.5. állítás általánosítását: legyen H egy metrikus tér részhalmaza; ha a H minden végtelen részhalmazának van torlódási pontja, akkor H teljes.

5. Metrikák és normák összehasonlítása

5.1. Definíció *Legyen d_1 és d_2 metrika az M nem üres halmazon. Azt mondjuk, hogy d_1 **finomabb** d_2**-nél** (d_2 **durvább** d_1**-nél**), ha minden d_2 szerint nyílt halmaz nyílt d_1 szerint is.*

*d_1 és d_2 **ekvivalensek**, ha d_1 finomabb d_2-nél, és d_2 finomabb d_1-nél.*

d_1 akkor és csak akkor finomabb d_2-nél, ha az (M, d_1) metrikus tér topológiája tartalmazza az (M, d_2) metrikus tér topológiáját.

Nyilvánvaló továbbá, hogy d_1 pontosan akkor finomabb d_2-nél, ha minden d_2 szerint zárt halmaz zárt d_1 szerint is.

Ekvivalens metrikák topológiája megegyezik, azaz két ekvivalens metrikára nézve ugyanazok a nyílt halmazok és a zárt halmazok. Ebből következően ugyanazok a kompakt halmazok is.

5.2. Állítás *Legyen d_1 és d_2 metrika az M nem üres halmazon. d_1 pontosan akkor finomabb d_2-nél, ha minden d_2 szerinti nyílt gömb tartalmaz ugyanolyan középpontú d_1 szerinti nyílt gömböt.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy d_1 finomabb d_2-nél. Ekkor $x \in M$ és $r>0$ esetén a $G_r^{d_2}(x)$ halmaz nyílt d_2 szerint, így nyílt d_1 szerint is. Mivel x eleme a fenti gömbnek, belső pontja is d_1 szerint, következésképpen létezik $s>0$ úgy, hogy $G_s^{d_1}(x) \subset G_r^{d_2}(x)$.

Fordítva, tegyük fel, hogy minden d_2 szerinti nyílt gömb tartalmaz ugyanolyan középpontú d_1 szerinti nyílt gömböt. Legyen $U \subset M$ a d_2 szerint nyílt halmaz, és $x \in U$. Ekkor létezik $r>0$ úgy, hogy $G_r^{d_2}(x) \subset U$. Feltevésünk szerint létezik $s>0$ úgy, hogy $G_s^{d_1}(x) \subset G_r^{d_2}(x)$, tehát $G_s^{d_1}(x) \subset U$, azaz x belső pontja U-nak d_1 szerint; ez azt jelenti, hogy U nyílt d_1 szerint is.

5.3. Állítás *Legyen d_1 és d_2 metrika az M nem üres halmazon. Ha létezik $\alpha>0$ úgy, hogy $d_2 \le \alpha d_1$, akkor d_1 finomabb d_2-nél.*

Bizonyítás Minden $x \in M$ és $r>0$ esetén

$$G_{r/\alpha}^{d_1}(x) \subset G_r^{d_2}(x). \blacksquare$$

Az állítás megfordítása nem igaz. Bármely nem üres halmazon a diszkrét metrika finomabb minden más metrikánál, hiszen diszkrét metrikus térben minden halmaz nyílt. Viszont $\mathbb{R}$-en a diszkrét metrika és az euklidészi metrika között nem áll fenn a fenti egyenlőtlenség semmilyen α-val.

Definíció *Az M nemüres halmazon adott d_1 metrika* ***metrikusan finomabb*** *a d_2 metrikánál, ha létezik $\alpha>0$ úgy, hogy $d_2\leq\alpha d_1$. A két metrika* ***metrikusan ekvivalens****, ha kölcsönösen metrikusan finomabbak egymásnál.*

5.4. A gyakorlatban hasznos a metrikák összehasonlításának sorozatokkal való megfogalmazása a következő állítás szerint.

Állítás *Legyen d_1 és d_2 metrika az M nem üres halmazon. d_1 pontosan akkor finomabb d_2-nél, ha minden olyan M-beli sorozat, mely d_1 szerint konvergens, konvergens d_2 szerint is ugyanazzal a határértékkel.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy d_1 finomabb d_2-nél. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d_1-szerint konvergens sorozat M-ben és x a határértéke d_1 szerint. Ekkor minden $\varepsilon>0$ esetén az 5.2. állítás szerint létezik $\delta>0$ úgy, hogy

$$G_\delta^{d_1}(x) \subset G_\varepsilon^{d_2}(x).$$

Létezik $n_\delta\in\mathbb{N}$ úgy, hogy $\{a_n \mid n\geq n_\delta\}\subset G_\delta^{d_1}(x)$. Ekkor $\{a_n \mid n\geq n_\delta\}\subset G_\varepsilon^{d_2}(x)$, következésképpen az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat d_2 szerint is konvergál x-hez.

Fordítva, tegyük fel, hogy minden olyan M-beli sorozat, mely d_1 szerint konvergens, konvergens d_2 szerint is ugyanazzal a határértékkel. Legyen $H\subset M$ zárt halmaz d_2-re nézve. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d_1 szerint konvergens H-beli sorozat, és x a határértéke. Ekkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a d_2 metrika szerint is konvergál x-hez, így $x\in H$, mivel H zárt d_2 szerint. Így az A.10.2. állítás metrikus térbeli megfelelője szerint H zárt a d_1 metrika szerint is. ■

Az állítás nyilvánvaló következménye, hogy egy nemüres halmazon két metrika pontosan akkor ekvivalens egymással, ha rájuk nézve ugyanazon sorozatok konvergensek ugyanazon határértékekkel.

5.5. Megjegyzések (i) Ekvivalens metrikákra nézve a Cauchy-sorozatok különbözők lehetnek. Például

$$\begin{aligned} d_1 &: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+, \quad (x,y)\mapsto|x-y|, \\ d_2 &: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+, \quad (x,y)\mapsto|1/x-1/y| \end{aligned}$$

ekvivalens metrikák $\mathbb{R}^+$-on, és a $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat Cauchy-féle d_1-re nézve, de nem Cauchy-féle d_2-re nézve, az $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat esetén pedig éppen fordítva.

Viszont, ha d_1 metrikusan finomabb d_2-nél, akkor minden d_1-re nézve Cauchy-sorozat d_2-ben is Cauchy-sorozat; ha tehát d_1 és d_2 metrikusan ekvivalensek, akkor ugyanazok a sorozatok Cauchy-félék mindkét metrikában.

(ii) Hasonló mondható halmazok korlátosságáról. Két ekvivalens metrika esetén egy halmaz lehet korlátos az egyik metrikában és nem korlátos a másikban.

Példaként a 3. feladatra utalunk. Viszont ha a két metrika metrikusan ekvivalens, akkor ugyanazon halmazok korlátosak mindkettőben.

5.6. A 3.3.2. feladat, a 4.6. állítás és az imént mondottak alapján:

Állítás *Legyen (M_i, d_i) metrikus tér (i=1, …, N). Az $\bigtimes_{i=1}^{N} M_i$-en a 3.2. szerint definiált $D_{(1)}$, $D_{(2)}$, $D_{(\infty)}$ metrikák metrikusan ekvivalensek egymással.*

A szorzattér akármelyik szorzatmetrikával pontosan akkor teljes, ha minden (M_i, d_i) teljes.

5.7. Definíció *Legyen $\|\,.\,\|_1$ és $\|\,.\,\|_2$ norma a V vektortéren. Azt mondjuk, hogy $\|\,.\,\|_1$* ***finomabb*** *$\|\,.\,\|_2$**-nél** ($\|\,.\,\|_2$* ***durvább*** *$\|\,.\,\|_1$**-nél**), ha a $\|\,.\,\|_1$ által az 1.3. szerint meghatározott metrika finomabb a $\|\,.\,\|_2$ által meghatározott metrikánál. Hasonlóan értelmezzük azt, hogy az egyik norma* ***metrikusan finomabb*** *a másiknál.*

Normák esetén igaz az 5.3. állítás fordítottja is, vagyis normák között a finomabb és a metrikusan finomabb tulajdonságok egybeesnek.

Állítás *A V vektortéren adott $\|\,.\,\|_1$ norma pontosan akkor finomabb a $\|\,.\,\|_2$ normánál, ha metrikusan finomabb, azaz ha létezik $\alpha>0$ úgy, hogy $\|\,.\,\|_2 \le \alpha \|\,.\,\|_1$.*

Bizonyítás Ha $\|\,.\,\|_1$ finomabb $\|\,.\,\|_2$-nél, akkor az 5.2. állítás szerint létezik $r>0$ úgy, hogy

$$G_r^{(1)}\mathbf{0}) \subset G_1^{(2)}(\mathbf{0}).$$

Ha $\mathbf{0} \neq x \in V$, akkor

$$\left\| \frac{r}{2\|x\|_1} x \right\|_1 = \frac{r}{2} < r,$$

következésképpen

$$\left\| \frac{r}{2\|x\|_1} x \right\|_2 < 1, \quad \text{azaz} \quad \|x\|_2 \le \frac{2}{r}\|x\|_1,$$

így $\|\,.\,\|_2 \le \dfrac{2}{r}\|\,.\,\|_1$.

5.8. (1) $\mathbb{K}^N$-en a $|\,.\,|_1$, $|\,.\,|_2$ és $|\,.\,|_\infty$ normák ekvivalensek, hiszen ezek a $\mathbb{K}$ normájából származó szorzatnormák.

(2) $C([a,b])$-n a $\|\,.\,\|_\infty$ norma finomabb a $\|\,.\,\|_2$ normánál, és ez finomabb a $\|\,.\,\|_1$ normánál, de ezen normák nem ekvivalensek. Ugyanis, a Cauchy-egyenlőtlenség

szerint $f \in C([a,b])$ esetén

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f| = \int_a^b 1|f| \leq \sqrt{\int_a^b 1^2}\sqrt{\int_a^b |f|^2} = \sqrt{b-a}\|f\|_2,$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f|^2} \leq \sqrt{\int_a^b \max_{x\in[a,b]} |f(x)|^2} = \sqrt{b-a}\|f\|_\infty.$$

Legyen $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f_n(x) := \begin{cases} -n(x-a)+1 & \text{ha } a \leq x \leq a+1/n, \\ 0 & \text{ha } a+1/n \leq x \leq b, \end{cases}$$

és $g_n := \sqrt{n}\, f_n$. Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a $\| \,.\, \|_2$ normában nullához tart, a $\| \,.\, \|_\infty$ normában nem; és $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\| \,.\, \|_1$ normában nullához tart, a $\| \,.\, \|_2$ normában nem.

(3) Nyilvánvaló, hogy $l^1 \subset l^2 \subset l^\infty$. l^1-en a $\| \,.\, \|_1$ norma finomabb a $\| \,.\, \|_2$ normánál, és ez utóbbi finomabb a $\| \,.\, \|_\infty$ normánál, de ezek a normák l^1-en nem ekvivalensek. Ugyanis, $a \in l^1$ esetén

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \leq \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

Viszont

$$(1,0,0,0,\dots) \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots\right) \quad \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \dots\right) \quad \dots$$

olyan sorozat, mely a $\| \,.\, \|_2$ normában nullához tart, az $\| \,.\, \|_1$ normában nem; és

$$(1,0,0,\dots) \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots\right) \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \dots\right) \quad \dots$$

olyan sorozat, mely a $\| \,.\, \|_\infty$ normában nullához tart, a $\| \,.\, \|_2$ normában nem.

