MATOLCSI TAMÁS

ANALÍZIS V.
Integrálás

Tartalom

A. VALÓS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

B. MÉRTÉKELMÉLET

I. MÉRHETŐSÉG

II. MÉRTÉK ÉS INTEGRÁL

III. FÜGGVÉNYTEREK

IV. VEKTORMÉRTÉKEK

A. VALÓS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

I. MÉRTÉK AZ INTERVALLUMOKON

1. Az intervallumok félgyűrűje

1.1. Elemi matematikai ismereteink közé tartozik, hogy az a és b oldalú téglalap területe ab, az a alapú és m magasságú háromszög területe $am/2$, az r sugarú kör területe $r^2\pi$. Téglatestek, gúlák, gömbök térfogatára is jól ismert képleteink vannak.

Itt az idő, hogy a terület- és térfogatfogalommal alaposabban foglalkozzunk. Először is azt a kérdést kell felvetnünk, hogy az imént idézett formulák definíciók vagy állítások; állíthatjuk-e, hogy a téglalap illetve a kör területe ab illetve $r^2\pi$, vagy így értelmezzük ezen alakzatok területét? Ha definíció, akkor miért így definiáljuk; ha állítás, akkor hogyan van értelmezve a terület, amelyről állítjuk, hogy ennyi?

A válasz az, hogy részben definícióval, részben állítással állunk szemközt. Pontosabban: az a és b oldalú téglalap területét ab-nek definiáljuk tapasztalati célszerűség alapján, és ebből bizonyos eljárással bizonyos síkidomok területét értelmezni tudjuk, és így állítjuk például, hogy az eljárás az r sugarú körre az $r^2\pi$ eredményt szolgáltatja.

Feladatunk az, hogy pontosan meghatározzuk, mi az a "bizonyos eljárás" és melyek azok a "bizonyos síkidomok". Természetesen hasonló a helyzet testek térfogatával is. Mondandónkat a következőkben síkidomokkal szemléltetjük, viszont a pontos matematikai eljárást egyenes "vonaldarabokkal" visszük végig (ami a bot hossza, kifeszített fonal hossza képzetünknek felel meg), mert ez sokkal egyszerűbb, és később belőle a terület- és térfogatfogalom is származtatható. Az "egyenes" szerepét a továbbiakban $\mathbb{R}$ játssza, a "síkét" pedig $\mathbb{R}^2$.

1.2. A következőkben $\mathcal{I}$ a valós számok korlátos intervallumaiból, egypont-halmazaiból és az üres halmazból álló összeséget jelöli.

Állítás *Ha $I, J \in \mathcal{I}$, akkor*

(i) $I \cap J \in \mathcal{I}$,
(ii) $I \setminus J$ véges sok $\mathcal{I}$-beli diszjunkt halmaz egyesítése.

Az olvasóra bízzuk, hogy lássa be ezt, igen egyszerű, csak egy kicsit körülményes leírni a bizonyítás lépéseit.

1.3. $\mathbb{R}^2$-ben az üres halmaz, a korlátos téglák, az "elfajult" korlátos téglák, az egypont halmazok és az üres halmaz összessége – vagyis $\{I \times J \mid I, J \in \mathcal{I}\}$ – is az előbb felsorolt tulajdonságokkal rendelkezik: kettőnek a metszete is ilyen, különbségük pedig véges sok ilyen diszjunkt uniója.

Ez a struktúra megjegyzésre érdemes, ezért általános meghatározást adunk rá.

Definíció *Legyen X halmaz, $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{S}$* ***félgyűrű****, ha minden $I, J \in \mathcal{S}$ esetén*

(i) $I \cap J \in \mathcal{S}$,
(ii) $I \setminus J$ véges sok $\mathcal{S}$-beli diszjunkt halmaz egyesítése.

Az előző állításunkat ezzel tehát úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a korlátos intervallumok, az egypont-halmazok és az üres halmaz félgyűrűt alkotnak, amelyet a továbbiakban az egyszerűség kedvéért az **intervallumok félgyűrűjének** hívunk.

1.4. Vezessünk be egy egyszerűsítő jelölést: ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, akkor legyen $\lceil a, b \rfloor$

– $a < b$ esetén olyan (akár nyílt, akár zárt, akár félig nyílt, félig zárt) intervallum, amelynek alsó végpontja a, felső végpontja b,

– $a = b$ esetén az $\{a\} = \{b\}$ egy elemű halmaz.

Ezzel tehát $\mathcal{I} := \{\lceil a, b \rfloor \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\} \cup \emptyset$.

Definíció *Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, akkor*

$$|\lceil a, b \rfloor| := b - a, \qquad |\emptyset| := 0$$

a szóban forgó halmazok ***hossza****, és az így meghatározott $\mathcal{I} \to \mathbb{R}_0^+$ leképezést az intervallumok félgyűrűjén adott* ***hosszmértéknek*** *hívjuk.*

Az olvasóra bízzuk, lássa be a következő egyszerű tényeket:

(i) ha $I_1, \ldots, I_n$ az $\mathcal{I}$ páronként diszjunkt elemei és $I \in \mathcal{I}$ olyan, hogy $\biguplus_{k=1}^{n} I_k \subset I$, akkor $\sum_{k=1}^{n} |I_k| \leq |I|$,

(ii) ha $I_1, \ldots, I_n, I \in \mathcal{I}$ és $I \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k$, akkor $|I| \leq \sum_{k=1}^{n} |I_k|$.

1.5. Az előbbi (i)-ben még egy kicsit többet is tudunk mondani:

ha $\biguplus_{k=1}^{n} I_k = I$, akkor $\sum_{k=1}^{n} |I_k| = |I|$.

Ezt a tulajdonságot azzal fejezzük ki, hogy azt mondjuk, a hosszmérték **additív**.

Most belátjuk azt a nagyon fontos tényt, hogy a hosszmérték nem csak additív, hanem σ-**additív** is, azaz megszámlálható sok diszjunkt $\mathcal{I}$-beli elemre is a ilyen összefüggés igaz.

Állítás *Ha I_n $(n \in \mathbb{N})$ páronként diszjunkt $\mathcal{I}$-beli halmazok és $\biguplus_{n\in\mathbb{N}} I_n \in \mathcal{I}$, akkor*

$$\left|\biguplus_{n\in\mathbb{N}} I_n\right| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |I_n|.$$

Bizonyítás Mivel $\biguplus_{n=1}^{N} I_n \subset \biguplus_{n\in\mathbb{N}} I_n$ minden $N \in \mathbb{N}$ esetén, az előbbi (i) összefüggés alapán $\sum_{n=1}^{N} |I_n| \le \left|\biguplus_{n\in\mathbb{N}} I_n\right|$, amiből

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |I_n| \le \left|\biguplus_{n\in\mathbb{N}} I_n\right|.$$

A másik irányú egyenlőtlenség megmutatásához komolyabb eszközökre van szükségünk.

Kizárhatjuk az $|\biguplus_{n\in\mathbb{N}} I_n| = 0$ triviális esetet, legyen tehát $\lceil a, b\rfloor := \biguplus_{n\in\mathbb{N}} I_n,\ a < b$. Feltehetjük továbbá, hogy $I_n \ne \emptyset$ minden n-re; legyen $\lceil a_n, b_n\rfloor := I_n$.

Vegyünk α és β pozitív számokat úgy, hogy $\alpha < \left|\biguplus_{n\in\mathbb{N}} I_n\right|$, és legyen

$$K := \left]a + \frac{\alpha}{2}, b - \frac{\alpha}{2}\right[, \qquad \overline{K} := \left[a + \frac{\alpha}{2}, b - \frac{\alpha}{2}\right],$$

$$L_n := \left]a_n - \frac{\beta}{2^{n+1}}, b_n + \frac{\beta}{2^{n+1}}\right[.$$

Világos, hogy $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$ a $\overline{K}$ kompakt halmaz nyílt lefedése, ezért van olyan V véges részhalmaza $\mathbb{N}$-nek, hogy $K \subset \overline{K} \subset \bigcup_{n\in V} L_n$, és így az előbbi (ii) összefüggés szerint $|K| \le \sum_{n\in V} |L_n|$, azaz

$$\left|\biguplus_{n\in\mathbb{N}} I_n\right| - \alpha \le \sum_{n\in V}\left(|I_n| + \frac{\beta}{2^n}\right) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} |I_n| + \beta.$$

Mivel ez minden α és β esetén igaz, fennáll az egyenlőtlenség α és β elhagyásával is, és ezt akartuk bizonyítanai. ■

Hasonlóan látható be, egy kicsit körülményesebben, hogy az $\mathbb{R}^2$-beli téglákon az $I \times J \mapsto |I|\,|J|$ formulával definiált területmérték is σ-additív.

1.6. Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy az üres halmaz minden nem üres félgyűrűnek eleme!
2. Melyek félgyűrűk az alábbi halmazrendszerek közül:
(i) korlátos, zárt intervallumok, egypont-halmazok és az üres halmaz,
(ii) korlátos, nyílt intervallumok, egypont-halmazok és az üres halmaz,
(iii) korlátos, alulról nyílt, felülről zárt intervallumok és az üres halmaz.
Válaszoljunk ugyanerre a kérdésre, ha elhagyjuk a korlátosság kikötését!
3. Félgyűrűt alkotnak-e a $\mathbb{K}^N$ nyílt részhalmazai?
4. Igazoljuk, hogy ha $I \in \mathcal{I}$ és $a \in \mathbb{R}$, akkor $a + I \in \mathcal{I}$ és $|a + I| = |I|$.

2. Az intervallumok gyűrűje

2.1. Szeretnénk más $\mathbb{R}$-beli halmazok hosszát is értelmezni, nemcsak intervallumokét; ez a kívánalom még szembeötőbb $\mathbb{R}^2$ esetén, ahol nyilvánvalóan nem elégedhetünk meg a téglák területének értelmezésével.

Természetesnek látszik, hogy diszjunkt intervallumok (téglák) egyesítésének a hosszát (területét) az egyes hosszak (területek) összegeként határozzuk meg.

Definíció *Az*

$$\mathcal{N} := \left\{ E \subset \mathbb{R} \mid \text{létezik } n \in \mathbb{N}, I_1, \ldots, I_n \in \mathcal{I}, E = \biguplus_{k=1}^{n} I_k \right\}$$

halmazrendszert az ***intervallumok gyűrűjének*** *nevezzük, és az* $\biguplus_{k=1}^{n} I_k$ ***hossza*** $\left| \biguplus_{k=1}^{n} I_k \right| := \sum_{k=1}^{n} |I_k|$.

A hosszmérték az $\mathcal{N} \to \mathbb{R}_0^+$, $E \mapsto |E|$ *leképezés.*

Diszjunkt intervallumok uniója intervallum vagy "egymás mellé tett, nem érintkező intervallumok" ezért $\mathcal{N}$ elemei nem mondanak sok újat. Viszont a téglák gyűrűjében, amelyet értelemszerűen hasonlóképp definiálunk, szemmel láthatólag érdekes halmazok is megjelennek (például egy négyzetekből álló síkpiramis, vagy kisebb-nagyobb téglákból egy körbe írt alakzat), de ezek még mindig "szögletesek", tehát egy kör területét még mindig nem értelmeztük.

Meg kell még mutatnunk, hogy a hosszmérték definiciója $\mathcal{N}$-en egyértelmű; előfordulhat ugyanis, hogy ugyanazt a halmazt két különféle módon állítjuk elő intervallumok diszjunkt uniójaként.

Állítás *A hosszmérték $\mathcal{N}$-en egyértelmű, azaz ha* $\biguplus_{k=1}^{n} I_k = \biguplus_{i=1}^{m} J_i$, *akkor* $\sum_{k=1}^{n} |I_k| = \sum_{i=1}^{m} |J_i|$.

Bizonyítás $I_k \cap J_i \in \mathcal{I}$ minden k és i esetén, továbbá

$$I_k = \biguplus_{i=1}^{m} (I_k \cap J_i), \qquad J_i = \biguplus_{k=1}^{n} (J_i \cap I_k).$$

A hosszmérték $\mathcal{I}$-n additív, ezért

$$|I_k| = \sum_{i=1}^{m} |I_k \cap J_i|, \qquad |J_i| = \sum_{k=1}^{n} |J_i \cap I_k|,$$

és ebbő már következik, amit akartunk. ■

Jegyezzük meg azt a nyilvánvaló tényt, hogy $\mathcal{I} \subset \mathcal{N}$ és az $\mathcal{N}$-en bevezetett hosszmérték az $\mathcal{I}$-n adott hosszmérték kiterjesztése.

2.2. Most megvizsgáljuk $\mathcal{N}$ szerkezetét.

Először is megállapíthatjuk, hogy $\mathcal{N}$-beli véges sok diszjunkt halmaz uniója is $\mathcal{N}$-ben van.

Legyen $I_1, \dots, I_n \in \mathcal{I}$. Ekkor

$E_1 := I_1 \in \mathcal{N}$,

$E_2 := I_2 \setminus I_1$ véges sok $\mathcal{I}$-beli halmaz diszjunkt uniója, tehát az $\mathcal{N}$ eleme,

$E_3 := I_3 \setminus (I_2 \cup I_1) = (I_3 \setminus I_2) \setminus I_1$ is véges sok $\mathcal{I}$-beli halmaz diszjunkt uniója, tehát az $\mathcal{N}$ eleme,

vagyis az ismert eljárással (Analízis I.16.5.) megadható $\{E_k \mid k = 1, ..., n\}$ diszjunkt halmazrendszer $\mathcal{N}$-ben úgy, hogy $\bigcup_{k=1}^{n} I_k = \biguplus_{k=1}^{n} E_k$. Ezért az intervallumok egyesítése is hozzátartozik $\mathcal{N}$-hez, így az eredeti definícióból elhagyhatjuk a diszjunktság kikötését, azaz

$$\mathcal{N} = \left\{ E \subset \mathbb{R} \mid \text{ létezik } n \in \mathbb{N}, I_1, \dots, I_n \in \mathcal{I}, E = \bigcup_{k=1}^{n} I_k \right\}$$

Ebből most már közvetlenül adódnak $\mathcal{N}$ alapvető tulajdonságai.

Állítás *Ha $E, F \in \mathcal{N}$, akkor*

(i) $E \cup F \in \mathcal{N}$,

ii) $E \setminus F \in \mathcal{N}$.

Bizonyítás (i) nyilvánvaló a modottakból. (ii) igazolásához az

$$\bigcup_{k=1}^{n} I_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{m} J_i\right) = \bigcup_{k=1}^{n}\bigcap_{i=1}^{m}(I_k \setminus J_i)$$

halmazelméleti összefüggéssel jutunk el: a jobb oldali zárójelben álló halmazok $\mathcal{I}$-beliek diszjunkt uniója, a metszetük $\mathcal{I}$-beli halmazok metszetének diszjunkt uniója.

2.3. Az előbbi tulajdonságok megjegyzésre érdemesek, ezért általános meghatározásba foglaljuk őket.

Definíció *Legyen X halmaz, $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{R}$* ***gyűrű****, ha minden $E, F \in \mathcal{R}$ esetén*

(i) $E \cup F \in \mathcal{R}$,
(ii) $E \setminus F \in \mathcal{R}$.

1. Állítás *Ha $\mathcal{R}$ gyűrű és $E, F \subset \mathcal{R}$, akkor $E \cap F \in \mathcal{R}$.*

Bizonyítás $E \cap F = E \setminus (E \setminus F)$. ■

Természetesen az is igaz, hogy véges sok gyűrűbeli halmaz egyesítése és metszete is benne van a gyűrűben.

Nyilvánvaló, hogy egy gyűrű egyben félgyűrű is. Egy félgyűrű pedig természetes módon meghatároz egy gyűrűt, amelyet a **félgyűrű generálta gyűrűnek** hívunk:

2. Állítás *Ha $\mathcal{S}$ félgyűrű, akkor*

$$\left\{\biguplus_{k=1}^{n} I_k \;\middle|\; I_1,\dots,I_n \in \mathcal{S}\right\} = \left\{\bigcup_{k=1}^{n} I_k \;\middle|\; I_1,\dots,I_n \in \mathcal{S}\right\}$$

gyűrű.

2.4. A hosszmérték $\mathcal{N}$-en nyilvánvalóan additív, azaz véges sok diszjunkt $\mathcal{N}$-beli halmaz uniójának a hossza az egyes hosszak összege. Ennél több is igaz.

Állítás *A hosszmérték $\mathcal{N}$-en σ-additív, azaz ha E_n $(n \in \mathbb{N})$ páronként diszjunkt elemek $\mathcal{N}$-ben és $\biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{N}$, akkor*

$$\left|\biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n\right| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |E_n|.$$

Bizonyítás Állítsuk elő az $\mathcal{N}$ szóban forgó elemeit véges sok $\mathcal{I}$-beli halmaz diszjunkt uniójaként:

$$\biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n = \biguplus_{k=1}^{m} I_k, \qquad E_n = \biguplus_{i=1}^{m_n} J_{n,i}.$$

Ekkor

$$\left|\biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n\right| = \sum_{k=1}^{m} |I_k| = \sum_{k=1}^{m} \left|\biguplus_{n\in\mathbb{N}} \biguplus_{i=1}^{m_n} (I_k \cap J_{n,i})\right| =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{m_n} |I_k \cap J_{n,i}| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{m_n} \sum_{k=1}^{m} |I_k \cap J_{n,i}| =$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{m_n} |J_{n,i}| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |E_n|. \blacksquare$$

Tartsuk eszünkben azt a fontos tényt, hogy a 2.2.-ben tett megjegyzésünkkel szemben megszámlálható sok $\mathcal{N}$-beli halmaz uniója már nem feltétlenül van $\mathcal{N}$-ben, ezért az előző állításban ki kellett kötnünk, hogy $\biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n$ is tartozzon $\mathcal{N}$-hez.

2.5. Állítás *A hosszmérték $\mathcal{N}$-en*

(i) ***monoton****, azaz ha $E, F \in \mathcal{N}$, $F \subset E$, akkor $|F| \le |E|$,*

(ii) ***szubtraktív****, azaz ha $E, F \in \mathcal{N}$, $F \subset E$, akkor $|E \setminus F| = |E| - |F|$,*

*(iii) σ-**szubadditív**, azaz ha $E, E_n \in \mathcal{N}$ $(n \in \mathbb{N})$ és $E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, akkor $|E| \le \sum_{n\in\mathbb{N}} |E_n|$.*

Bizonyítás (i)-(ii). F és $E\setminus F$ diszjunktak, tehát $|E| = |F \uplus (E\setminus F)| = |F| + |E\setminus F|$.

(iii) $H_n := E \cap E_n$ az $\mathcal{N}$ eleme, és $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$. A szokásos diszjunktizációval $F_n := H_n \setminus \left(\biguplus_{k=1}^{n-1} H_k\right)$ szintén az $\mathcal{N}$ eleme, $F_n \subset E_n$ és $E = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Ezért

$$|E| = \left|\biguplus_{n\in\mathbb{N}} F_n\right| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |F_n| \le \sum_{n\in\mathbb{N}} |E_n|. \blacksquare$$

Megjegyezzük, hogy (iii)-ben az összeg általánosított értelemben veendő, ugyanis egyáltalán nem biztos hogy a szóban forgó sor konvergens, vagyis az összeg lehet végtelen is.

2.6. Állítás *A hosszmérték $\mathcal{N}$-en* ***monoton folytonos****, azaz ha* $E, E_n \in \mathcal{N}$ $(n \in \mathbb{N})$ *és*

(i) $E_{n+1} \subset E_n$, $E = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$, *akkor* $|E| = \lim\limits_n |E_n|$,

(i) $E_{n+1} \supset E_n$, $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$, *akkor* $|E| = \lim\limits_n |E_n|$.

Bizonyítás Az első esetet az $F_n := E_n \setminus E$, a másodikat az$F_n := E \setminus E_n$ definícióval visszavezethetjük arra, hogy

- ha $F_n \in \mathcal{N}$, $F_{n+1} \subset F_n$ és $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$, akkor $\lim\limits_n |F_n| = 0$.

Ezt pedig így látjuk be. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $F_n = \biguplus\limits_{k=n}^{\infty} (F_k \setminus F_{k+1})$, és ezért $|F_n| = \sum\limits_{k=n}^{\infty} |F_k \setminus F_{k+1}|$. Speciálisan $|F_1| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |F_k \setminus F_{k+1}|$, tehát $|F_n| = |F_1| - \sum\limits_{k=1}^{n-1} |F_k \setminus F_{k+1}|$; itt a jobb oldal épp az előző formula szerint nullához tart, miközben n tart a végtelenhez.

2.7. Feladatok

1. Melyek gyűrűk a következő halmazrendszerek közül:
(i) $\mathbb{R}$ véges részhalmazai,
(ii) $\mathbb{R}$ korlátos részhalmazai,
(iii) $\mathbb{K}^N$ összefüggő részhalmazai,
(iv) $\mathbb{K}^N$ nyílt részhalmazai.
2. Mutassuk meg, hogy a korlátos nyílt intervallumok, egypont-halmazok és az üres halmaz alkotta félgyűrű generálta gyűrű is $\mathcal{N}$.
3. Mi a korlátos, alulról nyílt, felülről zárt intervallumok és az üres halmaz alkotta félgyűrű által generált gyűrű?
4. Igazoljuk, hogy $\mathcal{N}$-en a hosszmérték σ-aditivitása egyenértékű azzal, hogy additív és monoton folytonos.
5. Bizonyítsuk be, hogy ha $E \in \mathcal{N}$, $a \in \mathbb{R}$, akkor $a + E \in \mathcal{N}$ és $|a + E| = |E|$.

3. Nulla mértékű halmazok

3.1. Az intervallumok gyűrűje illetve a téglák gyűrűje még nem tartalmazza mindazokat a halmazokat, amelyeknek mértéket akarunk tulajdonítani. Tovább kell bővíteni az eddig tekintett halmazok körét. Ehhez a nem kézenfekvő bővítéshez egy kis kerülővel, az integrálszámításon keresztül jutunk el. Az első lépés viszont hihetetlenül egyszerű, és tulajdonképpen minden ezen alapszik. Bevezetjük a nulla mértékűség fogalmát $\mathcal{N}$-en kívüli halmazokra is.

Definíció *$H \subset \mathbb{R}$ **nulla mértékű**, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\{E_n^\varepsilon \in \mathcal{N} \mid n \in \mathbb{N}\}$ úgy, hogy*

$$H \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n^\varepsilon \qquad \text{és} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} |E_n^\varepsilon| \leq \varepsilon.$$

Megjegyezzük, ez egyenértékű azzal, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén H-t le tudjuk fedni megszámlálható sok olyan $\mathcal{I}$-beli halmazzal, amelyek összhosszúsága nem nagyobb ε-nál.

Állítás *(i) $E \in \mathcal{N}$ pontosan akkor nulla mértékű, ha $|E| = 0$.*
(ii) Nulla mértékű halmaz minden részhalmaza nulla mértékű.

Bizonyítás (i) Ha $E \in \mathcal{N}$ és $|E| = 0$, akkor minden ε-hoz minden n-re $E_n^\varepsilon := E$.

Ha viszont $|E| \neq 0$ azaz $|E| > 0$, akkor bármely $E_n \in \mathcal{N}$ $(n \in \mathbb{N})$, $E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ esetén a σ-szubadditivitás miatt $0 < |E| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |E_n|$, és így E nem nulla mértékű.

(ii) Ez nyilvánvalóan igaz.

3.2. Állítás *A $H \subset \mathbb{R}$ halmazra a következő három kijelentés egyenértékű:*
(i) H nulla mértékű,
(ii) minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\{F_n^\varepsilon \in \mathcal{N} \mid n \in \mathbb{N}\}$ halmazrendszer, hogy $F_n^\varepsilon \cap F_m^\varepsilon = \emptyset$ ha $n \neq m$, $H \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n^\varepsilon$ és $\sum_{n\in\mathbb{N}} |F_n^\varepsilon| \leq \varepsilon$,
(iii) minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\{G_n^\varepsilon \in \mathcal{N} \mid n \in \mathbb{N}\}$ halmazrendszer, hogy $G_n^\varepsilon \subset G_{n+1}^\varepsilon$, $H \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n^\varepsilon$ és $|G_n^\varepsilon| \leq \varepsilon$ minden n-re.

Bizonyítás (ii)-ből nyilvánvalóan adódik (i).

Legyen $\{E_n^\varepsilon \in \mathcal{N} \mid n \in \mathbb{N}\}$ a H nulla mértékűségének definíciójában az ε-hoz tartozó halmazrendszer. Ekkor a $G_n^\varepsilon := \bigcup_{k=1}^{n} E_k^\varepsilon$ definícióval (i) maga után vonja (iii)-t.

Az $F_n^\varepsilon := G_{n+1}^\varepsilon \setminus G_n^\varepsilon$ definícióval (iii)-ból következik (ii).

3.3. Állítás *Ha $H_n \subset \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ nulla mértékű, akkor $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$ is nulla mértékű.*

Bizonyítás Legyen $\varepsilon > 0$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $E_{n,m} \in \mathcal{N}$, hogy

$H_n \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_{n,m}$ és $\sum_{m\in\mathbb{N}} |E_{n,m}| \leq \dfrac{\varepsilon}{2^n}$. Ezzel

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n \subset \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} E_{n,m} \qquad \text{és} \qquad \sum_{n,m\in\mathbb{N}} |E_{n,m}| \leq \varepsilon. \blacksquare$$

Mivel az egypont halmazok nulla mértékűek, $\mathbb{R}$ minden megszámlálható részhalmaza nulla mértékű. Speciálisan $\mathbb{Q}$ nulla mértékű. Ezzel rögtön példát is adtunk olyan nulla mértékű halmazra, amely nem tartozik $\mathcal{N}$-hez.

3.4. Most bevezetünk egy igen fontos fogalmat: "majdnem minden $x \in \mathbb{R}$ esetén" vagy "majdnem mindenütt", rövidítve "m.m. $x \in \mathbb{R}$ esetén" illetve "m.m." azt jelenti, hogy "minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, kivéve egy nulla mértékű halmazt", más szóval "létezik egy N nulla mértékű halmaz úgy, hogy minden $x \in \mathbb{R} \setminus N$ esetén". Természetesen a m.m. $x \in \mathbb{R}$ magában foglalja a minden $x \in \mathbb{R}$ lehetőséget, ha a nulla mértékű halmaz az üres halmaz.

További jelölések: ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények, akkor $f \underset{\text{m.m.}}{=} g$ vagy $f = g$ m.m. azt jelenti, hogy $\{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq g(x)\}$ nulla mértékű. Hasonló értelemben: $f \underset{\text{m.m.}}{\leq} g$ vagy $f \leq g$ m.m., $f \underset{\text{m.m.}}{=} \lim_n f_n$ vagy $f = \lim_n f_n$ m.m. stb.

3.5. Állítás *Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos és $f = 0$ m.m., akkor $f = 0$.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy $f \neq 0$, azaz van olyan $x \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) \neq 0$, mondjuk $f(x) > 0$. Ekkor f folytonossága miatt van olyan I nyílt intervallum, hogy $x \in I$ és $f(y) > 0$ minden $y \in I$ esetén. Mivel I nem nulla mértékű, f nem egyenlő nullával majdnem mindenütt.

3.6. Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy $\chi_{\mathbb{Q}}$ (a racionális számok halmazának karakterisztikus függvénye, más néven Dirichlet-függvény) majdnem mindenüt nulla, de nem nulla.
2. Igazoljuk, hogy az egészrész-függvény majdnem mindenütt folytonos.
3. Bizonyítsuk be, hogy ha $f \leq g$ m.m. és $g \leq h$ m.m., akkor $f \leq h$ m.m..
4. Ha $f_n \geq 0$ m.m. $(n \in \mathbb{N})$ és $f = \lim_n f_n$ m.m., akkor $f \geq 0$ m.m..
5. Konvergensek-e majdnem mindenütt az alábbi függvénysorozatok:
(i) $n \mapsto n\chi_{[-1/n,1/n]}$,
(ii) $n \mapsto \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^n$.
6. Ha $H \subset \mathbb{R}$ nulla mértékű halmaz, $a \in \mathbb{R}$, akkor $a + H$ is nulla mérékű.

II. INTEGRÁLHATÓSÁG

4. Az integrálás gondolata

Vegyünk egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt – mondjuk az exponenciálist – és vessük fel a kérdést: mekkora a $[0, 1]$ intervallumban a "függvény alatti" terület, vagyis mi a területe az $\bigcup_{x\in[0,1]} \{x\} \times [0, f(x)]$ halmaznak. Már láttuk, $\mathbb{R}^2$-ben eljuthatunk a véges sok diszjunkt korlátos téglából álló halmazok területéig. A szóban forgó halmaz nem ilyen, tehát értelmezni kell, mit értsünk a területén. Értelmezhető-e egyáltalán? Pontosabban: milyen függvényekre értelmezhető? E kérdések megválaszolásával elérkezünk majd ahhoz is, általában milyen $\mathbb{R}^2$-beli részhalmazoknak – tehát nem csak függvény alatti halmazoknak – tulajdoníthatunk területet.

Az alapgondolat az, közelítsük meg valahogy a függvény alatti halmazt véges sok diszjunkt tégláből álló halmazzal; adjunk meg egyre jobb és jobb közelítést, és a közelítések területének határeseteként definiáljuk a függvény alatti területet, amelyet a függvény integráljának szokás nevezni.

A kérdés az, mit tekintünk egyre jobb és jobb közelítésnek, miféle határértékeljárással jutunk a célunkhoz. Különféle választások lehetségesek. A választástól függően különféle integrálfogalmat kapunk. Régebben általában az úgynevezett Riemann-féle integrálással foglalkoztak, a modern matematika azonban ma már az ennél sokkal jobb tulajdonságú Lebesgue-féle integrálfogalmat követeli meg.

A Lebesgue-féle integrálfogalom bevezetésénél célszerű $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények alatti egész területet tekinteni, nem csak valamely intervallumba eső részt. Abból eljutunk ehhez is.

5. Egyszerű lépcső függvények

5.1. Az előző fejezetben említett függvény alatti halmaznak téglákkal való közelítését úgy is felfoghatjuk, hogy a függvényt közelítjük egy szakaszonként állandó függvénnyel; ezek a függvények alapvető szerepet játszanak az integrálelméletben.

Definíció *Egy $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt* ***egyszerű lépcsős függvénynek*** *hívunk, ha van olyan $n \in \mathbb{N}$ és $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{N}$, $E_i \cap E_k = \emptyset$ ha $i \neq k$, hogy*

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}.$$

Mivel diszjunkt halmazok karakterisztikus függvénye a karakterisztikus fügvények összege, a fenti definícióban vehettük volna $\mathcal{N}$ helyett $\mathcal{I}$-t, azaz φ pontosan akkor egyszerű lépcsős függvény, ha véges sok diszjunkt $\mathcal{I}$-beli halmaz karakterisztikus függvényének a lineáris kombinációja.

A kényelmesebb írásmód kedvéért a továbbiakban az e.l.fv. rövidítést alkalmazzuk egyszerű lépcsős függvényekre.

Állítás *Ha φ e.l.fv. , akkor minden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ esetén az*

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) > \alpha\}, \qquad \{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) \geq \alpha\},$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) < -\alpha\}, \qquad \{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) \leq -\alpha\}$$

valamint az

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) > 0\} \qquad \{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) < 0\}$$

halmazok az $\mathcal{N}$ elemei.

Bizonyítás Ha $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$, akkor például

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) > \alpha\} = \bigcup_{\{k \mid c_k > \alpha\}} E_k. \blacksquare$$

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy $\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) \geq 0\}$ viszont nem eleme $\mathcal{N}$-nek, hisz ez nem korlátos halmaz, mert φ egy korlátos halmazon kívül nulla.

5.2. Világos, hogy egy e.l.fv.-hez nincsenek egyértelműen meghatározva azok az $\mathcal{N}$-beli (vagy $\mathcal{I}$-beli) halmazok, amelyek karakterisztikus függvényeinek a lineáris kombinációja. Ezt jól fel is használhatjuk az alábbi eredményen keresztül.

Állítás *Ha φ és ψ e.l.fv., akkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{N}$ páronként diszjukt halmazok, $c_1 \dots, c_n, d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R}$, hogy*

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}, \qquad \psi = \sum_{k=1}^{n} d_k \chi_{E_k}.$$

Bizonyítás Legyen $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{r} a_i \chi_{A_i}$, $\psi = \sum\limits_{j=1}^{s} b_j \chi_{B_j}$. Ekkor $\left(\biguplus\limits_{i=1}^{r} A_i\right) \cup \left(\biguplus\limits_{j=1}^{s} B_j\right) =: C \in \mathcal{N}$, és $A_0 := C \setminus \left(\biguplus\limits_{i=1}^{r} A_i\right)$, $B_0 := C \setminus \left(\biguplus\limits_{j=1}^{s} B_j\right)$ is az $\mathcal{N}$ elemei, $\biguplus\limits_{i=0}^{r} A_i = \biguplus\limits_{j=0}^{r} B_j$, ezért

$$A_i = \biguplus_{j=0}^{s} (A_i \cap B_j) \qquad (i = 0, 1, \dots, r),$$

$$B_j = \biguplus_{i=0}^{r} (A_i \cap B_j) \qquad (j = 0, 1, \dots, s).$$

Következésképpen, ha $a_0 := b_0 := 0$, akkor

$$\varphi = \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{s} a_i \chi_{A_i \cap B_j}, \qquad \psi = \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{s} b_j \chi_{A_i \cap B_j},$$

és már semmi más dolgunk nincs, mint bevezetni az $E_1 := A_0 \cap B_0$, $E_2 := A_0 \cap B_1$ stb. halmazokat és $c_1 := c_2 := \dots := c_s := a_0$, $c_{s+1} := \dots := c_{2s} := a_1$ stb. számokat, hogy megkapjuk az állításban szereplő alakokat.

5.3. Állítás *Legyen φ és ψ e.l.fv., $\alpha \in \mathbb{R}$. Ekkor*
(i) $\varphi + \psi$, (ii) $\alpha\varphi$ (iii) $\varphi\psi$, (iv) $\varphi \wedge \psi$ és $\varphi \vee \psi$
is e.l.fv..

Bizonyítás Az előző eredményünk szerint vehetjük úgy, hogy $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$, $\psi = \sum\limits_{k=1}^{n} d_k \chi_{E_k}$. Ekkor

(i) $\varphi + \psi = \sum\limits_{k=1}^{n} (c_k + d_k) \chi_{E_k}$, (ii) $\alpha\varphi = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha c_k \chi_{E_k}$,

(iii) $\varphi\psi = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k d_k \chi_{E_k}$,

(iv) $\varphi \wedge \psi = \sum\limits_{k=1}^{n} \min\{c_k, d_k\} \chi_{E_k}$, $\varphi \vee \psi = \sum\limits_{k=1}^{n} \max\{c_k, d_k\} \chi_{E_k}$. ■

Jegyezzük meg, hogy (i) és (ii) miatt $\varphi - \psi$ is e.l.fv., (iv) és (ii) következtében φ^+ és φ^-, és ezzel együtt $|\varphi| = \varphi^+ + \varphi^-$ is e.l.fv..

5.4. Egy e.l.fv. alatti területet mint a megfelelő téglák területének az összegét értelmezzük, és az e.l.fv. integráljának nevezzük.

Definíció *A* $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$ *e.l.fv.* ***integrálja*** *az*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi := \sum_{k=1}^{n} c_k |E_k|$$

szám.

Állítás *A fenti definíció jó, azaz ha* $\varphi = \sum\limits_{j=1}^{m} d_j \chi_{F_j}$, *akkor* $\sum\limits_{j=1}^{m} d_j |F_j| = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k |E_k|$.

Bizonyítás Minden szóba jövő j és k esetén $F_j = \biguplus\limits_{k=1}^{n} (F_j \cap E_k)$, $E_k = \biguplus\limits_{j=1}^{m} (E_k \cap F_j)$ és $d_j = c_k$ ha $E_k \cap F_j \neq \emptyset$. Ezért

$$\sum_{j=1}^{m} d_j |F_j| = \sum_{j=1}^{m} d_j \sum_{k=1}^{n} |F_j \cap E_k| = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} d_j |F_j \cap E_k| =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} c_k |F_j \cap E_k| = \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{j=1}^{m} |E_k \cap F_j| = \sum_{k=1}^{n} c_k |E_k|.$$

Jegyezzük meg, hogy $E \in \mathcal{N}$ esetén

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \chi_E = |E|.$$

5.5. Állítás *Ha* φ *és* ψ *e.l.fv. és* $\alpha \in \mathbb{R}$, *akkor*

(i) $\int\limits_{\mathbb{R}} (\varphi + \psi) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi + \int\limits_{\mathbb{R}} \psi$, *(ii)* $\int\limits_{\mathbb{R}} \alpha\varphi = \alpha \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi$,

(iii) ha $\varphi \le \psi$, *akkor* $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi \le \int\limits_{\mathbb{R}} \psi$.

A fenti formulák bizonyítását az olvasóra bízzuk: ismételten az 5.2. állítást kell felhasználni, miszerint φ és ψ előállítható ugyanazon halmazok karakterisztikus függvényeinek a lineáris kombinációjaként.

Az első két tulajdonságra azt mondjuk, az integrálás lineáris művelet, a harmadikra pedig azt, hogy az integrálás monoton művelet. Ez utóbbinak egy speciális esete az, hogy ha $\varphi \geq 0$, akkor $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi \geq 0$.

Az alaptulajdonságokból következik az igen fontos

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi \right| \leq \int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi|$$

összefüggés, mert $\varphi \leq |\varphi|$ és $-\varphi \leq |\varphi|$, tehát $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi \leq \int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi|$ és $-\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi \leq \int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi|$, ami épp a fenti egyenlőtlenséggel egyenértékű.

5.6. Előfordul, hogy nem az egész e.l.fv. alatti terület érdekel minket, csak valamely intervallumba eső része alatti. Ezt úgy vezetjük vissza az egész függvény alatti területre, hogy a függvényt a kérdéses intervallumon kívül "kinullázzuk". Persze intervallum helyett az intervallumok gyűrűjének bármely elemét is tekinthetjük.

Definíció *Legyen φ e.l.fv. és $E \in \mathcal{N}$. Ekkor*

$$\int\limits_{E} \varphi := \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_E \varphi.$$

A meghatározás közvetlen következménye, hogy

(i) $\left| \int\limits_{E} \varphi \right| \leq |E| \sup |\varphi|$,

(ii) $\int\limits_{E \uplus F} \varphi = \int\limits_{E} \varphi + \int\limits_{F} \varphi$,

hiszen $|\chi_E \varphi| \leq \chi_E \sup |\varphi|$ és $E \cap F = \emptyset$ esetén $\chi_{E \cup F} = \chi_E + \chi_F$.

5.7. Feladatok

1. Igazoljuk, hogy ha φ e.l.fv., $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$, akkor $\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) = \alpha\}$ és $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < \varphi(x) < \alpha\}$ az $\mathcal{N}$ elmei.

2. Ha φ e.l.fv., akkor az értékkészlete véges. Mutassuk meg, hogy ha $\varphi \neq 0$, akkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, $c_i \neq c_k$ ha $i \neq k$ és $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{N}$, $E_i \cap E_k = \emptyset$ ha $i \neq k$, hogy $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$.

3. Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $f(0) = 0$, akkor bármely φ e.l.fv. esetén $f \circ \varphi$ is e.l.fv..

4. Legyen φ e.l.fv. és $E \in \mathcal{N}$, $\varphi(x) = 0$ ha $x \notin E$. Ekkor $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi = \int\limits_{E} \varphi$.

5. Ha φ e.l.fv. és $a \in \mathbb{R}$, akkor $\varphi \circ L_a^{-1}$ is e.l.fv. (ahol $L_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto x + a$) és

$$\int_{\mathbb{R}} (\varphi \circ L_a^{-1}) = \int_{\mathbb{R}} \varphi.$$

6. Az integrálás értelmezésének alaptételei

6.1. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt valami módon megközelítünk e.l.fv.-ek sorozatával, és az f integrálját – az f alatti területet – mint az e.l.fv.-ek alatti területek sorozatának határértékeként értelmezzük. Hogy mely függvényekre ésmiként tehető ez meg, azt rögzíti a következő két állítás, amelyeket segédtételnek, másszóval lemmának szoktak hívni, mert később általánosabb keretek között kimondott tételek speciális esetei lesznek. Persze, hogy azokat az általános tételeket kimondhassuk, előbb fel kell építeni az integrál fogalmát, amihez most e lemmák szükségesek.

Állítás *(**A. lemma**) Legyen φ, φ_n e.l.fv., $\varphi_n \le \varphi_{n+1} \le \varphi$ $(n \in \mathbb{N})$ és $\lim\limits_n \varphi_n = \varphi$ m.m.. Ekkor*

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} \varphi_n = \int_{\mathbb{R}} \varphi.$$

Bizonyítás Bevezetve a $\psi_n := \varphi - \varphi_n$ e.l.fv-eket, amelyekre $\psi_n \ge \psi_{n+1} \ge 0$ és $\lim\limits_n \psi_n = 0$ m.m. teljesül, azt kell megmutatnunk, hogy $\lim\limits_n \int\limits_{\mathbb{R}} \psi_n = 0$.

Megmutatjuk, hogy a $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat "majdnem egyenletesen" tart a nullához, azaz pontosan: minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n > n_e$ esetén a

$$P_n := \{x \in \mathbb{R} \mid \psi_n(x) > \varepsilon\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

halmazra, amely az $\mathcal{N}$ eleme, $|P_n| \le 2\varepsilon$ teljsül (ahol a kettes szorzó lényegtelen, csak így lesz kényelmes a bizonyítás).

Az $\{x \in \mathbb{R} \mid \lim\limits_n \psi_n(x) \ne 0\}$ halmaz nulla mértékű, azaz a 3.2.(iii) alapján az adott $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\{G_n \in \mathcal{N} \mid n \in \mathbb{N}\}$ halmazrendszer úgy, hogy $G_n \subset G_{n+1}$, $|G_n| \le \varepsilon$ minden n-re, és $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} G_n$ tartalmazza a szóban forgó nulla mértékű halmazt.

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $P_{n+1} \subset P_n$, tehát $P_n \setminus G_n \in \mathcal{N}$ és $P_{n+1} \setminus G_{n+1} \subset P_n \setminus G_n$,

továbbá

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(P\setminus G_n)=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}P_n\setminus\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}G_n\right)=$$
$$=\{x\in\mathbb{R}\mid \psi_n(x)>\varepsilon \text{ minden } n\text{-re és } \lim_n\psi_n(x)=0\}=\emptyset.$$

A hosszmérték monoton folytonossága miatt létezik tehát $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n>n_\varepsilon$ esetén $|P_n\setminus G_n|\le\varepsilon$, amiből ilyen n-ekre

$$|P_n|=|(P_n\cap G_n)\uplus(P_n\setminus G_n)|=|P_n\cap G_n|+|P_n\setminus G_n|\le 2\varepsilon.$$

Ezután már egyszerű a dolgunk. Legyen $M:=\max\psi_1$ és $E:=\{x\in\mathbb{R}\mid\psi_1(x)>0\}$. Mint tudjuk, $E\in\mathcal{N}$ és minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $P_n\subset E$, $\psi_n\le M$. Ezért, ha $n>n_\varepsilon$, akkor

$$0\le\int_{\mathbb{R}}\psi_n=\int_E\psi_n=\int_{E\setminus P_n}\psi_n+\int_{P_n}\psi_n\le|E\setminus P_n|\varepsilon+|P_n|M\le$$
$$\le\big(|E|+2M\big)\varepsilon,$$

amivel bebizonyítottuk, hogy a ψ_n-ek integráljainak a sorozata nullához tart.

6.3. Állítás *(**B. lemma**) Legyen φ_n e.l.fv. , $\varphi_n\le\varphi_{n+1}$ $(n\in\mathbb{N})$. Ha létezik $\lim_n\int_{\mathbb{R}}\varphi_n$, akkor létezik m.m. $\lim_n\varphi_n$.*

Bizonyítás Feltehetjük az általánosság megszorítása nélül, hogy $\varphi_n\ge 0$, hiszen ha nem így volna, áttérnénk a $\psi_n:=\varphi_n-\varphi_1$ sorozatra. A

$$H:=\{x\in\mathbb{R}\mid \text{ nem létezik } \lim_n\varphi_n(x)\}$$

halmazról kell megmutatnunk, hogy nulla mértékű.

Legyen $\varepsilon>0$. Az $\alpha:=\lim_n\int_{\mathbb{R}}\varphi_n$ jelöléssel minden $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$G_n:=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;\varphi_n(x)>\frac{\alpha}{\varepsilon}\right\}$$

az $\mathcal{N}$ eleme, és $G_n\subset G_{n+1}$. Nyilvánvaló, hogy $H\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}G_n$, továbbá minden n-re

$$\alpha\ge\int_{\mathbb{R}}\varphi_n\ge\int_{\mathbb{R}}\chi_{G_n}\varphi_n\ge\frac{\alpha}{\varepsilon}|G_n|,$$

amiből $|G_n| \le \varepsilon$, így a 3.2.(iii) alapján H nulla mértékű.

6.4. A B. lemmában $n \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_n$ monoton növő számsorozat, ezért határértékének létezése egyenértékű azzal, hogy korlátos, azaz van olyan $\alpha \in \mathbb{R}$, hogy $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_n \le \alpha$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

Mind az A. lemma, mind a B. lemma igaz monoton fogyó e.l.fv. sorozatra is, hiszen ha $\varphi_n \ge \varphi_{n+1}$, akkor $-\varphi_n \le \varphi_{n+1}$.

Jegyezzük meg jól a különbséget a két lemma között. Az egyikben az e.l.fv. sorozat m.m. konvergenciáját tudjuk, és ebből származtatjuk az integrálok sorozatának a konvergenciáját, a másikban az integrálok sorozatának a konvergenciáját tudjuk, és ebből következtetjük az e.l.fv. sorozat m.m. konvergenciáját. Fontos még, hogy az A. lemmában az e.l.fv. sorozat m.m. konvergenciáját e.l.fv.-hez követeljük meg, a B. lemmában viszont egyáltalán nem biztos, hogy az e.l.fv. sorozat e.l.fv.-hez konvergál m.m..

A monotonitás mindkét esetben lényeges. Például

$\lim\limits_{n} n\chi_{[-1/n,1/n]} = 0$ m.m., de $\int\limits_{\mathbb{R}} n\chi_{[-1/n,1/n]} = 2$ minden n-re,

és

$$n \mapsto \varphi_n := \begin{cases} \chi_{[0,1]} & \text{ha } n \text{ páros,} \\ \chi_{]1,2]} & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

olyan e.l.fv. sorozat, amelyre $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_n = 1$ minden n-re, viszont amely nem konvergens a $[0,2]$ halmazon.

7. Integrálható függvények

7.1. A B. lemma kínálja, milyen függvényekre értelmezzük az integrálhatóságot.

Definíció *Jelölje $P(\mathbb{R})$ azon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények öszességét, amelyekhez létezik $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e.l.fv. sorozat úgy, hogy*

(i) $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$,
(ii) létezik $\lim\limits_n \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_n$,
(iii) $f = \lim\limits_n \varphi_n$ *m.m.* .

Egy ilyen e.l.fv. sorozatot az f ***integrál-meghatározó*** *sorozatának, az*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f := \lim_n \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_n$$

számot az f ***integráljának*** *nevezzük.*

Nyilvánvaló, hogy minden φ e.l.fv. benne van $P(\mathbb{R})$-ben, hiszen $\varphi_n := \varphi$ $(n \in \mathbb{N})$ egy integrál-meghatározó sorozata; továbbá φ most értelmezett integrálja megegyezik a korábban értelmezettel.

Persze meg kell még mutatnunk, hogy az integrál mostani definíciója jó: egy $P(\mathbb{R})$-beli függvénynek több integrál-meghatározó sorozata is lehetséges, azonban mindegyikre ugyanaz az integrálok sorozatának a határértéke.

Állítás *Ha $f, g \in P(\mathbb{R})$, $f \leq g$, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az f illetve a g integrál-meghatározó sorozata, akkor* $\lim\limits_n \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_n \leq \lim\limits_n \int\limits_{\mathbb{R}} \psi_n$.

Bizonyítás Rögzítsük az m természetes számot és tekintsük az e.l.fv.-ek $n \mapsto (\varphi_m - \psi_n)^+ \geq 0$ sorozatát, amely monoton csökken, a határértéke m.m. nulla, hiszen $\lim\limits_n (\varphi_m - \psi_n) \underset{\text{m.m.}}{=} \varphi_m - g \leq 0$. Ezért az A. lemma szerint

$$\lim_n \int\limits_{\mathbb{R}} (\varphi_m - \psi_n)^+ = 0.$$

Minthogy $\varphi_m - \psi_n \leq (\varphi_m - \psi_n)^+$, az integrálás monotonitásából

$$\lim_n \int\limits_{\mathbb{R}} (\varphi_m - \psi_n) \leq 0, \quad \text{azaz} \quad \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_m \leq \lim_n \int\limits_{\mathbb{R}} \psi_n$$

adódik. Mivel ez minden m-re igaz, végülis

$$\lim_m \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_m \leq \int\limits_{\mathbb{R}} \lim_n \psi_n. \ \blacksquare$$

Ha $f = g$, akkor az iménti állítás azt mondja, hogy az f bármely két integrál-meghatározó sorozata esetén az egyik (akármelyik a kettő közül) integrálok sorozatának a határértéke kisebb vagy egyenlő mint a másik, ami azt jelenti, hogy egyenlők; az integrál jól van definiálva.

Vegyük észre, hogy a B. lemma a $P(\mathbb{R})$ függvényosztály értelmezéséhez, az A. lemma az integrál definíciójához kellett.

7.2. Igen egyszerű tény, hogy ha $f, g \in P(\mathbb{R})$ és $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$, akkor $f+g$, αf és $f \wedge g$ is benne van $P(\mathbb{R})$-ben, továbbá

$$\int_{\mathbb{R}} (f+g) = \int_{\mathbb{R}} f + \int_{\mathbb{R}} g,$$

$$\int_{\mathbb{R}} \alpha f = \alpha \int_{\mathbb{R}} f,$$

valamint az előző állításból az integrás monotonitása is következik: ha $f, g \in P(\mathbb{R})$ és $f \le g$, akkor

$$\int_{\mathbb{R}} f \le \int_{\mathbb{R}} g.$$

Érdemes megjegyezni, hogy ha $f \in P(\mathbb{R})$ és $g = f$ m.m., akkor $g \in P(\mathbb{R})$ és $\int_{\mathbb{R}} g = \int_{\mathbb{R}} f$.

Felhívjuk a figyelmet, hogy az előbbi képletekben α csak nem negatív szám lehet, és csak a függvények összegéről állíthatjuk, hogy ismét a $P(\mathbb{R})$ eleme, a különbségükről nem. Ez persze nem zárja ki, hogy egyes $P(\mathbb{R})$-beli függvények negatív számszorosa és különbségük szintén $P(\mathbb{R})$-beli: például az e.l.fv-ek ilyenek. Ennél egy kicsit kevésbé triviális, a későbbiekben fel is használt tény: ha $f \in P(\mathbb{R})$ és φ e.l.fv., akkor $f - \varphi \in P(\mathbb{R})$, hiszen ha $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az f integrál-meghatározó sorozata, akkor $(\varphi_n - \varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ az $f - \varphi$ integrál-meghatározó sorozata.

7.3. Definíció *Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt* ***Lebesgue-integrálhatónak*** *nevezünk, ha létezik $f_1, f_2 \in P(\mathbb{R})$ úgy, hogy $f = f_1 - f_2$, és ekkor*

$$\int_{\mathbb{R}} f := \int_{\mathbb{R}} f_1 - \int_{\mathbb{R}} f_2.$$

A Lebesgue-integrálható függvények összességét $L(\mathbb{R})$-rel jelöljük.

A Lebesgue-integrálhatóság helyett a továbbiakban csak integrálhatóságot mondunk.

Megemlítjük, hogy az integrálokra használatos az

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx := \int_{\mathbb{R}} f$$

jelölés is, amely különösen előnyös konkrét formulával megadott függvények esetén. Természetesen a változónak akármilyen, másra le nem foglalt betűt is írhatunk: $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f$.

Állítás *Az integrál fenti definíciója egyértelmű.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy f_1, f_2, g_1 és g_2 a $P(\mathbb{R})$-hez tartozó függvények és $f_1 - f_2 \le g_1 - g_2$. Ekkor $f_1 + g_2 \le g_1 + f_2$, és mindkét oldalon $P(\mathbb{R})$-beli függvény áll, tehát $\int_{\mathbb{R}}(f_1 + g_2) \le \int_{\mathbb{R}}(g_1 + f_2)$, amiből az integrálok szétbontásával és átrendezéssel $\int_{\mathbb{R}}(f_1 - f_2) \le \int_{\mathbb{R}}(g_1 - g_2)$ adódik.

Ha speciálisan $f_1 - f_2 = g_1 - g_2$, akkor az integrálokra is két irányú egyenlőtlenség igaz, vagyis megegyeznek egymással.

7.4. Állítás *Ha $f, g \in L(\mathbb{R})$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor $f + g$, αf, f^+, f^-, $|f|$, $f \wedge g$ és $f \vee g$ is integrálható, továbbá*

(i) $\int_{\mathbb{R}}(f + g) = \int_{\mathbb{R}} f + \int_{\mathbb{R}} g$,

(ii) $\int_{\mathbb{R}} \alpha f = \alpha \int_{\mathbb{R}} f$,

(iii) ha $f \le g$, akkor $\int_{\mathbb{R}} f \le \int_{\mathbb{R}} g$,

amikből az is következik, hogy

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f \right| \le \int_{\mathbb{R}} |f|.$$

Bizonyítás Legyen $f_1, f_2, g_1, g_2 \in P(\mathbb{R})$ és $f = f_1 - f_2$, $g = g_1 - g_2$. Ekkor

$$f + g = (f_1 + g_1) - (f_2 + g_2),$$

$$\alpha f = \alpha f_1 - \alpha f_2 \text{ ha } \alpha \ge 0, \qquad \alpha f = |\alpha| f_2 - |\alpha| f_1 \text{ ha } \alpha < 0,$$
$$f^+ = f_1 - (f_1 \wedge f_2), \qquad f^- = f_2 - (f_1 \wedge f_2),$$
$$|f| = f^+ + f^-,$$

$$f \wedge g = f - (f-g)^+, \qquad f \vee g = (f-g)^+ + g.$$

Az integrálás linearitása ezekből és a 7.2-ben mondottakból nyilvánvaló, monotonitása az előző állítás bizonyításából adódik. Az abszolútértékre vonatkozó egyenlőtlenséget illetően ugyanúgy érvelhetünk, mint 5.5.-ben.

7.5. Jegyezzük meg, hogy ha $f \in L(\mathbb{R})$ és $g = f$ m.m., akkor $g \in L(\mathbb{R})$ és $\int\limits_{\mathbb{R}} g = \int\limits_{\mathbb{R}} f$. Az integrálás szempontjából tehát lényegtelen, egy nulla mértékű halmazon hogyan van, vagy van-e egyáltalán értelmezve egy függvény. Bár eredetileg $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények integrálhatóságáról volt szó, mostantól megengedjük, hogy majdnem mindenütt – azaz egy nulla mértékű halmazon kívül – értelmezett függvények integrálhatóságáról is beszéljünk.

Felhívjuk továbbá a figyelmet arra, hogy integrálható függvények szorzata nem feltétlenül integrálható; erre példát 14.3.-ban szolgáltatunk.

7.6. Állítás *Ha $f \in L(\mathbb{R})$, akkor létezik $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e.l.fv. sorozat úgy, hogy*

(i) $f = \lim\limits_n \varphi_n$ *m.m.,*

(ii) $\int\limits_{\mathbb{R}} f = \lim\limits_n \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_n$,

(iii) $\lim\limits_n \int\limits_{\mathbb{R}} |f - \varphi_n| = 0$.

Bizonyítás Van olyan $f_1, f_2 \in P(\mathbb{R})$, hogy $f = f_1 - f_2$; legyen $(\varphi_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ illetve $(\varphi_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ ezek integrálmeghatározó sorozata és $\varphi_n := \varphi_{1,n} - \varphi_{2,n}$. Nyilvánvaló, hogy (i) és (ii) teljesül, továbbá

$$|f - \varphi_n| \le |f_1 - \varphi_{1,n}| + |f_2 - \varphi_{2,n}| = (f_1 - \varphi_{1,n}) + (f_2 - \varphi_{2,n}),$$

és az integrálokra ugyanilyen egyenlőtlenségek állnak fönn, amiből következik a (iii) összefüggés. ■

Minthogy egy e.l.fv integrálja összeg alakú, $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_n$-t az $\int\limits_{\mathbb{R}} f$ egy **közelítő összegének** szokás nevezni. Egy kis kellemetlensége van ennek a megközelítésnek: csak tudjuk, hogy létezik, de általában nem tudunk megkonstruálni (konkrétan megadni) ilyen e.l.fv. sorozatot. 12.4-ben visszatérünk erre a kérdésre.

7.7. Feladatok

1. Igazoljuk, hogy $\chi_{\mathbb{Q}}$ Dirichlet-függvény (lásd 3.6.1.) benne van $P(\mathbb{R})$-ben és az integrálja nulla.

2. Bizonyítsuk be, hogy $\chi_{[0,1]}\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \in P(\mathbb{R})$. (Tekintsük az $n \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} k\chi_{[k-1/n,k+1/n]}$ sorozatot.)

3. Bizonyítsuk be, hogy $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}\chi_{[n-1,n[}$ benne van a $P(\mathbb{R})$ függvényosztályban és az integrálja 1. (Vegyük a részletösszegek sorozatát.)

4. Legyen $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[n, n+\frac{1}{2^n}\right]$. Mutassuk meg, hogy $\chi_E \in P(\mathbb{R})$ és az integrálja 1.
5. Igazoljuk, hogy $f \in L(\mathbb{R})$ és $f^+, f^- \in L(\mathbb{R})$ egyenértékű.
6. Ha $f \in L(\mathbb{R})$ és $a \in \mathbb{R}$, akkor $f \circ L_a^{-1} \in L(\mathbb{R})$ és

$$\int_{\mathbb{R}} f \circ L_a^{-1} = \int_{\mathbb{R}} f.$$

8. Az alapvető integráltételek

8.1. A B. lemma és az A. lemma alapján az egyszerű lépcsős függvényekből kiindulva eljutottunk az integrálható függvényekhez és integráljukhoz, vagyis kibővítettük azon függvények körét, amelyekre az integrálás értelmes. A 7.7.2.-7.7.4. feladatai mutatják, hogy ez valódi bővítés, vagyis valóban kiléptünk az egyszerű lépcsős függvények keretei közül. Felmerül a kérdés: hasonló eljárással nembővíthető-e még tovább az integrálható függvények köre. A válasz: nem; ezt a következő állítás mutatja.

8.2. Állítás *(**Beppo Levi tétele vagy a monoton konvergencia tétele**)*

1. Legyen $f_n \in L(\mathbb{R})$, $f_n \leq f_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ és létezzen $\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n$. Ekkor létezik m.m. $\lim_n f_n \in L(\mathbb{R})$ és

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_n f_n = \lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

2. Legyen $g_n \in L(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$ és $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} |g_n| < \infty$. Ekkor a $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ függvénysor m.m. abszolút konvergens, $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n \in L(\mathbb{R})$ és

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} g_n.$$

Bizonyítás Először is belátjuk, hogy az 1. és 2. állítás egyenértékű.

Vegyük észre, hogy a 2. állítás pontosan akkor igaz, ha igaz a $(g_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ és a $(g_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra. Ezért elég azt az esetet tekinteni, amikor $g_n \geq 0$.

Tegyük fel, hogy az 1. állítás igaz. Ekkor az $f_n := \sum_{k=1}^{n} g_k$ jelöléssel következik a 2. állítás igaz volta.

Ha viszont a 2. állítás igaz, akkor a $g_n := f_{n+1} - f_n \geq 0$ jelöléssel $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} g_n = \lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n - \int_{\mathbb{R}} f_1$, amiből következően létezik m.m. $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n = \lim_n f_n - f_1$, és innen már nyilvánvaló az 1. állítás igaz volta.

Most bebizonyítjuk a 2. állítást.

Mint megállapítottuk, elég a $g_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ esetet venni.

Első lépés: tegyük fel, hogy minden n-re $g_n \in P(\mathbb{R})$

Legyen $k \mapsto \varphi_{n,k}$ a g_n integrál-meghatározó sorozata. A jobb áttekinthetőség kedvéért írjuk fel a következő sémát:

$$\begin{array}{cccccccc}
\varphi_{1,1} & \varphi_{1,2} & \varphi_{1,3} & \cdots & \varphi_{1,k} & \varphi_{1,k+1} & \cdots & g_1 \\
\varphi_{2,1} & \varphi_{2,2} & \varphi_{2,3} & \cdots & \varphi_{2,k} & \varphi_{2,k+1} & \cdots & g_2 \\
\varphi_{3,1} & \varphi_{3,2} & \varphi_{3,3} & \cdots & \varphi_{3,k} & \varphi_{3,k+1} & \cdots & g_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\
\varphi_{k,1} & \varphi_{k,2} & \varphi_{k,3} & \cdots & \varphi_{k,k} & \varphi_{k,k+1} & \cdots & g_k \\
 & & & & \cdots & \varphi_{k+1,k+1} & \cdots &
\end{array}$$

Legyen

$$\Phi_k := \sum_{n=1}^{k} \varphi_{n,k} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Mivel (lásd a középső oszlopokat a fenti sémában) $0 \leq \Phi_k \leq \Phi_{k+1}$ és $\Phi_k \leq \sum_{n=1}^{k} g_n$, amiből

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi_k \leq \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{k} g_n = \sum_{n=1}^{k} \int_{\mathbb{R}} g_n \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} g_n < \infty,$$

a B. lemma miatt létezik $g \underset{\text{m.m.}}{:=} \lim_k \Phi_k \in P(\mathbb{R})$ és az integrál definíciója szerint

$$\int_{\mathbb{R}} g = \lim_k \int_{\mathbb{R}} \Phi_k. \tag{$*$}$$

Minthogy $m \geq k$ esetén

$$\Phi_k \leq \sum_{n=1}^{k} \varphi_{n,m} \leq \sum_{n=1}^{m} \varphi_{n,m} = \Phi_m,$$

az $m \to \infty$ határesetre ebből

$$\Phi_k \leq \sum_{n=1}^{k} g_n \leq g \quad \text{m.m.} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

adódik, amiből a $k \to \infty$ határesetben a közrefogási elv miatt a g_n-ek összege majdnem mindenütt létezik és egyenlő g-vel m.m.:

$$m.m. \sum_{n \in \mathbb{N}} g_n = g.$$

Továbbá az integrálokra is érvényesek az egyenlőtlenségek:

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi_k \leq \sum_{n=1}^{k} \int_{\mathbb{R}} g_n \leq \int_{\mathbb{R}} g \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Ebből ugyancsak a közrefogási elv és $(*)$ következtében megkapjuk a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} g_n = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n \in \mathbb{N}} g_n$$

összefüggést.

Második lépés: $g_n \in L(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$.

Ekkor van olyan $r_n, s_n \in P(\mathbb{R})$, hogy $g_n = r_n - s_n$.