5.9. Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{N}$-en a diszkrét metrika és a szokásos metrika (azaz $\mathbb{R}$ euklidészi távolságfüggvényének a leszűkítése) ekvivalensek.

2. Igazoljuk hogy az 1.9.4. feladat szerinti f függvény esetén $f \circ d$ pontosan akkor ekvivalens d-vel, ha f jobbról folytonos a 0-ban.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha d metrika az M nemüres halmazon, akkor

$$\frac{d}{1+d} \quad \text{és} \quad \min(1, d)$$

a d-vel ekvivalens korlátos metrikák M-en.

4. Legyen d_1 és d_2 ugyanazon a halmazon adott metrika és $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Hogyan viszonylik az $\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2$ metrika d_1-hez és d_2-höz?

5. Hogyan viszonylik a $C^1([a, b])$-n az 1.4.4-ben adott norma a $C([a, b])$-n ismert normák leszűkítéseihez?

6. A 3.3.1. feladat alapján világos, hogy ha G nyílt halmaz metrikus terek Descartes-szorzatában, akkor minden i esetén $\mathrm{pr}_i[G]$ nyílt. Ezt felhasználva bizonyítsuk be, hogy kompakt halmazok Descartes-szorzata kompakt.

6. Véges dimenziós normált terek

6.1. Állítás *$\mathbb{K}^N$-en bármely két norma ekvivalens egymással.*

Bizonyítás Megmutatjuk, hogy $\mathbb{K}^N$-en minden norma ekvivalens a $|\,.\,|_2$ euklidészi normával.

Legyen $\|\,.\,\|$ norma $\mathbb{K}^N$-en. Jelölje $\{e_i \mid 1 \leq i \leq N\}$ a $\mathbb{K}^N$ standard bázisát. Ha $x = (x_i \mid 1 \leq i \leq N) \in \mathbb{K}^N$, akkor

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{N} x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{N} |x_i|\, \|e_i\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \|e_i\|} \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2}.$$

A második egyenlőtlenségnél az $\mathbb{R}^N$-beli Cauchy-egyenlőtlenséget használtuk fel. A végső jobb oldalon a második tényező $|x|_2$, ez van szorozva egy (az x-től föggetlen) számmal, következésképpen $|\,.\,|_2$ finomabb $\|\,.\,\|$-nál.

Legyen $S := \{x \in \mathbb{K}^N \mid |x|_2 = 1\}$. $s > 0$ esetén $B_s := \{x \in \mathbb{K}^N \mid \|x\| \leq r\}$ zárt $\|\,.\,\|$ szerint, így az előző eredményünk szerint zárt $|\,.\,|_2$ szerint is, ezért a $B_s \cap S$ halmaz kompakt $|\,.\,|_2$-re nézve. Továbbá

$$\bigcap_{s>0} B_s \cap S = \{\mathbf{0}\} \cap S = \emptyset,$$

így a Cantor-féle közösrész-tétel szerint létezik $r>0$ úgy, hogy

$$B_r \cap S = \emptyset. \tag{$*$}$$

Ez azt jelenti, hogy B_r az S-en belül helyezkedik el, azaz

$$B_r \subset \{x \in \mathbb{K}^N \mid |x|_2 < 1\}. \tag{$**$}$$

Tegyük fel ugyanis, hogy létezik olyan $x \in \mathbb{K}^N$, amelyre

$$\|x\| \leq r \quad \text{és} \quad |x|_2 > 1.$$

Ekkor

$$\left\| \frac{x}{|x|_2} \right\| = \frac{\|x\|}{|x|_2} \leq \frac{r}{|x|_2} < r,$$

és

$$\left| \frac{x}{|x|_2} \right|_2 = 1,$$

ez pedig ellentmond $(*)$-nak. A $(**)$ összefüggésből az 5.7. állítás bizonyításához hasonlóan kapjuk, hogy

$$|\,.\,|_2 \leq \frac{2}{r} \|\,.\,\|,$$

így $\|\,.\,\|$ finomabb, mint $|\,.\,|_2$.

6.2. Állítás *Legyen V véges dimenziós vektortér. Ekkor*

(1) V-n bármely két norma ekvivalens egymással,

és bármely normára nézve

(2) V teljes,

(3) V korlátos és zárt részhalmaza kompakt,

(4) V korlátos és végtelen részhalmazának van torlódási pontja (Bolzano–Weierstrass-tétel).

Bizonyítás Ha V N-dimenziós, akkor létezik $P:\mathbb{K}^N \to V$ lineáris bijekció (paraméterezés).

(1) Ha $\|\,.\,\|_1$ és $\|\,.\,\|_2$ norma V-n, akkor $\xi \mapsto \|P\xi\|_1$ és $\xi \mapsto \|P\xi\|_2$ norma $\mathbb{K}^N$-en, tehát ekvivalensek: létezik $\alpha, \beta > 0$ úgy, hogy minden $\xi \in \mathbb{K}^N$ esetén $\|P\xi\|_1 \leq \alpha \|P\xi\|_2$ és $\|P\xi\|_2 \leq \beta \|P\xi\|_1$, ebből pedig következik, hogy $\|\,.\,\|_1 \leq \alpha \|\,.\,\|_2$, és $\|\,.\,\|_2 \leq \beta \|\,.\,\|_1$.

Továbbá, mivel ekvivalens normákra vonatkozóan ugyanaz a teljesség, a korlátosság, (lásd 5.5. és 5.6.), valamint a kompaktság, elég egyetlen normára belátni az állításokat. Legyen ez $x \mapsto |P^{-1}x|_2$, ahol $|\,.\,|_2$ a $\mathbb{K}^N$ euklidészi normája.

(2) Ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat V-ben, akkor $(P^{-1}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat $\mathbb{K}^N$-ben, így létezik $\xi := \lim_n P^{-1}x_n$. Nyilvánvaló, hogy $\lim_n x_n = P\xi$.

(3) és (4) bizonyítását az olvasóra bízzuk. ■

Megjegyzések (i) Véges dimenziós vektortéren a nyílt halmazok, a konvergencia, a folytonosság, a differenciálhatóság stb. ugyanaz minden normára vonatkozóan. Ezért véges dimenziós vektortéren használhatjuk – és használni is szoktuk – ezeket a fogalmakat konkrét norma megadása nélkül is.

(ii) Véges dimenziós vektoréren mindig megadható skaláris szorzatból származtatott norma, hiszen $\mathbb{K}^N$-en létezik ilyen.

6.3. Állítás *Normált tér véges dimenziós altere zárt.*

Bizonyítás Véges dimenziós altér a norma leszűkítésére nézve a az előző állítás szerint teljes, így a 4.3.1. állítás szerint zárt.

6.4. A 6.2. állítás szerint véges dimenziós normált térben bármely zárt gömb kompakt.

Állítás *Ha egy normált térben valamely zárt gömb kompakt, akkor a vektortér véges dimenziós.*

Bizonyítás Legyen $B_r(x)$ kompakt. Ekkor $B_r(\mathbf{0}){=}B_r(x){-}x$ is, és így $B{:=}B_1(\mathbf{0}){=}\frac{1}{r}B_r(\mathbf{0})$ is kompakt (lásd az A.3.10.2. feladatot). Legyen $G{:=}G_1(\mathbf{0})$; ekkor $B{=}\overline{G}$.

Mivel $\left(x{+}\frac{1}{2}G\right)_{x\in B}$ nyílt lefedése B-nek, van olyan $x_1,\dots,x_m$ B-beli véges rendszer, hogy

$$B\subset\bigcup_{i=1}^{m}\left(x_i{+}\frac{1}{2}G\right).$$

Az $x_1,\dots,x_m$ vektorok által kifeszített X lineáris altér véges dimenziós. Az előző állítás szerint X zárt, és

$$G\subset X{+}\frac{1}{2}G.$$

Ebből $\frac{1}{2}X{=}X$ miatt $\frac{1}{2}G{\subset}X{+}\frac{1}{4}G$, tehát az előző relációból $G{\subset}X{+}\frac{1}{4}G$. Tovább folytatva azt kapjuk, hogy

$$G\subset X{+}\frac{1}{2^n}G\quad(n{\in}\mathbb{N}),$$

azaz (lásd a 2.5.3. feladatot) $G{\subset}\overline{X}{=}X$, amiből $\mathbb{K}G{\subset}X$ következik, és lévén $\mathbb{K}G{=}V$, azt kaptuk, hogy $V{=}X$, azaz V véges dimenziós.

7. Teljessé tevés

7.1 Definíció *Legyenek (M,d) és (M',d') metrikus terek. Egy $f{:}M\to M'$ leképezést* ***izometrikusnak*** *nevezünk, ha minden $x,y\in M$ esetén:*

$$d'(f(x),f(y))=d(x,y).$$

Nyilvánvaló, hogy izometrikus leképezés injektív. Továbbá, teljes metrikus téren értelmezett izometrikus leképezés értékkészlete zárt. Valóban, ha $f{:}M\to M'$ izometrikus leképezés, és $a{:}\mathbb{N}\to\mathrm{Ran}(f)$ konvergens sorozat, akkor $(f^{-1}(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat M-ben, hiszen

$$d(f^{-1}(a_m),f^{-1}(a_n))=d'(a_m,a_n)\quad(m,n\in\mathbb{N}),$$

így létezik $x{:=}\lim\limits_n f^{-1}(a_n)$. Világos, hogy $\lim\limits_n a_n{=}f(x)\in\mathrm{Ran}(f)$, hiszen

$$d'(a_n,f(x))=d(f^{-1}(a_n),x)\quad(n\in\mathbb{N}).$$

7.2. A racionális számok halmaza a szokásos metrikával nem teljes. Ugyanis egy olyan racionális sorozat, amely a valós számok körében irracionális számhoz tart – például $\sqrt{2}$-höz –, Cauchy-sorozat a racionális számok metrikus terében, de nem konvergens. Viszont a racionális számokból megkonstruálhatók a valós számok (lásd Analízis I.13.), értelmezhető a valós számok távolsága, és a valós számok metrikus tere teljes. A racionális számok halmaza beágyazható a valós számok halmazába távolságtartó módon (azaz izometrikusan), és az így beágyazott racionális számok halmaza sűrű a valós számok metrikus terében. Ez sugallja a következő meghatározást.

Definíció *Egy (M,d) metrikus tér* **teljes burkának** *hívunk egy $(\widehat{M},\widehat{d})$ teljes metrikus teret, ha létezik $i:M\to\widehat{M}$ izometrikus leképezés úgy, hogy $i[M]$ sűrű $\widehat{M}$-ben.*

Állítás *Ha $(\widehat{M},\widehat{d})$ és (M',d') egy (M,d) metrikus tér teljes burka, és $i{:}M\to\widehat{M}$ illetve $j{:}M\to M'$ a megfelelő izometrikus leképezések, akkor létezik egyetlen $b{:}\widehat{M}\to M'$ izometrikus bijekció úgy, hogy $j{=}b{\circ}i$.*

Bizonyítás $j\circ i^{-1}{:}i[M]\to j[M]$ izometrikus leképezés. Megelőlegezzük azt, hogy teljes metrikus térbe ható izometrikus leképezés mindig egyértelműen kiterjeszthető izometrikus leképezéssé értelmezési tartományának lezártjára (lásd 8.11.). $j\circ i$

kiterjesztése tehát $\widehat{M}$-en van értelmezve, amely teljes metrikus tér, ezért ennek a kiterjesztésnek az értékkészlete zárt, amely tartalmazza az M'-ben sűrű $j[M]$ részhalmazt, ezért a kiterjesztés értékkészlete szükségképpen egyenlő M'-vel. ∎

Eredményünk azt mondja, hogy egy metrikus tér teljes burka (ha létezik) lényegében egyértelmű.