Legyen $k \mapsto \varphi_{n,k}$ az s_n integrál-meghatározó sorozata. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik $k_n \in \mathbb{N}$ úgy, hogy

$$\int_{\mathbb{R}} (s_n - \varphi_{n,k_n}) \leq \frac{1}{2^n}.$$

$S_n := s_n - \varphi_{n,k_n}$ és $R_n := r_n - \varphi_{n,k_n}$ a $P(\mathbb{R})$ elemei (lásd a 7.2-ben mondottakat), és $g_n = R_n - S_n$. Mivel $\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} S_n < \infty$ – és a feltétel szerint $\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} g_n < \infty$ – , az is teljesül, hogy $\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} R_n < \infty$. Ezért létezik m.m. $\sum_{n \in \mathbb{N}} S_n$ és m.m. $\sum_{n \in \mathbb{N}} R_n$, azaz m.m. $\sum_{n \in \mathbb{N}} g_n$. továbbá az S_n-ek összege is, az R_n-ek összege is integrálható, az integráljuk a megfelelő integrálok összege; ezért $\sum_{n \in \mathbb{N}} g_n \in L(\mathbb{R})$ és

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n \in \mathbb{N}} g_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} g_n.$$

8.3. B. Levi tételének fontos következménye:

Állítás *Ha* $0 \le f \in L(\mathbb{R})$ *és* $\int_{\mathbb{R}} f = 0$, *akkor* $f = 0$ *m.m.*.

Bizonyítás Vegyük a $g_n := f$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatot. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} g_n = 0$, ezért létezik m.m. $x \in \mathbb{R}$ esetén $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(x)$. Viszont csak a nulla konstans sorozat összegezhető, tehát m.m. x-re $f(x) = 0$.

8.4. Megjegyzések

(i) A monoton konvergencia tétele a B. lemma általánosítása integrálható függvényekre, és azt mondja, hogy az eredeti eljárással nem bővíthető az integrálható függvények köre.

(ii) A 8.2.1. állítás úgy is megfogalmazható, hogy van olyan $\alpha \in \mathbb{R}$, amellyel $\int_{\mathbb{R}} f_n \le \alpha$ teljesül minden n-re.

(iii) Természetesen ugyanúgy igaz a 8.2.1. állítás monoton csökkenő integrálható függvények sorozatáa, amelyek integráljainak a sorozata alulról korlátos (azaz konvergens).

(iv) B. Levi tételéhez kapcsolódik (de attól független, mindössze az integrálás monotonitásából adódik) az az egyszerű, sokat használt tény, hogy ha $f_n \in L(\mathbb{R})$, $f_n \le f_{n+1}$ és $n \mapsto \int_{\mathbb{R}} f_n$ nem korlátos sorozat, akkor, ha létezik is m.m. $\lim_n f_n =: f$, ez nem integrálható. Ugyanis, ha integrálható volna, akkor $f_n \le f$ m.m. és az integrálás monotonitása miatt $\int_{\mathbb{R}} f_n \le \int_{\mathbb{R}} f$ minden n-re, ami ellentmondás.

Ezért például a konstans 1 függvény nem integrálható: $1 = \lim_n \chi_{[-n,n]}$ és $\int_{\mathbb{R}} \chi_{[-n,n]} = 2n$.

8.5. Állítás (***Fatou lemmája***) *Legyen* $0 \le f_n \in L(\mathbb{R})$ *és létezzen olyan* $\alpha \in \mathbb{R}^+$, *hogy* $\int_{\mathbb{R}} f_n \le \alpha$ $(n \in \mathbb{N})$. *Ha létezik m.m.* $\lim_n f_n$, *akkor ez integrálható, és*

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_n f_n \le \liminf_n \int_{\mathbb{R}} f_n \le \alpha.$$

Bizonyítás A

$$h_n := \bigwedge_{k=n}^{\infty} f_k \qquad (n \in \mathbb{N})$$

függvényekre nyilván $h_n \le f_n$, $h_n \le h_{n+1}$ és $\lim_n h_n = \lim_n f_n$ m.m. teljesül. Ha azt is tudnánk, hogy $h_n \in L(\mathbb{R})$, akkor $\int_{\mathbb{R}} h_n \le \alpha$ minden n-re, így B. Levi tétele szerint $\lim\limits_n f_n = \lim\limits_n h_n \in L(\mathbb{R})$ és

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \lim_n f_n = \lim_n \int\limits_{\mathbb{R}} h_n = \liminf_n \int\limits_{\mathbb{R}} h_n \le \liminf_n \int\limits_{\mathbb{R}} f_n;$$

az utolsó egyenlőtlenség $\int\limits_{\mathbb{R}} h_n \le \int\limits_{\mathbb{R}} f_n$ miatt igaz.

Tehát csak azt kell megmutatnunk, hogy $h_n \in L(\mathbb{R})$. Íme: rögzített n és minden $m > n$ esetén a 7.4. állítás miatt

$$h_{n,m} := \bigwedge_{k=n}^{m} f_k \in L(\mathbb{R}),$$

$h_{n,m+1} \le h_{n,m}$ és $0 \le \int\limits_{\mathbb{R}} h_{n,m}$, ezért B. Levi tételét a monoton csökenő $m \mapsto h_{n,m}$ sorozatra alkalmazva azt kapjuk, hogy $\lim\limits_m h_{n,m} = h_n$ integrálhbató.

8.6. Állítás ***(Lebesgue tétele vagy a dominált konvergencia tétele)*** *Legyen $f_n \in L(\mathbb{R})$, létezzen $g \in L(\mathbb{R})$ úgy, hogy $f_n \le g$ $(n \in \mathbb{N})$, és létezzen m.m. $\lim\limits_n f_n$. Ekkor létezik $\lim\limits_n \int\limits_{\mathbb{R}} f_n$, továbbá $\lim\limits_n f_n$ integrálható, és*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \lim_n f_n = \lim_n \int\limits_{\mathbb{R}} f_n.$$

Bizonyítás Minden n-re $0 \le g + f_n$, $\int\limits_{\mathbb{R}}(g+f_n) = \int\limits_{\mathbb{R}} |g+f_n| \le 2\int\limits_{\mathbb{R}} g$, ezért a Fatou-lemma szerint

$$\lim_n (g+f_n) \in L(\mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad \int\limits_{\mathbb{R}} \lim_n (g+f_n) \le \liminf_n \int\limits_{\mathbb{R}} (g+f_n),$$

azaz

$$\lim_n f_n \in L(\mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad \int\limits_{\mathbb{R}} \lim_n f_n \le \liminf_n \int\limits_{\mathbb{R}} f_n.$$

Ugyanígy minden n-re $0 \le g - f_n$ és $\int\limits_{\mathbb{R}}(g-f_n) \le 2\int\limits_{\mathbb{R}} g$, ezért $(-f_n)$-re ugyanolyan egyenlőtlenségeket kapunk, mint az előbb, amiből

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \lim f_n \ge \limsup_n \int\limits_{\mathbb{R}} f_n.$$

Most már csak össze kell tennünk eredményeinket, hogy a bizonyítást befejezzük.

8.7. Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy ha $f_n \in L(\mathbb{R})$, $f_n \leq f_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ és létezik m.m. $\lim\limits_n f_n \in L(\mathbb{R})$, akkor $\int\limits_{\mathbb{R}} \lim\limits_n f_n = \lim\limits_n \int\limits_{\mathbb{R}} f_n$. (Vegyük észre, hogy minden n-re $f_n \leq \lim\limits_m f_m$, ezért az integrálok sorozata korlátos.)

Ez az A. lemma általánosítása.

Így is fogalmazhatunk: ha $0 \leq g_n \in L(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$ és létezik m.m. $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n \in L(\mathbb{R})$, akkor $\int\limits_{\mathbb{R}} \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\mathbb{R}} g_n$.

2. Igazoljuk, hogy ha $f_n \in L(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$, létezik m.m. $\lim\limits_n f_n =: f$, és van olyan $g \in L(\mathbb{R})$, hogy $|f| \leq g$, akkor $f \in L(\mathbb{R})$. (Legyen $h_n := (f_n \wedge g) \vee (-g)$; ekkor $h_n \in L(\mathbb{R})$, $|h_n| \leq g$ és $\lim\limits_n h_n = f$.)

Az nem állíthatjuk a fenti feltételek mellett, hogy az integrálás és a határértékképzés felcserélhető volna. Példa erre az $n \mapsto n\chi_{[-1/n,1/n]}$ sorozat.

III. MÉRHETŐSÉG

9. Mérhető függvények

9.1. Az előző részben értelmeztük az integrálhatóság fogalmát, és megismertük az alapvető integráltételeket, amelyek az integrálhatóságot jellemzik. Ennek birtokában azonban még nem látjuk, milyen az integrálható függvények köre. Nem egykönnyen válaszolhatnánk például arra a kérdésre, vajon az exponenciális vagy az $\dfrac{1}{1+\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2}$ függvény integrálható-e vagy sem. További tudást kell összegyűjtenünk, aminek alapján azonnal megadhatjuk a feleletet.

Legelső lépésként bevezetjük a következő alapvetően fontos fogalmat.

Definíció *Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt **Lebesgue-mérhetőnek** hívunk, ha van olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e.l.fv. sorozat, hogy $f = \lim\limits_n f_n$ m.m..*

A továbbiakban Lebesgue-mérhető helyett csak mérhetőt mondunk.

A definíció szerint ha f mérhető függvény és $g = f$ m.m., akkor g is mérhető. Mérhetőség szempontjából tehát – ugyanúgy mint az integrálhatóság szempontjából – lényegtelen, hogy egy függvény hogyan van és van-e egyáltalán értelmezve egy nulla mértékű halmazon.

Minden integrálható függvény mérhető, de nem minden mérhető függvény integrálható; példa erre bármely konstans függvény (lásd a 8.4.(iv)). Úgy is mondhatjuk, hogy a mérhetőség az integrálhatóság szükséges, de nem elégséges feltétele.

Állítás *Ha f és g mérhető függvények és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor $f+g$, αf, fg, f^+, f^-, $|f|$, $f \wedge g$ és $f \vee g$ is mérhetők; továbbá, ha $f(x) \neq 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor $1/f$ is mérhető.*

Bizonyítás Ha $f = \lim\limits_n \varphi_n$ m.m., $g = \lim\limits_n \psi_n$ m.m., akkor $f + g = \lim\limits_n(\varphi_n + \psi_n)$ m.m. stb.

Ha f seholsem nulla, akkor az

$$\frac{1_0}{\varphi_n}(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{\varphi_n(x)} & \text{ha } \varphi_n(x) \neq 0, \\ 0 & \text{ha } \varphi_n(x) = 0 \end{cases}$$

formulával egyszerű lépcsős függvényeket adunk meg, és $\dfrac{1}{f} = \lim\limits_n \dfrac{1_0}{\varphi_n}$.

9.2. A mérhetőség és integrálhatóság kapcsolatát a következő igen fontos és nagyon sokszor használt eredmény jellemzi, amelyre úgy szoktunk hivatkozni, hogy egy mérhető függvény, amelynek van integrálható majoránsa, integrálható.

Állítás *Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mérhető függvény, és van olyan $g \in L(\mathbb{R})$, hogy $|f| \leq g$, akkor $f \in L(\mathbb{R})$.*

Bizonyítás Legyen $f = \lim\limits_n \varphi_n$ m.m. . Ekkor $f_n := (\varphi_n \wedge g) \vee (-g)$ integrálható, $|f_n| \leq g$ és $\lim\limits_n f_n = f$ m.m. . Ezért Lebesgue tétele alapján f integrálható. ■

Ennek egy következménye így hangzik: ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $g \geq 0$ mérhető, de nem integrálható, továbbá $|f| \geq g$, akkor f nem integrálható.

Ugyanis ha f integrálható volna, akkor $|f|$ is integrálható volna, s az általa majorált mérhető g az iménti állításunk szerint integrálható volna.

Láttuk, hogy ha $f \in L(\mathbb{R})$, akkor $|f| \in L(\mathbb{R})$. Visszafelé azonban általában nem következtethetünk azért, mert előfordulhat, hogy f nem mérhető (így nem is integrálható), de $|f|$ integrálható (erre majd példát a 10.9.6. feladatban látunk). Viszont mostani eredményünk alapján kijelenthetjük (állításunkban g helyére $|f|$-et téve), hogy ha f mérhető és $|f| \in L(\mathbb{R})$, akkor $f \in L(\mathbb{R})$.

9.3. Integrálható függvények sorozatának m.m. határértéke nem feltétlenül integrálható; az alapvető integráltételek éppen azokat azokat a további feltételeket jellemzik, amelyeket ki kell kötnünk a határérték-függvény integrálhatósága érdekében. Ezzel szemben mérhető függvények sorozatának m.m. határértéke mérhető.

Állítás *Ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mérhető függvények sorozata, amelyre létezik $\lim\limits_n f_n =: f$ m.m., akkor f is mérhető.*

Bizonyítás Vegyünk egy $h > 0$ integrálható függvényt. Ilyen van; például $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{2^n} \left(\chi_{[n-1,n[} + \chi_{[-n,-n+1[}\right)$ (lásd a 7.7.3. feladatot). Legyen

$$g_n := \frac{hf_n}{h + |f_n|} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

A 9.1. állítás értelmében g_n mérhető, $|g_n| \leq h$, tehát az előző állítás miatt g_n

integrálható, és

$$\lim_n g_n \underset{\text{m.m.}}{=} \frac{hf}{h+|f|} =: g,$$

ami a Lebesgue-tétel szerint azt jelenti, hogy g integrálható, így egyben mérhető is. $|g| = \dfrac{h|f|}{h+|f|} < h$, így $h - |g| > 0$ és $|f| = \dfrac{h|g|}{h-|g|}$; ezt a kifejezést betéve g definíciójába, egyszerű átalakítással azt kapjuk, hogy

$$f = \frac{hg}{h-|g|},$$

azaz f előállítható mérhető függvények szorzatának és seholsem nulla különbségének hányadosaként, ezért f mérhető.

9.4. Feladatok

1. Legyen $f \geq 0$ mérhető függvény. Igazoljuk, hogy $\sqrt{f}$ is mérhető.

2. Mutassuk meg, hogy ha f_n $(n \in \mathbb{N})$ mérhető függvények és létezik m.m. $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} f_n$, illetve $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n$, akkor ezek is mérhető.

3. Ha f integrálható és g mérhető, akkor $f \wedge g$ integrálható.

4. Igazoljuk, hogy a szinusz függvény nem integrálható. $\left(|\sin| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi_{I_n}, \quad I_n := [n\pi + \pi/4, n\pi + 3\pi/4].\right)$

5. Lássuk be, hogy az exp és az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ függvények nem integrálhatók.

6. Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mérhető és $a \in \mathbb{R}$, akkor $f \circ L_a^{-1}$ is mérhető.

10. Mérhető halmazok

10.1. Emlékezzünk a kiindulási problémánkra: bizonyos "vonaldaraboknak" hosszat (illetve a síkban bizonyos alakzatoknak területet) akarunk tulajdonítani. Intervallumoknak és intervallumok diszjunkt uniójának már értelmeztük a hosszát. Most jutottunk abba a helyzetbe, hogy kiterjesszük a hossz-fogalmat egy bővebb halmazosztályra.

Definíció *$E \subset \mathbb{R}$ **Lebesgue-mérhető**, ha χ_E mérhető függvény.*

A Lebesgue-mérhető halmazok összességét $\mathcal{L}$-lel jelöljük.

Ha $E \in \mathcal{L}$, akkor

$$|E| := \begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_E & \text{ha } \chi_E \in L(\mathbb{R}), \\ \infty & \text{ha } \chi_E \notin L(\mathbb{R}) \end{cases}$$

*az E **hossza**. Maga az $\mathcal{L} \to \overline{\mathbb{R}_0^+}$, $E \mapsto |E|$ leképezés a Lebesgue-féle **hosszmérték**.*

A továbbiakban Lebesgue-mérhető halmaz helyett csak mérhetőt mondunk.

Nyilvánvaló, hogy az intervallumok gyűrűje része $\mathcal{L}$-nek, és a mostani hosszmérték az $\mathcal{N}$-en bevezetettnek a kiterjesztése.

Az érdekel minket, milyen a szerkezete $\mathcal{L}$-nek, és milyen tulajdonságokkal rendelkezik rajta a hosszmérték. Legelőször arra teszünk megállapítást, amivel kezdtük a hosszmérték kiterjesztését.

Állítás *$H \subset \mathbb{R}$ pontosan akkor nulla mértékű, ha $H \in \mathcal{L}$ és $|H| = 0$.*

Bizonyítás Ha H nulla mértékű, akkor $\chi_H = 0$ m.m., azaz χ_H integrálható és az integrálja nulla.

Ha $H \in \mathcal{L}$ és $|H| = 0$, akkor χ_H integrálható és az integrálja nulla, ezért a 8.3. állítás miatt $\chi_H = 0$ m.m., azaz H nulla mértékű.

10.2. Definíció *Legyen X halmaz. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ σ-**algebra**, ha minden $E, F, E_n \in \mathcal{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén*

(i) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$,

(ii) $E \setminus F$,

(iii) X

az $\mathcal{A}$-hoz tartoznak.

Állítás *Ha $\mathcal{A}$ σ-algebra és $E, E_n \in \mathcal{A}$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor*

(i) $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$,

(ii) $E^{\flat}$

az $\mathcal{A}$ elemei.

Bizonyítás (i) $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n = E \setminus \left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (E \setminus E_n) \right)$, ahol $E := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$,

(ii) $E^{\flat} = X \setminus E$.

10.3. Állítás *$\mathcal{L}$ σ-algebra.*

Bizonyítás Vegyük sorra a definíciós tulajdonságokat.

(i) Mint tudjuk, $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B$; ezért, ha χ_A és χ_B mérhető függvények, akkor $\chi_{A\cup B}$ is az. Így véges sok mérhető halmaz egyesítése is mérhető. Tehát ha E_n $(n \in \mathbb{N})$ mérhető halmazok, akkor $F_n := \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ is mérhető minden n-re, továbbá $\lim_n \chi_{F_n}$ az $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ karakterisztikus függvénye, amely mérhető a 9.3. állítás miatt, azaz E_n-ek uniója mérhető halmaz.

(ii) $\chi_{E\setminus F} = \chi_E - \chi_E\chi_F$.

(iii) $\chi_{\mathbb{R}} = 1 = \lim_n \chi_{[-n,n]}$.

10.4. $\mathcal{N}$ része $\mathcal{L}$-nek, $\mathcal{L}$ pedig σ-algebra. Ez azt jelenti, hogy megszámlálható sok $\mathcal{N}$-beli halmaz egyesítése, metszete, $\mathcal{N}$-beli halmazok komplementere – amelyek nem szükségképpen tartoznak az $\mathcal{N}$-hez – benne vannak $\mathcal{L}$-ben. Például bármely nem korlátos intervallum, bármelymegszámlálható sok pontból álló halmaz is az $\mathcal{L}$ eleme.

Állítás *$\mathbb{R}$ minden nyílt részhalmaza és minden zárt részhalmaza mérhető.*

Bizonyítás Minden nyílt halmaz megszámlálható sok nyílt korlátos intervallum egyesítése (Analízis III.A.2.11.). A zárt halmazok a nyílt halmazok komplementerei. ■

Most megint $\mathbb{R}^2$-ben tudjuk jobban szemléltetni eredményünket. Ott a korlátos téglák gyűrűjéből kiindulva konstruáljuk meg az ittenihez hasonló módon a Lebesgue-mérhető halmazokat, amelyek között a nyílt halmazok is, a zárt halmazok is megtalálhatók, és ezek "kézzelfoghatóan" mások, mint véges sok tégla uniója. $\mathbb{R}^2$ Lebesgue-mérhető halmazaira kiterjeszthetjük a terület-mértéket, és ezzel most már például egy körlap (zárt halmaz) területét is értelmezzük, és alkalmasint állíthatjuk róla, hogy $r^2\pi$, ha a kör sugara r. Hangsúlyozzuk, hogy mindez még csak szemléltetés, egyelőre csak $\mathbb{R}$ részhalmazaival foglalkoztunk pontosan, de majd tárgyaljuk $\mathbb{R}^2$ esetét is.

10.5. **Állítás** *A hosszmérték $\mathcal{L}$-en σ-additív, azaz ha $E_n \in \mathcal{L}$, $E_n \cap E_m = \emptyset$ $(n, m \in \mathbb{N}, n \neq m)$, akkor*

$$\left| \biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n \right| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |E_n|,$$

ahol az összegzés kiterjesztett értelemben veendő, vagyis megengedve a ∞ összeadandót és öszeget is.

Bizonyítás Jegyezzük meg először is, hogy

$$\chi_{\biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n}.$$

Három esetet kell megkülönböztetnünk.

(i) $|E_n| < \infty$ minden n-re és $\sum_{n\in\mathbb{N}} |E_n| < \infty$.

Ekkor $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} \chi_{E_n} < \infty$, ezért a B. Levi tételéből $\sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n}$ integrálható, és $\int_{\mathbb{R}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} \chi_{E_n}$, vagyis fennáll a kívánt egyenlőség.

(ii) $|E_n| < \infty$ minden n-re de $\sum_{n\in\mathbb{N}} |E_n| = \infty$. Ekkor $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} \chi_{E_n} = \infty$, ezért a 8.3.(iv) megjegyzésből $\sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n}$ nem integrálható, azaz definíció szerint $\left| \biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n \right| = \infty$, vagyis fennáll a kívánt egyenlőség.

(iii) Ha van olyan m, hogy $|E_m| = \infty$, azaz χ_{E_m} nem integrálható, akkor $\chi_{E_m} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n}$ és 9.2. miatt itt a jobb oldalon álló függvény sem integrálható, így igaz a kívánt egyenlőség.

10.6. Természetesen a hosszmérték additív is, vagyis véges sok diszjunkt halmaz egyesítésének a mértéke az egyes mértékek összege. Ezt úgy kapjuk az előzőből, hogy a véges sok halmazból álló rendszert kiegészítjük megszámlálható sokszor véve az üres halmazt. A további tulajdonságokat úgy fogalmazzuk meg és bizonyíthatjuk be, mint 2.5-ben és 2.6.-ban tettük.

Állítás *A hosszmérték $\mathcal{L}$-en*

(i) ***monoton****, azaz ha $E, F \in \mathcal{L}$, $F \subset E$, akkor $|F| \le |E|$,*

(ii) ***szubtraktív****, azaz ha $E, F \in \mathcal{L}$, $F \subset E$ és $|F| < \infty$, akkor $|E \setminus F| = |E| - |F|$,*

*(iii) σ-**szubadditív**, azaz ha $E_n \in \mathcal{L}$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor $\left| \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \right| \le \sum_{n\in\mathbb{N}} |E_n|$,*

(iv) ***monoton folytonos****, azaz ha $E_n \in \mathcal{L}$ $(n \in \mathbb{N})$ és*

– $E_{n+1} \subset E_n$, akkor $\left| \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \right| = (g) \lim_n |E_n|$,

– $E_{n+1} \supset E_n$ és nem minden E_n végtelen mértékű, akkor $\left| \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \right| = \lim_n |E_n|$.

Figyeljünk fel arra, hogy (iii)-ben és (iv)-ben a korábbiakhoz képest kevésbé körülményesen foglmazhattunk amiatt, hogy $\mathcal{L}$-beli halmazok megszámlálható uniója is $\mathcal{L}$-hez tartozik. Viszont itt bizonyos véges mértékűséget ki kellett kötnünk (ami korábban eleve teljesült).

(ii)-ben $F \subset E$ esetén $|E| = |F| + |E \setminus F|$ mindenképp teljesül, de ezt átrendezni csak akkor lehet, ha $|F| \neq \infty$, mert különben két végtelent kellene kivonni egymásból, ami nem értelmes.

(iv)-ben, ha van olyan m, hogy E_m mértéke véges, akkor a mérték monotonitása miatt minden $n \ge m$ esetén E_n is véges mértékű. Ellenpéldát hozhatunk arra, hogy ha ezt nem követeljük meg, az egyenlőség a határértékeket illetően nem teljesül: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n, \infty[= \emptyset$, azonban minden n-re $|[n, \infty[| = \infty$.

10.7. A mérhető függvények köre meglehetősen széles. Mérhető függvények összege, szorzata stb., sorozatának határértéke is mérhető. Felmerül a kérdés: esetleg minden függvény mérhető? Egy kicsit szűkebbre szabva: esetleg minden karakterisztikus függvény mérhető? Azaz nem igaz-e, hogy minden halmaz Lebesgue-mérhető? A válasz: nem. Megkonstruálunk egy nem mérhető halmazt.

Nézzük végig a fejezetek végén levő utolsó feladatokat. Ezekből kiderül, hogy a Lebesgue-féle hosszmérték eltolás-invariáns, azaz ha $E \in \mathcal{L}$ és $a \in \mathbb{R}$, akkor $a + E \in \mathcal{L}$ és $|a + E| = |E|$. Ezt a tényt is felhasználjuk.

Adjunk meg $[0, 1[$-en ekvivalencia-relációt így: $x \sim y$ ha $x - y \in \mathbb{Q}$.

Legyen $H \subset [0, 1[$ az ekivalencia-osztályok egy teljes reprezentáns-halmaza, azaz H-nak minden ekvivalencia-osztályból pontosan egy elemet tartalmaz. Megmutatjuk, hogy H nem mérhető.

Ha $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[$, akkor (int jelöli az egészrész-függvényt)

$$H_r := \{r + x - \mathrm{int}(r + x) \mid x \in H\}$$

az a halmaz, amelyet úgy kapunk, hogy H-t r-rel eltoljuk, az így keletekezett halmaznak a $[0, 1[$-ben levő részét ott hagyjuk, a "kilógó" részét "levágjuk" és 1-gyel visszatoljuk, más szóval

$$H_r = \Big((r+H)\cap[0,1[\Big) \uplus \Big(\big((r+H)\setminus[0,1[\big)-1\Big).$$

Tegyük fel, hogy H mérhető; ekkor H_r is mérhető, és a hosszmérték eltolás-invarianciája és additivitása miatt $|H_r| = |H|$.

Ha $r, s \in \mathbb{Q}\cap[0,1[$ és $r \neq s$, akkor $H_r \cap H_s = \emptyset$. Ugyanis, ha nem így volna, akkor volna olyan $x, y \in H$, hogy $r + x - \mathrm{int}(r+x) = s + y - \mathrm{int}(s+y)$, azaz $-y = s - r + \mathrm{int}(r+x) - \mathrm{int}(s+y)$, és így $x \sim y$ volna, amiből $x = y$ és ezáltal $r = s$ következne.

Ha $z \in [0,1[$, akkor van olyan $r \in \mathbb{Q}\cap[0,1[$, hogy $z \in H_r$. Ugyanis létezik egyetlen $x \in H$, amelyre $z \sim x$; legyen $r := z - x$ ha $x \leq z$ és $r := z - x + 1$ ha $x > z$. Ekkor $z = r + x - \mathrm{int}(r+x) \in H_r$.

Mindezeket összefoglalva $[0,1[= \uplus\{H_r \mid r \in \mathbb{Q}\cap[0,1[\}$, és így a mérték σ-additivitása miatt $1 = \sum_r |H_r| = \sum_r |H|$, ami lehetetlen.

10.8. Az $\mathbb{R}$ minden megszámlálható részhalmaza mérhető, és a mértéke nulla. Minden intervallum kontinuum-számosságú és a mértéke nem nullla. Most példát adunk nulla mértékű kontinuum-számosságú halmazra.

Tudjuk, hogy a Cantor-halmaz (Analízis III.A.22.) kontinuum-számosságú, és $C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ alakban állítottunk elő, ahol minden C_n az intervallumok gyűrűjének az eleme, így C mérhető halmaz. $C_{n-1} \subset C_n$, ezért a mérték monoton folytonossága miatt

$$|C| = \lim_n |C_n| = \lim_n \left(1 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k\right) = 0.$$

10.9. Feladatok

1. Felhasználtuk 10.6.-ban az ellenpéldához, hogy $|[n,\infty[| = \infty$. Bizonyítsuk be, hogy bármely nem korlátos intervallum hosszmértéke végtelen.

2. Igazoljuk, hogy minden korlátos mérhető halmaz hossza véges (mert a mérték monoton). Viszont van olyan nem korlátos mérhető halmaz, amelynek a hossza véges (lásd a 7.7.4. feladatot).

3. Lássuk be, hogy ha $E \in \mathcal{L}$, $|E| = 0$ és $A \subset E$, akkor $A \in \mathcal{L}$ és $|A| = 0$.

4. Legyen f mérhető függvény, E mérhető halmaz. Mutassuk meg,hogy az a függvény, amely E-n egyenlő f-fel, azon kívül konstans, mérhető.

5. Legyen f és g mérhető függvény, E mérhető halmaz. Mutassuk meg, hogy az a függvény, amely E-n egyenlő f-fel, E komplementerén pedig g-vel, mérhető.

6. Legyen H a 10.7-beli nem mérhető halmaz. Bizonyítsuk be, hogy $f := \chi_{[0,1]}(\chi_H - \chi_{H^\diamond})$ nem mérhető de $|f|$ integrálható.

11. Lépcsős függvények

11.1. Az egyszerű lépcsős függvények diszjunkt korlátos intervallumok és egypont halmazok karakterisztikus függvényeinek lineáris kombinációja. Ha ezek helyett a halmazok helyett bármilyen mérhető halmazt veszünk, eljutunk a lépcsős függvények fogalmához.

Definíció *Egy $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt* ***lépcsős függvénynek*** *hívunk, ha van olyan $n \in \mathbb{N}$ és $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{L}$, $E_i \cap E_k = \emptyset$ ha $i \neq k$, hogy*

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}.$$

A lépcsős függvények nyilvánvalóan mérhetők. A fenti alakban megadott lépcsős függvény pontosan akkor integrálható, ha $|E_k| < \infty$ minden olyan k-ra, amelyre $c_k \neq 0$.

Az egyszerű lépcsős függvények is lépcsős függvények; ez utóbbiak "jóval többen" vannak, mint az előbbiek: egy mérhető függvényhez (épp a mérhetőség definíciója szerint) mindig van *majdnem mindenütt* konvergens egyszerű lépcsős függvény sorozat; nemsokára látjuk, hogy viszont van *mindenütt* konvergens lépcsős függvény sorozat.

11.2. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén vezessük be az

$$\{f < \alpha\} := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < \alpha\},$$

és hasonlóan az $\{f \leq \alpha\}$, $\{f > \alpha\}$, $\{f \geq \alpha\}$ jelölést, amelyeket az f-nek α-hoz tartozó **kisebb** stb. **típusú nívóhalmazának** nevezünk.

Állítás *Ha f valamilyen típusú minden nívóhalmaza mérhető, akkor az összes többi nívóhalmaza is mérhető.*

Bizonyítás

$$\{f \leq \alpha\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{f < \alpha + \frac{1}{n}\right\}, \qquad \{f < \alpha\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{f \leq \alpha - \frac{1}{n}\right\},$$

$$\{f \geq \alpha\} = \{f < \alpha\}^{\flat}, \qquad \{f > \alpha\} = \{f \leq \alpha\}^{\flat}.$$

11.3. Állítás *Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre a következő három kijelentés egyenértékű:*

(i) lépcsős függvények sorozatának határértéke,
(ii) mérhető,
(iii) minden nívóhalmaza mérhető.

Bizonyítás (i)-ből a 9.3. állítás alapján következik (ii).

Tegyük fel, hogy f mérhető. Ekkor minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\chi_{\{f\leq\alpha\}} = \lim_n n\left(f \vee \left(\alpha + \frac{1}{n}\right) - f \vee \alpha\right)$$

mérhető mint mérhető függvények sorozatának határértéke. Így (ii)-ből következik (iii).

Már csak azt kell belátnunk, hogy (iii) maga után vonja (i)-t. Ha f összes nívóhalmaza mérhető, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ és $i = -n2^n+1, -n2^n+2, \ldots, n2^n-1, n2^n$ esetén az

$$E_{n,i} := \left\{f \leq \frac{i}{2^n}\right\} \setminus \left\{f \leq \frac{i-1}{2^n}\right\} = \overset{-1}{f}\left(\left]\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right]\right)$$

halmaz mérhető. Ezért

$$\varphi_n := \sum_{i=-n2^n+1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n}\chi_{E_{n,i}}$$

lépcsős függvény.

Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén létezik $n_0(x) \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $|f(x)| \leq n_0(x)$; tehát ha $n > n_0(x)$, akkor $|f(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$, azaz $f = \lim_n \varphi_n$. ■

Kérjük az olvasót, szemléltesse ábrán ennek a lépcsős függvény sorozatnak első néhány tagját, hogy jól átlássa, miről van szó.

Érdemes megjegyezni, hogy a bizonyításból látszik:

(i) ha f korlátos, akkor lépcsős függvények sorozatának egyenletes határértéke,

(ii) ha $f \geq 0$, akkor nemnegatív lépcsős függvények monoton növő sorozatának a határértéke.

11.4. Az előző eredmény egyszerű következményeként láthatjuk, hogy a mérhető függvények összessége bővebb a már eddig megismert, "jó tulajdonságú" függvényeknél.

Állítás *Minden $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szakaszonként folytonos (speciálisan folytonos) függvény mérhető.*

Bizonyítás Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\{f < \alpha\} = \overset{-1}{f}(]-\infty, \alpha])$ nyílt (mint nyílt halmaz ősőképe), ezért mérhető halmaz.

Legyen f szakaszonként folytonos függvény az $a_1, \ldots, a_n$ szakadási helyekkel. Definiáljuk az

$$f_0(x) := \begin{cases} f(x) & \text{ha } x < a_1, \\ f(a_1 - 0) & \text{ha } x \geq a_1, \end{cases}$$

$$f_i(x) := \begin{cases} f(a_i + 0) & \text{ha } x \le a_i, \\ f(x) & \text{ha } a_i < x < a_{i+1}, \\ f(a_{i+1} - 0) & \text{ha } x \ge a_{i+1}, \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

$$f_n(x) := \begin{cases} f(a_n + 0) & \text{ha } x < a_n, \\ f(x) & \text{ha } x \ge a_n, \end{cases}$$

folytonos függvényeket. Ezekkel és az $a_0 := -\infty$, $a_{n+1} := \infty$ jelöléssel

$$f = \sum_{k=0}^{n} f_k \chi_{]a_k, a_{k+1}[} + \sum_{k=1}^{n} f(a_k)\chi_{\{a_k\}},$$

amiből látszik, hogy f mérhető.

11.5. Állítás *Ha $f \in L(\mathbb{R})$, akkor létezik $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ integrálható lépcsős függvény sorozat úgy, hogy*

(i) $f = \lim\limits_n \varphi_n$,

(ii) $\int\limits_{\mathbb{R}} f = \lim\limits_n \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_n, \quad \int\limits_{\mathbb{R}} |f| = \lim\limits_n \int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi_n|,$

(iii) $\lim\limits_n \int\limits_{\mathbb{R}} |f - \varphi_n| = 0.$

Bizonyítás Ha $f \ge 0$, akkor 11.3.-ban megkonstruáltunk olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nemnegatív, monoton növő lépcsős függvény sorozatot, amelyre $f = \lim\limits_n \varphi_n$. Akár B. Levi tétele, akár Lebesgue tétele alapján igazak a (ii)-(iii) összefüggések.

Általában egy f integrálható függvény pozitív és negatív részéhez megszerkeszthető a 11.3. szerinti $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ illetve $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő lépcsős függvénys orozat, amelyekre $\xi_n\eta_n = 0$ teljesül. Ezért $\varphi_n := \xi_n - \eta_n$ $(n \in \mathbb{N})$ olyan lépcsős függvény sorozat, amelyre $|\varphi_n| = \xi_n + \eta_n$, és $|\varphi_n| \le |f_{n+1}| \le |f|$ minden n-re, továbbá $f = \lim\limits_n \varphi_n$. Így ismét az integráltételek alapján következik (ii) és (iii). ■

A 7.6-beli eredményünkkel szemben itt az f integráljának közelítő összegeit lépcsős függvényekkel adhatjuk meg, amelyek f ismeretében megkonstruálhatók; itt viszont az a kellemetlenség, hogy a lépcsős függvényekben intervallumok helyett Lebesgue-mérhető halmazok szerepelnek, és ezek, valamint a mértékük, amelyet szintúgy integrállal definiáltunk, nem "kézzelfoghatók".

11.6. Feladatok

1. Igazoljuk, hogy a $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\chi_k$ lépcsős függvény pontosan akkor integrálható, ha $|E_k| < \infty$ minden olyan k-ra, amelyre $c_k \ne 0$.

2. Legyen $0 \ne c_n \in \mathbb{R}$, $E_n \in \mathcal{L}$, $E_n \cap E_m = \emptyset$ ha $n \ne m$ $(n, m \in \mathbb{N})$. Mutassuk meg, hogy $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n\chi_n$ pontosan akkor integrálható, ha $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |c_n||E_n| < \infty$, és ekkor épp e sorösszeg a függvény integrálja.

3. Mutassuk meg, hogy ha f mérhető függvény, akkor minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = \alpha\}$ mérhető halmaz.

Igaz-e, hogy f mérhető, ha minden α valós számra $\overset{-1}{f}(\{\alpha\})$ mérhető?

4. Bizonyítsuk be, hogy egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre a következők egyenértékűek:
(i) f mérhető,
(ii) minden nyílt halmaz f általi ősképe mérhető,
(iii) minden nyílt intervallum f általi ősképe mérhető,
(iv) minden korlátos nyílt intervallum f általi ősképe mérhető,
(v) minden kompakt halmaz f általi ősképe mérhető.

5. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mérhető függvény. Bizonyítsuk be kétféleképpen (nívóhalmazokkal és lépcsős függvényekkel), hogy

$$\frac{1_0}{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{f(x)} & \text{ha } f(x) \neq 0, \\ 0 & \text{ha } f(x) = 0, \end{cases}$$

mérhető függvény.

6. Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mérhető függvény. Mutassuk meg, hogy $g \circ f$ mérhető. (Állítsuk elő lépcsős függvények sorozatának határértékeként az f ilyen előállításából.)

7. Legyen $G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $f_1, \ldots, f_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mérhető függvények. Ekkor $G \circ (f_1, \ldots, f_N) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mérhető.

IV. NÉHÁNY EGYÉB KÉRDÉS

12. Integrálás mérhető halmazon

12.1. Eljutottunk oda, hogy megtárgyaljuk a függvények alatti területet a valós számok egy részhalmazára vonatkozóan, vagyis azt a problémát, amit a 4. fejezetben felvetettünk. Most már az is világos, milyen részhalmazok jöhetnek szóba: a mérhetők.

Ha $f \in L(\mathbb{R})$ és $E \in \mathcal{L}$, akkor $\chi_E f$ mérhető és $|\chi_E f| \leq |f|$, ezért a 9.2. állítás értelmében $\chi_E f$ is integrálható. Így értelmes **f-nek az$E$-re vett integrálja**:

$$\int_E f := \int_{\mathbb{R}} \chi_E f.$$

Azonban nem csak integrálható függvények alatti, mérhetőhalmazokra vonatkozó területet szeretnénk értelmezni. Például tudjuk, hogy a konstans 1 függvény nem integrálható, mégis mondjuk a $[0,2]$ intervallumban az alatta levő területet 2-nek definiálnánk. Ugyanakkor nem mindenütt értelmezett függvényekre is természetszerűleg vetődnek fel ilyen kérdések; például mi a $\sqrt{\ }$ függvény alatti terület a $[0,1]$ intervallumban?

Értelemszerűen adódik az előbbi meghatározásunk általánosítása.

Definíció *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$, és jelölje $\overline{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ azt a függvényt, amely megegyezik f-fel, ahol f értelmezve van, és nulla, ahol f nincs értelmezve. Legyen $E \in \mathcal{L}$. Azt mondjuk, hogy*

*(i) f **mérhető** E-n, ha $\chi_E \overline{f}$ mérhető;*

*(ii) f **integrálható** E-n, ha $\chi_E \overline{f}$ integrálható, és ez esetben*

$$\int_E f := \int_{\mathbb{R}} \chi_E \overline{f}.$$

Ezzel a megállapodásunkkal a következőkben mindig elég az egész $\mathbb{R}$-en értelmezett függvényeket tekintenünk; ha a gyakorlatban egy nem mindenütt értelmezett függvénnyel akad dolgunk, azt automatikusan kiterjesztjük úgy, hogy nullának vesszük az értelmezési tartományán kívül.

Nyilvánvaló, hogy egy nulla mértékű halmazon minden függvény integrálható, és az integrálja nulla.

A következő állításban foglaltak bizonyítása is igen egyszerű.

Állítás *Legyen $E, F \in \mathcal{L}$ és f integrálható E-n.*

(i) Ha $E \setminus F$ valamint $F \setminus E$ nulla mértékűek, akkor f integrálható F-en is, és az F-re vett integrálja ugyanannyi, mint az E-re vett integrálja.

(ii) Ha $F \subset E$, akkor f integrálható F-en is.

(iii) Ha f integrálható F-en is, akkor integrálható $E \cup F$-en is, mi több,

$$\int_{E\cup F} f = \int_E f + \int_F f \qquad \textit{ha} \quad |E \cap F| = 0.$$

Végül jegyezzük meg: ha rögzített $E \in \mathcal{L}$ esetén az E-n integrálható függvényekről beszélünk, akkor az lényegében ugyanaz, mint hogy olyan integrálható függvényeket tekintünk, amelyek az E-n kívül nullák.

12.2. Állítás *Véges mértékű halmazon korlátos mérhető függvény integrálható.*

Bizonyítás Ha $E \in \mathcal{L}$, $|E| < \infty$, és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $\chi_E f$ mérhető, továbbá valamely $K > 0$ számra $|f(x)| \le K$ ha $x \in E$, akkor $K\chi_E$ a $\chi_E f$-nekintegrálható majoránsa, így ez utóbbi integrálható. ∎

Speciálisan, kompakt halmazon folytonos vagy szakaszonként folytonos függvény integrálható.

12.3. Egy kicsit javítani lehet az előző eredményt: nem kell, hogy a függvény korlátos legyen, csak majdnem mindenütt korlátos. Ugyanis például az

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{ha } x \in \mathbb{Q}, x \ne 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0, \\ 1 & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

függvény nem korlátos, azonban m.m. egyenlő az 1 konstans függvénnyel, amely korlátos; ezért minden véges mértékű halmazon integrálható.

Definíció *Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mérhető függvény* ***m.m. korlátos****, ha van olyan $\alpha \in \mathbb{R}$, hogy $|f| \leq \alpha$ m.m. , és ekkor*

$$\text{ess sup}|f| := \inf\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \ |f| \leq \alpha \ m.m.\}$$

az f ***lényeges szuprémuma****.*

Ha f nem m.m. korlátos, akkor ess sup$|f| := \infty$.

Azt modjuk, hogy az $E \in \mathcal{L}$ halmazon mérhető $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény m.m. korlátos E-n, ha $\chi_E f$ m.m. korlátos, és ekkor

$$\underset{E}{\text{ess sup}}|f| := \text{ess sup}|\chi_E f|.$$

Állítás *Bármely f mérhető függvényre*

$$|f| \underset{\text{m.m}}{\leq} \text{ess sup}|f|.$$

Bizonyítás Ha f nem m.m. korlátos, akkor nyilván igaz az egyenlőtlenség. Ha f m.m. korlátos, akkor a lényeges szuprémum definíciója szerint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left\{|f| > \text{ess sup}|f| + \frac{1}{n}\right\}$ nulla mértékű, ezért

$$\{|f| > \text{ess sup}|f|\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{|f| > \text{ess sup}|f| + \frac{1}{n}\right\}$$

is nulla mértékű. ■

Most már úgy módosíthatjuk a 12.2. állítást, hogy véges mértékű halmazon m.m. korlátos mérhető függvény integrálható.

Általában – nem feltétlenül m.m. korlátos függvényre és véges mértékű halmazra – a következő becslést adhatjuk: ha f integrálható E-n, akkor

$$\left|\int_E f\right| \leq |E| \underset{E}{\text{ess sup}}|f|.$$

12.4. Kompakt intervallumon folytonos függvényhez mindig megkonstruálható olyan egyszerű lépcsős függvény sorozat, amely egyenletesen konvergál a függvényhez az intervallumon; így megadhatók a függvény integrálközelítő összegei (lásd 7.6.).

Állítás *Legyen K kompakt intervallum és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$ úgy, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ és $I_1, \ldots, I_n$ olyan intervallumok, hogy $|I_k| < \delta$ $(k = 1, \ldots, n)$, és $\biguplus_{k=1}^{n} I_k = K$, akkor tetszőleges $x_k \in I_k$ $(k = 1, ..., N)$ esetén a*

$$\varphi := \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\chi_{I_k}$$

egyszerű lépcsős függvényre $\int\limits_K |f - \varphi| \leq \varepsilon$, amiből $\left|\int\limits_K f - \int\limits_K \varphi\right| \leq \varepsilon$.

Bizonyítás f folytonos K-n, tehát egyenletesen is folytonos. Ezért minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy ha $x, y \in K$, $|x - y| \leq \delta$, akkor $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{\varepsilon}{|K|}$. Emiatt a fenti φ-re $|f - \varphi| \leq \dfrac{\varepsilon}{|K|}$, amiből már rögtön következik a kívánt egyenlőtlenség. ■

Integrálközelítő sorozatot ezzel így gyárthatunk: $n \in \mathbb{N}$ esetén vesszük az $1/n$ -hez tartozó δ-t, felosztjuk K-t δ-nál rövidebb intervallumokra, és elkészítünk egy megfelelő φ_n-et.

12.5. Feladatok

1. Korlátos-e m.m. az $\dfrac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$ függvény?

2. Igazoljuk, hogy ha $f \in L(\mathbb{R})$ és minden $E \in \mathcal{L}$ esetén $\int\limits_E f = 0$, akkor $f = 0$ m.m.. (Vegyük az $\{f > 0\}$ és $\{f < 0\}$ halmazokat.) Következésképpen, ha f és g integrálható és $\int\limits_E f = \int\limits_E g$ minden E mérhető halmazra, akkor $f = g$ m.m.

3. Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be B. Levi tételét és Lebesgue tételét egy rögzített E mérhető halmazon integrálható függvényekre.

4. Legyen E véges mértékű halmaz. Mutasssuk meg, hogy ha az integrálható függvények $f_n : E \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozata egyenletesen konvergál egy m.m. korlátos függvényhez, akkor $\lim\limits_n f_n$ integrálható E-n és $\int\limits_E \lim\limits_n f_n = \lim\limits_n \int\limits_E f_n$. (Van olyan $\alpha > 0$, hogy $|f_n| \leq \alpha$ véges sok n-et kivéve.)

5. Mutassuk meg, hogy konstans függvény végtelen mértékű halmazon nem integrálható.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha az f integrálható függvénynek létezik határértéke a végtelenben, akkor ez a határérték szükségképpen nulla. (Ha például pozitív a határérték, akkor van olyan $\alpha > 0$ és $K \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) > \alpha$ ha $x > K$; alkalmazzuk az előző feladatot és a majorálási kritériumot.)

Az viszont előfordulhat, hogy $f \in L(\mathbb{R})$ és nem létezik f-nek határértéke a végtelenben (lásd a 7.7.4. feladatot).

7. Legyen E véges mértékű halmaz. Mutassuk meg, hogy ha f mérhető E-n és f^2 integrálható E-n, akkor f is integrálható E-n.

13. A Newton–Leibniz-formula

13.1. Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, akkor az a és b által meghatározott bármely intervallum (nyílt, zárt, stb) hossza ugyanakkora, más szóval ezek az intervallumok csak nulla mértékű halmazban különböznek egymástól. Így ha f integrálható valamelyik ilyen intervallumon – például $]a, b[$-n –, akkor integrálható bármelyik másikon – $[a, b]$-n például –, és az integrálja ugyanannyi. Ezért és még egyéb okok miatt is célszerű bevezetni az

$$\int_a^b f := \int_{\lceil a,b \rfloor} f$$

jelölést. Sőt megállapodunk abban, hogy

$$\int_b^a f := -\int_a^b f, \qquad \int_a^a f := \int_{\{a\}} f = 0.$$

Így tehát, ha f integrálható valamely (esetleg nem korlátos) intervallumon, akkor az intervallum bármely a, b elemére – függetlenül attól, melyikük nagyobb vagy egyenlő mint a másik – értelmeztük az $\int_a^b f$ mennyiséget, amelyet így hívunk: **f-nek a-tól b-ig vett integrálja**.

Ezzel bármely a, b és c számra a szóban forgó intervallumban (amelyen f integrálható),

$$\int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^a f = 0,$$

amit így is írhatunk:

$$\int_a^b f - \int_a^c f = \int_c^b f.$$

13.2. Definíció *Legyen I nyílt intervallum. Egy $I \to \mathbb{R}$ függvényt az I-n* ***lokálisan integrálhatónak*** *mondunk, ha integrálható az I minden kompakt részhalmazán.*

Természetesen az I-n integrálható függvény egyben lokálisan is integrálható. Az I intervallum lehet nemkorlátos is, viszont lényeges a meghatározásban, hogy I nyílt legyen: így a kompakt részhalmazai valódi részhalmazok.

Például az $\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$ a $]0,1[$ intervallumon nem integrálható (ezt nemsokára belátjuk), de lokálisan integrálható. Az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ függvény $\mathbb{R}$-en nem integrálható, de lokálisan integrálható.

Világos, hogy az I intervallumon folytonos függvények lokálisan integrálhatók I-n.

Ha f lokálisan integrálható I-n és $a \in I$, akkor f integrálható a-tól x-ig minden $x \in I$ esetén. Ezért bevezethetjük **f-nek az a-ban eltűnő integrálfüggvényét**:

$$\int_a f : I \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \int_a^x f.$$

Nyilvánvaló, hogy ez az integrálfüggvény a-ban nulla értéket vesz fel. Ha $b \in I$, a b-ben eltűnő integrálfüggvény csak az $\int_a^b f$ konstansban különbözik az a-ban eltűnőtől.

Az integrálfüggvény fontos tulajdonsága a következő:

Állítás *$\int_a f = 0$ akkor és csak akkor, ha $f = 0$ m.m..*

Bizonyítás Világos, hogy majdnem mindenütt nulla függvény integrálfüggvénye az azonosan nulla függvény.

Ha az integrálfüggvény nulla, akkor f-nek az I minden részintervallumára vett integrálja nulla. Most fel kell használnunk olyan ismereteket, amelyekkel csak később foglalkozunk. Amit mondtunk, azzal egyenértékű, hogy az $f\lambda$ mérték (lásd B.9.4.) nulla értéket vesz fel minden intervallumon; ezért a B.8.8. állítás alapján $(f\lambda)(E) = 0$ minden E Lebesgue-mérhető halmazra, azaz f integrálja minden Lebesgue-mérhető halmazon nulla, így 12.5.2 szerint $f = 0$ m.m.

13.3. Állítás *Ha f lokálisan integrálható az I intervallumon, akkor f bármelyik integrálfüggvénye*

(i) lokálisan egyenletesen folytonos I-n,
(ii) Lipschitz-tulajdonságú, ha f m.m. korlátos I-n.

Bizonyítás Rögzítsünk tetszőlegesen egy a elemet I-ben.

(ii) Minden $x, y \in I$ esetén

$$\left| \int_a^y f - \int_a^x f \right| = \left| \int_x^y f \right| \le |y - x| \operatorname{ess\,sup} |f|.$$

(i) Minden n természetes számra legyen $f_n := (f \wedge n) \vee (-n)$. Ekkor $|f_n| \leq |f|$, $|f - f_n| \leq 2|f|$, $\lim_n |f - f_n| = 0$, tehát a Lebesgue-tétel miatt minden $K \subset I$ kompakt intervallumra $\lim_n \int_K |f - f_n| = 0$. Ezért minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq n_\varepsilon$ esetén $\int_I |f - f_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Ha K az I kompakt részintervalluma és $x, y \in K$ (az általánosság megszorítása nélkül vehetjük, hogy $x \leq y$), akkor

$$\left| \int_a^y f - \int_a^x f \right| = \left| \int_x^y f \right| = \left| \int_x^y (f - f_{n_\varepsilon}) + \int_x^y f_{n_\varepsilon} \right|$$
$$\leq \int_x^y |f - f_{n_\varepsilon}| + \int_x^y |f_{n_\varepsilon}| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |y - x| n_\varepsilon,$$

hiszen $|f_n| \leq n$. Látjuk,

$$\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$$

olyan pozitív szám, hogy ha $|y - x| \leq \delta$, akkor az f integrálfüggvényének az y és az x helyen felvett értékei ε-nál kevésbé térnek el egymástól.

Megjegyzés Az $\int_a f$ függvény egy kicsit még jobb tulajdonságú; be lehet vezetni egy újabb folytonossági fogalmat, az **abszolút folytonosságot**, és megmutatni, hogy egy függvény pontosan akkor abszolút folytonos, ha egy lokálisan integrálható függvény integrálfüggvénye. Mi nem foglalkozunk részletesebben e tulajdonsággal; definícióként fogadjuk el, hogy egy függvény abszolút folytonos, ha egy lokálisan integrálható függvény integrálfüggvénye.

13.4. Állítás *Ha f folytonos az I intervallumon, $a \in I$, akkor $\int_a f$ differenciálható, és*

$$\left(\int_a f \right)' = f.$$

Bizonyítás Ha $x, x + h \in I$, akkor

$$\int_a^{x+h} f - \int_a^x f = \int_x^{x+h} f,$$

és a 12.3-beli becslés alapján

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f - f(x)\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} (f - f(x))\right| \leq \max_{|y-x|\leq|h|} |f(y) - f(x)|.$$

A jobb oldalon álló mennyiségnek f folytonossága miatt nulla a határértéke, miközben h tart a nullához, és ezzel befejeztük a bizonyítást.

Megjegyzés Ha f nem folytonos I-n, de lokálisan integrálható, akkor az igaz (ezt nem bizonyítjuk be), hogy $\int_a f$ m.m. differenciálható és $\left(\int_a f\right)' = f$ m.m. . Úgy is fogalmazhatunk, hogy abszolút folytonos függvény m.m. differenciálható, és a (m.m. értelmezett) deriváltfüggvényének az integrálfüggvénye.

13.5. Eredményünk alapján megállapíthatjuk, hogy intervallumon értelmezett folytonos függvénynek van primitív függvénye; így kapcsolódik egymáshoz a differenciálás és integrálás, és ez indokolja a határozatlan integrál elnevezést.

A differenciálásra és integrálásra használatos egyéb jelekkel azt írhatjuk, hogy

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \qquad (x \in I)$$

ha f folytonos I-n.

13.6. Állítás *(**Newton–Leibniz-formula**) Ha $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor*

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a).$$

Bizonyítás Az intervallumon értelmezett folytonos F' függvénynek F is, $\int_a F'$ is primitív függvénye, ezért van olyan $\alpha \in \mathbb{R}$, hogy $\int_a F' = F + \alpha$. Ebből

$$0 = \int_a^a F' = F(a) + \alpha, \qquad \int_a^b F' = F(b) + \alpha$$

miatt azonnal következik a kívánt egyenlőség. ■

Figyelmeztetjük az olvasót, nem igaz az állítás általában, ha F' nem folytonos. Nem elég az sem, hogy F' m.m. értelmezett és integrálható (lásd az előző pont megjegyzését), hogy a Newton–Leibniz-formula fennálljon. Meg lehet adni például olyan szigorúan monoton növő folytonos F függvényt, amely m.m. differenciálható és F'=0 m.m.. Erre $\int_a^b F' = 0 \neq F(b) - F(a)$ ha $b \neq a$.

Alkalmazásokban a gyors és áttekinthető írásmód kedvéért az $F|_a^b := F(b) - F(a)$ jelölést is használjuk.

A Newton–Leibniz-formula alapján viszonylag könnyen számíthatunk intervallumokra vett integrálokat. Használhatjuk a határozatlan integrálásnál megismert módszereket is, egy kissé általánosabb formában. amint azt látni fogjuk.

13.7. Az egyik módszer a parciális integrálás: ha F és G az $[a, b]$ intervallumon értelmezett folytonosan differenciálható függvények, akkor $(FG)' = F'G + FG'$ miatt

$$\int_a^b F'G = (FG)|_a^b - \int_a^b FG'.$$

Ez a formula általánosabban is igaz; ennek bizonyításához felhasználjuk Fubini tételét, amely csak később fog szerepelni.

Állítás *Legyen f és g az $[a, b]$ intervallumon integrálható függvény, $F := \int_a f$ és $G := \int_a g$. Ekkor fG és Fg integrálható $[a, b]$-n és*

$$\int_a^b fG = (FG)|_a^b - \int_a^b Fg.$$

Bizonyítás Az $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ függvény integrálható az $[a, b] \times [a, b]$ négyzeten, és Fubini tétele valamint a Newton–Leibniz-formula szerint

$$\int_{[a,b]\times[a,b]} f(x)g(y)d(x, y) = \int_a^b f(x)\ dx \int_a^b g(y)\ dy = \big(F(b) - F(a)\big)\big(G(b) - G(a)\big). \tag{$*$}$$

Osszuk fel a négyzetet a következő két diszjunkt háromszögre:

$$T_1 := \{(x, y) \mid a \leq y \leq x, a \leq x \leq b\}, \quad T_2 := \{(x, y) \mid a \leq x < y, a \leq y \leq b\}.$$

A négyzetre vett integrál a két háromszögre vett integrál összege. Ugyancsak a

Fubini-tétel miatt

$$\int_{T_1} f(x)g(y)\;d(x,y) = \int_{[a,b]} \int_a^x f(x)g(y)\;dy\;dx = \int_a^b f(x)\big(G(x)-G(a)\big)\;dx =$$
$$= \left(\int_a^b fG\right) - \big(F(b)-F(a)\big)G(a), \quad (1)$$

és teljesen hasonlóan kapjuk, hogy

$$\int_{T_2} f(x)g(y)\;d(x,y) = \left(\int_a^b Fg\right) - \big(G(b)-G(a)\big)F(a). \quad (2)$$

Tehát (1) és (2) bal oldalának az összege $(*)$ bal oldala; ezért a jobb oldalakra is igaz ez, amiből azonnal adódik a bizonyítandó egyenlőség.

13.8. A másik módszer a helyettesítéses integrálás. Ha I és J nyílt intervallum, $S : J \to I$ olyan folytonosan differenciálható bijekció, hogy S' seholsem nulla, $[a,b] \subset I$, és $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor $x \mapsto \int_{S^{-1}(a)}^{S^{-1}(x)} (f\circ S)S'$ az f-nek primitív függvénye, amely a-ban nulla, tehát megegyezik $\int_a f$-fel. Ezért

$$\int_a^b f = \int_{S^{-1}(a)}^{S^{-1}(b)} (f\circ S)S' = \int_{\overset{-1}{S}[a,b]} (f\circ S)|S'|.$$

Az utolsó egyenlőséghez vegyük figyelembe, hogy ha $S' > 0$, akkor $S^{-1}(a) < S^{-1}(b)$, és ha $S' < 0$, akkor $S^{-1}(a) > S^{-1}(b)$.

Ezt a formulát is megfogalmazzuk általánosabban.

Állítás *Legyen I és J nyílt intervallum, $S : J \to I$ folytonosan differenciálható bijekció, amelyre S' seholsem nulla. $f : I \to \mathbb{R}$ akkor és csak integrálható, ha $(f\circ S)S' : J \to \mathbb{R}$ integrálható, és ekkor*

$$\int_I f = \int_{\overset{-1}{S}(I)} (f\circ S)|S'|.$$

(Természetesen $\overset{-1}{S}(I) = J$, tehát ez utóbbit is írhattuk volna a formulába, csak így a kifejezőbb.)

BIZONYÍTÁS Mivel S^{-1} is folytonosan differenciálható és $(S^{-1})' = \dfrac{1}{S' \circ S^{-1}}$, elég azt megmutatni, hogy az f integrálhatósága maga után vonja $(f \circ S)|S'|$ integrálhatóságát; ugyanis, ha ez utóbbi integrálható, akkor S helyett S^{-1}-re alkalmazva az állítást, megkapjuk f integrálhatóságát.

Az állítás igaz az I-beli korlátos intervallumok karakterisztikus függvényeire; ha $K = \lceil a, b \rfloor$, akkor

$$\int_I \chi_K = |K| = b - a = \int_{S^{-1}(a)}^{S^{-1}(b)} S' = \int_{\overset{-1}{S}\lceil a,b\rfloor} |S'| = \int_{\overset{-1}{S}(I)} \chi_{\overset{-1}{S}(K)} |S'| = \int_{\overset{-1}{S}(I)} (\chi_K \circ S)|S'|.$$

Igaz ezért olyan egyszerű lépcsős függvényekre is, amelyek az I-n kívül nullák.

Ha $f \in P(\mathbb{R})$ és f az I-n kívül nulla, továbbá $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az f integrálmeghatározó sorozata, akkor – most az egyszerűség kedvéért $\overset{-1}{S}(I)$ helyett J-t írva –

$$\int_I \varphi_n = \int_J (\varphi_n \circ S)|S'| \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel $n \mapsto (\varphi_n \circ S)|S'|$ monoton növekvő, J-n integrálható függvénysorozat, és $\lim\limits_n \int_J (\varphi_n \circ S)|S'| = \lim\limits_n \int_I \varphi_n = \int_I f$ teljesül, B. Levi tétele szerint $\lim\limits_n (\varphi_n \circ S)|S'| = (f \circ S)|S'|$ integrálható, és integrálja J-n éppen f-nek I-re vett integrálja, amit bizonyítani akartunk.

Ezek után nyilvánvalóan igaz az állítás akkor is, ha $f \in L(\mathbb{R})$ és f az I-n kívül nulla, azaz minden $f : I \to \mathbb{R}$ integrálható függvényre.

13.9. Feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi integrálokat:

(i) $\int_0^1 \mathrm{id}_\mathbb{R}$, (ii) $\int_{-1}^2 x^2\,dx$, (iii) $\int_0^\pi \sin$,

(iv) $\int_1^2 \dfrac{dt}{t}$, (v) $\int_{-1}^1 \mathrm{tg}$, (vi) $\int_0^a e^{-x}\,dx$.

2. Alkalmazzuk a parciális integrálás vagy a helyettesítéses integrálás módszerét a következő integrálok kiszámítására.

(i) $\int_2^2 \log$ $\quad(\log = 1 \cdot \log = \mathrm{id}'_\mathbb{R} \log)$,

(ii) $\int_{-1}^1 xe^x\,dx$, (iii) $\int_0^1 \dfrac{x}{1+x^4}dx$,

(iv) $\int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$, ahol $r > 0$ adott (ez az r sugarú félkör területe).

3. Igazoljuk, hogy a Newton–Leibniz-formula $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ szakaszonként folytonosan differenciálható függvényre is igaz, azaz

$$\int\limits_a^b F' = F(b) - F(a).$$

14. Improprius integrálok

14.1. Állítás *Legyen* $E_n \in \mathcal{L}$, $E_n \subset E_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ *és* $E := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$, *továbbá* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(i) Ha f *integrálható* E*-n, akkor integrálható minden* E_n*-en, és*

$$\int\limits_E f = \lim_n \int\limits_{E_n} f.$$

(ii) Ha $f \geq 0$ *és integrálható minden* E_n*-en,* f *akkor és csak akkor integrálható* E*-n, ha létezik* $\lim\limits_n \int\limits_{E_n}$, *és ez esetben fennáll a fenti egyenlőség.*

Bizonyítás (i) Az E_n-en való integrálhatóság a 12.1. szerint igaz; mivel $|\chi_{E_n} f| \leq |\chi_E f|$, valamint $\lim\limits_n \chi_{E_n} f = \chi_E f$, a Lebesgue-tétel miatt igaz a kívánt egyenlőség.

(ii) Ha f nem negatív, akkor $\chi_{E_n} f \leq \chi_{E_{n+1}} f$, és ha f integrálható minden E_n-re, valamint
– létezik $\lim\limits_n \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{E_n} f$, akkor B.Levi tétele szerint $\lim\limits_n \chi_{E_n} f = \chi_E f$ integrálható, és integrálja a szóbanforgó integrálok sorozatának a határértéke,
– nem létezik az integrálok határértéke, akkor a $\chi_E f$ határérték-függvény nem integrálható, amint azt tudjuk a B. Levi tétele utáni megjegyzésből.