7.3. Most megmutatjuk, hogy az előbbi mondatban a zárójelbe tett feltétel szükségtelen. A racionális számok esetével szemléltethetjük a legjobban az eljárásunk lényegét.

Bármely valós számot megközelíthetünk racionális sorozattal. Az ilyen sorozatok Cauchy-félék a racionális számok halmazában. Két racionális Cauchy-sorozat pontosan akkor határozza meg ugyanazt a valós számot, ha az azonos indexű tagjaik közötti távolság minden határon túl csökken, miközben az index a végtelenhez tart. Egy valós számot ezért elképzelhetünk úgy is, mint racionális Cauchy-sorozatok egy halmazát, amelyet az jellemez, hogy a halmaz bármely a és b elemére $\lim_n d(a_n, b_n) = 0$.

Állítás *Minden metrikus térnek létezik teljes burka.*

Bizonyítás Legyen (M, d) metrikus tér, és jelölje C az M-beli Cauchy-sorozatok halmazát. Ha $a, b \in C$, akkor minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|d(a_m, b_m) - d(a_n, b_n)| \leq d(a_m, a_n) + d(b_m, b_n),$$

következésképpen $d \circ (a, b)$ Cauchy-féle sorozat $\mathbb{R}$-ben, így konvergens is.

Tekintsük a következő $\sim$ relációt C-n:

$$a \sim b \text{ akkor és csak akkor, ha } \lim_n d(a_n, b_n) = 0.$$

A metrika alaptulajdonságaiból következik, hogy $\sim$ ekvivalenciareláció; jelölje szokásosan $a/_\sim$ az a sorozat ekvivalenciaosztályát és $C/_\sim$ az ekvivalenciaosztályok halmazát.

Rendeljük hozzá az M x eleméhez $c(x)$-szel jelölt konstans sorozatot, amelynek minden tagja x. Ezzel megadtunk egy $c : M \to C$ injekciót. Világos, hogy $c(x)/_\sim$ mindazoknak a sorozatoknak az összessége, amelyek konvergensek, és a határértékük x. Következésképpen

$$i : M \to C/_\sim, \quad x \mapsto c(x)/_\sim$$

injektív leképezés.

Legyen $a, b, a', b' \in C$ úgy, hogy $a \sim a'$ és $b \sim b'$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|d(a'_n, b'_n) - d(a_n, b_n)| \leq d(a'_n, a_n) + d(b'_n, b_n),$$

következésképpen

$$\lim_n d(a'_n, b'_n) = \lim_n d(a_n, b_n),$$

így létezik egyetlen olyan

$$\widehat{d} : (C/_\sim)\times(C/_\sim)\to\mathbb{R}_0^+$$

leképezés, hogy minden $a, b\in C$ esetén

$$\widehat{d}(a/_\sim, b/_\sim) = \lim_n d(a_n, b_n).$$

Legyen $\widehat{M}:=C/_\sim$. Nyilvánvaló, hogy $\widehat{d}$ metrika $\widehat{M}$-en, és $i : M \to \widehat{M}$ i izometrikus leképezés.

Legyen $\widehat{x}\in\widehat{M}$ és $a\in\widehat{x}$, azaz a Cauchy-sorozat; ezért minden $\varepsilon>0$ esetén létezik $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $m, n>n_\varepsilon$ természetes számra $d(a_n, a_m)\leq\varepsilon$. Ekkor az $i \circ a : \mathbb{N} \to \widehat{M}$ sorozatra

$$\widehat{d}((i \circ a)_n), \widehat{x}) = \widehat{d}(i(a_n), a/_\sim) = \lim_m d(a_n, a_m) \leq \varepsilon$$

ha $n > n_\varepsilon$. Következésképpen $\widehat{x}=\lim_n i(a_n)$, így $i[M]$ sűrű $\widehat{M}$-ban.

Legyen $(\widehat{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat $\widehat{M}$-ban. $\varepsilon>0$ esetén legyen $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ olyan, hogy minden $m, n\geq n_\varepsilon$ természetes számra $\widehat{d}(\widehat{x}_m, \widehat{x}_n)<\varepsilon$. Az előző megállapítás szerint minden $m\in\mathbb{N}$ esetén az $\{x\in M \mid \widehat{d}(i(x), \widehat{x}_n)<1/n\}$ halmaz nem üres, így a kiválasztási axióma szerint létezik a:$\mathbb{N} \to M$ sorozat úgy, hogy $\widehat{d}(i(a_n), \widehat{x}_n) < \dfrac{1}{n}$ minden n-re.

Ha $m, n\geq \max\{n_\varepsilon, 1/\varepsilon\}$, akkor

$$d(a_m, a_n) = \widehat{d}(i(a_m), i(a_n)) \leq \widehat{d}(i(a_m), \widehat{x}_m) + \widehat{d}(\widehat{x}_m, \widehat{x}_n) + \widehat{d}(\widehat{x}_n, i(a_n)) < \\ < \frac{1}{m} + \varepsilon + \frac{1}{n} \leq 3\varepsilon,$$

következésképpen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat M-ben.

Továbbá minden $m\geq \max\{n_\varepsilon, 1/\varepsilon\}$ esetén

$$\widehat{d}(i(a_m), a/_\sim) = \lim_n d(a_m, a_n) \leq 3\varepsilon,$$

így

$$\widehat{d}(\widehat{x}_m, a/_\sim) \leq \widehat{d}(\widehat{x}_m, i(a_k)) + \widehat{d}(i(a_m), a/_\sim) < \frac{1}{m} + 3\varepsilon \leq 4\varepsilon.$$

Tehát $(\widehat{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat konvergál $a/_\sim$-hoz az $(\widehat{M}, \widehat{d})$ metrikus térben, így ez utóbbi teljes.

7.4. Egy normált térnek mint metrikus térnek van teljes burka; ez azonban még nem kielégítő: olyan teljes burkot szeretnénk, amely maga is normált tér.

Definíció *Egy* $(V, \|\,.\,\|)$ *normált tér* **teljes burkának** *hívunk egy* $(\widehat{V}, \widehat{\|\,.\,\|})$ *teljes normált teret, ha létezik* $i : V \to \widehat{V}$ *izometrikus lineáris leképezés úgy, hogy* $i[V]$ *sűrű* $\widehat{V}$*-ben.*

Állítás *Ha* $(\widehat{V}, \widehat{\|\,.\,\|})$ *és* $(V', \|\,.\,\|')$ *egy* $(V, \|\,.\,\|)$ *normált tér teljes burka, és* $i{:}V \to \widehat{V}$ *illetve* $j{:}V \to V'$ *a megfelelő izometrikus lineáris leképezések, akkor létezik egyetlen* $b{:}\widehat{V}{\to}V'$ *izometrikus lineáris bijekció úgy, hogy* $j{=}b{\circ}i$.

Ezt az állítást ugyanúgy bizonyítjuk, mint a 7.2-t; azt kell csak tudnunk még, hogy lineáris izometrikus leképezés kiterjesztése is lineáris (lásd 10.5.).

7.5. Állítás *Minden normált térnek van teljes burka.*

Bizonyítás Legyen $(V, \|\,.\,\|)$ normált tér és jelölje C a V-beli Cauchy-sorozatok lineáris terét (a pontonkénti műveletekkel). Ekkor

$$N := \{a{\in}C \mid \lim_n \|a_n\|{=}0\}.$$

lineáris altere C-nek. Legyen $\widehat{V}{:=}C/N$, és lássuk el a szokásos lineáris műveletekkel (lásd Analízis II.6.). Az előzőhöz hasonlóan látható be, hogy $a{\in}C$ esetén az $(\|a_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, továbbá, ha $a, a'{\in}C$ és $a'{-}a{\in}N$, akkor

$$\lim_n \|a_n\| = \lim_n \|a'_n\|,$$

így létezik egyetlen $\widehat{\|\,.\,\|}{:}\widehat{V}{\to}\mathbb{R}_0^+$ leképezés úgy, hogy minden $a{\in}C$ esetén

$$\|\widehat{a+N}\| = \lim_n \|a_n\|.$$

Nyilvánvaló, hogy $\widehat{\|\,.\,\|}$ norma $\widehat{V}$-on, és az előző állítás bizonyításához hasonlóan látható be, hogy $i[V]{\subset}\widehat{V}$ sűrű lineáris altér, és a $(\widehat{V}, \widehat{\|\,.\,\|})$ normált tér teljes.

7.6. Feladatok

1. Legyen (M, d) teljes metrikus tér, $H{\subset}M$. A $(H, d|_{H\times H})$ metrikus tér teljes burka $(\overline{H}, d|_{\overline{H}\times\overline{H}})$.

2. Legyen $d : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $(x, y) \mapsto \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right|$. Mi az $(\mathbb{R}^+, d)$ metrikus tér teljes burka?

II. FOLYTONOS LEKÉPEZÉSEK

8. Határérték és folytonosság metrikus terekben

8.1. Definíció *Legyen (M, d) és (R, h) metrikus tér, $f{:}R{\rightarrowtail}M$ leképezés és a a* $\mathrm{Dom}(f)$ *torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy $b{\in}M$* ***határértéke f-nek az a pontban****, ha minden $\varepsilon{>}0$ esetén létezik $\delta_\varepsilon{>}0$ úgy, hogy minden $a \neq x \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén, melyre $0{<}h(x, a){<}\delta_\varepsilon$ teljesül, $d(f(x), b){<}\varepsilon$ áll fenn, vagy másképpen ugyanez,*

$$f[G^h_{\delta_\varepsilon}(a) \backslash \{a\}] \subset G^d_\varepsilon(b),$$

ahol a felső index arra utal, melyik metrikus térbeli gömbről van szó.

Érvényben marad az A.26.2. és A.26.3. állítás: az átviteli elv, és az, hogy a határérték egyértelmű. Ezért, ha b határértéke f-nek a-ban, akkor az

$$\lim_a f := \lim_{x \to a} f(x) := b$$

jelölést használjuk.

Az A.26.6. állítás is érvényben marad metrikus terek közötti leképezésekre is; továbbá, metrikus térből normált térbe (illetve skalárszorzatos térbe) képező függvényekre igaz a határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó A.26.5. állítás is, valamint metrikus térből metrikus terek Descartes szorzatába képező leképezésekre igaz az A.26.4. állítás. Az A.26.7. definíció és állítás is értelemszerűen megfogalmazható és igaz metrikus terekre, valamint metrikus terek Desccartes-szorzatára az A.26.12..