14.2. Jól fel tudjuk használni az előbbi eredményünket a Newton-Leibniz-formulával kombinálva.

Állítás *Legyen $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ folytonos függvény, F egy primitív függvénye. Megengedjük a $b = \infty$ esetet is. Ha f integrálható $[a, b[$-n, akkor*

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b} \int_a^x f = \lim_{x \to b} F(x) - F(a).$$

Továbbá, ha $f \geq 0$ és létezik $\lim_{x \to b} F(x)$, akkor – és csak akkor – f integrálható $[a, b[$-n.

Természetesen hasonlót mondhatunk $]a, b]$ esetére a-beli határértékekkel.

Bizonyítás Ha $n \mapsto x_n \in [a, b[$ olyan monoton növő sorozat, amelyre $\sup_n x_n = b$, akkor az $E_n := [a, x_n]$ $(n \in \mathbb{N})$ halmazok uniója $[a, b[$. Az előző eredményünk szerint

$$\int_a^b f = \lim_n \int_a^{x_n} f,$$

és minthogy a sorozat tetszőleges volt, nem is kell sorozatra korlátozódnunk.

14.3. Ha $\alpha \in \mathbb{R}^+$, akkor $\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{\alpha}}$ pozitív értékű folytonos függvény $\mathbb{R}^+$-on. Ezért minden $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ esetén $\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{\alpha}}$ integrálható a $[c_1, c_2]$ intervallumon, és

$$\int_{c_1}^{c_2} \frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{\alpha}} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{c_2^{\alpha-1}} - \frac{1}{c_1^{\alpha-1}}\right) & \text{ha } \alpha \neq 1, \\ \log c_2 - \log c_1 & \text{ha } \alpha = 1. \end{cases}$$

Jól látszik: rögzített c_2 mellett a fenti egyenlőség jobb oldalán álló kifejezésnek pontosan akkor van határértéke, miközben c_1 tart a nullához, ha $\alpha < 1$; rögzített c_1 mellett pontosan akkor van határértéke, miközben c_2 tart a végtelenhez, ha $\alpha > 1$. Ezért az előző állítás alapján igaz:

Állítás *Bármilyen $c \in \mathbb{R}^+$ esetén,*

(i) ha $\alpha < 1$, akkor $\dfrac{1}{id_{\mathbb{R}}^{\alpha}}$ integrálható a $]0, c]$ intervallumon és nem integrálható a $[c, \infty[$ intervallumon,

(ii) ha $\alpha > 1$, akkor $\dfrac{1}{id_{\mathbb{R}}^{\alpha}}$ nem integrálható a $]0, c]$ intervallumon és integrálható a $[c, \infty[$ intervallumon,

(iii) ha $\alpha = 1$, akkor $\dfrac{1}{id_{\mathbb{R}}^{\alpha}}$ nem integrálható sem a $]0, c]$ intervallumon sem a $[c, \infty[$ intervallumon.

Eredményünk jól felhasználható függvények integrálhatóságának meghatározásához.

Ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy valamely $c \in \mathbb{R}^+$ esetén $[c, \infty[\subset \mathrm{Dom} f$, f mérhető $[c, \infty[$-en, és

– létezik $\alpha > 1$, amellyel $f(x) \leq \dfrac{1}{x^\alpha}$ ha $x \geq c$, akkor f integrálható $[c, \infty[$-en,

– létezik $\alpha < 1$, amellyel $f(x) \geq \dfrac{1}{x^\alpha}$ ha $x \geq c$, akkor f nem integrálható $[c, \infty[$-en.

Ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy valamely $c \in \mathbb{R}^+$ esetén $]0, c] \subset \mathrm{Dom} f$, f mérhető $]0, c]$-n, és

– létezik $\alpha < 1$, amellyel $f(x) \leq \dfrac{1}{x^\alpha}$ ha $0 < x \leq c$, akkor f integrálható $]0, c]$-n,

– létezik $\alpha > 1$, amellyel $f(x) \geq \dfrac{1}{x^\alpha}$ ha $0 < x \leq c$, akkor f nem integrálható $]0, c]$-n.

A felsorolt eseteket – és más integrálhatósági kritériumokat – kombinálhatjuk is. Például, ha egy mérhető függvény egy korlátos halmazon m.m. korlátos és azon kívül $\dfrac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{\alpha}}$ majorálja valamely $\alpha > 1$ esetén, akkor a függvény integrálható.

Végül megemlítjük, a most tárgyalt függvények arra is jó példát szolgáltatnak, hogy integrálható függvények szorzata nem feltétlenül integrálható: vegyük $\dfrac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{\alpha}}$-t és $\dfrac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{\beta}}$-t]0,1]-en úgy, hogy $0 < \alpha, \beta < 1$ és $\alpha + \beta \geq 1$.

14.4. Egy kicsit átfogalmazzuk a 14.1. állítást. Figyeljük meg, mit is mond.

(i) Ha f integrálható E-n, akkor *minden* olyan $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mérhető halmazsorozat esetén, amely monoton növekvő és az egyesítése E, létezik $\lim\limits_n \int\limits_{E_n} f$ és egyenlő $\int\limits_E f$-fel.

(ii) Ha *létezik* olyan $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mérhető halmazsorozat, amely monoton növekszik és az egyesítése E, és $f \geq 0$ integrálható minden E_n-re, valamint létezik $\lim\limits_n \int\limits_{E_n} f$, akkor f integrálható E-n.

Ha (ii)-ben nem kötjük ki, hogy $f \geq 0$ legyen – vagy legalábbis azt, hogy van olyan n_0, hogy f nem vált előjelet $E \setminus E_{n_0}$-on – akkor hiába teljesül a többi feltétel, f nem szükségképpen integrálható. Íme a példa.

Legyen $E_n :=]0, 2n\pi[$ és $F_n :=]0, (2n-1)\pi[$ $(n \in \mathbb{N})$. A sin függvény integrálható mindezen halmazokra, és $\int\limits_{E_n} \sin = 0$, $\int\limits_{F_n} \sin = 2$ minden n-re. Létezik tehát az E_n-ekre vett integrálok sorozatának a határértéke, az F_n-ekre vett integrálok sorozatának határértéke is, de ezek nem egyenlők. Minthogy $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n = \mathbb{R}^+$, az (i) pont értelmében a sin függvény nem integrálható $\mathbb{R}^+$-on (amit tudunk már korábbról is, lásd pl. a 9.4.4. feladatot).

Vizsgáljuk most meg a $\dfrac{\sin}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$ függvényt. Ez sem integrálható $\mathbb{R}^+$-on, mert az $I_n := [n\pi + \pi/n, n\pi + 3\pi/n]$ jelöléssel

$$\left|\frac{\sin}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}\right| \geq \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1} \chi_{I_n},$$

és ez utóbbi függvény nem integrálható (lásd a 11.6.2. feladatot).

Viszont ha $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos mérhető halmazok akármilyen monoton növekvő sorozata, amelyre $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n = \mathbb{R}^+$, akkor $\lim\limits_n \int\limits_{E_n} \frac{\sin}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}} = \dfrac{\pi}{2}$. Hogy ezt belássuk, mivel korlátos halmazon a $\dfrac{\sin}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$ folytonos és korlátos függvény integrálható, elég olyan E_n intervallumokat tekintenünk, amelyek alsó végpontja 0. Ezért tulajdonképpen azt kell belátnunk, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{\sin}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}} = \frac{\pi}{2}.$$

Ezt az egyenlőséget most csak meglehetősen hosszadalmasan tudnánk bebizonyítani; a komplex függvénytan módszereivel majd könnyedén belátjuk. Most csak annyit mutatunk meg – ami megfelel pillanatnyi céljainknak –, hogy a kérdéses határérték létezik. Legyen ugyanis $x' > x > 0$. Ekkor parciális integrálással azt kapjuk, hogy

$$\left|\int_x^{x'} \frac{\sin}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}\right| = \left|\left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\cos x'}{x'}\right) + \int_x^{x'} \frac{\cos}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2}\right| \leq \frac{2}{x} + \int_x^{x'} \frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2} \leq \frac{4}{x},$$

és ez elegendő.

14.5. Az előbbi gondolatok és példa sugallja a következő meghatározást.

Definíció *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Azt mondjuk, hogy $f :]a, b[\to \mathbb{R}$* ***impropriusan integrálható*** *az $[a, b]$ intervallumon, ha nem integrálható $]a, b[$-n, de minden $x, y \in]a, b[$, $x < y$ esetén f integrálható az $[x, y]$ intervallumon, és létezik*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \int_x^y f,$$

amelyet ekkor az f ***improprius integráljának*** *nevezünk.*

Természetesen, ha f integrálható az $[a, y]$-on minden $y < b$ esetén, vagy $[x, b]$-n minden $a < x$ esetén, akkor elég a $\lim\limits_{y \to b} \int_a^y f$ illetve a $\lim\limits_{x \to a} \int_x^b f$ határértéket tekinteni.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az általunk nem használt Riemann-féle integrálfogalommal csak korlátos intervallumon korlátos függvény integrálhatóságának van értelme. Nem korlátos függvényekre és nem korlátos intervallumokra hasonló meghatározással értelmezték az improprius – azaz “nem valódi” – integrálhatóságot. Tehát például $\dfrac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{\alpha}}$ Riemann-féle értelemben $\alpha > 1$ esetén $[1, \infty[$-n és $\alpha < 1$ esetén $]0, 1]$-en csak impropriusan integrálható. Régebbi könyvekben, képletgyűjteményekben minden ilyen integrált impropriusnak neveznek. Jegyezzük meg jól, hogy ezek közül Lebesgue-féle értelemben a legtöbb – a nem negatívok biztosan – integrálhatók, és csak néhány az improprius integrál.

14.6. Feladatok

1. Igazoljuk, hogy az alábbi függvények integrálhatók:

(i) $\dfrac{1}{1 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2}$, (ii) $\dfrac{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}{1 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^4}$,

(ii) $\dfrac{p}{q}$, ahol p és q valós polinom, q legalább kettővel magasabb fokú, mint p, és q-nak nincs valós gyöke.

2. Számítsuk ki a következő integrálokat:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2}, \quad \int_0^\infty x e^{-x}\, dx, \quad \int_0^\infty e^{-x}\, dx, \quad \int_0^\infty x e^{-x^2}\, dx.$$

3. Integrálhatók-e az adott függvények az adott intervallumokon? Ha nem, improriusan integrálhatók-e?

(i) $x \mapsto \sin x e^{-x}$ $\mathbb{R}^+$-on, (ii) $x \mapsto \sin \dfrac{1}{x}$ $]0, 1[$-en,

(iii) $x \mapsto \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{x}$ $]0, 1[$-en.

15. Vektor értékű függvények integrálása

15.1. Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ függvényt akkor hívjuk **mérhetőnek** illetve **integrálhatónak**, ha $\mathrm{Re}f$ és $\mathrm{Im}f$ mérhető illetve integrálható, és ez utóbbi esetben

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f := \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{Re}f + i\int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}f.$$

Az $f=(f_1,...,f_N):\mathbb{R}\to\mathbb{K}^N$ függvényt akkor mondjuk **mérhetőnek** illetve **integrálhatónak**, ha minden komponens-függvénye mérhető illetve integrálható, és ez utóbbi esetben az integrálja az a rendezett szám N-es, amely a komponens-függvények integráljaiból áll, azaz

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f := \left(\int\limits_{\mathbb{R}} f_k \;\middle|\; k=1,\dots,N\right),$$

vagy másképpen ugyanez:

$$\mathrm{pr}_k\int\limits_{\mathbb{R}} f = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{pr}_k\circ f \qquad (k=1,\dots,N).$$

Ezekből a meghatározásokból nyilvánvalóan adódik, hogy az $\mathbb{R}\to\mathbb{K}^N$ mérhető illetve integrálható függvények összege és $\mathbb{K}$-beli számszorosa is mérhető illetve integrálható, és ez utóbbi esetben értelemszerű jelölésekkel

$$\int\limits_{\mathbb{R}}(f+g) = \int\limits_{\mathbb{R}} f + \int\limits_{\mathbb{R}} g, \qquad \int\limits_{\mathbb{R}} \alpha f = \alpha\int\limits_{\mathbb{R}} f.$$

Ugyancsak mérhető egy $\mathbb{K}$ értékű és egy $\mathbb{K}^N$ értékű függvény szorzata; természetesen itt nem beszélhetünk alsó és felső burkolóról. Viszont a számmal való szorzás egy általánosításaként megjelenik a következő: ha $L:\mathbb{K}^N\to\mathbb{K}^M$ lineáris leképezés és $f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}^N$ mérhető vagy integrálható, akkor $L\circ f$ is mérhető illetve integrálható, és ez utóbbi esetben

$$\int\limits_{\mathbb{R}}(L\circ f) = L\int\limits_{\mathbb{R}} f.$$

Ez abból következik, hogy az integrálás lineáris művelet, és ha $L=(L_{ik}\mid i=1,\dots,M,k=1,\dots,N)$, akkor $(L\circ f)_i=\sum\limits_{k=1}^{n} L_{ik}f_k$.

15.2. Az is igaz, hogy $f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}^N$ pontosan akkor integrálható, ha f mérhető és $|f|:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ integrálható, és ekkor

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}} f\right| \le \int\limits_{\mathbb{R}} |f|.$$

Ugyanis ha f integrálható, akkor mérhető, és így $|f| = \sqrt{|f_1|^2+\dots+|f_N|^2}$ is mérhető (lásd a 9.4.1. feladatot), és $|f| \le \sum\limits_{k=1}^{n} |f_k|$ miatt integrálható.

Ha viszont f mérhető, és $|f|$ integrálható, akkor minden $k=1,...,N$ esetén f_k mérhető és $|f_k|\le|f|$, tehát minden komponensfüggvény integrálható.

Továbbá egy $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ függvény esetén az $\alpha := \arg\left(\int\limits_{\mathbb{R}} f\right)$ jelöléssel

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}} f\right| = e^{-i\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}} f = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\alpha} f = \int\limits_{\mathbb{R}} \big((\cos\alpha)\mathrm{Re}f + (\sin\alpha)\mathrm{Im}f\big) \le \int\limits_{\mathbb{R}} |f|.$$

Itt felhasználtuk, hogy az $e^{-i\alpha}f$ függvény integrálja valós (ezért a képzetes részének az integrálja nulla), és az $\mathbb{R}^2$-beli Cauchy-egyenlőtlenséget:

$$(\cos\alpha)\mathrm{Re}f + (\sin\alpha)\mathrm{Im}f \le \sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}\ \sqrt{(\mathrm{Re}f)^2+(\mathrm{Im}f)^2}.$$

Ezért, ha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}^N$ integrálható, akkor

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}} f\right| = \sup_{|a|=1}\left|\left\langle a, \int\limits_{\mathbb{R}} f\right\rangle\right| \le \sup_{|a|=1}\int\limits_{\mathbb{R}} |\langle a, f\rangle| \le \sup_{|a|=1}\int\limits_{\mathbb{R}} |f| = \int\limits_{\mathbb{R}} |f|.$$

15.3. Az is érvényben marad, hogy $\mathbb{R}\to\mathbb{K}^N$ mérhető függvények sorozatának határértéke is mérhető; ez nyilvánvaló, hiszen egy $\mathbb{K}^N$-beli sorozat pontosan akkor konvergens, ha minden komponens-sorozata konvergens.

Érvényben marad B. Levi tételének sorokra vonatkozó alakja (monoton növekvő sorozatnak nincs értelme) és Lebesgue tétele is. Ezeket meg is fogalmazzuk és be is bizonyítjuk.

1. Állítás *Legyen $g_n:\mathbb{R}\to\mathbb{K}^N$ $(n\in\mathbb{N})$ integrálható függvény és $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\int\limits_{\mathbb{R}}|g_n|<\infty$. Ekkor m.m. létezik $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n$, ez integrálható, és*

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int\limits_{\mathbb{R}} g_n.$$

Bizonyítás Minden $k = 1, \dots, N$ esetén $\mathrm{pr}_k \circ g_n$ integrálható, és $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \int\limits_{\mathbb{R}} |\mathrm{pr}_k \circ g_n| < \infty$, ezért $\mathbb{R}^N$ értékű függvényekre B. Levi tételéből rögtön következik, amit akarunk. Komplex értékű függvényekre ugyanígy okoskodhatunk a függvények valós és képzetes részével, és ezután ugyanúgy mindent elismételhetünk $\mathbb{C}^N$ értékű függvényekre.

2. Állítás *Legyen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^N$ ($n \in \mathbb{N}$) integrálható függvény és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan integrálható függvény, hogy $|f_n| \le g$ teljesül minden n-re; ha létezik m.m. $\lim\limits_n f_n$, akkor ez integrálható és*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \lim_n f_n = \lim_n \int\limits_{\mathbb{R}} f_n.$$

Bizonyítás Minden $k = 1, \dots, N$ esetén $\mathrm{pr}_k \circ f_n$ integrálható, és $|\mathrm{pr}_k \circ f_n| \le g$, ezért $\mathbb{R}^N$ értékű függvényekre Lebesgue tételéből rögtön következik, amit akarunk. Komplex értékű függvényekre ugyanígy okoskodhatunk a függvények valós és képzetes részével, és ezután mindent ugyanúgy elismételhetünk $\mathbb{C}^N$ értékű függvényekre.

15.4. Feladatok

1. Adjunk meg egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ függvényt, amely nem mérhető, de van olyan $0 \ne L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ lineáris leképezés, hogy $L \circ f$ integrálható.

2. Értelmezzük $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{K}^N$ és $E \in \mathcal{L}$ esetén f integrálhatóságát E-n. Bizonyítsuk be, hogy ha $g, f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^N$ integrálható függvények és minden $E \in \mathcal{L}$ esetén $\int\limits_E f = \int\limits_E g$, akkor $f = g$ m.m..

3. Mérhető-e az $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \dfrac{x+i}{x-i}$ függvény? Integrálható-e? Integrálható-e a $[0, 1]$ intervallumon?

B. MÉRTÉKELMÉLET

I. MÉRHETŐSÉG

1. A mértékelmélet struktúrái

1.1. Emlékeztetünk a következő fogalmakra és ismeretekre. Legyen X halmaz.

$\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ **félgyűrű**, ha minden $I, J \in \mathcal{S}$ esetén
(i) $I \cap J \in \mathcal{S}$,
(ii) $I \setminus J$ véges sok $\mathcal{S}$-beli diszjunkt halmaz uniója.
Ha $\mathcal{S} \neq \emptyset$, akkor az üres halmaz hozzátartozik $\mathcal{S}$-hez.

$\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ **gyűrű**, ha minden $E, F \in \mathcal{R}$ esetén
(i) $E \cup F \in \mathcal{R}$,
(ii) $E \setminus F \in \mathcal{R}$.
Ezekből az is adódik, hogy $E \cap F \in \mathcal{R}$. Ezért egy gyűrű egyben félgyűrű is.
Ha S félgyűrű, akkor

$$\left\{ \bigcup_{k=1}^{n} I_k \;\middle|\; I_1, \ldots, I_n \in \mathcal{S},\ n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \biguplus_{k=1}^{n} I_k \;\middle|\; I_1, \ldots, I_n \in \mathcal{S},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

gyűrű, amelyet az $\mathcal{S}$ **generálta gyűrűnek** hívunk.
Vezessünk most be egy új fogalmat.

Definíció $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ *σ-**gyűrű**, ha minden E, F és $E_n (n \in \mathbb{N})$ $\mathcal{G}$-beli halmazok esetén*
(i) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{G}$,
(ii) $E \setminus F \in \mathcal{G}$.
*A σ-**algebra** olyan σ-gyűrű, amelyhez hozzátartozik X is.*

Ha $E_n \in \mathcal{G}$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$ is benne van $\mathcal{G}$-ben, hiszen az $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ jelöléssel $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n = E \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E \setminus E_n)$.

Ha $\mathcal{A}$ σ-algebra és $E \in \mathcal{A}$, akkor $E^{\text{\rotatebox{180}{$\perp$}}} = X \setminus E \in \mathcal{A}$.

A σ-gyűrű gyűrű, hiszen ha E és F a $\mathcal{G}$ σ-gyűrű elemei, akkor az $E_1 := E$, $E_2 := F$, $E_n := \emptyset$ $(n > 2)$ jelöléssel $E \cup F = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E_n$.

1.2. Gyűrűk metszete gyűrű, σ-gyűrűk metszete σ-gyűrű, σ-algebrák metszete σ-algebra, és $\mathcal{P}(X)$ σ-algebra; így bármely $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszerre értelmes a $\mathcal{H}$ **generálta** gyűrű, σ-gyűrű, σ-algebra, mint a legszűkebb gyűrű, σ-gyűrű, σ-algebra, amely tartalmazza $\mathcal{H}$-t. A $\mathcal{H}$ generálta σ-gyűrűre illetve σ-algebrára a

$$\sigma(\mathcal{H}) \qquad \text{illetve} \qquad \sigma_A(\mathcal{H})$$

jelölést használjuk. Nyilvánvaló, hogy $\sigma(\mathcal{H}) \subset \sigma_A(\mathcal{H})$.

1. Állítás *Legyen $\mathcal{H}$ egy halmaz részhalmazainak rendszere. Ha $E_n \in \mathcal{H}$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E_n$ és $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} E_n$ benne van $\sigma(\mathcal{H})$-ban, és persze hasonló mondható véges sok halmaz uniójáról és metszetéről.*

2. Állítás *Legyen $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ egy halmaz részhalmazainak rendszere.*

(i) Ha $\mathcal{K}$ minden eleme előáll legfeljebb megszámlálható sok $\mathcal{H}$-beli elem uniójaként vagy metszeteként, akkor

$$\mathcal{K} \subset \sigma(\mathcal{H}) \subset \sigma_A(\mathcal{H}).$$

(ii) Ha $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$, akkor

$$\sigma(\mathcal{K}) \subset \sigma(\mathcal{H}) \qquad \text{és} \qquad \sigma_A(\mathcal{K}) \subset \sigma_A(\mathcal{H});$$

Bizonyítás (i) Az előbbi nyilvánvaló állítás egyszerű következménye.

(ii) $\mathcal{K} \subset \mathcal{H} \subset \sigma(\mathcal{H})$, és $\sigma(\mathcal{K})$ a legszűkebb σ-gyűrű, amely tartalmazza $\mathcal{K}$-t; hasonlóan érvelhetünk a generált σ-algebrákra vonatkozóan. ■

Egy halmazrendszer elemeiből vett legfeljebb megszámlálható uniók és metszetek benne vannak a halmazrendszer generálta σ-gyűrűben, de sajnos a halmazrendszer generálta σ-gyűrű általában nem állítható elő ilyen uniókból és metszetekből, és ezek unióiból és metszeteiből és így tovább. Ezzel szemben félgyűrű által a most definiált értelemben generált gyűrű épp az a gyűrű, amelyről az előző pontban szó volt; vagyis félgyűrűből megkonstruálhatjuk az általa generált gyűrűt.

Nyilvánvaló továbbá, hogy félgyűrű és az általa generált gyűrű ugyanazt a σ-gyűrűt illetve σ-algebrát generálják.

1.3. Az intervallumok $\mathcal{I}$ félgyűrűjével, $\mathcal{N}$ gyűrűjével és a Lebesgue-mérhető halmazok $\mathcal{L}$ σ-algebrájával már találkoztunk. Világos, hogy az intervallumok rendszere által generált σ-algebra része a Lebesgue-mérhető halmazok összességének.

Mivel $\mathbb{R}$ előáll megszámlálható sok intervallum uniójaként, $\mathbb{R}$ benne van az $\mathcal{I}$ generálta σ-gyűrűben, és ez megegyezik az $\mathcal{I}$ generálta σ-algebrával.

Kérjük az olvasót, hogy nézze át a feldatokban található egyéb példákat, hogy jól lássa, szemléltesse azokat a struktúrákat, amelyekről szó volt, és azokról is, amelyek ezután következnek.

1.4. Definíció *Az $\mathcal{R}$ gyűrűt* ***kvázi-σ-gyűrűnek*** *(vagy δ-gyűrűnek) nevezzük, ha minden $E \in \mathcal{R}$ esetén $E \cap \mathcal{R} := \{E \cap F \mid F \in \mathcal{R}\}$ σ-gyűrű.*

Állítás *Az $\mathcal{R}$ gyűrű pontosan akkor kvázi-σ-gyűrű, ha minden olyan $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{R}$-beli halmazsorozat esetén, amelyhez létezik $E \in \mathcal{R}$ úgy, hogy $E_n \subset E$ minden n-re, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{R}$.*

Világos, hogy σ-gyűrű egyben kvázi σ-gyűrű is. Például a korlátos Lebesgue-mérhető halmazok olyan kvázi-σ-gyűrűt alkotnak, amely nem σ-gyűrű. Ugyancsak kvázi-σ-gyűrű de nem σ-gyűrű a véges mértékű Lebesgue-halmazok összessége.

Kvázi-σ-gyűrűk metszete kvázi-σ-gyűrű és $\mathcal{P}(X)$ kvázi-σ-gyűrű, így értelmes bármely halmazrendszer által generált – az őt tartalmazó legszűkebb – kvázi-σ-gyűrű.

1.5. Állítás *Az $\mathcal{R}$ gyűrű pontosan akkor kvázi-σ-gyűrű, ha minden $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{R}$-beli halmazsorozat esetén $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{R}$.*

Bizonyítás Ha $\mathcal{R}$ kvázi-σ-gyűrű és $E_n \in \mathcal{R}$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor $E_1 \setminus E_n \subset E_1$, ezért $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n = E_1 \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (E_1 \setminus E_n)$ benne van $\mathcal{R}$-ben.

Ha viszont megszámlálható sok $\mathcal{R}$-beli halmaz metszete benne van $\mathcal{R}$-ben, akkor $E, E_n \in \mathcal{R}$, $E_n \subset E$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n = E \setminus \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (E \setminus E_n)$ is az $\mathcal{R}$ eleme.

1.6. Állítás *Az $\mathcal{R}$ kvázi-σ-gyűrű generálta σ-gyűrű az $\mathcal{R}$-ből vett halmazok megszámlálható unióiból áll:*

$$\sigma(\mathcal{R}) = \left\{ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \;\middle|\; E_n \in \mathcal{R},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Bizonyítás Világos, hogy a fenti egyenlőség jobb oldalán álló – a bizonyítás idejére $\mathcal{H}$-val jelölt – halmazrendszer része $\sigma(\mathcal{R})$-nek. Azt kell tehát csak megmutatnunk, hogy $\mathcal{H}$ σ-gyűrű.

Legyen $E:=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ és $F:=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ a $\mathcal{H}$ eleme. Ekkor $E\setminus F=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(E\setminus F_n)\right)$. Az itt szereplő megszámlálható metszet az $\mathcal{R}$ eleme, ezért $E\setminus F\subset\mathcal{H}$. Ha $A_m:=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n^{(m)}$ $m\in\mathbb{N}$, akkor $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m=\bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} E_n^{(m)}$ is benne van $\mathcal{H}$-ban. ■

Eredményünk fontos következménye az, hogy ha $\mathcal{R}$ kvázi-σ-gyűrű, $A\in\mathcal{R}$ és $E\in\sigma(\mathcal{R})$, akkor

(i) $E\subset A$ esetén $E\in\mathcal{R}$ (ugyanis ha $E=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, ahol $E_n\in\mathcal{R}$, akkor $E_n\subset A$ minden n-re, ezért az unió is benne van $\mathcal{R}$-ben),

(ii) $E\cap A\in\mathcal{R}$ (hiszen $E\cap A\subset A$).

1.7. Definíció *Legyen X halmaz. Egy $\mathcal{M}\subset\mathcal{P}(X)$ halmazrendszert σ-**öv-nek** nevezünk, ha*

(i) $E_n\in\mathcal{M}$, $E_n\cap E_m=\emptyset$ $(n,m\in\mathbb{N}, n\neq m)$ esetén $\biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n\in\mathcal{M}$,

(ii) $E,F\in\mathcal{M}$, $F\subset E$ esetén $E\setminus F\in\mathcal{M}$.

Nyilvánvaló, hogy egy σ-gyűrű egyben σ-öv is; a σ-öv definíciójában kevesebbet követeltünk meg: csak (megszámlálható) diszjunkt uniók és "valódi" különbségek tartozzanak ismét a halmazrendszerhez.

Állítás *Az $\mathcal{M}$ σ-öv pontosan akkor σ-gyűrű, ha minden $E,F\in\mathcal{M}$ esetén $E\cap F\in\mathcal{M}$.*

Bizonyítás A feltétel szükségessége nyilvánvaló.

Ha $E,F\in\mathcal{M}$ és $E\cap F\in\mathcal{M}$, akkor $E\setminus F=E\setminus(E\cap F)\in\mathcal{M}$ és $E\cup F=(E\setminus F)\uplus F\in\mathcal{M}$. Ezért, ha $E_n\in\mathcal{M}$ $(n\in\mathbb{N})$, akkor a szokásos diszjunktizációs eljárással megadott $F_n:=E_n\setminus\bigcup_{k=1}^{n-1}E_k$ is az $\mathcal{M}$ eleme, így $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n=\biguplus_{n\in\mathbb{N}} F_n\in\mathcal{M}$.

1.8. Világos, hogy σ-övek metszete is σ-öv, és $\mathcal{P}(X)$ is σ-öv, ezért bármely halmazrendszerre értelmes az általa generált – az őt tartalmazó legszűkebb – σ-öv.

Állítás *Félgyűrű generálta σ-öv megegyezik a félgyűrű generálta σ-gyűrűvel.*

Bizonyítás Jelölje $\mathcal{M}$ az $\mathcal{S}\subset\mathcal{P}(X)$ félgyűrű generálta σ-övet.

Vezessük be az X bármely A részhalmazára a

$$\mathcal{K}(A):=\{B\subset X \mid B\cap A\in\mathcal{M}\}$$

jelölést. A meghatározásból azonnal látszik, hogy

(i) $B\in\mathcal{K}(A)$ egyenértékű azzal, hogy $A\in\mathcal{K}(B)$,

és a halmazműveletek egyszerű tulajdonságaiból – $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)\cap A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(B_n\cap A)$, $(C\setminus B)\cap A=(C\cap A)\setminus(B\cap A)$ – könnyen adódik, hogy

(ii) $\mathcal{K}(A)$ σ-öv.

Ha $F \in \mathcal{S}$, akkor $S \subset \mathcal{K}(F)$, ezért (ii) miatt $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}(F)$.

Ha tehát $E \in \mathcal{M}$ és $F \in \mathcal{S}$, akkor $E \in \mathcal{K}(F)$, azaz (i) miatt $F \in \mathcal{K}(E)$. Más szóval, ha $E \in \mathcal{M}$, akkor $S \subset \mathcal{K}(E)$, és így ismét (ii) miatt $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}(E)$.

Végül is ez azt jelenti, hogy ha $E, F \in \mathcal{M}$, akkor $E \cap F \in \mathcal{M}$, tehát az előző állítás szerint $\mathcal{M}$ σ-gyűrű. Ezért $\sigma(\mathcal{S}) \subset \mathcal{M}$. Viszont $\sigma(\mathcal{S})$ σ-öv is, tehát $\mathcal{M} \subset \sigma(\mathcal{S})$ is teljesül.

1.9. Állítás *Legyen X nemüres halmaz, $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ és $A \in \mathcal{P}(X)$. Jelölje $\sigma_q(\mathcal{H})$ a $\mathcal{H}$ generálta kvázi-σ-gyűrűt.*

(i) $\sigma(A \cap \mathcal{H}) = A \cap \sigma(\mathcal{H})$ és $\sigma_q(A \cap \mathcal{H}) = A \cap \sigma_q(\mathcal{H})$.

(ii) Ha $A \in \sigma_q(\mathcal{H})$, akkor $A \cap \sigma_q(\mathcal{H}) = A \cap \sigma(\mathcal{H})$.

(iii) Ha $A \in \sigma_q(\mathcal{H})$, $R \subset A$ és $R \in \sigma(\mathcal{H})$, akkor $R \in \sigma_q(\mathcal{H})$.

Bizonyítás (i) Egyszerű tény, hogy $A \cap \sigma(\mathcal{H})$ σ-gyűrű és $A \cap \mathcal{H} \subset A \cap \sigma(\mathcal{H})$, ezért nyilvánvaló a $\sigma(A \cap \mathcal{H}) \subset A \cap \sigma(\mathcal{H})$ tartalmazás. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy $\mathcal{G} := \{E \subset X \mid A \cap E \in \sigma(A \cap \mathcal{H})\}$ σ-gyűrű, amely tartalmazza $\mathcal{H}$-t és így $\sigma(\mathcal{H})$-t is. Tehát $A \cap \sigma(\mathcal{H}) \subset A \cap \mathcal{G}$, és az ugyancsak egyszerű tény, hogy $A \cap \mathcal{G} \subset \sigma(A \cap \mathcal{H})$, amivel begbizonyítottuk az $A \cap \sigma(\mathcal{H}) \subset \sigma(A \cap \mathcal{H})$ tartalmazást is.

Teljesen hasonlóan érvelhetünk a generált kvázi-σ-gyűrűkre vonatkozóan is.

(ii) Az $A \cap \sigma_q(\mathcal{H}) \subset A \cap \sigma_(\mathcal{H})$ összefüggésen nincs mit magyarázni. A kvázi-σ-gyűrűk definíciója szerint $A \cap \sigma_q(\mathcal{H})$ σ-gyűrű; ez tartalmazza $A \cap \mathcal{H}$-t és így $\sigma(A \cap \mathcal{H})$-t is, amely viszont az (i) szerint $A \cap \sigma(\mathcal{H})$-val egyenlő.

(iii) Az adott feltételek mellett $R \in A \cap \sigma(\mathcal{H}) = A \cap \sigma_q(\mathcal{H})$, és így R valóban a $\sigma_q(\mathcal{H})$ eleme.

1.10. Mivel egy leképezés teljes inverze minden halmazműveletet megőriz, azonnal adódnak a következő fontos tények.

Állítás *Legyen X és Y nemüres halmaz, $T : X \to Y$ leképezés.*

(i) Ha $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}(Y)$ félgyűrű, gyűrű, kvázi-σ-gyűrű, σ-gyűrű, σ-öv, σ-algebra, akkor

$$\{\overset{-1}{T}(H) \mid H \in \mathcal{Y}\}$$

félgyűrű, gyűrű, kvázi-σ-gyűrű, σ-gyűrű, σ-öv, σ-algebra.

(ii) Ha $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(X)$ félgyűrű, gyűrű, kvázi-σ-gyűrű, σ-gyűrű, σ-öv, σ-algebra, akkor

$$\{H \subset Y \mid \overset{-1}{T}(H) \in \mathcal{X}\}$$

félgyűrű, gyűrű, kvázi-σ-gyűrű, σ-gyűrű, σ-öv, σ-algebra.

1.11. Feladatok

1. Adjuk meg az $\{1, 2, 3\}$ részhalmazaiból álló összes lehetséges félgyűrűt és gyűrűt.

2. Mutassunk példát arra, hogy egy $\mathcal{H}$ halmazrendszer nem feltétlenül gyűrű, ha minden $E, F \in \mathcal{H}$ esetén $E \cup F$ és $E \cap F$ is a $\mathcal{H}$ eleme.

3. Félgyűrű-e $\mathcal{H} := \{\ \{x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$? Mi a $\mathcal{H}$ generálta gyűrű, kvázi-σ-gyűrű, σ-gyűrű, σ-öv, σ-algebra?

4. Az X halmaz véges részhalmazai gyűrűt alkotnak; mi az általa generált σ-gyűrű, kvázi-σ-gyűrű, σ-öv, σ-algebra?

5. Mi az $\mathbb{N}$ véges részhalmazai által generált kvázi-σ-gyűrű, σ-gyűrű, σ-öv, σ-algebra?

6. Mi $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ mint $\mathbb{R}$ részhalmazaiból álló rendszer generálta σ-gyűrű, kvázi-σ-gyűrű, σ-öv, σ-algebra?

7. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető függvény. Mutassuk meg, hogy azok a mérhető halmazok, amelyeken f Lebesgue-integrálható, kvázi-σ-gyűrűt alkotnak. Mikor lesz ez σ-gyűrű illetve σ-algebra?

8. Igazoljuk, hogy egy kvázi-σ-gyűrű σ-algebra, ha tartalmazza az alaphalmazt.

9. Mutassuk meg, hogy egy X halmaz részhalmazainak $\mathcal{A}$ rendszere pontosan σ-algebra, ha minden $E \in \mathcal{A}$ esetén $E^{\flat} \in \mathcal{A}$ és minden $E_n \in \mathcal{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{A}$.

10. Bizonyítsuk be, hogy ha $H \in \mathcal{H}$, akkor $\sigma_A(H \cap \mathcal{H}) = H \cap \sigma_A(\mathcal{H})$.

2. Mérhető terek

2.1. A mértékelméletben az előzőekben bevezetett összes struktúra nagyon fontos; a legfontosabb talán mégis a σ-algebra, mert további alapvető fogalmak épülnek rá. Megemlítjük, hogy olykor szokás σ-gyűrűt venni kiindulási alapul az új fogalmak bevezetésekor, de ez szükségtelen a leggyakoribb fizikai alkalmazásokat tekintve, és mivel elbonyolítaná a tárgyalást, elkerüljük.

Definíció *Az $(X, \mathcal{A})$ párt* ***mérhető térnek*** *nevezzük, ha X nemüres halmaz és $\mathcal{A}$ az X részhalmazaiból álló σ-algebra. $\mathcal{A}$ elemeit* ***mérhető halmazoknak*** *hívjuk.*

2.2. Mérhető terekből a következő két egyszerű módon jutunk újabb mérhető terekhez.

(i) Ha $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér és $\emptyset \neq E \in \mathcal{A}$, akkor

$$E \cap \mathcal{A} := \{E \cap F \mid F \in \mathcal{A}\}$$

σ-algebra, így $(E, E \cap \mathcal{A})$ mérhető tér.

(ii) Ha I indexhalmaz és $(X_i, \mathcal{A}_i)$ $(i \in I)$ diszjunkt mérhető terek, (azaz $X_j \cap X_k = \emptyset$ ha $j \neq k$, $j, k \in I$), akkor az $X := \bigcup\limits_{i \in I} X_i$ jelöléssel

$$\mathcal{A} := \{H \subset X \mid H \cap X_i \in \mathcal{A}_i,\ i \in I\}$$

σ-algebra, így $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér.

2.3. Mérhető terek Descartes-szorzata már egy kissé bonyolultabb fogalom; némi előkészület kell hozzá.

Legyen $N \geq 2$ természetes szám és X_k $(k = 1, ..., N)$ halmaz. Ha $\mathcal{H}_k$ az X_k részhalmazaiból álló halmazrendszer – azaz $\mathcal{H}_k \subset \mathcal{P}(X_k)$ – akkor a

$$\mathop{\times}_{k=1}^{N} \mathcal{H}_k := \left\{ \mathop{\times}_{k=1}^{N} H_k \,\middle|\, H_k \in \mathcal{H}_k,\ k = 1, \ldots, N \right\}$$

jelölést alkalmazzuk. Felhívjuk a figyelmet, hogy itt a Descartes-szorzás "komplexus-műveletet" jelent.

Állítás *Ha* $\mathcal{S}_k \subset \mathcal{P}(X_k)$ $(k = 1, ..., N)$ *félgyűrű, akkor* $\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N} \mathcal{S}_k$ *is félgyűrű.*

Bizonyítás Elég $N = 2$ esetére megmutatni, hogy teljesülnek a félgyűrű-tulajdonságok , hiszen az N-szeres Descartes-szorzatot előállíthatjuk $N - 1$ kétszeres Descartes-szorzat egymásutánjával.

Legyen $I_1, J_1 \in \mathcal{S}_1$ és $I_2, J_2 \in \mathcal{S}_2$. Ekkor

(i) $(I_1 \times I_2) \cap (J_1 \times J_2) = (I_1 \cap J_1) \times (I_2 \cap J_2)$,

(ii) $(I_1 \times I_2) \setminus (J_1 \times J_2) = \big((I_1 \setminus J_1) \times I_2\big) \uplus \big((I_1 \cap J_1) \times (I_2 \setminus J_2)\big)$, vagyis a különbség előáll véges sok $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$-beli diszjunkt elem uniójaként. ■

Gyűrűk, σ-gyűrűk, σ-algebrák – amelyek félgyűrűk is egyben – Descartes-szorzata is általában csak félgyűrű.

2.4. A mérhető terekkel kapcsolatban igen fontosak a halmazrendszerek Descartes-szorzata által generált σ-algebrák, amelyekről a következőket mondhatjuk.

1. Állítás *Az előző jelölésekkel*

$$\sigma\left(\mathop{\times}_{k=1}^{N} \mathcal{H}_k\right) = \sigma\left(\mathop{\times}_{k=1}^{N} \sigma(\mathcal{H}_k)\right).$$

Bizonyítás Vegyük az N=2 esetet, amelyből egyszerűen továbbléphetünk akármilyen N-re.

Nyilvánvaló a $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \subset \sigma(\mathcal{H}_1) \times \sigma(\mathcal{H}_2)$ összefüggés, amiből

$$\sigma(\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2) \subset \sigma(\sigma(\mathcal{H}_1) \times \sigma(\mathcal{H}_2)).$$

A másik irányú tartalmazáshoz egy kissé körülményesebben jutunk el. Legyen $H_2 \in \mathcal{H}_2$. Ekkor $\{E_1 \subset X_1 \mid E_1 \times H_2 \in \sigma(\mathcal{H}_1 \times H_2)\}$ σ-gyűrű, amely tartalmazza $\mathcal{H}_1$-et, így $\sigma(\mathcal{H}_1)$-et is. Tehát minden $H_2 \in \mathcal{H}_2$ esetén

$$\sigma(\mathcal{H}_1) \times H_2 \subset \sigma(\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2) \subset \sigma(\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2),$$

azaz

$$\sigma(\mathcal{H}_1) \times \mathcal{H}_2 \subset \sigma(\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2).$$

Most $E_1 \in \sigma(\mathcal{H}_1)$ rögzítése mellett hasonlóan azt kapjuk, hogy

$$E_1 \times \sigma(\mathcal{H}_2) \subset \sigma(E_1 \times \mathcal{H}_2) \subset \sigma(\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2),$$

azaz

$$\sigma(\mathcal{H}_1) \times \sigma(\mathcal{H}_2) \subset \sigma(\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2),$$

amiből

$$\sigma\big(\sigma(\mathcal{H}_1) \times \sigma(\mathcal{H}_2)\big) \subset \sigma(\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2). \blacksquare$$

2. **Állítás** *Ha minden $\mathcal{H}_k$ generálta σ-gyűrű egyben σ-algebra is, azaz $\sigma(\mathcal{H}_k) = \sigma_A(\mathcal{H}_k)$ $(k = 1, \ldots, N)$, akkor*

$$\sigma_A\left(\bigtimes_{k=1}^{N} \mathcal{H}_k\right) = \sigma_A\left(\bigtimes_{k=1}^{N} \sigma_A(\mathcal{H}_k)\right).$$

Bizonyítás Ekkor $\bigtimes_{k=1}^{N} X_k \in \bigtimes_{k=1}^{N} \sigma(\mathcal{H}_k)$, ezért $\sigma\left(\bigtimes_{k=1}^{N} \sigma(\mathcal{H}_k)\right) = \sigma_A\left(\bigtimes_{k=1}^{N} \sigma_A(\mathcal{H}_k)\right)$, így

$$\sigma_A\left(\bigtimes_{k=1}^{N} \mathcal{H}_k\right) \supset \sigma\left(\bigtimes_{k=1}^{N} \mathcal{H}_k\right) = \sigma_A\left(\bigtimes_{k=1}^{N} \sigma_A(\mathcal{H}_k)\right),$$

és a másik irányú tartalmazás nyilvánvaló.

2.5. Legyen X_k $(k = 1, ..., N)$ halmaz. Ha $H \subset \bigtimes_{k=1}^{N} X_k$ és $x_k \in X_k$, $k=1, ..., N-1$, akkor definiáljuk H-nak az x_k-k meghatározta **szeletét** így:

$$H_{(x_1,\ldots,x_{N-1},\cdot)} := \{x_N \in X_N \mid (x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N) \in H\}.$$

Természetesen akármelyik $N-1$ halmazból rögzíthetünk elemeket, nemcsak az első $N-1$-ből, hogy hasonló szeleteket értelmezzünk.

Ajánljuk az olvasónak, $N = 2$ esetére szemléltesse magának egy halmaz ilyen szeleteit. Az egyszerűség kedvéért de az általánosság megszorítása nélkül az $N = 2$

esetet véve megállapíthatjuk, hogy ha $x_1 \in X_1$ és $H, G, H_n \subset X_1 \times X_2$, $(n \in \mathbb{N})$, akkor

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n\right)_{(x_1,\cdot)} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (H_n)_{(x_1,\cdot)},$$

$$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n\right)_{(x_1,\cdot)} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (H_n)_{(x_1,\cdot)},$$

$$(H \setminus G)_{(x_1,\cdot)} = H_{(x_1,\cdot)} \setminus G_{(x_1,\cdot)}.$$

Ha $A_1 \subset X_1$ és $A_2 \subset X_2$, akkor

$$(A_1 \times A_2)_{(x_1,\cdot)} = \begin{cases} A_2 & \text{ha } x_1 \in A_1, \\ \emptyset & \text{ha } x_1 \notin A_1. \end{cases}$$

2.6. Legyenek $(X_k, \mathcal{A}_k)$ $(k = 1, \dots, N)$ mérhető terek. Ekkor 2.3. szerint $\mathop{\mathsf{X}}\limits_{k=1}^{N} \mathcal{A}_k$ félgyűrű; elemeit **mérhető tégláknak** hívjuk; az általa generált σ-algebrát $\mathop{\otimes}\limits_{k=1}^{N} \mathcal{A}_k$ vagy $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_N$ jelöli, azaz

$$\mathop{\otimes}_{k=1}^{N} \mathcal{A}_k = \sigma_A\left(\mathop{\mathsf{X}}_{k=1}^{N} \mathcal{A}_k\right).$$

Alkalmazzuk a 2.5-ben mondottakat mérhető terek Descartes-szorzatára.

Rögzített $x_1 \in X_1$ esetén mindazok a $H \subset X_1 \times X_2$ halmazok, amelyekre $H_{(x_1,\cdot)}$ benne van $\mathcal{A}_2$-ben, σ-algebrát alkotnak; a mérhető téglák ilyen tulajdonságúak, tehát az általuk generált σ-algebra, azaz $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ minden eleme is ilyen tulajdonságú, igaz tehát:

Állítás *Ha* $H \in \mathop{\otimes}\limits_{k=1}^{N} \mathcal{A}_k$, *akkor bármely* $x_k \in X_k$ $(k = 1, \dots, N-1)$ *esetén* $H_{(x_1,\dots,x_{N-1},\cdot)} \in \mathcal{A}_N$.

Természetesen igaz ez az állítás bármelyik komponensre, nemcsak az N-ikre, azaz ha $H \in \mathop{\otimes}\limits_{k=1}^{N} \mathcal{A}_k$ és minden X_k-ból rögzítünk egy x_k elemet, kivéve az i-ediket, akkor a megfelelő szelet $\mathcal{A}_i$-ben van.

Állításunk egyszerű de fontos következménye, hogy egy nem üres tégla (azaz szorzat alakú halmaz) pontosan akkor mérhető, ha minden oldala mérhető: $\emptyset \neq \mathop{\mathsf{X}}\limits_{k=1}^{N} A_k \subset \mathop{\otimes}\limits_{k=1}^{N} \mathcal{A}_k$ akkor és csak akkor, ha $A_k \in \mathcal{A}_k$ minden $k = 1, \dots, N$ esetén.

2.7. Feladatok

1. Mikor igaz, hogy σ-algebrák komplexus-Descartes-szorzata σ-algebra, vagyis a fejezet jelöléseivel mikor igaz, hogy $\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N} \mathcal{A}_k = \mathop{\otimes}\limits_{k=1}^{N} \mathcal{A}_k$?

2. Legyen $\mathcal{H}$ az $\mathbb{R}$-beli véges halmazok összessége. Mutassuk meg, hogy $\sigma_A(\mathcal{H}\times\mathcal{H}) \neq \sigma_A\big(\sigma_A(\mathcal{H}) \times \sigma_A(\mathcal{H})\big)$.

3. Igazoljuk, hogy ha $H \subset X_1 \times X_2$ és $x_1 \in X_1$, akkor $\chi_{H_{(x_1,\cdot)}} = \chi_H(x_1,\cdot)$.

4. Legyen I akármilyen indexhalmaz (tehát nem szükségképpen véges), $(X_i, \mathcal{A}_i)$ $(i \in I)$ mérhető terek. Ekkor is $\mathop{\times}\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$ félgyűrű.

Ennek része,

$$\mathcal{C} := \left\{ \mathop{\times}\limits_{i\in I} E_i \;\middle|\; E_i \in \mathcal{A}_i,\ \text{és } E_i = X_i \text{ véges sok } i \text{ kivételével} \right\}$$

is félgyűrű, amelynek elemeit **hengereknek** (**cilindereknek**) szokás nevezni.

Nyilván $\sigma_A(\mathcal{C}) \subset \sigma_A\left(\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N} \mathcal{A}_k\right)$. Vizsgáljuk meg, a fejezet mely eredménye marad igaz, ha $\mathop{\otimes}\limits_{k=1}^{N} \mathcal{A}_k$ helyett az egyik illetve a másik σ-algebrát vesszük.

3. Mérhető leképezések

3.1. Definíció *Legyen $(X,\mathcal{A})$ és $(Y,\mathcal{B})$ mérhető tér. Egy $T : X \to Y$ leképezést $\mathcal{A}-\mathcal{B}$-**mérhetőnek** nevezünk, ha minden $H \in \mathcal{B}$ esetén $\overset{-1}{T}(H) \in \mathcal{A}$.*

Ha félreértés nem származhat belőle, akkor egyszerűen csak mérhető leképezésről beszélünk.

Ha T mérhető, akkor a $\overset{-1}{T} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ leképezésnek a $\mathcal{B}$-re vett leszűkítése $\mathcal{A}$-ba képez. Megállapodunk abban, hogy az egyszerű írásmód kedvéért a T mérhető leképezésre $\overset{-1}{T}$ mindig ezt a leszűkítést jelenti.

Egyszerű, de fontos tény, hogy egy $X \to Y$ konstans függvény akármilyen σ-algebrákra vonatkozóan mérhető. Ugyanis, ha az f függvény konstans értéke b, akkor $B \subset Y$ esetén

$$\overset{-1}{f}(B) = \begin{cases} X & \text{ha } b \in B, \\ \emptyset & \text{ha } b \notin B. \end{cases}$$

3.2. Állítás *Ha $(X,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$ és $(Z,\mathcal{C})$ mérhető terek és $T : X \to Y$ valamint $S : Y \to Z$ mérhető leképezések, akkor $S \circ T$ is mérhető.*

Bizonyítás Bármely $C \in \mathcal{C}$ esetén $\overset{-1}{S}(C) \in \mathcal{B}$, így $(\overset{-1}{S \circ T})(C) = \overset{-1}{T}(\overset{-1}{S}(C)) \in \mathcal{A}$.

3.3. Igen fontos a most következő eredmény: egy leképezés mérhetőségének megállapításához nem kell minden mérhető halmaz ősképét megvizsgálni, elég ezt egy generáló halmazrendszerre megtenni.

Állítás *Legyen $(X, \mathcal{A})$ és $(Y, \mathcal{B})$ mérhető tér. Ha $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(Y)$ generálja $\mathcal{B}$-t, és $T : X \to Y$ olyan, hogy $\overset{-1}{T}(K) \in \mathcal{A}$ minden $K \in \mathcal{K}$ esetén, akkor T $\mathcal{A} - \mathcal{B}$-mérhető.*

Bizonyítás Az 1.9. szerint $\{H \in Y \mid \overset{-1}{T}(H) \in \mathcal{A}\}$ σ-algebra Y-ban, amely a feltétel alapján tartalmazza $\mathcal{K}$-t, így a $\mathcal{K}$ által generált σ-algebrát is.

3.4. Legyen $(X_k, \mathcal{A}_k)$ $(k = 1, ..., N)$ mérhető tér. Nyilvánvaló, hogy minden $i = 1, \dots, N$ esetén a $\mathrm{pr}_i : \mathop{\times}\limits_{k=1}^{N} X_k \to X_i$ kanonikus projekció $\bigotimes\limits_{k=1}^{N} \mathcal{A}_k - \mathcal{A}_i$-mérhető, hiszen például ha $E_1 \in \mathcal{A}_1$, akkor

$$\overset{-1}{\mathrm{pr}_1}(E_1) = E_1 \times X_2 \times X_3 \ldots \times X_N \in \bigotimes_{k=1}^{N} \mathcal{A}_k.$$

1. Állítás *Legyen $(Y, \mathcal{B})$ mérhető tér. A $T_k : Y \to X_k$ leképezések pontosan akkor $\mathcal{B} - \mathcal{A}_k$-mérhetők $(k = 1, ..., N)$, ha együttesük, $T := (T_1, \dots, T_N)$ $\mathcal{B} - \bigotimes\limits_{k=1}^{N} \mathcal{A}_k$-mérhető.*

Bizonyítás Ha minden T_k mérhető, akkor a

$$\overset{-1}{T}\left(\mathop{\times}_{k=1}^{N} E_k\right) = \bigcap_{k=1}^{N} \overset{-1}{T_k}(E_k) \in \mathcal{B} \qquad (E_k \in \mathcal{A}_k, k = 1, ..., N)$$

formula és az 3.4. állítás alapján T mérhető.

Ha viszont T mérhető, akkor $T_k = \mathrm{pr}_k \circ T$ is mérhető.

2. Állítás *Legyen $(Y_k, \mathcal{B}_k)$ $(k = 1, ..., N)$ mérhető tér. A $T_k : Y_k \to X_k$ leképezések pontosan akkor $\mathcal{B}_k - \mathcal{A}_k$-mérhetők $(k = 1, ..., N)$, ha Descartes-szorzatuk, $T := \mathop{\times}\limits_{k=1}^{N} T_k$ $\bigotimes\limits_{k=1}^{N} \mathcal{B}_k - \bigotimes\limits_{k=1}^{N} \mathcal{A}_k$-mérhető.*

Bizonyítás Ha minden T_k mérhető, akkor

$$\overset{-1}{T}\left(\mathop{\times}_{k=1}^{N} E_k\right) = \mathop{\times}_{k=1}^{N} \overset{-1}{T_k}(E_k) \in \bigotimes_{k=1}^{N} \mathcal{B}_k \qquad (E_k \in \mathcal{A}_k, k = 1, ..., N)$$

szerint T is mérhető.

Ha viszont T mérhető, akkor ezt tudjuk:

$$\mathop{\times}_{k=1}^{N} \overset{-1}{T_k}(E_k) = \overset{-1}{T}\left(\mathop{\times}_{k=1}^{N} E_k\right) \in \bigotimes_{k=1}^{N} \mathcal{B}_k,$$

és a 2.6. utolsó megjegyzése szerint a szóban forgó tégla (kizárva azt a triviális esetet, ha üres) minden oldala mérhető, azaz $\overset{-1}{T_k}(E_k) \in \mathcal{B}_k$ minden k-ra.

3.5. **Állítás** *Legyen* $(X_k, \mathcal{A}_k)$ $(k = 1, ..., N)$ *és* $(Y, \mathcal{B})$ *mérhető tér,* $T : \mathop{\times}_{k=1}^{N} X_k \to Y$ *mérhető leképezés. Ha* $x_k \in X_k$, $k = 1, ..., N-1$, *akkor*

$$T(x_1, \ldots, x_{N-1}, \cdot) : X_N \to Y, \quad x_N \mapsto T(x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N)$$

is mérhető.

Bizonyítás Ismét az egyszerűbb írásmód kedvéért az $N = 2$ esetet vesszük. Az Y bármely B részhalmazára

$$\overset{-1}{T(x_1, \cdot)}(B) = \{x_2 \in X_2 \mid T(x_1, x_2) \in B\} = \{x_2 \in X_2 \mid (x_1, x_2) \in \overset{-1}{T}(B)\} = \\ = \left(\overset{-1}{T}(B)\right)_{(x_1, \cdot)}.$$

Ha $B \in \mathcal{B}$, akkor $\overset{-1}{T}(B) \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ és így x_1-gyel való szelete benne van $\mathcal{A}_2$-ben, azaz B-nek $T(x_1, \cdot)$ általi ősképe az $\mathcal{A}_2$ eleme, és ezt kellett bizonyítanunk.

3.6. Feladatok

1. Jelölje $\mathcal{A}$ az 1.11.3. feladatban szereplő $\mathcal{H}$ generálta σ-algebrát. Mik az $\mathcal{A} - \mathcal{A}$-mérhető $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények?

2. Legyen $\mathcal{A}$ az előző feldatban szereplő σ-algebra és $\mathcal{B} := \sigma_A(\mathcal{P}(\mathbb{Q}))$. Jellemezzük az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények $\mathcal{B} - \mathcal{B}$-mérhetőségét, $\mathcal{A} - \mathcal{B}$-mérhetőségét és $\mathcal{B} - \mathcal{A}$-mérhetőségét.

3. Mutassuk meg, hogy ha $T : X \to Y$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}$-mérhető és $E \in \mathcal{A}$, akkor $T|_E : E \to Y$ $E \cap \mathcal{A} - \mathcal{B}$-mérhető (lásd 2.2.(i)).

4. Legyen $(X, \mathcal{A})$ a páronként diszjunkt $(X_i, \mathcal{A}_i)$ $(i \in I)$ mérhető terek egyesítése (lásd 2.2.(ii)) és $(Y, \mathcal{B})$ mérhető tér. Egy $T :\to Y$ leképzés pontosan akkor $\mathcal{A} - \mathcal{B}$-mérhető, a minden i-re $T|_{X_i}$ $\mathcal{A}_i - \mathcal{B}$-mérhető.

5. Ha T és S $\mathcal{A} - \mathcal{B}$-mérhető leképezések és $E \in \mathcal{A}$, akkor az a leképezés, amely E-n egyenlő T-vel, $E^{\complement}$-en egyenlő S-sel, $\mathcal{A} - \mathcal{B}$-mérhető.

4. Borel-halmazok

4.1. Definíció *Legyen (M, d) metrikus tér. Az M nyílt halmazai által generált σ-algebrát* ***Borel-féle*** *σ-algebrának, elemeit* ***Borel-halmazoknak*** *nevezzük.*

A Borel-féle σ-algebra jelölésére a $\mathcal{B}(M, d)$ vagy, ha a félreértés veszélye nem forog fenn, a $\mathcal{B}(M)$ szimbólumot használjuk.

Nyilvánvaló, hogy

(i) a zárt halmazok összessége által generált σ-algebra is a Borel-algebra, hiszen nyílt halmazok komplementere zárt,

(ii) a nyílt illetve a zárt halmazok generálta σ-gyűrű is a Borel-algebra, hiszen maga a metrikus tér nyílt is, zárt is.

Állítás *(i) A nyílt gömbök összessége illetve a zárt gömbök összessége által generált σ-gyűrű megegyezik, és ez σ-algebra,*

(ii) ha a metrikus tér szeparábilis, akkor a nyílt (illetve a zárt) gömbök generálta σ-algebra a Borel-algebra.

Bizonyítás (i) Jelölje $\mathcal{G}$ a nyílt gömbök összességét, $\mathcal{B}$ a zárt gömbökét. Mivel bármely $x \in M$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$B_r(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_{r+1/n}(x), \qquad G_r(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{r-1/n}(x),$$

és

$$M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n(x),$$

az igaz, hogy $\mathcal{B} \subset \sigma(\mathcal{G}) = \sigma_A(\mathcal{G})$ és $\mathcal{G} \subset \sigma(\mathcal{B}) = \sigma_A(\mathcal{B})$, tehát

$$\sigma(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{B}) = \sigma_A(\mathcal{G}) = \sigma_A(\mathcal{B}).$$

(ii) Jelölje $\mathcal{N}$ a nyílt halmazok összességét. Nyilván $\sigma_A(\mathcal{G}) \subset \sigma_A(\mathcal{N})$. Ha a metrikus tér szeparábilis, akkor minden nyílt halmaz megszámlálható sok nyílt gömb uniója, azaz $\mathcal{N} \subset \sigma_A(\mathcal{G})$, és igy $\sigma_A(\mathcal{N}) \subset \sigma_A(\mathcal{G})$.

4.2. A valós számok Borel-halmazai különösen fontosak. Azt már tudjuk az előbb mondottakból, hogy a korlátos nyílt intervallumok illetve a korlátos zárt intervallumok generálják a Borel-halmazokat. Minthogy

$$]a, b] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a + 1/n, b] \qquad (a, b \in \mathbb{R}, a < b),$$

az alulról nyílt, felülről zárt intervallumok, illetve ugyanígy az alulról zárt, felülről nyílt intervallumok is generálják a Borel-halmazokat. Mi több, az

$$\{[a,\infty[\ \mid a\in\mathbb{R}\},\quad \{]a,\infty[\ \mid a\in\mathbb{R}\},$$

$$\{]-\infty,a]\ \mid a\in\mathbb{R}\},\quad \{]-\infty,a[\ \mid a\in\mathbb{R}\},$$

halmazrendszerek akármelyike által generált σ-algebra (sőt σ-gyűrű) is $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, hiszen például $]a,b]=(]a,\infty[)\setminus(]b,\infty[)$.

Emlékezzünk, hogy a Lebesgue-mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak, amely tartalmazza az intervallumokat; ezért $\mathcal{B}(\mathbb{R})\subset\mathcal{L}$, azaz a valós számok minden Borel-halmaza Lebesgue-mérhető.

4.3. Egy (M,d) metrikus tér A részhalmaza a metrika leszűkítésével szintén metrikus tér, tehát beszélhetünk a Borel-halmazairól. Ha $\mathcal{N}$ az M nyílt halmazainak összessége, akkor $A\cap\mathcal{N}$ az A nyílt halmazainak az összessége. Az 1.2.2. állítás (ii) pontja értelmében megállapíthatjuk, hogy

$$\mathcal{B}(A)\subset A\cap\mathcal{B}(M).$$

4.4. Emlékeztetünk arra, hogy ha (M_k,d_k) $(k=1,\dots,N)$ metrikus tér, akkor $\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N} M_k$-n három metrikusan ekvivalens metrikát is megadtunk. Ha $\mathcal{G}_k$ jelöli az M_k-beli nyílt gömbök összességét, akkor a Descartes-szorzat téren a D_∞ metrikában a nyílt gömbök összessége $\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N}\mathcal{G}_k$ (komplexus Descartes-szorzat!).

Állítás *$\bigotimes\limits_{k=1}^{N}\mathcal{B}(M_k)\subset\mathcal{B}\left(\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N} M_k\right)$, és ha a metrikus terek szeparábilisak, akkor egyenlőség áll.*

Bizonyítás Jelölje a megfelelő nyílt halmazok összességét $\mathcal{N}_k$. Ekkor a 2.4.2. állítás értelmében $\sigma_A\left(\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N}\sigma_A(\mathcal{N}_k)\right)=\sigma_A\left(\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N}\mathcal{N}_k\right)$. Itt a bal oldal éppen $\bigotimes\limits_{k=1}^{N}\mathcal{B}(M_k)$, a jobb oldal pedig része $\mathcal{B}\left(\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N} M_k\right)$-nak, mert $\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N}\mathcal{N}_k$ része a szorzattér nyílt halmazainak.