8.2. Az A.27.1., A.27.9., A.27.10., A.28.1. és A.28.2. definíciókhoz hasonlóan definiálható metrikus terek közötti leképezések **folytonossága** egy pontban, egy halmazon, egy pontban egy halmaz mentén, **nyíltsága**, **zártsága**, **egyenletes folytonossága**, **Lipschitz-tulajdonsága** egy pontban és egy halmazon.

Az A.27.2., A.27.5, A.27.7., A.27.8., A.28.1., A.28.2., A.29.1., A.29.2., A.29.3., A.29.4. és az A.30.1. állítások változatlanul érvényesek metrikus terek közötti leképezésekre is. Az A.27.3. állítás igaz metrikus térből metrikus terek Descartes-szorzatába képező függvényekre, az A.27.4. állítás pedig metrikus térből normált (illetve skalárszorzatos) térbe képező függvényekre.

A függvénysorozatok határértékére vonatkozó A.31.1. és A.31.2. állítás érvényben marad teljes metrikus térbe képező függvényekre.

8.3. A folytonosság – ugyynúgy, mint a sorozatok vagy akár a függvények határértéke – függ a metrikától. Ezt hangsúlyozzuk a következőkben azzal, hogy kiírjuk, mely metrikákra vonatkozó folyutonosságról van szó.

Legyen (M, d) és (R, h) metrikus tér, $f{:}R{\to}M$ (h, d)-folytonos leképezés.

(1) Ha d' a d-nél durvább metrika M-en, akkor f (h, d')-folytonos, hiszen minden d'-ben nyílt halmaz nyílt d-ben is, így f általi őosképe nyílt h-ban.

(2) Ha h' a h-nál finomabb metrika R-en, akkor f (h', d)-folytonos, hiszen minden d-ben nyílt halmaz f általi ősképe nyílt h-ban, így h'-ben is.

Legyen $f{:}R{\to}M$ (h, d)-egyenletesen folytonos illetve Lipschitz-tulajdonságú.

(1) Ha d' a d-nél metrikusan durvább metrika M-en, akkor f (h, d')-egyenletesen folytonos illetve Lipschitz-tulajdonságú.

(2) Ha h' a h-nál metrikusan finomabb metrika R-en, akkor f (h', d)-egyenletesen folytonos illetve Lipschitz-tulajdonságú.

8.4.1. Állítás *Legyen (M, d) metrikus tér. Ekkor a $d{:}M{\times}M{\to}\mathbb{R}_0^+$ leképezés Lipschitz-tulajdonságú (tehát egyenletesen folytonos is) mindhárom, az $M{\times}M$ halmazon szokásos szorzatmetrikára nézve.*

Bizonyítás A négyszög-egyenlőtlenség szerint

$$|d(x_1, x_2){-}d(y_1, y_2)| \leq d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2) = D_{(1)}((x_1, x_2), (y_1, y_2)),$$

tehát d globális Lipschitz-feltételnek tesz eleget $M{\times}M$-en a $D_{(1)}$ szorzatmetrikára nézve, így a $D_{(1)}$-gyel metrikusan ekvivalens $D_{(2)}$ és $D_{(\infty)}$ szorzatmetrikákra nézve is Lipschitz-tulajdonságú.

2. Állítás *Legyen $(V, \|\ .\ \|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor a $\|\ .\ \|{:}V{\to}\mathbb{R}_0^+$ leképezés Lipchitz-tulajdonságú (tehát egyenletesen folytonos is).*

Bizonyítás Minden $x, y{\in}V$ esetén

$$|\,\|x\|{-}\|y\|\,| \leq \|x{-}y\|.$$

8.5. Az 27.6. állításhoz hasonlóan igaz, hogy ha $(V, \|\ .\ \|)$ normált tér, akkor a

$$V{\times}V{\to}V, \quad (x, y){\mapsto}x{+}y,$$
$$\mathbb{K}{\times}V{\to}V, \quad (\alpha, x){\mapsto}\alpha x$$

leképezések folytonosak a $V\times V$ ill. $\mathbb{K}\times V$ halmazon szokásosan megadható három szorzatnormára nézve, sőt az összeadás Lipschitz-tualjdonságú, hiszen

$$\|(x+y)-(u+v)\| \leq \|x-u\|+\|y-v\| = D_{(1)}((x,y),(u,v)).$$

Viszont $V\neq\{\mathbf{0}\}$ esetén a számmal szorzás nem egyenletesen folytonos.
Továbbá, ha $(V,\langle .,.\rangle)$ skalárszorzatos tér, akkor

$$V\times V\to\mathbb{K}, \quad (x,y)\mapsto\langle x,y\rangle$$

folytonos a $V\times V$-n szokásosan megadható három szorzatnormára nézve, de nem egyenletesen folytonos, ha $V\neq\{\mathbf{0}\}$.

8.6. A következőkben metrikus terek Descartes-szorzatát mindig a 3.2.-ben definiált három szorzatmetrika egyikével (akármelyikével) látjuk el. Többször felhasználjuk azt az egyszerű tényt, hogy a $D_{(\infty)}$ szorzatmetrika definíciója szerint

$$G_r^{(\infty)}(x) = \mathop{\times}_{i=1}^{N} G_r^{(i)}(\mathrm{pr}_i(x)). \qquad (*)$$

8.7. Állítás *Legyen (M_i,d_i) metrikus tér (i=1, ..., N). Legyen $k\in\{1,2,\dots,N\}$ rögzített, és $i\neq k$ esetén $y_i\in M_i$. Ekkor az*

$$M_k\to\mathop{\times}_{i=1}^{N} M_i, \quad x_k\mapsto(y_1,\dots,x_k,\dots,y_N)$$

leképezés folytonos.

Bizonyítás Egyszerűen adódik a 8.6.(∗) összefüggésből.

Következmény Ha (M,d) metrikus tér és $f\colon \mathop{\times}_{i=1}^{N} M_i\to M$ folytonos, akkor rögzített $k\in\{1,2,\dots,N\}$ és $y_i\in M_i$ ($i\neq k$) esetén az

$$M_k\to M,\ x_k\mapsto f(y_1,\dots,x_k,\dots,y_N)$$

leképezés folytonos.

Ezt úgy szoktuk kifejezeni, hogy több változós folytonos függvény minden változójában külön-külön is folytonos.

Ennek a fordítottja nem igaz. Egy függvény, amely minden változójában külön-külön folytonos, nem feltétlenül folytonos. Például

$$f{:}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \quad (x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{ha } (x,y)=(0,0),\\ 0 & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

nem folytonos a $(0,0)$ pontban (nem létezik határértéke ott), viszont változónként folytonos, hiszen az $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto f(x,0)=0$ és $y\mapsto f(0,y)=0$ $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvények folytonosak a 0-ban.

8.8. **Állítás** *Legyen $i=1,\dots,N$ esetén (M_i,d_i) metrikus tér. Ekkor a*

$$\mathrm{pr}_k\colon \bigtimes_{i=1}^{N} M_i\to M_k$$

kanonikus projekció folytonos és nyílt leképezés minden $k=1,\dots,N$ esetén.

Bizonyítás pr_k folytonossága a 4.6. állítás és az átviteli elv egyszerű következménye.

Legyen $A\subset \bigtimes_{i=1}^{N} M_i$ nyílt halmaz és $x_k\in\mathrm{pr}_k[A]$. Ekkor létezik $x\in A$ úgy, hogy $\mathrm{pr}_k(x)=x_k$. x belső pontja az A nyílt halmaznak, így létezik $r>0$ úgy, hogy $G_r^\infty(x)\subset A$, ezért a 8.6.$(*)$ összefüggés szerint

$$G_r^k(x_k)\subset \mathrm{pr}_k[A],$$

azaz x_k belső pontja $\mathrm{pr}_k[A]$-nak.

8.9. A következő állítások vagy közvetlenül a definíció alapján, vagy az átviteli elv és a 4.6. állítás segítségével bizonyíthatók, a részleteket az olvasóra bízzuk.

1. **Állítás** *Legyen (M,d) és (M_i,d_i) metrikus tér ($i=1,\dots,N$) és $f_i{:}M\to M_i$ leképezés. Az*

$$(f_i)_{1\le i\le N}: M\to \bigtimes_{i=1}^{N} M_i,\quad x\mapsto (f_i(x))_{1\le i\le N}$$

együttes leképezés pontosan akkor folytonos, ha minden $i=1,\dots,N$ esetén f_i folytonos.

2. **Állítás** *Legyenek $i=1,\dots,N$ esetén (M_i,d_i) és (R_i,h_i) metrikus terek és $f_i{:}R_i\to M_i$ leképezések. A*

$$\bigtimes_{i=1}^{N} f_i : \bigtimes_{i=1}^{N} R_i\to \bigtimes_{i=1}^{N} M_i,\quad (x_i)_{1\le i\le N}\mapsto (f_i(x_i))_{1\le i\le N}$$

szorzatleképezés pontosan akkor folytonos, ha minden $i=1,\dots,N$ esetén f_i folytonos.

8.10. Sokszor jó hasznát vesszük annak az egyszerű ténynek, hogy egy (M,d) metrikus tér esetén a

$$\Delta_M{:=}\{(x,x) \mid x{\in}M\} \subset M{\times}M$$

halmaz zárt. Ugyanis ha $(x,y){\in}(M{\times}M)\setminus\Delta_M$, akkor $d(x,y){>}0$; így $r{:=}\dfrac{d(x,y)}{2}{>}0$, és ha $(u,v){\in}M{\times}M$ olyan, hogy $D_{(1)}((u,v),(x,y)){=}d(u,x){+}d(v,y){<}r$, akkor a négyszög-egyenlőtlenség alapján $d(u,v){\geq}r$, azaz $(u,v){\notin}\Delta_M$, tehát Δ_M komplementere nyílt a $D_{(1)}$ metrikára nézve.

Állítás *Legyen (M,d) és (R,h) metrikus tér, $f,g{:}R\to M$ folytonos leképezés. Ekkor az*

$$[f{=}g] := \{x{\in}R \mid f(x){=}g(x)\}$$

halmaz zárt R-ben.

Bizonyítás Mivel Δ_M zárt és az előző állítás szerint az $(f,g){:}R\to M{\times}M$ együttes leképezés folytonos, az

$$[f{=}g] = \overset{-1}{(f,g)}(\Delta_M)$$

halmaz zárt R-ben. ■

Ha tehát $H{\subset}M$ és az f,g folytonos függvényekre $f|_H{=}g|_H$ teljesül, azaz $H\subset[f{=}g]$, ezért $\overline{H}\subset[f{=}g]$ is teljesül, így $f|_{\overline{H}}=g|_{\overline{H}}$.

8.11. Az előzőekből következik, hogy egy metrikus tér részhalmazán értelmezett folytonos leképezés folytonos kiterjesztése értelmezési tartományának lezártjára egyértelmű. Azonban ilyen folytonos kiterjesztés nem feltétlenül létezik, például az $\mathbb{R}\setminus\{0\}{\subset}\mathbb{R}$ mindenütt sűrű halmazról az $\dfrac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$ folytonos leképezés nem terjeszthető ki $\mathbb{R}$-re folytonos leképezéssé.