Ha a metrikus terek szeparábilisak, akkor a 4.1.1. állítás (ii) pontja szerint

$$\mathcal{B}\left(\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N} M_k\right)=\sigma_A\left(\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N}\mathcal{G}_k\right)\subset\sigma_A\left(\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N}\sigma_A(\mathcal{G}_k)\right)=\bigotimes\limits_{k=1}^{N}\mathcal{B}(M_k).$$

4.5. Állítás *Legyen L és M metrikus tér, $T : L \to M$ folytonos leképezés. Ekkor T $\mathcal{B}(L) - \mathcal{B}(M)$-mérhető.*

Bizonyítás Minden M-beli nyílt halmaz T általi őképe nyílt, tehát a $\mathcal{B}(M)$-et generáló halmazrendszer minden elemének az őképe benne van $\mathcal{B}(L)$-ben, így a 3.3. állítás szerint T mérhető.

4.6. Tudjuk, hogy véges dimenziós vektortéren bármely két norma metrikusan ekvivalens (Analízis III.B.6.1.), azaz bármely normára nézve ugyanazok a nyílt halmazok, tehát itt a nyílt halmazokról norma megadása nélkül is beszélhetünk (a gömbök természetesen már különfélék lehetnek különböző normákban). Azt is tudjuk, hogy véges dimenziós vektortér szeparábilis, tehát ha $V_k \quad (k = 1, \ldots, N)$ véges dimenziós vektortér, akkor 4.4. szerint $\mathcal{B}\left(\mathop{\mathsf{X}}_{k=1}^{N} V_k\right) = \bigotimes_{k=1}^{N} \mathcal{B}(V_k)$. Még speciálisabban, $\mathcal{B}(\mathbb{K}^N) = \bigotimes_{k=1}^{N} \mathcal{B}(\mathbb{K})$.

Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér és V véges dimenziós vektortér. Láttuk, hogy $\mathcal{B}(V \times V) = \mathcal{B}(V) \otimes \mathcal{B}(V)$ és $\mathcal{B}(\mathbb{K} \times V) = \mathcal{B}(\mathbb{K}) \otimes \mathcal{B}(V)$, ezért ha $f, g : X \to V$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}(V)$-mérhető függvények és $\vartheta : X \to \mathbb{K}$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{K})$-mérhető, akkor 3.4.1. szerint $(f, g) : X \to V \times V$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}(V \times V)$-mérhető és $(\vartheta, f) : X \to \mathbb{K} \times V$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{K} \times V)$-mérhető.

Minthogy

– a $V \times V \to V$ összeadás,

– a $\mathbb{K} \times V \to V$ számmal szorzás,

– bármely norma és skaláris szorzás $V \to \mathbb{R}$ illetve $V \times V \to \mathbb{K}$ folytonos leképezések, és ezeknek (f, g)-vel, (ϑ, f)-fel illetve f-fel való kompozíciója szerepel a következő állításban, az minden további nélkül igaz.

Állítás *Ha $f, g : X \to V$ $\mathcal{A}-\mathcal{B}(V)$-mérhető és $\vartheta : X \to \mathbb{K}$ $\mathcal{A}-\mathcal{B}(\mathbb{K})$-mérhető, akkor*

(i) $f + g$ is $\mathcal{A} - \mathcal{B}(V)$-mérhető,
(ii) ϑf is $\mathcal{A} - \mathcal{B}(V)$-mérhető,
(iii) ha $|\ \ |$ norma V-n, akkor $|f|$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mérhető,
(iv) ha $<\ ,\ >$ skaláris szorzás V-n, akkor $< f, g >$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{K})$-mérhető.

Speciális esetként említsük meg, hogy adott $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén αf is mérhető.

4.7. Állítás *Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér és V véges dimenziós vektortér. Egy $f : X \to V$ függvényre a következő kijelentések egyenértékűek:*

(i) $\mathcal{A} - \mathcal{B}(V)$-mérhető,

(ii) minden $p \in V^*$ esetén $(p \mid f)$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{K})$-mérhető,

(iii) egy tetszőleges bázisra vonatkozó minden komponens-függvénye $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{K})$-mérhető.

Bizonyítás Mivel a véges dimenziós vektortéren értelmezett lineáris leképezések folytonosak (Analízis III.B.10.2), a 3.2. állítás szerint (i)-ből következik (ii), abból pedig (iii), hiszen ha $(v_1, \ldots, v_N)$ a vektortér egy rendezett bázisa és ennek duálisa $(p^1, \ldots, p^N)$, akkor a bázisra vonatkozó komponens-függvények $(p^k \mid f)$ $(k = 1, \ldots, N)$.

Ha viszont a bázisra vonatkozó komponens-függvények mérhetők, akkor az $X \to V$, $x \mapsto v_k$ konstans függvények mérhetősége valamint az előző állítás miatt $f = \sum\limits_{k=1}^{n} (p^k \mid f)v_k$ mérhető.

Speciálisan egy komplex értékű függvény (mint $\mathbb{R}^2$ értékű függvény) pontosan akkor mérhető, ha mind a valós, mind a képzetes része mérhető. Egy $\mathbb{K}^N$ értékű függvény pontosan akkor mérhető, ha minden komponens-függvénye mérhető.

4.8. Minthogy 4.2. szerint akármelyik típusú félig korlátos intervallumok generálják a valós számok Borel-halmazait, egy $f : X \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mérhető, ha valamelyik típusú úgynevezett **nívóhalmazai** mérhetők, azaz ha minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\{f \geq \alpha\} := \overset{-1}{f}([\alpha, \infty[),$$

vagy $\{f > \alpha\}$, vagy $\{f < \alpha\}$, vagy $\{f \leq \alpha\}$ benne van $\mathcal{A}$-ban.

A 4.6. állítás speciális eseteként mérhető valós értékű függvények összege, számszorosa, abszolút értéke, szorzata is mérhető. Most függvények alsó illetve a felső burkolójáról is belátjuk ezt.

Állítás *Legyen $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mérhető függvény. Ha létezik $\bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n : X \to \mathbb{R}$ vagy $\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n : X \to \mathbb{R}$, akkor ez is mérhető. Továbbá ha létezik $\liminf\limits_n f_n : X \to \mathbb{R}$ vagy $\limsup\limits_n f_n : X \to \mathbb{R}$, akkor ez is mérhető.*

Bizonyítás

$$\left\{\left(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n\right) > \alpha\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n > \alpha\}, \qquad \left\{\left(\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} f_n\right) < \alpha\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n < \alpha\}.$$

Továbbá
$$\liminf_n f_n = \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \bigvee_{k\geq n} f_k, \qquad \limsup_n f_n = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \bigwedge_{k\geq n} f_k.$$

4.9. Állítás *Legyen V véges dimenziós vektortér és $f_n : X \to V$ $(n \in \mathbb{N})$ $\mathcal{A}-\mathcal{B}(V)$-mérhető függvény. Ha létezik $\lim\limits_n f_n : X \to V$, akkor ez is mérhető.*

Bizonyítás Az előzőek szerint $V = \mathbb{R}$ esetén igaz az állítás. Mivel komplex értékű függvény mérhetősége egyenértékű a valós és a képzetes rész mérhetőségével, igaz az állítás $V = \mathbb{C}$ esetére is.

Egy V értékű függvény mérhetősége egyenértékű valamely bázisra vonatkozó komponens-függvényeinek a mérhetőségével, egy V értékű sorozat konvergenciája pedig egyenértékű valamely bázisra vonatkozó komponenseinek a konvergenciájával; ezért nyilvánvalóan igaz az állítás.

4.10. Metrikus terekben a nyílt halmazok mellett a kompakt halmazok játszanak kitüntetett szerepet, ezért fontos a következő két struktúra is.

Definíció *Egy metrikus tér kompakt halmazai által generált*

*(i) kvázi-σ-gyűrűt **Baire-féle** kvázi-σ-gyűrűnek nevezzük, (ii) σ-gyűrűt **Baire-féle** σ-gyűrűnek nevezzük.*

Világos, hogy a Baire-féle kvázi-σ-gyűrű része a Baire-féle σ-gyűrűnek, és az része a Borel-féle σ-algebrának.

Állítás *(i) Ha a metrikus tér kompakt, akkor a Baire-féle kvázi-σ-gyűrű és a Baire-féle σ-gyűrű megegyezik, mindkettő egyenlő a Borel-féle σ-algebrával.*

(ii) Ha a metrikus tér σ-kompakt, vagyis előáll megszámlálható sok kompakt halmaz uniójaként, akkor Baire-féle σ-gyűrű egyenlő a Borel-féle σ-algebrával.

Bizonyítás (i) Az 1.11.8. feladat alapján a Baire-féle kvázi-σ-gyűrű σ-algebra, amely a Borel-algebra, hiszen most minden zárt halmaz kompakt.

(ii) Legyen a metrikus tér a K_n $(n \in \mathbb{N})$ kompakt halmazok uniója. Ekkor bármely A zárt halmaz megszámlálható sok kompakt halmaz uniója: $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (A \cap K_n)$. Ezért a zárt halmazok benne vannak a Baire-féle σ-gyűrűben.

4.11. Állítás *Véges dimenziós vektortér kompakt halmazai által generált*

(i) Baire-féle σ-gyűrű egyenlő a Borel-féle σ-algebrával,

(ii) Baire-féle kvázi-σ-gyűrű egyenlő a korlátos Borel-halmazok összességével.

Bizonyítás (i) Véges dimenziós vektortér σ-kompakt.

(ii) Mivel a kompakt halmazok korlátosak, nyilvánvaló, hogy a Baire-féle kvázi-σ-gyűrű része a korlátos Borel-halmazok összességének. Véges dimenziós vektortéren minden korlátos halmaz része egy kompakt halmaznak, ezért az 1.9. állítás (iii) pontja értelmében a korlátos halmazok benne vannak a Baire-féle kvázi-σ-gyűrűnek.

4.12. Feladatok

1. Adjunk meg olyan metrikus teret, amelyben a Baire-féle σ-gyűrű nem egyenlő a Borel-féle σ-algebrával.

2. Legyen $c \in \mathbb{R}^+$. Mutassuk meg, hogy a c hosszúságú (i) nyílt, (ii) zárt, (iii) alulról nyílt, felülről zárt, (iv) felülről nyílt, alulról zárt intervallumok összessége generálja $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-et.

3. Bármely $f : X \to \mathbb{K}$ függvényre vezessük be az

$$\frac{1_0}{f} := \begin{cases} \dfrac{1}{f(x)} & \text{ha } f(x) \neq 0, \\ 0 & \text{ha } f(x) = 0 \end{cases}$$

függvényt. Ha f $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{K})$-mérhető, akkor $\dfrac{1_0}{f}$ is ilyen.

4. Egy mérhető komplex függvény komplex konjugáltja is mérhető.

5. Legyen U, V és W véges dimenziós vektortér, $R : U \times V \to W$ bilineáris vagy szeszkilineáris leképezés. Ha $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér és $f : X \to U$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}(U)$-mérhető, $g : X \to V$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}(V)$-mérhető, akkor $R \circ (f, g)$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}(W)$-mérhető.

6. A fejezet mely állításai maradnak igazak, ha véges dimenziós vektortér helyett akármilyen normált teret veszünk?

5. Lépcsős függvények

5.1. Definíció *Legyen X halmaz, $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ gyűrű, V vektortér. Egy $\varphi : X \to V$ függvényt V értékű $\mathcal{R}$-**lépcsős függvénynek** hívunk, ha van olyan $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{R}$ páronként diszjunktak, $c_1, \ldots, c_n \in V$ hogy*

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}.$$

Ugyanúgy megállapíthatjuk, mint A.5.2-ben, hogy két V értékű $\mathcal{R}$-lépcsős függvény mindig előállítható ugyanazon halmazok karakterisztikus függvényeinek segítségével. Ennek alapján, ha φ és ψ V értékű $\mathcal{R}$-lépcsős függvények, $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor

(i) $\varphi + \psi$,
(ii) $\alpha\varphi$
is V értékű $\mathcal{R}$-lépcsős fügvvények, és ha $V = \mathbb{C}$, akkor
(iii) $\varphi\psi$
is $\mathbb{C}$ értékű $\mathcal{R}$-lépcsős függvény, végül, ha $V = \mathbb{R}$, akkor
(iv) $\varphi \wedge \psi$ és $\varphi \vee \psi$
is $\mathbb{R}$ értékű $\mathcal{R}$-lépcsős függvény. Következésképpen ekkor φ^+ és φ^- is ilyen.

Továbbá, ha $|\ |$ norma V-n, akkor $|\varphi|$ valós értékű $\mathcal{R}$-lépcsős függvény.

Ha V véges dimenziós vektortér és $\mathcal{A}$ σ-algebra, akkor egy φ $\mathcal{A}$-lépcsős függvény a 4.6 állítás szerint $\mathcal{A} - \mathcal{B}(V)$-mérhető, hiszen minden $E \in \mathcal{A}$ esetén $\chi_E : X \to \mathbb{K}$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{K})$-mérhető.

5.2. Valós értékű $\mathcal{R}$-lépcsős függvény helyett csak $\mathcal{R}$-lépcsős függvényt mondunk. Ha φ $\mathcal{R}$-lépcsős függvény, akkor minden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ esetén a

$$\{\varphi \geq \alpha\}, \quad \{\varphi > \alpha\}, \quad \{\varphi < -\alpha\}, \quad \{\varphi \leq -\alpha\}$$

valamint a

$$\{\varphi > 0\}, \qquad \{\varphi < 0\}$$

nívóhalmazok az $\mathcal{R}$ elemei.

5.3. Állítás *Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, V véges dimenziós vektortér. Egy $f : X \to V$ függvény pontosan akkor $\mathcal{A} - \mathcal{B}(V)$-mérhető, ha $\mathcal{A}$-lépcsős függvények sorozatának határértéke.*

BIZONYÍTÁS Ha f $\mathcal{A}$-lépcsős függvények sorozatának határértéke, akkor mérhető függvények sorozatának határértéke, tehát mérhető.

A fordított irányt 4.7. alapján elég belátni valós értékű függvényekre.

Ha f $\mathcal{A}-\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mérhető, akkor $n \in \mathbb{N}$ és $i = -n2^n+1, -n2^n+2, \dots, n2^n-1, n2^n$ esetén

$$E_{n,i} := \overset{-1}{f}\left(\left]\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right]\right)$$

mérhető halmaz, és

$$\varphi_n := \sum_{i=-n2^n+1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}}$$

olyan $\mathcal{A}$-lépcsős függvény, amelyre $\lim_n \varphi_n = f$. ■

Hasonló tényt állítottunk, és a bizonyítás is hasonló volt, mint az A.11.3. egy részében. Később pontosan tisztázzuk, mi az ottani és az itteni mérhetőség kapcsolata.

Megjegyzés Legyen $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mérhető függvény. Az iménti bizonyítás szerint

(i) ha f korlátos, akkor $\mathcal{A}$-lépcsős függvények sorozatának egyenletes határértéke,

(ii) ha $f \geq 0$, akkor nemnegatív $\mathcal{A}$-lépcsős függvények monoton növekvő sorozatának határértéke.

Az (ii) szerint tehát f^+-hoz és f^--hoz van olyan $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ illetve $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nemnegatív, monoton növő $\mathcal{A}$-lépcsős függvény sorozat, hogy $\xi_n\eta_n = 0$ minden n-re és $\lim\limits_n \xi_n = f^+$, $\lim\limits_n \eta_n = f^-$. Ezért $n \mapsto \varphi_n := \xi_n - \eta_n$ olyan $\mathcal{A}$-lépcsős függvény sorozat, amelyre $|\varphi_n| \leq |\varphi_{n+1}| \leq |f|$ minden n-re és $\lim\limits_n \varphi_n = f$.

5.4. Feladatok

1. Legyen ρ $\mathbb{K}$ értékű, φ V értékű $\mathcal{R}$-lépcsős függvény. Ekkor $\rho\varphi$ V értékű $\mathcal{R}$-lépcsős függvény.

2. Ha $<\ ,\ >$ skaláris szorzat V-n és φ, ψ V értékű $\mathcal{R}$-lépcsős függvények, akkor $<\varphi,\psi>$ $\mathbb{K}$ értékű $\mathcal{R}$-lépcsős függvény.

3. Ha φ V értékű $\mathcal{R}$-lépcsős függvény és U is vektortér, $F : V \to U$ olyan, hogy $F(0) = 0$, akkor $F \circ \varphi$ U értékű $\mathcal{R}$-lépcsős függvény.

4. Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, V véges dimenziós vektortér. Egy $\varphi : X \to V$ függvény pontosan akkor V értékű $\mathcal{A}$-lépcsős függvény, ha $\mathcal{A} - \mathcal{B}(V)$-mérhető és az értékkészlete véges halmaz.

5. Ha V véges dimenziós vektortér, a V értékű $\mathcal{R}$-lépcsős függvények $\sigma_A(\mathcal{R}) - \mathcal{B}(V)$-mérhetők.

6. Mik a V értékű $\mathcal{P}(X)$-lépcsős függvények?

7. Legyen $f : X \to \mathbb{C}$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{C})$-mérhető függvény. Az 5.3-ban mondottak segítségével lássuk be, hogy van olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplex értékű $\mathcal{A}$-lépcsős függvény sorozat, hogy $|\varphi_n| \leq |\varphi_{n+1}| \leq |f|$ minden n-re és $\lim\limits_n \varphi_n = f$.

8. Bizonyítsuk be az előbbi állítást úgy, hogy $\mathbb{C}$ helyett egy véges dimenziós V vektorteret veszünk.

9. Ha $\mathcal{S}$ félgyűrű, amely generálja az $\mathcal{R}$ gyűrűt, akkor a V értékű $\mathcal{R}$-lépcsős függvények mindig előállíthatók csak $\mathcal{S}$-beli halmazok karakterisztikus függvényeivel.

10. Ha φ $\mathcal{R}$-lépcsős függvény, akkor $\dfrac{1_0}{\varphi}$ is az (lásd 4.12.3.).

II. MÉRTÉK ÉS INTEGRÁL

6. Mértékek

6.1. Definíció *Legyen $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ félgyűrű. Egy $\mu : \mathcal{S} \to \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ σ-additív leképezést, azaz amelyre $I_n, I_m \in \mathcal{S}$, $I_n \cap I_m = \emptyset$ $(n, m \in \mathbb{N}, n \neq m)$, $\biguplus\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n \in \mathcal{S}$ esetén*

$$\mu\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} I_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(I_n)$$

teljesül, ***mértéknek*** *nevezünk.*

A fenti definícióban a mérték a ∞ értéket is felveheti; a σ-additivitás formulájában az összeg a kiterjesztett értelemben veendő.

Ha μ nem azonosan végtelen, akkor $\mu(\emptyset) = 0$, hiszen $\mu(\emptyset) = \mu(\biguplus\limits_{n\in\mathbb{N}} \emptyset) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(\emptyset)$.

A mérték additív is, azaz véges sok diszjunkt $\mathcal{S}$-beli halmazra, amelyek uniója is $\mathcal{S}$-ben van, igaz a fentihez hasonló formula (ugyanis a véges sok halmazt kiegészítjük megszámlálható sokká üres halmazokkal).

A mérték monoton, azaz ha $I, J \in \mathcal{S}$ és $J \subset I$, akkor $\mu(J) \leq \mu(I)$. Ugyanis ekkor létezik $I_1, \ldots, I_N \in \mathcal{S}$ úgy, hogy $I \setminus J = \biguplus\limits_{k=1}^{n} I_k$, azaz $I = J \biguplus \left(\biguplus\limits_{k=1}^{n} I_k\right)$, így $\mu(I) = \mu(J) + \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(I_k)$.

6.2. Definíció *Az $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ félgyűrűn adott μ mérték*

(i) ***véges**, ha seholsem veszi fel a ∞ értéket,*

(ii) ***σ-véges**, ha minden $\mathcal{S}$-beli halmaz előállítható legfeljebb megszámlálható sok $\mathcal{S}$-beli, véges mértékű halmaz uniójaként,*

(iii) ***teljesen σ-véges**, ha léteznek H_n $(n \in \mathbb{N})$ halmazok $\mathcal{S}$-ben úgy, hogy minden n-re $\mu(H_n) < \infty$ és $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} H_n$.*

A véges mérték σ-véges, a teljesen σ-véges mérték is σ-véges (bármely A halmazra ekkor $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (A \cap H_n)$).

Ha $X \in \mathcal{S}$ – például, ha $\mathcal{S}$ σ-algebra –, akkor a σ-véges és a teljesen σ-véges tulajdonság egybeesik.

6.3. A félgyűrűn értelmezett mérték egyértelműen kiterjeszthető mértékké a félgyűrű generálta gyűrűre a

$$\mu\left(\biguplus_{k=1}^{n} I_k\right) := \sum_{k=1}^{n} \mu(I_k)$$

formulával. Ennek bizonyítása szinte szóról-szóra lemásolható A.2.1-ből, mert ott a hosszmértéknek csak a σ-additivitását használtuk fel; annyi módosítás szükséges csak, hogy itt a mérték a végtelen értéket is felveheti, és ezt figyelembe kell venni.

Véges, σ-véges, teljesen σ-véges mérték kiterjesztése is ugyanolyan tulajdonságú.

Az $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ gyűrűn adott mérték teljesen σ-végessége egyenértékű azzal, hogy léteznek $\mathcal{R}$-ben páronként diszjunkt H_n $(n \in \mathbb{N})$ halmazok úgy, hogy $X = \biguplus\limits_{n\in\mathbb{N}} H_n$ és $0 < \mu(H_n) < \infty$ minden n-re.

A μ mérték az $\mathcal{R}$ gyűrűn

(i) **monoton**, azaz, ha $E, F \in \mathcal{R}$, $F \subset E$, akkor, $\mu(F) \le \mu(E)$;

(ii) **szubtraktív**, azaz $E, F \in \mathcal{R}$, $F \subset E$, $\mu(F) < \infty$ esetén $\mu(E \setminus F) = \mu(E) - \mu(F)$;

(iii) **σ-szubadditív**, azaz $E, E_n \in \mathcal{R}$, $E \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ esetén $\mu(E) \le \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$;

(iv) **monoton folytonos**, azaz ha $E, E_n \in \mathcal{R}$ és

– $E_n \subset E_{n+1}$, $\quad E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{R}$, akkor $\mu(E) = \lim\limits_{n} \mu(E_n)$,

– $E_n \supset E_{n+1}$, $\quad E = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{R}$, akkor $\mu(E) = \lim\limits_{n} \mu(E_n)$.

Ezeket a tulajdonságokat ismét A.2.5-A.2.6. szerint láthatjuk be, azzal a megjegyzéssel együtt, amit A.10.6.-ban tettünk, ugyanis most már a gyűrűn is megengedtük a mérték végtelen értékét.

6.4. Lássunk példát mértékekre!

(i) Könyvünk A. részében az intervallumok gyűrűjén értelmezett úgynevezett **Lebesgue-mértékkel** foglalkoztunk, amelyet a továbbiakban általában λ-val jelölünk.

Ezt a következőképp általánosíthatjuk. Most alkalmasabb az alulról nyílt, felülről zárt intervallumok félgyűrűjéből kiindulni (ha ugyanazt a félgyűrűt használnánk, mint az A.I.1. részben, akkor egy kissé körülményesebb lenne a meghatározás). Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő, jobbról folytonos függvény. Definiáljuk a g-hez tartozó λ_g **Lebesgue–Stieltjess-mértéket** így:

$$\lambda_g(]a, b]) := g(b) - g(a) \qquad (a, b \in \mathbb{R}, a < b).$$

Nyilván az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$-hez tartozó Lebesgue-Stieltjess-mérték maga a Lebesgue-mérték.

Kis módosítással megismételhetjük A.1.5.-beli okoskodásunkat, hogy belássuk, λ_g valóban mérték, azaz σ-additív.

Világos, hogy a Lebesgue-Stieltjess-mérték teljesen σ-véges, mert véges és $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}]n, n+1]$.

(ii) Legyen X tetszőleges nem üres halmaz. Ha $a \in X$, akkor

$$\delta_a : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}_0^+, \qquad H \mapsto \begin{cases} 1 & \text{ha } a \in H, \\ 0 & \text{ha } a \notin H \end{cases}$$

mérték, amelyet az a pontra koncentrált **Dirac-mértéknek** nevezünk.

A Dirac-mérték σ-algebrán van értelmezve és véges.

(iii) Bármely X nem üres halmaz esetén megadhatjuk X **számláló mértékét** így:

$$\mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}, \quad H \mapsto \begin{cases} H \text{ számossága}, & \text{ha } H \text{ véges}, \\ \infty & \text{ha } H \text{ nem véges}. \end{cases}$$

A számláló mérték σ-algebrán van értelmezve; pontosan akkor véges, ha X véges halmaz, és pontosan akkor σ-véges, ha X legfeljebb megszámlálható.

6.5. Általában egy mértéket csak egy félgyűrűn tudunk egyszerű formulával értelmezni, mint például a Lebesgue-mértéket vagy a Lebesgue-Stieltjes-mértéket. Innen egyértelmű és egyszerű a kiterjesztése a generált gyűrűre. Egy mérték igazán jó értelmezési tartománya azonban σ-gyűrű, hiszen itt természetesebb a σ-additivitás követelménye. Szeretnénk a mértéket gyűrűről kiterjeszteni a generált σ-gyűrűre. Ezt megtenni már korántsem olyan egyszerű. Könyvünk A. részében véghez vittük e feladatot a Lebesgue-mértékre. A következőkben hasonló utat fogunk bejárni általánosabb esetben is.

Első lépésként a nulla mértékűség fogalmát terjesztjük ki a gyűrűn kívülre.

Definíció *Legyen μ mérték az $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ gyűrűn. Az X egy H részhalmazát μ-**nulla mértékűnek** hívunk, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $E_n^\varepsilon \in \mathcal{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ úgy, hogy*

$$H \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n^\varepsilon \qquad \text{és} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n^\varepsilon) < \varepsilon.$$

Értelemszerűen – nulla mértékű helyett μ-nulla mértékűt mondva és $|\ |$ helyett μ-t írva – igazak az A.3.1.-A.3.3-ban bebizonyított állítások.

Ezek után, hasonlóan, mint A.3.4.-ben, bevezetjük a μ-majdnem mindenütt – rövidítve μ-m.m. – fogalmát és az $f = g$ μ.m.m. stb. jelöléseket.

6.6. Állítás *(i) Legyen μ az $\mathcal{R}$ gyűrűn adott mérték. Ha $N \in \mathcal{R}$, $\mu(N) = 0$ és $H \subset N$, akkor H μ-nulla mértékű.*
(ii) Legyen μ a $\mathcal{G}$ σ-gyűrűn adott mérték. Ha a H részhalmaz μ-nulla mértékű, akkor van olyan $N \in \mathcal{G}$, $\mu(N) = 0$, hogy $H \subset N$.

Bizonyítás (i) Nyilvánvalóan igaz: minden ε-hoz az $E_n^\varepsilon := N$ $(n \in \mathbb{N})$ halmazokat vesszük.

(ii) Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén létezik $E_n^k \in \mathcal{G}$ úgy hogy

$$H \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n^k \qquad \text{és} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n^k) < \frac{1}{k}.$$

Most minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $N^m := \bigcap_{k=1}^{m} \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n^k \right)$ a $\mathcal{G}$-hez tartozik, $H \subset N^{m+1} \subset N^m$, $\mu(N^m) \leq \frac{1}{m}$; továbbá $H \subset N := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} N^m \in \mathcal{G}$ és a mérték monoton folytonossága miatt $\mu(N) = 0$. ■

Eredményünk sugallja a következő meghatározást.

Definíció *Legyen μ a $\mathcal{G}$ σ-gyűrűn adott mérték. Azt mondjuk, hogy μ **teljes** a $\mathcal{G}$-n, illetve $\mathcal{G}$ **teljes** μ-re nézve, ha minden $N \in \mathcal{G}$ esetén, amelyre $\mu(N) = 0$, az N minden részhalmaza is $\mathcal{G}$-hez tartozik.*

6.7. Állítás *Legyen $\mu \neq \infty$ mérték a $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ σ-gyűrűn. A*

$$\mathcal{Z} := \{Z \subset X \mid \text{létezik } N \in \mathcal{G}, \mu(N) = 0, Z \subset N\}$$

jelöléssel

$$\mathcal{G}^{\mu} := \{E \cup Z \mid E \in \mathcal{G}, Z \in \mathcal{Z}\}$$

olyan σ-gyűrű, amely tartalmazza $\mathcal{G}$-t, és

$$E \cup Z \mapsto \mu(E)$$

jól definiált teljes mérték $\mathcal{G}^{\mu}$-n, amely kiterjesztése μ-nek.

Bizonyítás Mivel az üres halmaz hozzátartozik $\mathcal{Z}$-hez, $\mathcal{G}^{\mu}$ tartalmazza $\mathcal{G}$-t. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{G}^{\mu}$ σ-gyűrű.

Vegyük először észre azt az egyszerű tényt, hogy ha $Z_n \in \mathcal{Z}$, akkor $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ is benne van $\mathcal{Z}$-ben. Ezért és az $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (E_n \cup Z_n) = \left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \cup \left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} Z_n\right)$ összefüggés miatt a megszámlálható egyesítés nem vezet ki $\mathcal{G}^{\mu}$-ből.

Ha $E \in \mathcal{G}$, $Z \in \mathcal{Z}$, $Z \subset N$, $\mu(N) = 0$, akkor $E \setminus Z = (E \setminus N) \cup \big((N \setminus Z) \cap E\big) \in \mathcal{G}^{\mu}$. Emiatt és az $(E_1 \cup Z_1) \setminus (E_2 \cup Z_2) = \big((E_1 \setminus E_2) \setminus Z_2\big) \cup \big((Z_1 \setminus E_2) \setminus Z_2\big)$ összefüggés miatt a kivonás nem vezet ki $\mathcal{G}^{\mu}$-ből.

Most azt látjuk be, hogy μ kiterjesztése jól definiált: ha $E_1 \cup Z_1 = E_2 \cup Z_2$, $Z_1 \subset N_1$ és $\mu(N_1) = 0$, akkor $E_2 \subset E_1 \cup Z_1 \subset E_1 \cup N_1$, ezért $\mu(E_2) \leq \mu(E_1 \cup N_1) \leq \mu(E_1) + \mu(N_1) = \mu(E_1)$; hasonló érveléssel kapjuk, hogy $\mu(E_2) \leq \mu(E_1)$, azaz végülis $\mu(E_2) = \mu(E_1)$.

Rábízzuk az olvasóra, igazolja azt az egyszerű tényt, hogy μ ezen kiterjesztése σ-additív. ■

Vegyük észre, hogy $\mathcal{G} = \mathcal{G}^{\mu}$ pontosan akkor, ha μ teljes $\mathcal{G}$-n.

6.8. Feladatok

1. Legyen μ_1 és μ_2 mérték ugyanazon a félgyűrűn. Igazoljuk, hogy bármely α_1 és α_2 nem negatív valós számra (a “halmazonként” értelmezett) $\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2$ is mérték, ha a $0\infty := 0$ megállapodással élünk.

2. Legyen μ_n $(n \in \mathbb{N})$ mérték ugyanazon a félgyűrűn. Igazoljuk, hogy a “halmazonként” értelmezett $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu_n$ összeg (azaz, ha I a félgyűrű eleme, akkor $\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu_n\right)(I) := \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(I)$) is mérték. 3. Legyen δ_n az n pozitív egész számra koncentrált Dirac-mérték $\mathcal{P}(\mathbb{N})$-en. Mi a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \delta_n$ mérték?

4. Legyen h az “egységugrás függvény”, azaz $h := \chi_{[0,\infty[}$. Mi a h meghatározta Lebesgue-Stieltjes-mérték?

5. Mi a sign függvény meghatározta Lebesgue-Stieltjes-mérték?

6. Legyen h és g monoton növő, jobbról folytonos függvény. Mutassuk meg, hogy $\lambda_h = \lambda_g$ pontosan akkor, ha van olyan $\alpha \in \mathbb{R}$, hogy $g = h + \alpha$. (Tekintsük a $]0, x]$ és $]-x, 0]$ intervallumokat, $x \in \mathbb{R}^+$.)