Állítás *Legyen (M,d) metrikus tér és (M',d') teljes metrikus tér, $H{\subset}M$ nem üres részhalmaz, $f{:}H{\to}M'$ egyenletesen folytonos leképezés. Ekkor létezik egyetlen $\overline{f}{:}\overline{H}{\to}M'$ egyenletesen folytonos leképezés, mely az f kiterjesztése.*

Bizonyítás Ha $x{\in}\overline{H}$, akkor létezik $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ H-beli sorozat úgy, hogy $x{=}\lim\limits_n \xi_n$. Legyen $\varepsilon{>}0$. Ekkor f egyenletes folytonossága miatt létezik $\delta{>}0$ úgy, hogy minden $\xi,\eta{\in}H$ és $d(\xi,\eta){<}\delta$ esetén $d'(f(\xi),f(\eta)){<}\varepsilon$. Mivel $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat M-ben, létezik $n_\delta{\in}\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $m,n{\geq}n_\delta$ esetén $d(\xi_m,\xi_n){<}\delta$. Ezért ha $m,n{\geq}n_\delta$, akkor $d'(f(\xi_m),f(\xi_n)){<}\varepsilon$, azaz $(f(\xi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat M'-ben, így M' teljessége miatt létezik $\lim\limits_n f(\xi_n)$. Legyen $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ másik olyan H-beli sorozat, hogy $x{=}\lim\limits_n \eta_n$. Ekkor az $\xi_1,\eta_1,\xi_2,\eta_2,\ldots$ "összefésült"' sorozat is x-hez konvergál, és ezen sorozatnak mind $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mind $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ részsorozata, ebből következik, hogy

$$\lim_n f(\xi_n) = \lim_n f(\eta_n).$$

Így létezik egyetlen olyan $\overline{f}:\overline{H}\to M'$ leképezés, hogy ha $x\in\overline{H}$ és $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges olyan H-beli sorozat, mely x-hez konvergál, akkor

$$\overline{f}(x) = \lim_n f(\xi_n).$$

Ha $x\in H$, akkor x a konstans x sorozat határértéke, $x=\lim\limits_n x$, ezért $\overline{f}(x)=\lim\limits_n f(x)$ $=f(x)$, vagyis $\overline{f}$ az f kiterjesztése, és az előző megjegyzés szerint $\overline{f}$ egyértelmű.

Már csak azt kell belátni, hogy $\overline{f}$ is egyenletesen folytonos.

Legyen δ mint az előbb, és $x, y\in\overline{H}$ olyan, hogy $d(x,y)<\delta/3$. Legyenek $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ H-beli sorozatok melyek konvergálnak az x és y elemekhez. Ekkor

$$\overline{f}(x) = \lim_n f(\xi_n) \quad \text{és} \quad \overline{f}(y) = \lim_n f(\eta_n),$$

tehát létezik olyan $n\in\mathbb{N}$, hogy

$$d(x,\xi_n)<\delta/3 \quad \text{és} \quad d'(\overline{f}(x), f(\xi_n))<\varepsilon,$$

valamint

$$d(y,\eta_n)<\delta/3 \quad \text{és} \quad d'(\overline{f}(y), f(\eta_n))<\varepsilon.$$

Ekkor

$$d(\xi_n,\eta_n) \le d(\xi_n, x) + d(x,y) + d(y,\eta_n) < \delta,$$

következésképpen

$$d'(f(\xi_n), f(\eta_n)) < \varepsilon,$$

így

$$d'(\overline{f}(x), \overline{f}(y)) \le d'(\overline{f}(x), f(\xi_n)) + d'(f(\xi_n), f(\eta_n)) + d'(f(\eta_n), \overline{f}(y)) < 3\varepsilon,$$

tehát $\overline{f}$ egyenletesen folytonos a $\overline{H}$ halmazon.

Megjegyzés Mivel izometrikus leképezés egyenletesen folytonos, egyértelműen kiterjeszthető értelmezési tartományának lezártjára egyenletesen folytonos leképezéssé, ha teljes metrikus térbe képez; egyszerűen látható, hogy ez a kiterjesztés izometrikus. Ezt a tényt már felhasználtuk a 7.2. állításban.

8.12. Legyen K egy metrikus tér kompakt részhalmaza (vagy a metrikát leszűkítve K-ra, eleve vehetjük úgy, hogy adott egy (K,d) kompakt metrikus tér), és legyen $(V, \|\,.\,\|)$ normált tér ($\mathbb{K}$ felett). Jelölje $C(K,V)$ a $K\to V$ folytonos leképezések halmazát. $C(K,V)$ a pontonkénti műveletekre nézve vektortér ($\mathbb{K}$ felett). $f\in C(K,V)$ esetén $f[K]\subset V$ kompakt halmaz és $\|f[K]\| \subset \mathbb{R}$ is kompakt, ezért

$$\|f\| := \sup_{x\in K} \|f(x)\| = \max_{x\in K} \|f(x)\| < +\infty.$$

A szuprémum alapvető tulajdonságait figyelembe véve nyilvánvaló, hogy a

$$C(K,V)\to\mathbb{R}_0^+, \quad f\mapsto\|f\|$$

leképezés norma. A továbbiakban – ha az ellenkezőjét nem mondjuk – a $C(K,V)$ vektorteret a fenti normával ellátva normált térnek tekintjük.

Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergál f-hez $C(K,V)$-ben, ha K-n egyenletesen konvergál f-hez.

Állítás *Ha $(V,\|\,.\,\|)$ teljes normált tér, akkor a $C(K,V)$ normált tér is teljes.*

Bizonyítás Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat $C(K,V)$-ben. Ekkor minden $\varepsilon>0$ esetén létezik $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n,m\geq n_\varepsilon$ természetes számra $\|f_n-f_m\|<\varepsilon$. Ezért nyilvánvaló, hogy minden $x\in K$ esetén $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat V-ben, így V teljessége miatt létezik

$$f(x) := \lim_n f_n(x) \in V.$$

Ha $n\geq n_\varepsilon$ és $x\in K$, akkor

$$\|f_n(x)-f(x)\| = \lim_m \|f_n(x)-f_m(x)\| \leq \varepsilon,$$

következésképpen

$$\sup_{x\in K} \|f_n(x)-f(x)\| \leq \varepsilon,$$

ezért $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ K-n egyenletesen konvergál az f függvényhez, amely folytonos a 8.2-ben mondottak szerint (az A.31.2. állítás igaz teljes normált terekbe képező függvényekre); más szóval $f\in C(K,V)$ és $\lim_n \|f_n-f\|=0$, vagyis az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergál az f-hez.

8.13. Állítás *Legyen (M,d) metrikus tér, A az M tetszőleges részhalmaza. Ekkor a*

$$d(\,.\,,A) : M\to\mathbb{R}_0^+, \quad x\mapsto d(x,A)$$

leképezés Lipschitz-tulajdonságú (így egyenletesen folytonos).

Bizonyítás $x,y\in M$ és $z\in A$ esetén a háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$d(x,A) \leq d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z),$$

következésképpen

$$d(x,A) - d(x,y) \leq d(y,z)$$

minden $z \in A$ esetén, így

$$d(x,A) - d(x,y) \leq d(y,A),$$

azaz

$$d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y).$$

x és y szerepét megcselélve ebből azt kapjuk, hogy

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y).$$

8.14. Megjegyezzük, hogy a halmazok távolságának definíciója szerint $A \subset M$ és $x \in M$ esetén $d(x,A)=0$ pontosan akkor teljesül, ha $x \in \overline{A}$. Ebből következik, hogy zárt halmaz és bármely nem benne lévő pont távolsága pozitív.

Állítás *Legyen (M,d) metrikus tér, $E \subset M$ zárt, $U \subset M$ nyílt halmaz úgy, hogy $E \subset U$. Ekkor létezik olyan $f{:}M \to [0,1]$ folytonos függvény, hogy*

$$E \subset [f{=}1], \qquad U^{\flat} \subset [f = 0].$$

Bizonyítás Mivel E és $U^{\flat}$ diszjunktak és zártak, az előző megjegyzésünk szerint a $d(x,E){+}d(x,U^{\flat}) > 0$ az M minden x elemére, így az

$$f := \frac{d(\,.\,,U^{\flat})}{d(\,.\,,E){+}d(\,.\,,U^{\flat})}$$

függvény jól értelmezett és folytonos. Nyilvánvaló, hogy ha $x \in E$, akkor $f(x) = 1$, és ha $x \notin U$, akkor $f(x) = 0$.

8.15. Feladatok

1. Vizsgáljuk meg, hogy a

$$C([a,b]){\times}C([a,b]){\to}C([a,b]), \quad (f,g){\mapsto}fg$$

leképezés mely esetben folytonos, ha az indulási halmazán is, az érkezési halmazán is az $\|\,.\,\|_1$, $\|\,.\,\|_2$ és $\|\,.\,\|_\infty$ normák közül akármelyiket választjuk (tehát például az indulási halmazon az $\|\,.\,\|_1$ normát, az érkezési halmazon a $\|\,.\,\|_\infty$ normát stb.)

2. Folytonosak-e a következő leképezések:

(i) $C([a,b]){\to}\mathbb{C}, \quad f{\mapsto}\int\limits_a^b f^2,$

(ii) $l^2{\to}l^1, \quad a{\mapsto}a^2,$

(iii) $l^\infty{\to}l^2, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}}{\mapsto}\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$

3. Igazoljuk, hogy a következő $\mathbb{K}^{N\times N} \to \mathbb{K}$ leképezések folytonosak:
(i) $A \mapsto \mathrm{Tr}A$, (ii) $A \mapsto \det A$.
4. Legyen (M, d) metrikus tér és $f, g : M \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor

$$f \wedge g : M \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \min\{f(x), g(x)\},$$

$$f \vee g : M \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$$

is folytonosak.
5. Legyen (M, d) metrikus tér, $E, F \subset M$ diszjunkt zárt halmazok. Ekkor léteznek U, V diszjunkt nyílt halmazok M-ben úgy, hogy $E \subset U$ és $F \subset V$. (Útmutatás: $f := \dfrac{d(\,.\,, E)}{d(\,.\,, E)+d(\,.\,, F)}$, $0<r<1$, $U:=[f<r]$ és $V:=[f>r]$.)

9. Kontrakciók, fixponttétel

9.1. Definíció *Legyen (M, d) metrikus tér. Az $f{:}M\to M$ leképezést* ***kontrakciónak*** *nevezzük, ha létezik $k\in[0, 1[$ úgy, hogy minden $x, y\in M$ esetén*

$$d(f(x), f(y)) \le kd(x, y).$$

Egy kontrakció az egész M-en Lipschitz-feltételnek tesz eleget, speciálisan egyenletesen folytonos.

9.2. Egy $f : M\to M$ leképezésnek $x\in M$ a **fixpontja**, ha $f(x)=x$.

Állítás *Egy kontrakciónak legfeljebb egy fixpontja lehet.*

Bizonyítás Legyen f kontrakció az (M, d) metrikus téren, és tegyük fel, hogy $x, y\in M$ esetén $f(x)=x$ és $f(y)=y$ teljesül. Ekkor

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \le kd(x, y).$$

Ezért

$$(1-k)d(x, y) \le 0$$

ebből pedig $k\in[0, 1[$ miatt következik, hogy $d(x, y)=0$, azaz $y=x$. ■

Egy kontrakciónak nem feltétlenül létezik fixpontja. Például vegyük $]0, 1]$-et az euklidészi metrikával; bármely $0\le\alpha<1$ esetén $\alpha\mathrm{id}_{]0,1]}$ kontrakció, melynek nincs fixpontja.

9.3. Állítás (***Banach-féle fixponttétel***) *Teljes metrikus téren értelmezett kontrakciónak van fixpontja.*

Bizonyítás Legyen (M,d) teljes metrikus tér és $f{:}M{\to}M$ kontrakció; tehát létezik $k{\in}[0,1[$ úgy, hogy minden $x,y{\in}M$ esetén

$$d(f(x),f(y)) \leq kd(x,y).$$

.

Jelölje $n{\in}\mathbb{N}$ esetén f^n az f-nek önmagával vett n-szeres kompozícióját.

Legyen x_0 az M tetszőleges pontja és $x_n{:=}f^n(x_0)\quad(n{\in}\mathbb{N})$. Ekkor

$$d(x_{n+1},x_n) = d(f(x_n),f(x_{n-1})) \leq kd(x_n,x_{n-1}),$$

amiből indukcióval azt kapjuk, hogy

$$d(x_{n+1},x_n) \leq k^n d(x_1,x_0) \qquad (n{\in}\mathbb{N}).$$

Így ha $n,m{\in}\mathbb{N}$ és $n{>}m$, akkor

$$d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x_{n-1}) + \cdots + d(x_{m+1},x_m) \leq (k^{n-1}{+}\ldots{+}k^m)d(x_1,x_0) =$$
$$= k^m(1{+}k{+}\ldots{+}k^{n-m-1})d(x_1,x_0) \leq k^m\frac{1}{1{-}k}d(x_1,x_0),$$

mivel $k{<}1$ miatt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} k^n{=}\dfrac{1}{1{-}k}$.

Következésképpen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat M-ben, így M teljessége miatt létezik

$$x{:=}\lim_n x_n \in M.$$

Mivel f folytonos,

$$f(x) = \lim_n f(x_n) = \lim_n x_{n+1} = x.$$

9.4. Állítás (***Paraméteres kontrakció tétele***) *Legyen* (M,d) *teljes metrikus tér,* (P,h) *metrikus tér,* $f{:}P\times M\to M,\quad (p,x)\mapsto f_p(x)$ *olyan leképezés, amelyre létezik* $k\in[0,1[$ *úgy, hogy minden* $p\in P$ *és* $x,y\in M$ *esetén*

$$d(f_p(x),f_p(y))\le kd(x,y),$$

és minden $x\in M$ *esetén a*

$$P\to M,\quad p\mapsto f_p(x) \tag{$*$}$$

leképezés folytonos. Legyen $x_p\in M$ *az* f_p *leképezés fixpontja, vagyis az egyetlen olyan elem, melyre* $f_p(x_p)=x_p$ *teljesül* $(p\in P)$*. Ekkor a*

$$P\to M,\quad p\mapsto x_p$$

leképezés folytonos.

Bizonyítás Legyen $p,q\in P$. Ekkor

$$\begin{aligned} d(x_q,x_p) = d(f_q(x_q),f_p(x_p) \le \\ &\le d(f_q(x_q),f_q(x_p))+d(f_q(x_p),f_p(x_p))\le \\ &\le kd(x_q,x_p)+d(f_q(x_p),f_p(x_p)),\end{aligned}$$

következésképpen

$$d(x_q,x_p)\le\frac{1}{1-k}d(f_q(x_p),f_p(x_p)).$$

Rögzített p esetén a $(*)$ feltétel szerint

$$\lim_{q\to p} f_q(x_p)=f_p(x_p),$$

amiből $\lim\limits_{q\to p} x_q=x_p$.

9.5. Feladatok

1. Kontrakciók-e a következő leképezések:
(i) $\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\alpha x,\quad$ ahol $\alpha\in\mathbb{R}$ adott,
(ii) $\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ z\mapsto\frac{i}{2}z,\quad$ (iii) $\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^2,\quad$ (iv) $[0,1]\to[0,1],\ x\mapsto x^2$.
2. Eleget tesznek-e a 9.4. állítás feltételeinek a következő leképezések:
(i) $]0,1[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ (p,x)\mapsto px,\quad$ (ii) $]-1/2,1/2[\times\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ (p,z)\mapsto pz,$
(iii)

$$\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad (p,x)\mapsto\begin{cases} (p/4)x & \text{ha } p\le 2,\\ (1/p)x & \text{ha } p>2.\end{cases}$$

3. Igazoljuk, hogy ha (M,d) teljes metrikus tér és $f{:}M\to M$ olyan leképezés, hogy valamely $n_0\in\mathbb{N}$ esetén f^{n_0} kontrakció, akkor f-nek létezik fixpontja. (Útmutatás: legyen $g{:=}f^{n_0}$, $g(x)=x$. Ekkor $g^n(f(x))=f(g^n(x))=f(x)$; a 9.3. állítás bizonyításából látszik, hogy akármilyen elemből kiindulva g hatványaival az x-hez konvergáló sorozatot kapunk, tehát $\lim\limits_n g^n(f(x))=x$.

10. Lineáris leképezések tere

10.1. Legyenek V_1 és V_2 vektorterek $\mathbb{K}$ felett, és jelölje $\mathrm{Lin}(V_1,V_2)$ a $V_1\to V_2$ lineáris leképezések halmazát. Ismeretes, hogy $\mathrm{Lin}(V_1,V_2)$ a pontonkénti műveletekkel ellátva vektortér $\mathbb{K}$ felett.

Állítás *Legyenek* $(V_1,\|\ .\ \|)$ *és* $(V_2,\|\ .\ \|_2)$ *normált terek és* $A\in\mathrm{Lin}(V_1,V_2)$ *lineáris leképezés. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(1) Létezik $L>0$ *úgy, hogy minden* $x\in V_1$ *esetén*

$$\|Ax\|_2\le L\|x\|_1,$$

(2) A folytonos,

(3) A folytonos a $\mathbf{0}\in V_1$ *pontban.*

Bizonyítás Az (1) egyenlőtlenségből minden $x,y\in V_1$ esetén

$$\|Ax-Ay\|_2\le L\|x-y\|_1,$$

azaz A Lipschitz-tulajdonságú az egész V_1-en, így egyenletesen is folytonos, nyilvánvaló tehát, hogy (1)-ből következik (2), (2)-ből pedig (3).

Tegyük fel, hogy A folytonos a $\mathbf{0}\in V_1$ pontban. Ekkor létezik $r>0$ úgy, hogy

$$A[G_r^{(1)}(\mathbf{0})]\subset G_1^{(2)}(\mathbf{0}).$$

Ha $x\in V_1$, $x\neq\mathbf{0}$, akkor

$$\left\|\frac{r}{2\|x\|_1}x\right\|_1=\frac{r}{2}<r,$$

következésképpen

$$\left\|A\left(\frac{r}{2\|x\|}x\right)\right\|_2<1,\text{ azaz }\quad \|Ax\|_2\le\frac{2}{r}\|x\|_1\ ;$$

így minden $x \in V_1$ esetén

$$\|Ax\|_2 \leq \frac{2}{r}\|x\|_1$$

teljesül.

10.2. Legyen $(V_1, \| \,.\, \|_1)$ és $(V_2, \| \,.\, \|_2)$ normált terek. Jelölje $\mathcal{L}in(V_1, V_2)$ a $V_1 \to V_2$ folytonos lineáris leképezések halmazát. Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{L}in(V_1, V_2)$ lineáris altere az $\mathrm{Lin}(V_1, V_2)$ vektortérnek.

Állítás *Ha V_1 véges dimenziós, akkor minden $V_1 \to V_2$ lineáris leképezés folytonos, azaz $\mathcal{L}in(V_1, V_2) = \mathrm{Lin}(V_1, V_2)$.*

Bizonyítás Emlékeztetünk, hogy véges dimenziós vektortéren bármely két norma ekvivalens egymással, tehát a folytonosság szempontjából tetszőleges normát tekinthetünk rajta; válasszuk a $\| \,.\, \|$ normát a következőképpen. Legyen $\{v_i \mid i=1, \dots, N\}$ bázis V_1-ben. Ekkor

$$P : \mathbb{K}^N \to V_1, \quad \xi \mapsto \sum_{i=1}^N \xi_i v_i$$

lineáris bijekció (paraméterezés), és $V_1 \to \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto |P^{-1}x| =: \|x\|$ norma, ahol $|\ |$ az euklideszi normát jelöli $\mathbb{K}^N$-en. Tehát $x = \sum_{i=1}^N \xi_i v_i$ esetén $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N \xi_i^2}$, és ha a $A : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés, akkor

$$\|Ax\|_2 = \left\| \sum_{i=1}^N \xi_i A v_i \right\|_2 \leq \sum_{i=1}^N |\xi_i| \, \|Av_i\|_2 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^N (\|Av_i\|_2)^2} \; \|x\|,$$

így a 10.1. állítás szerint A folytonos; az utolsó becslés az $\mathbb{R}^N$-beli Cauchy-egyenlőtlenségből adódik. ■

Végtelen dimenzió esetén léteznek nem folytonos lineáris leképezések. Például vegyük a $C([-\pi, \pi])$ vektorteret a maximum-normával. Ennek lineáris altere $C^1([-\pi, \pi])$, a folytonosan differenciálható $[-\pi, \pi] \to \mathbb{K}$ függvények összessége; szűkítsük le rá a maximum-normát. A

$$D : C^1([-\pi, \pi]) \to C([-\pi, \pi]), \quad f \mapsto f'$$

(differenciálás) lineáris leképezés, de nem folytonos, hiszen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\exp^{in} \in C^1([-\pi, \pi])$, $\| \exp^{in} \| = 1$, de

$$\|D \exp^{in}\| = \|in \exp^{in}\| = n,$$

így nincs olyan $K>0$, hogy $\|Df\| \leq K\|f\|$ teljesülne minden $f \in C^1([-\pi, \pi])$ esetén.

10.3. Definíció *Legyenek* $(V_1, \| \,.\, \|_1)$ *és* $(V_2, \| \,.\, \|_2)$ *normált terek. Bármely* $A \in \mathcal{L}in(V_1, V_2)$ *esetén legyen*

$$\|A\| := \inf\{L>0 \mid \|Ax\|_2 \leq L\|x\|_1,\ x \in V\}\ .$$

Megjegyzés Az $\|A\|$ mennyiség függ az $\| \,.\, \|_1$ és a $\| \,.\, \|_2$ normától. Ha más normákat választunk – persze úgy, hogy A folytonos maradjon, például $\| \,.\|_1$-nél finomabbat, $\| \,.\, \|_2$-nál durvábbat –, akkor a szóban forgó infimum más lesz.

Állítás

$$\|A\| = \sup_{x \neq \mathbf{0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} = \sup_{\|x\|_1 = 1} \|Ax\|_2 = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2.$$

Bizonyítás A második és a harmadik egyenlőség nyilvánvaló. Minden $y \in V_1,\ y \neq \mathbf{0}$ esetén

$$\frac{\|Ay\|_2}{\|y\|_1} \leq \sup_{x \neq \mathbf{0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1},$$

így

$$\|Ay\|_2 \leq \left(\sup_{x \neq \mathbf{0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} \right) \|y\|_1,$$

következésképpen

$$\|A\| \leq \sup_{x \neq \mathbf{0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}.$$

Legyen $\varepsilon>0$ tetszőleges. Ekkor minden $x \in V$ esetén

$$\|Ax\|_2 \leq (\|A\| + \varepsilon)\|x\|_1, \qquad (*)$$

következésképpen

$$\sup_{x \neq \mathbf{0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} \leq \|A\| + \varepsilon.$$

Mivel ez minden $\varepsilon>0$ számra teljesül, az is igaz, hogy

$$\sup_{x \neq \mathbf{0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} \leq \|A\|.$$

10.4. Az egyszerűbb írásmód kedvéért a szokásnak megfelelően a továbbiakban minden normát ugyanazzal a $\| \,.\, \|$ szimbólummal jelölünk (mint ahogy az összeadást is minden vektortéren ugyanúgy jelöljük), kivéve ha félreértésre adhat okot, például határozottan ugyanazon a vektortéren adott két különböző normáról van szó. Ennek megfelelően a normát el is hagyjuk a normált tér jelöléséből.

Állítás *Legyen V_1 és V_2 normált tér. Ekkor*

(1) a 10.3. definícióban adott

$$\mathcal{L}in(V_1, V_2) \to \mathbb{R}_0^+, \quad A \mapsto \|A\|$$

leképezés norma;

(2) minden $A \in \mathcal{L}in(V_1, V_2)$ és $x \in V_1$ esetén

$$\|Ax\| \le \|A\| \, \|x\| \ ;$$

(3) ha V_3 is normált tér és $A \in \mathcal{L}in(V_1, V_2)$, $B \in \mathcal{L}in(V_2, V_3)$, akkor $BA := B \circ A$ a $\mathcal{L}in(V_1, V_3)$ eleme, és

$$\|BA\| \le \|B\| \, \|A\|.$$

Bizonyítás (1) Legyen $A, B \in \mathcal{L}in(V_1, V_2)$ és $\alpha \in \mathbb{K}$. Világos, hogy

$$\sup_{\|x\|=1} \|\alpha Ax\| = \sup_{\|x\|=1} |\alpha| \, \|Ax\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|,$$

$$\sup_{\|x\|=1} \|(A+B)x\| \le \sup_{\|x\|=1} \big(\|Ax\| + \|Bx\|\big) \le \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| + \sup_{\|x\|=1} \|Bx\|.$$

(2) Az előző állítás bizonyításának $(*)$ összefüggése alapján nyilvánvaló, hiszen $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

(3) A (2) szerint minden $x \in V_1$ esetén $\|BAx\| \le \|B\| \, \|Ax\| \le \|B\| \, \|A\| \, \|x\|$. ∎

10.5. Eredményeink egy sokat használt, egyszerű következménye:

Állítás *Legyen V_1 normált tér, V_2 teljes normált tér. Bármely $A : V_1 \rightarrowtail V_2$ folytonos lineáris leképezés egyértelműen kiterjeszthető $\overline{A} : \overline{\mathrm{Dom}(A)} \to V_2$ folytonos lineáris leképezéssé, és $\|\overline{A}\| = \|A\|$.*

Bizonyítás A 10.1. állítást alkalmazva (V_1 helyett $\mathrm{Dom}(A)$-ra) tudjuk, hogy A egyenletesen folytonos $\mathrm{Dom}(A)$-n, így a 8.11. állítás értelmében egyértelműen kiterjeszthető egyenletesen folytonos $\overline{A}$ leképezéssé az értelmezési tartományának a lezártjára úgy, hogy ha $x_n \in \mathrm{Dom}(A)$ és $x := \lim_n x_n \in \overline{\mathrm{Dom}(A)}$, akkor $\overline{A}x = \lim_n Ax_n$. A határérték és a lineáris műveletek kapcsolata folytán nyilvánaló, hogy $\overline{A}$ lineáris. Továbbá $\|A\| \le \|\overline{A}\|$, hiszen $\overline{A}$ normáját bővebb halmazra vett szuprémumként kapjuk meg, mint A normáját, viszont

$$\|\overline{A}x\| = \|\lim_n Ax_n\| = \lim_n \|Ax_n\| \le \|A\| \lim_n \|x_n\| = \|A\| \, \|x\|,$$

tehát $\|\overline{A}\|\leq\|A\|$, és ezzel befejeztük a bizonyítást.

10.6. A 10.4. állítás (2) pontjából egyszerűen adódik a következő két fontos tény. Legyen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathcal{L}in(V_1, V_2)$-ben.

(i) Ha a sorozat konvergál a $\mathcal{L}in(V_1, V_2)$ A eleméhez a $\|\ .\ \|$ norma szerint, akkor

$$\|A_n x - Ax\| \leq \|A_n - A\|\,\|x\| \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in V_1),$$

tehát az $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergál Ax-hez, vagyis a sorozat pontonként is konvergál A-hoz; sőt a V_1 minden korlátos részhalmazán egyenletesen konvergál A-hoz.

(ii) Ha a sorozat Cauchy-féle a $\|\ .\ \|$ norma szerint, akkor

$$\|A_m x - A_n x\| \leq \|A_m - A_n\|\,\|x\| \qquad (n\in\mathbb{N},\ x \in V_1),$$

tehát az $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is Cauchy-féle.

Az állítás (3) pontjának pedig az követekezménye, hogy

(iii) ha $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathcal{L}in(V_1, V_2)$-ben és $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathcal{L}in(V_2, V_3)$-ban, amelyek normában konvergálnak A-hoz illetve B-hez, akkor $B_n A_n$ normában konvergál BA-hoz, hiszen a sorozatok korlátosak, azaz van olyan $K > 0$, hogy $\|B_n\| \leq K$ minden n-re, és így

$$\|B_n A_n - BA\| \leq \|B_n A_n - B_n A\| + \|B_n A - BA\| \leq K\,\|A_n - A\| + \|B_n - B\|\,\|A\|.$$

10.7. Állítás *Legyen V_1 és V_2 normált tér. Ha V_2 teljes, akkor $\mathcal{L}in(V_1, V_2)$ is teljes (a 10.3. szerinti normával ellátva).*

BIZONYÍTÁS Legyen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat $\mathcal{L}in(V_1, V_2)$-ben. Ekkor minden $x\in V_1$ esetén $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat V_2-ben, ezért V_2 teljessége miatt létezik

$$A(x) := \lim_n A_n x \in V_2.$$

Nyilvánvaló, hogy az így értelmezett $A{:}V_1\to V_2$ leképezés lineáris. Megmutatjuk, hogy folytonos is.

Minden $\varepsilon>0$ esetén létezik $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $m, n\geq n_\varepsilon$ természetes számra

$$\|A_m - A_n\| < \varepsilon.$$

Tehát a V_1 minden x elemére

$$\|A_n x - A_m x\| \leq \varepsilon\|x\|,$$

így

$$\|A_n x\| \leq \|A_m x\| + \varepsilon\|x\| \leq (\|A_m\| + \varepsilon)\|x\|,$$

amiből rögzített $m \geq n_\varepsilon$ és $n \to \infty$ esetére azt kapjuk, hogy

$$\|Ax\| \leq (\|A_m\| + \varepsilon)\|x\|,$$

teljesül, azaz A folytonos.

Még azt kell igazolnunk, hogy a szóban forgó sorozat A-hoz konvergál normában. Íme: ha $n \geq n_\varepsilon$ és $x \in V_1$, akkor

$$\|A_n x - Ax\| = \lim_m \|A_n x - A_m x\| \leq \varepsilon \|x\|,$$

következésképpen $\|A_n - A\| \leq \varepsilon$.

10.8. Legyen V normált tér; használjuk a $\mathcal{L}in(V) := \mathcal{L}in(V, V)$ jelölést. Ha $A \in \mathcal{L}in(V)$, akkor

$$A^0 := \mathrm{id}_V, \quad A^1 := A, \quad A^2 := AA,$$

és hasonlóan értelmezzük $n \in \mathbb{N}$ esetén A^n-et.

A 10.4. állítás (3) pontja szerint $\|A^n\| \leq \|A\|^n$, ezért, ha $c : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{K}$ olyan sorozat, hogy a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \mathrm{id}_{\mathbb{K}}^n$ hatványsor R konvergenciasugarára $\|A\| < R$ teljesül, akkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n A^n$ sor abszolút konvergens. Ha V teljes, akkor az előző állítás szerint $\mathcal{L}in(V)$ is teljes, így a fenti sor konvergens, jelölje az összegét $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n A^n$.

Így értelmesek a következő definíciók:

$$e^A := \mathrm{Exp}(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!},$$

$$\mathrm{Cos}(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A^{2n}}{(2n)!}, \qquad \mathrm{Sin}(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

és hasonlóan $\mathrm{Ch}(A)$ és $\mathrm{Sh}(A)$.

Igen fontos, hogy $A, B \in \mathcal{L}in(V)$ esetén általában $e^{A+B} \neq e^A e^B$, ha viszont A és B felcserélhetők, azaz $AB = BA$, akkor $e^{A+B} = e^A e^B$. Speciálisan, $A \in \mathcal{L}in(V)$ és $t, s \in \mathbb{K}$ esetén

$$e^{tA} e^{sA} = e^{(t+s)A}.$$

10.9. Definíció *Legyen V_1 és V_2 normált tér. Az $A \in \mathcal{L}in(V_1, V_2)$* ***invertálható****, ha bijekció és az inverze – amely szükségképpen lineáris bijekció – folytonos, azaz $A^{-1} \in \mathcal{L}in(V_2, V_1)$.*

Állítás *Legyen V teljes normált tér és $A \in \mathcal{L}in(V)$ olyan, hogy $\|A\|<1$. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ sor konvergens, $\mathrm{id}_V - A$ invertálható, és*

$$(\mathrm{id}_V - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

Bizonyítás Az előbbi pont szerint $\|A\|<1$ miatt a $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ sor abszolút konvergens, így a $\mathcal{L}in(V)$ teljessége miatt konvergens is.

Speciálisan, $\lim_n A^n = 0$ $\mathcal{L}in(V)$-ben, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(\mathrm{id}_V - A)\left(\sum_{k=0}^{n} A^k\right) = \mathrm{id}_V - A^{n+1},$$

így a 10.6. (iii) szerint

$$(\mathrm{id}_V - A)\left(\sum_{n=0}^{\infty} A^n\right) = \lim_n \left((\mathrm{id}_V - A)\left(\sum_{k=0}^{n} A^k\right)\right) = \lim_n (\mathrm{id}_V - A^{n+1}) = \mathrm{id}_V.$$

Hasonlóan kaphatjuk, hogy

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k\right)(\mathrm{id}_V - A) = \mathrm{id}_V,$$

amivel be is bizonyítottuk, amit akartunk. ■

Megjegyzés Sokszor célszerű az előző állítást átfogalmazni: ha $C \in \mathcal{L}in(V)$ és $\|\mathrm{id}_V - C\|<1$, akkor C invertálható, és

$$C^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{id}_V - C)^n.$$

10.10. Állítás *Legyen V_1 és V_2 teljes normált tér, $A \in \mathcal{L}in(V_1, V_2)$ invertálható. Ha $B \in \mathcal{L}in(V_1, V_2)$ olyan, hogy*

$$\|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|},$$

akkor B is invertálható.

Bizonyítás Lévén

$$\|A^{-1}B - \mathrm{id}_V\| = \|A^{-1}(B-A)\| \le \|A^{-1}\|\|B-A\| < 1,$$

az előző állítás szerint $A^{-1}B$ invertálható, így

$$B = A(A^{-1}B)$$

is invertálható.

Megjegyzés Az állítás szerint tehát a $V_1 \to V_2$ invertálható lineáris leképezések halmaza nyílt $\mathcal{L}in(V_1, V_2)$-ben, hiszen ha A invertálható, akkor az A középpontú, $\dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$ sugarú nyílt gömb minden eleme invertálható.

10.11. Állítás *Legyen $n \in \mathbb{N}$ és V_i $(i=1,\dots,n)$ normált terek valamint W is normált tér. Legyen $R\colon \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} V_i \to W$ n-lineáris leképezés. Lássuk el a $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} V_i$ vektorteret a szokásos három szorzatnorma egyikével. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(1) Létezik $L>0$ úgy, hogy minden $(x_1,\dots,x_n) \in \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} V_i$ esetén

$$\|R(x_1,\dots,x_n)\| \le L\|x_1\| \;\; \|x_2\| \dots \|x_n\|,$$

(2) R folytonos;

(3) R folytonos a $(\mathbf{0},\dots,\mathbf{0}) \in \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} V_i$ pontban.

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy (1)-ből következik (2), (2)-ből pedig (3).

Tegyük fel, hogy R folytonos a $(\mathbf{0},\dots,\mathbf{0}) \in \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} V_i$ pontban. Ekkor létezik $r>0$ úgy, hogy

$$R[G_r^{(\infty)}(\mathbf{0},\dots,\mathbf{0})] \subset G_1(\mathbf{0}_W).$$

Mivel $G_r^{(\infty)}(\mathbf{0},\dots,\mathbf{0}) = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} G_r^{(i)}(\mathbf{0})$, a 10.1. állítás bizonyításához hasonlóan kapjuk, hogy minden $x_1 \in V_1, \dots, x_n \in V_n$ esetén

$$\|R(x_1,\dots,x_n)\| \le \left(\frac{2}{r}\right)^n \|x_1\| \;\; \|x_2\| \dots \|x_n\|.$$

Megjegyzések (i) A 10.2. állításhoz hasonlóan bizonyítható, hogy véges dimenziós vektorterek Descartes-szorzatán értelmezett multilineáris leképezés folytonos.

(ii) Az előző állítás feltételei mellett jelölje $\mathcal{L}in^n(\bigtimes_{i=1}^n V_i;W)$ az $\bigtimes_{i=1}^n V_i \to W$ folytonos n-lineáris leképezések halmazát, mely a pontonkénti műveletekkel vektortér ($\mathbb{K}$ felett). Ekkor az

$$\mathcal{L}in^n(\bigtimes_{i=1}^n V_i;W)\to\mathbb{R}_0^+,$$
$$R\mapsto\|R\| := \sup\{\|R(x_1,\dots,x_n)\| \mid \|x_1\| = \dots = \|x_n\| = 1\}$$

leképezés norma, és

$$\|R(x_1,\dots,x_n)\| \le \|R\|\,\|x_1\|\,\|x_2\|\dots\|x_n\|.$$

(iii) A 10.7. állításhoz hasonlóan bizonyítható, hogy $\mathcal{L}in_n(\bigtimes_{i=1}^n V_i;W))$ teljes a fenti normával, ha W teljes.

10.12. A következőkben folytonos lineáris illetve multilineáris leképezésekre vonatkozó néhány azonosítást tárgyalunk, amelyekhez hasonlóakkal már találkoztunk a vektorterek elméletében (lásd Analízis II.11.5. és Analízis II.19.3.).

Állítás *Legyenek $V_1,\dots,V_N$ és $W_1,\dots,W_M$ normált terek. Ekkor*

$$\mathcal{L}in\left(\bigtimes_{k=1}^N V_k, \bigtimes_{i=1}^M W_i\right) \equiv \bigtimes_{k=1}^N \bigtimes_{i=1}^M \mathcal{L}in(V_k,W_i),$$

$$A \equiv (A_{ik} \mid i=1,\dots,M;\ k=1,\dots,N),$$

ahol $A_{ik}x_k := pr_i(A(0,\dots,0,x_k,0,\dots,0)$ $(x_k\in V_k)$. Továbbá akármelyik szorzatnormára

$$\|A\| = \max\{\|A_{ik}\| \mid i=1,\dots,M,\ k=1,\dots,N\}.$$

Bizonyítás Világos, hogy A_{ik} folytonos lineáris leképezés minden i-re és k-ra, valamint ezekből a szokásos blokkmátrix-formalizmussal megkapható A; az $A\mapsto (A_{ik} \mid i=1,\dots,M,\ k=1,\dots,N)$ hozzárendelés lineráis bijekció.

Továbbá

$$\|A_{ik}x_k\| = \|\mathrm{pr}_i A(0,\dots,0,x_k,0,\dots,0)\| \le \|A\|\,\|x_k\|$$

akármelyik szorzatnormára (lásd az 1. feladatot), ezért a $\ge$ reláció fennáll az állításban szereplő normákra.

Viszont ha az A indulási halmazán az "egyes" szorzatnormát vesszük, az érkezési halmazán a "végtelen" szorzatnormát, akkor $x = (x_1, \ldots, x_N)$ esetén

$$\|Ax\| = \max_{1\le i\le M} \left\| \sum_{k=1}^{N} A_{ik}x_k \right\| \le \max_{i,k} \|A_{ik}\| \sum_{k=1}^{N} \|x_k\| = \max_{i,k} \|A_{ik}\| \; \|x\|,$$

amiből a 3.3.2. feladat alapján következik, hogy minden más szorzatnorma esetén is teljesül az egyenlőtlenség, tehát a $\le$ reláció is fennáll az állításban szereplő normákra.

10.13. Állítás *Legyen $V_1, \ldots, V_n$ és W normált tér. Ekkor*

$$\mathcal{L}in^n \left(\bigtimes_{i=1}^{n} V_i, W \right) \equiv \mathcal{L}in \left(V_n, \mathcal{L}in^{n-1} \left(\bigtimes_{i=1}^{n-1} V_i, W \right) \right),$$

$$R \equiv \big(x_n \mapsto R(\cdot, \ldots, \cdot, x_n)\big),$$

és

$$\|R\| = \|(x_n \mapsto R(\cdot, \ldots, \cdot, x_n))\|.$$

Bizonyítás Ugyanúgy érvelhetünk, mint Analízis II.19.3-ban, ha tudjuk, hogy $(x_n \mapsto R(\cdot, \ldots, \cdot, x_n))$ folytonos. Ezt mutatjuk meg úgy, hogy belátjuk a normákra állított egyenlőséget:

$$\sup_{\|x_n\|=1} \|(x_n \mapsto R(\cdot, \ldots, \cdot, x_n))\| =$$
$$\sup_{\|x_n\|=1} \Big(\sup_{\|x_1\|=\ldots\|x_{n-1}\|=1} \|R(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)\| \Big) = \|R\|.$$

10.14. Feladatok

1. Legyen $W_1, \ldots, W_M$ normált tér. Mutassuk meg, hogy a $\mathrm{pr}_i : \bigtimes_{j=1}^{M} W_j \to W_i$ kanonikus projekció foltytonos lineáris leképezés, és mindegyik ismert szorzatnormára $\|\mathrm{pr}_i\| = 1$.

2. Legyen V_1 és V_2 teljes normált tér. Mutassuk meg, hogy

$$\mathcal{L}in(V_1, V_2) \rightarrowtail \mathcal{L}in(V_2, V_1), \quad A \mapsto A^{-1}$$

leképezés, melynek értelmezési tartománya az invertálható leképezések halmaza, folytonos.

3. Legyen V teljes normált tér. Igazoljuk, hogy minden $A \in \mathcal{L}in(V)$ esetén e^A invertálható és $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

4. Legyen V teljes normált tér. Igazoljuk, hogy ha $A\in\mathcal{L}in(V)$, akkor $\|e^A\|\le\|A\|$. Ezért a

$$\mathbb{K}\to\mathcal{L}in(V), \quad t\mapsto e^{tA}$$

leképezés folytonos.

5. Legyen V teljes normált tér. Bizonyítsuk be, hogy

$$e^A = \lim_n \left(\mathrm{id}_V + \frac{A}{n}\right)^n.$$

(Útmutatás: becsüljük meg a két sorozat n-edik tagjának a különbségét.)

6. Az előző eredmény alapján, ha V véges dimenziós, akkor $\det\left(e^A\right) = e^{\mathrm{Tr(A)}}$. (Útmutatás: elég belátni $\mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N$ lineáris leképezésekre azaz $N \times N$-es mátrixokra.)

7. Legyen $g\in C([a,b])$ adott. Mutassuk meg, hogy

(i) $M_g : C([a,b])\to C([a,b]), \quad f\mapsto gf$ folytonos lineáris leképezés (a maximumnormára vonatkozóan), és $\|M_g\| = \|g\|$.

(ii) $e^{M_g}=M_{\exp\circ g}$.

8. Legyen V normált tér és $A\in\mathcal{L}in(V)$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{aligned} L_A &:\mathcal{L}in(V)\to\mathcal{L}in(V), \quad B\mapsto AB,\\ R_A &:\mathcal{L}in(V)\to\mathcal{L}in(V), \quad B\mapsto BA \end{aligned}$$

folytonos lineáris leképezések és $\|L_A\|=\|R_A\|=\|A\|$.

9. Legyen V_1 és V_2 normált tér és

$$\Omega := \{A\in\mathcal{L}in(V_1,V_2) \mid \text{ létezik } B\in\mathcal{L}in(V_2,V_1) \text{ úgy, hogy } B\circ A=\mathrm{id}_{V_1}\},$$

$$\Omega' := \{A\in\mathcal{L}in(V,V') \mid \text{ létezik } B\in\mathcal{L}in(V_2,V_1) \text{ úgy, hogy } A\circ B=\mathrm{id}_{V_2}\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy ha V_1 (illetve V_2) teljes, akkor Ω (illetve Ω') nyílt halmaz $\mathcal{L}in(V_1,V_2)$-ben.

10. Legyen V_1, V_2 és V_3 normált tér. Bizonyítsuk be, hogy

(i) $\mathcal{L}in(V_1,V_2)\times V_1\to V_2, \quad (A,x)\mapsto Ax$

(iii) $\mathcal{L}in(V_2,V_3)\times\mathcal{L}in(V_1,V_2)\to\mathcal{L}in(V_1,V_3), \quad (B,A)\mapsto BA$

folytonos bilineáris leképezések. Adjuk meg a normájukat!

11. Legyen U és V normált tér, $q \in U$, $p \in V$. Ekkor $q \otimes p : U \times V \to \mathbb{K}$, $(u,v) \mapsto (q|u)(p|v)$ folytonos bilineáris leképezés; adjuk meg a normáját!

12. Válaszoljuk meg a 8.15.1. feladat kérdését a 10.11. állítás alapján.