7. σ-gyűrűn adott azonosan végtelen mérték teljes.

8. Legyen μ mérték a $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ σ-gyűrűn. Mutassuk meg, hogy

$$\mathcal{G}^\mu = \{H \subset X \mid \text{létezik } E, F \in \mathcal{G}, E \subset H \subset F, \mu(F \setminus E) = 0\}.$$

9. Ha μ és ν mérték a $\mathcal{G}$ σ-gyűrűn, akkor
(i) $\mathcal{G}^\mu \cap \mathcal{G}^\nu = \mathcal{G}^{\mu+\nu}$,
(ii) ha $\nu \le \mu$, akkor $\mathcal{G}^\mu \supset \mathcal{G}^\nu$.

10. Ha μ az $\mathcal{A}$ σ-algebrán adott mérték, akkor $\mathcal{A}^\mu$ is σ-algebra.

11. Legyen $(X, \mathcal{A})$ és $(Y, \mathcal{B})$ mérhető tér, μ mérték $\mathcal{A}$-n, $T : X \to Y$ mérhető leképezés. Ekkor $\mu \circ \overset{-1}{T}$ mérték $\mathcal{B}$-n.

12. Jelölje s az $\mathbb{N}$ számláló mértékét. Mutassuk meg, hogy az $i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ kanonikus beágyazás $\mathcal{P}(\mathbb{N}) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mérhető, és jellemezzük az $s \circ \overset{-1}{i}$ mértéket.

13. Ha $(X_n, \mathcal{A}_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ páronként diszjunkt mérhető terek, μ_n mérték A_n-en, akkor a μ_n-ek összeillesztése mérték a mérhető terek egyesítésének megfelelő σ-algebrán.

14. Legyen δ_a az X halmaz a elemére koncentrált Dirac-mérték. Mutassuk meg, hogy $f = g$ δ_a-m.m. pontosan akkor, ha $f(a) = g(a)$.

15 . Mikor egyenlő két függvény majdnem mindenütt egy halmaz számláló mértéke szerint?

16. Legyen μ mérték egy $\mathcal{G}$ σ-gyűrűn. Mutassuk meg, hogy $\{E \in \mathcal{G} \mid \mu(E) < \infty\}$ kvázi-σ-gyűrű.

7. Integrálás

7.1. Félgyűrűről a generált gyűrűre egyszerűen kiterjeszthető a mérték. Ezért most onnan indulunk, hogy az $X \neq \emptyset$ részhalmazaiból álló $\mathcal{R}$ gyűrűn adott a μ mérték.

Megállapodunk abban, hogy a mértékelméletben a nullának és a végtelennek egyébként nem definiált szorzatát nullának értelmezzük:

$$0 \cdot \infty := 0.$$

Definíció *A* $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$ *$\mathcal{R}$-lépcsős függvényt μ-**integrálhatónak** hívjuk, ha valamely $k = 1, \ldots, n$ esetén $c_k \neq 0$, akkor $\mu(E_k) < \infty$. Ez esetben a φ μ szerinti **integrálja***

$$\int\limits_X \varphi \, d\mu := \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(E_k).$$

Ugyanúgy, mint A.5.4-ben, bebizonyíthatjuk, hogy a definíció jó, azaz nem függ attól, φ-t milyen karakteresztikus függvények lineáris kombinációjaként állítottuk elő. Továbbá ugyanúgy, mint A.5.5-ben, ha φ és ψ μ-integrálható $\mathcal{R}$-lépcsős függvény, $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor $\varphi + \psi$ és $\alpha\varphi$ is μ-integrálható, és

(i) $\int\limits_X (\varphi + \psi) \, d\mu = \int\limits_X \varphi \, d\mu + \int\limits_X \psi \, d\mu$,

(ii) $\int\limits_X \alpha\varphi \, d\mu = \alpha \int\limits_X \varphi \, d\mu$,

(iii) ha $\varphi \leq \psi$, akkor $\int\limits_X \varphi \, d\mu \leq \int\limits_X \psi \, d\mu$, és ebből

$$\left| \int\limits_X \varphi \, d\mu \right| \leq \int\limits_X |\varphi| \, d\mu.$$

Bevezetjük ezután $E \in \mathcal{R}$ és φ μ-integráható $\mathcal{R}$-lépcsős függvény esetére az

$$\int\limits_E \varphi \, d\mu := \int\limits_X \chi_E \varphi \, d\mu$$

jelölést. Erre az

$$\left| \int\limits_E \varphi \right| \leq \mu(E) \sup |\varphi|,$$

$$\int\limits_{E \cup F} \varphi \, d\mu = \int\limits_E \varphi \, d\mu + \int\limits_F \varphi \, d\mu \qquad (E \cap F = \emptyset)$$

összefüggések igazak.

7.2. Ezek után ugyanúgy, mint az A.6. fejezetben, bebizonyíthatjuk az integrálás felépítésének alaplemmáit, amelyeket itt is megfogalmazunk.

Állítás *(**A. lemma**) Legyen φ, φ_n μ-integrálható $\mathcal{R}$-lépcsős függvény, $\varphi_n \leq \varphi_{n+1} \leq \varphi$ $(n \in \mathbb{N})$ és $\lim_n \varphi_n = \varphi$ m.m.. Ekkor*

$$\lim_n \int_X \varphi_n \, d\mu = \int_X \varphi \, d\mu.$$

Állítás *(**B. lemma**) Legyen φ_n μ-integrálható $\mathcal{R}$-lépcsős függvény, $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Ha létezik $\lim_n \int_X \varphi_n \, d\mu$, akkor létezik m.m. $\lim_n \varphi_n$.*

7.3. Bevezetjük ezután a $P_\mu(X)$ jelölést azon $f : X \to \mathbb{R}$ függvények összességére, amelyekhez létezik $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-integrálható $\mathcal{R}$-lépcsős függvény sorozat úgy, hogy
(i) $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$,
(ii) létezik $\lim_n \int_X \varphi_n \, d\mu$,
(iii) $f = \lim_n \varphi_n$ μ-m.m.,
és ilyen f függvény μ-integrálját a

$$\int_X f \, d\mu := \lim_n \int_X \varphi_n \, d\mu$$

formulával értelmezzük.

Ugyanúgy, mint A.7.1.-ben és A.7.2.-ben bebizonyíthatjuk, hogy az integrál jól van értelmezve, azaz nem függ az f-et előállító μ-integrálható $\mathcal{R}$-lépcsős függvény sorozattól, és ha $f, g \in P_\mu(X)$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, akkor $f+g$, αf, $f \wedge g$ is benne van $P_\mu(X)$-ben, továbbá

$$\int_X (f+g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu,$$

$$\int_X \alpha f \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu,$$

és ha $f, g \in P(\mathbb{R})$, $f \leq g$, akkor

$$\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu.$$

Végezetül egy $f : X \to \mathbb{R}$ függvényt μ-**integrálhatónak** nevezünk, ha van olyan $f_1, f_2 \in P_\mu(X)$, hogy $f = f_1 - f_2$, és ekkor

$$\int\limits_X f \, d\mu := \int\limits_X f_1 \, d\mu - \int\limits_X f_2 \, d\mu.$$

A μ-integrálható függvények összességét $L_\mu(X)$-szel jelöljük. Ugyanúgy, mint A.7.3.-ben és A.7.4.-ben bebizonyíthatjuk, hogy az f integrálja jól van definiálva, azaz nem függ attól, hogyan állítjuk elő f-et két $P_\mu(X)$-beli függvény különbségeként, továbbá, ha $f, g \in L_\mu(X)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor $f + g$, αf, f^+, f^-, $|f|$, $f \wedge g$, $f \vee g$ is μ-integrálható, és

(i) $\int\limits_X (f + g) \, d\mu = \int\limits_X f \, d\mu + \int\limits_X g \, d\mu$,

(ii) $\int\limits_X \alpha f \, d\mu = \alpha \int\limits_X f \, d\mu$,

(ii) ha $f \leq g$, akkor $\int\limits_X f \, d\mu \leq \int\limits_X g \, d\mu$,

amiből

$$\left| \int\limits_X f \, d\mu \right| \leq \int\limits_X |f| \, d\mu.$$

Jegyezzük meg, hogy ha $f \in L_\mu(X)$ és $g = f$ μ-m.m., akkor $g \in L_\mu(X)$ és $\int\limits_X f \, d\mu = \int\limits_X g \, d\mu$. A μ szerinti integrálás szempontjából lényegtelen, hogy egy μ-nulla mértékű halmazon miként van definiálva egy függvény. Ezért mostantól megengedjük azt is, hogy egy függvény esetleg egy μ-nulla mértékű halmazon ne is legyen definiálva.

Megemlítjük, hogy használatosak az

$$\int\limits_X f(x) \, d\mu(x) := \int\limits_X f(x)\mu(dx) := \int\limits_X f \, d\mu$$

jelölések is, amelyek különösen akkor hasznosak, ha a függvényeket konkrét formulával adjuk meg. Az "integrálási változót" akármilyen, még másra le nem kötött betűvel jelölhetjük: tehát $\int\limits_X f(t) \, d\mu(t)$ ugyanaz, mint $\int\limits_X f(x) \, d\mu(x)$.

7.4. Ugyanúgy, mint az A.8. fejezetben, bebizonyíthatjuk az alapvető integráltételeket, amelyeket most megfogalmazunk.

1. Állítás *(**Beppo Levi tétele sorozatokra, vagy a monoton konvergencia tétele**) Legyen $f_n \in L_\mu(X)$, $f_n \le f_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ és létezzen $\lim\limits_n \int\limits_X f_n \, d\mu$. Ekkor létezik m.m. $\lim\limits_n f_n \in L_\mu(X)$ és*

$$\int\limits_X \lim_n f_n \, d\mu = \lim_n \int\limits_X f_n \, d\mu.$$

2. Állítás *(**Beppo Levi tétele sorokra**) Legyen $g_n \in L_\mu(X)$ $(n \in \mathbb{N})$ és $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_X |g_n| \, d\mu < \infty$. Ekkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n$ függvénysor μ-m.m. abszolút konvergens, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n \in L_\mu(X)$ és*

$$\int\limits_X \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n \right) d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_X g_n \, d\mu.$$

3. Állítás *(**Fatou lemmája**) Legyen $0 \le f_n \in L_\mu(X)$ és létezzen olyan $\alpha \in \mathbb{R}^+$, hogy $\int\limits_X f_n \, d\mu \le \alpha$ $(n \in \mathbb{N})$. Ha létezik μ-m.m. $\lim\limits_n f_n$, akkor ez μ-integrálható, és*

$$\int\limits_X \lim_n f_n \, d\mu \le \liminf_n \int\limits_X f_n \, d\mu \le \alpha.$$

4. Állítás *(**Lebesgue tétele vagy a dominált konvergencia tétele**) Legyen $f_n \in L_\mu(X)$, létezzen $g \in L_\mu(X)$ úgy, hogy $|f_n| \le g$ $(n \in \mathbb{N})$, és létezzen μ-m.m. $\lim\limits_n f_n$. Ekkor létezik $\lim\limits_n \int\limits_X f_n \, d\mu$, továbbá $\lim\limits_n f_n$ μ-integrálható, és*

$$\int\limits_X \lim_n f_n \, d\mu = \lim_n \int\limits_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu.$$

Felhívjuk a figyelmet B. Levi tételének következményére és a tétellel kapcsolatos megjegyzésinkre, amelyeket értelemszerűen ugyanúgy fogalmazhatunk meg, mint A.8.3-ban és A.8.4-ben.

7.6. Feladatok

1. Legyen δ_a az a-ra koncentrált Dirac-mérték $\mathcal{P}(X)$-en. Igazoljuk, hogy minden $f : X \to \mathbb{R}$ függvény δ_a-integrálható, és $\int\limits_X f d\delta_a = f(a)$.

2. A $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{P}(\mathbb{N})$-lépcsős függvény olyan sorozat, amelynek véges sok kivételével minden tagja nulla, azaz van olyan (φ-től függő) N, hogy $\varphi(n) = 0$ ha $n \geq N$. Ezért φ integrálható az s számláló mérték szerint és $\int\limits_{\mathbb{N}} \varphi = \sum\limits_{n=1}^{N} \varphi(n)$.

Igazoljuk, hogy egy $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat pontosan akkor s-integrálható, ha a belőle készített sor abszolút konvergens, és ekkor

$$\int\limits_{\mathbb{N}} f = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n).$$

3. Legyen s a számláló mérték $\mathcal{P}(\mathbb{R})$-en. Mutassuk meg, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pontosan akkor s-integrálható, ha megszámlálható helyet kivéve mindenütt nulla, $|f|$ értékei felösszegezhetők, és ekkor f-nek az s szerinti integrálja éppen az f legfeljebb megszámlálható sok értékének az összege.

4. Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő, folytonosan differenciálható függvény. Ekkor a g meghatározta Lebesgue–Stieltjess-mértékre

$$\lambda_g(]a, b]) = g(b) - g(a) = \int\limits_a^b g' \, d\lambda,$$

teljesül, ahol λ a Lebesgue-mérték, ami szerinti integrálást már megismertük a könyvünk A részében. Ezért az alulról nyílt, felülről zárt intervallumok generálta gyűrűvel adott minden lépcsős függvény λ_g-integrálható, és

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{I_k} d\lambda_g = \sum_{k=1}^{n} c_k \int\limits_{I_k} g' \, d\lambda = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{I_k} \right) g' d\lambda.$$

Bizonyítsuk be, hogy ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre fg' λ-integrálható, akkor f λ_g-integrálható, és ekkor

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f \, d\lambda_g = \int\limits_{\mathbb{R}} fg' \, d\lambda.$$

5. Igazoljuk, hogy bármely $f \in L_\mu(X)$ előállítható $h - g$ alakban, ahol $h, g \in P_\mu(X)$ és $h \geq 0$, $g \geq 0$. (Legyen $f \geq 0$ és $f = f_1 - f_2$ a 7.3. értelmezése szerint, és $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ az f_2 integrálmeghatározó sorozata; ekkor $h := f_1 - \varphi_1$, $g = f_2 - \varphi_1$. Ha f tetszőleges, okoskodjunk az előbbi szerint f^+-ra és f^--ra.)

6. Legyen μ és ν mérték ugyanazon az $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ gyűrűn, $\nu \leq \mu$. Ha $f \in L_\mu(X)$, akkor $f \in L_\nu(X)$ és $\int\limits_X f\,d\nu \leq \int\limits_X f\,d\mu$. (Útmutatás: elég azt venni, hogy $f \in P_\mu(X)$; ha a φ $\mathcal{R}$-lépcsős függvény μ-integrálható, akkor ν-integrálható is, és $\int\limits_X \varphi\,d\nu \leq \int\limits_X \varphi\,d\mu$; alkalmazzuk B. Levi tételét.)

8. Mérhetőség

8.1. Továbbra is $\mathcal{R}$ az X halmaz részhalmazaiból álló gyűrű, és a következőkben mindig feltesszük, hogy

μ az $\mathcal{R}$-en adott teljesen σ-véges mérték.

Van tehát $H_n \in \mathcal{R}$, $0 < \mu(H_n) < \infty$ $(n \in \mathbb{N})$ úgy, hogy $X = \biguplus\limits_{n\in\mathbb{N}} H_n$. Jegyezzük meg azt a fontos tényt, ebből az is következik, X benne van az $\mathcal{R}$ generálta σ-gyűrűben, tehát ez utóbbi σ-algebra; más szóval

$$\sigma(\mathcal{R}) = \sigma_A(\mathcal{R}).$$

8.2. Definíció *Egy $f : X \to \mathbb{R}$ függvényt μ-**mérhetőnek** nevezünk, ha van olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{R}$-lépcsős függvény sorozat, hogy $f = \lim\limits_n \varphi_n$ μ-m.m..*

Ugyanúgy, mint az A.9. fejezetben bebizonyíthatjuk, hogy ha f és g μ-mérhető, $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor $f+g$, αf, fg, f^+, f^-, $|f|$, $f \wedge g$, $f \vee g$ is μ-mérhető, és ha f seholsem nulla, akkor $1/f$ is.

Állítás *Ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-mérhető függvények sorozata és $f = \lim\limits_n f_n$ μ-m.m., akkor f is μ-mérhető.*

Bizonyítás A 8.4. állítás felhasználásával ugyanúgy érvelhetünk, mint A.9.3.-ban; az egyetlen lényeges az, hogy van mindenütt pozitív μ-integrálható függvény. Íme: a 8.1-ben szereplő H_n-ekkel

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n \mu(H_n)} \chi_{H_n}$$

ilyen.

8.3. Állítás *Ha f μ-mérhető függvény, akkor van olyan $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-integrálható $\mathcal{R}$-lépcsős függvény sorozat, hogy $f = \lim\limits_n \psi_n$ μ-m.m..*

Bizonyítás A 8.1-ben szereplő H_n-ekkel legyen $E_n := \bigcup_{k=1}^{n} H_k$. Ha $n \mapsto \varphi_n$ olyan $\mathcal{R}$-lépcsős függvény sorozat, amely μ-m.m. f-hez konvergál, akkor $n \mapsto \psi_n := \chi_{E_n}\varphi_n$ μ-integrálható $\mathcal{R}$-lépcsős függvény sorozat, amely μ-m.m. f-hez tart. ■

Megjegyzés Ha μ nem teljesen σ-véges, akkor nem feltétlenül igaz ez a legutóbbikét nagyon fontos állítás, és nem is tudnánk folytatni az elmélet kifejtését az A részben megismertek mintájára. Ezért zártuk ki a nem teljesen σ-véges mértékeket, amelyek egyébként a gyakorlati alkalmazásokban szinte sohasem fordulnak elő.

8.4. Ugyanúgy, mint A.9.2.-ben, bebizonyíthatjuk a következő majorálási kritériumot.

Állítás *Ha $f : X \to \mathbb{R}$ μ-mérhető és van olyan $g \in L_\mu(X)$, hogy $|f| \leq g$, akkor $f \in L_\mu(X)$.*

8.5. Definíció *Az X E részhalmazát μ-**mérhetőnek** mondjuk, ha χ_E μ-mérhető függvény. A μ-mérhető halmazok összességét $\mathcal{A}(\mu)$-vel jelöljük.*

Hasonlóan, mint az A.10. fejezetben, bebizonyíthatjuk, hogy $\mathcal{A}(\mu)$ σ-algebra, amely tartalmazza $\mathcal{R}$-et. Itt is kihasználjuk μ teljesen σ-végességét: ha H_n-ek a 8.1.-ben szereplő halmazok és $E_n := \bigcup_{k=1}^{n} H_k$, akkor $\chi_X = 1 = \lim_n \chi_{E_n}$, és ezért $X \in \mathcal{A}(\mu)$.

8.6. Az 1. fejezetben definiáltunk leképezésekre azaz függvényekre egy tisztán algebrai mérhetőség-fogalmat, itt bevezettük a μ-mérhetőség fogalmát egy μ mérték segítségével. Most megvizsgáljuk e két fogalom kapcsolatát.

Jegyezzük meg először is, hogy az $\mathcal{A}(\mu)$-lépcsős függvények μ-mérhetők, hiszen μ-mérhető halmazok karakterisztikus függvényeinek – tehát μ-mérhető függvényeknek – a lineáris kombinációja.

Állítás *$f : X \to \mathbb{R}$ pontosan akkor μ-mérhető, ha $\mathcal{A}(\mu) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mérhető.*

Bizonyítás Megint egy korábbi gondolatmenetünket másolhatjuk le (lásd A.11.3.).

Ha f μ-mérhető, akkor minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\chi_{\{f \leq \alpha\}} = \lim_n n\big(f \vee (\alpha + 1/n) - f \vee \alpha\big),$$

azaz $\{f \leq \alpha\} \in \mathcal{A}(\mu)$, tehát f $\mathcal{A}(\mu) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mérhető.

Ha viszont f $\mathcal{A}(\mu) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mérhető, akkor az 5.3. állítás szerint $\mathcal{A}(\mu)$-lépcsős függvények – tehát μ-mérhető függvények – sorozatának a határértéke, és így f μ-mérhető. ■

Ezzel kapcsolatban elismételhetjük, amit 5.3-ban megjegyeztünk, természetesen úgy, hogy integrálható helyett μ-integrálhatót, lépcsős függvény helyett μ-integrálható $\mathcal{A}(\mu)$-lépcsős függvényt mondunk (a nemnegatív integrálató függvényhez tartó monoton növekvő $\mathcal{A}(\mu)$-lépcsős függvény sorozat tagjai a 8.4. majorálási kritérium miatt μ-integrálhatók). Itt még hozzátehetjük – az ottani jelölések értelemszerű használatával –, hogy $\int\limits_X f\, d\mu = \lim\limits_n \int\limits_X \varphi_n\, d\mu$.

8.7. **Állítás** *Az* $\mathcal{A}(\mu) \to \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$,

$$E \mapsto \begin{cases} \int\limits_X \chi_E\, d\mu & \text{ha } \chi_E \in L_\mu(X), \\ \infty & \text{ha } \chi_E \notin L_\mu(X) \end{cases}$$

leképezés teljes mérték, amely μ*-nek kiterjesztése.*

μ-nek ezt a kiterjesztését is μ-vel jelöljük. A kiterjesztett μ σ-additivitását ugyanúgy bizonyíthatjuk, mint A.10.5-ben. A teljességgel kapcsolatban idézzük fel, hogy minden μ-nulla mértékű halmaz bármely részhalmaza is μ-nulla mértékű, és vegyük figyelembe a következő, egyéb szempontból is fontos megállapítást: $H \subset X$ pontosan akkor μ-nulla mértékű, ha nulla μ-mértékű, azaz ha $H \in \mathcal{A}(\mu)$ és $\mu(H)=0$.

8.8. $\mathcal{A}(\mu)$ olyan σ-algebra, amely tartalmazza $\mathcal{R}$-et, tehát az $\mathcal{R}$ generálta σ-algebrát is. Most $\mathcal{A}(\mu)$ és $\sigma_A(\mathcal{R}) = \sigma(\mathcal{R})$ viszonyát elemezzük.

Először emlékeztetünk (lásd 6.6), hogy ha $H \in \mathcal{A}(\mu)$ és $\mu(H) = 0$, akkor van olyan $N \in \sigma_A(\mathcal{R})$, hogy $H \subset N$ és $\mu(N) = 0$.

1. **Állítás** *Ha* $f : X \to \mathbb{R}$ μ*-mérhető (azaz* $\mathcal{A}(\mu) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$*-mérhető), akkor van olyan* $X \to \mathbb{R}$ $\sigma_A(\mathcal{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$*-mérhető függvény, amely* f*-fel* μ*-m.m. egyenlő.*

Bizonyítás Van olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-integrálható $\mathcal{R}$-lépcsős függvény sorozat, hogy $f = \lim\limits_n \varphi_n$ μ-m.m.. Legyen H az a halmaz, ahol ez az $\mathcal{R}$-lépcsős függvény sorozat nem konvergál f-hez. Ekkor van $N \in \sigma_A(\mathcal{R})$, $H \subset N$, $\mu(N) = 0$.

Minthogy φ_n $\sigma_A(\mathcal{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mérhető, ilyen a $\varphi_n(1 - \chi_N)$ és ezért 4.9. szerint a $\lim\limits_n \varphi_n(1 - \chi_N) = f(1 - \chi_N)$ függvény is, amelyre $f = f(1 - \chi_N)$ μ-m.m. teljesül.

2. **Állítás** $\mathcal{A}(\mu)$ *a* $\sigma_A(\mathcal{R})$*-nek a* μ *szerinti teljesítése (azaz korábbi jelölésünkkel* $\mathcal{A}(\mu) = \sigma_A(\mathcal{R})^\mu$*).*

Bizonyítás Az előző eredményt alkalmazzuk f helyett χ_A-ra, ahol $A \in \mathcal{A}(\mu)$; tehát $\chi_A(1 - \chi_N) = \chi_{A\setminus N}$ $\sigma_A(\mathcal{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mérhető és μ-m.m. egyenlő χ_A-val, azaz $N, A \setminus N \in \sigma_A(\mathcal{R})$, $\mu(N) = 0$; $Z := N \cap A \subset N$ és $A = (A \setminus N) \cup Z$.

8.9. **Állítás** *A μ mérték kiterjesztése $\mathcal{R}$-ről $\mathcal{A}(\mu)$-re egyértelmű.*

Bizonyítás Elég megmutatni, hogy a μ mérték bármely μ_1 és μ_2 kiterjesztése $\sigma_A(\mathcal{R})$-re megegyezik.

A σ-végességet kifejező, 8.1-ben szereplő halmazokkal elég megmutatni azt, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és minden $E \subset H_n$, $E \in \sigma_A(\mathcal{R})$ esetén $\mu_1(E) = \mu_2(E)$.

Ezzel visszavezettük a problémát arra az esetre, amikor $X \in \mathcal{R}$ és μ – következésképpen μ_1 és μ_2 – véges mérték. Ekkor

$$\{E \in \sigma_A(\mathcal{R}) \mid \mu_1(E) = \mu_2(E)\}$$

nyilvánalóan σ-öv, amely tartalmazza $\mathcal{R}$-et, tehát az $\mathcal{R}$ generálta σ-övet is, és ez utóbbi az 1.8. állítás szerint megegyezik az $\mathcal{R}$ generálta σ-gyűrűvel, amely viszont ugyanaz, mint az $\mathcal{R}$ generálta σ-algebra. ■

E legutóbbi állításunk bizonyításában is kihasználtuk μ teljesen σ-végességét; most újra felhívjuk a figyelmet arra, hogy eredményeink általában csak erre az esetre igazak.

8.10. Feladatok.

1. A λ_g Lebesgue–Stieljess-mértéket 6.4.(i)-ben az alulról nyílt, felülről zárt intervallumok félgyűrűjén értelmeztük a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő, jobbról folytonos függvénnyel. Ennek a mértéknek a fejezet szerinti kiterjesztését szintén Lebesgue–Stieltjess-mértéknek hívjuk, és ugyancsak λ_g-vel jelöljük. Világos, hogy $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}(\lambda_g)$.

a) Mutassuk meg, hogy a nyílt intervallumokra és az egy-pont halmazokra

$$\lambda_g(]a, b[) = g(b - 0) - g(a), \qquad \lambda_g(\{b\}) = g(b) - g(b - 0)$$

adódik.

b) Adjunk feltételt arra, hogy $\mathcal{A}(\lambda_g)$ megegyezzen a Lebesgue-mérhető halmazok σ-algebrájával, azaz $\mathcal{A}(\lambda)$-val (mindkettő a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ teljesítése a megfelelő mérték szerint).

2. Ha μ olyan mérték $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-en, amely minden kompakt halmazon véges értéket vesz föl (Borel-mérték, lásd később, 9.7-ben), akkor van olyan g jobbról folytonos függvény, hogy μ=λ_g. (Tekintsük a $]0, x]$ és $] - x, 0]$ intervallumokat, $x \in \mathbb{R}^+$.)

3. Ha μ és ν teljesen σ-véges mértékek ugyanazon az $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ gyűrűn, akkor $L_{\mu+\nu}(X) = L_\mu(X) \cap L_\nu(X)$ és $\int\limits_X f d(\mu + \nu) = \int\limits_X f d\mu + \int\limits_X f d\nu$ ha $f \in L_{\mu+\nu}(X)$. (Útmutatás: a $\subset$ tartalmazás a 7.6.6. feladat szerint igaz. A 6.7.9. feladat szerint pedig $A(\mu) \cap \mathcal{A}(\nu) = \mathcal{A}(\mu + \nu)$. Ha $0 \le f \in L_\mu(X) \cap L_\nu(X)$, akkor van olyan $n \mapsto \varphi_n$ monoton növekvő, nem negatív tagú, μ-integrálható $\mathcal{A}(\mu)$-lépcsős függvény sorozat, és $n \mapsto \psi_n$ monoton növekvő, ν-integrálható $\mathcal{A}(\nu)$-lépcsős függvény sorozat, amely f-hez konvergál. Ekkor $n \mapsto \varphi_n \wedge \psi_n$ $\mu + \nu$-integrálható függvény sorozat, amely monoton növekedve f-hez konvergál, és a másik két sorozat majorálja.)

4. Legyen μ és ν teljesen σ-véges mérték ugyanazon a gyűrűn. Jelölje most felülhúzás a mértékek kiterjesztését a generált σ-algebrára. Igazoljuk, hogy
(i) $\overline{\mu+\nu} = \overline{\mu} + \overline{\nu}$,
(ii) ha $\nu \leq \mu$, akkor $\overline{\mu-\nu} = \overline{\mu} - \overline{\nu}$.

9. Néhány további fogalom

9.1. Az eddigiek értelmében egy teljesen σ-véges mérték mindig tekinthető σ-algebrán adottnak. Noha eredményeink azt is adják, hogy a mérték eleve vehető teljesnek, ettől eltekintünk. Ugyanis a teljesítés triviális lépés, de például egy metrikus tér Borel-halmazain adott két mérték teljesítése különböző σ-algebrára vezethet, holott nekünk csak az a lényeges, hogy a Borel-halmazokon vannak értelmezve, és például az összegük is ilyen.

A most következőkben μ az X halmaz részhalmazaiból álló $\mathcal{A}$ σ-algebrán adott σ-véges mértéket jelöl (σ-algebrán definiált mértékre a teljesen σ-végesség megegyezik a σ-végességgel). Ezt úgy szokták megfogalmazni, hogy adott az

$$(X, \mathcal{A}, \mu) \ \sigma\textbf{-véges mértéktér}.$$

Nem követeljük meg – de persze nem is zárjuk ki –, hogy $\mathcal{A}$ teljes legyen μ-re nézve.

A σ-végességnek nagy előnye, hogy sok mindent, ha kell, visszavezethetünk a véges esetre. Ugyanis ha μ nem véges de σ-véges mérték, akkor van $H_n \in \mathcal{A}$, $H_n \cap H_m = \emptyset$, $0 < \mu(H_n) < \infty$ $(n, m \in \mathbb{N})$, és $X = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} H_n$. μ leszűkítése $H_n \cap \mathcal{A}$ -ra véges mérték minden n esetén; e véges mértékekből μ összetehető.

Arra gondolhatunk, hogy $\mathcal{A}$ az előző fejezetekben tárgyalt $\mathcal{R}$ gyűrű által generált σ-algebra. Viszont természetesen nincs kizárva, hogy az eredeti gyűrű már σ-algebra volt, tehát érveléseinkben az előző fejezet eredményeire hivatkozva az $\mathcal{R}$ helyett mindenütt vehetjük $\mathcal{A}$-t.

Korábbi jelöléseink most azt adják, hogy $\mathcal{A}(\mu) = \mathcal{A}^\mu$; ez az $\mathcal{A}$-nak a μ szerinti teljesítése.

9.2. Egy $f : X \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvényt a μ-mérhetőség és μ-integrálhatóság szempontjából automatikusan nullával kiterjesztjük az egész X-re.

Egy $f : X \to \mathbb{R}$ függvény μ-mérhető illetve μ-integrálható az $E \in \mathcal{A}$ halmazon, ha $f\chi_E$ μ-mérhető illetve μ-integrálható. Ez utóbbi esetben

$$\int_E f \, d\mu := \int_X f\chi_E \, d\mu$$

az f-nek az E-re vett μ-integrálja.

Most azonban egy kicsit már másképp is megfogalmazhatjuk ugyanezt.

Ha $E \in \mathcal{A}$, akkor $(E, E \cap \mathcal{A}, \mu|_{E\cap\mathcal{A}})$ is σ-véges mértéktér. Az $f : X \to \mathbb{R}$ függvénynek az E halmazon való μ-mérhetősége illetve μ-integrálhatósága nem más, mint az $f|_E$ függvénynek a $\mu|_{E\cap\mathcal{A}}$-mérhetősége illetve -integrálhatósága.

Az A.12.1-ben mondottak értelemszerűen érvényben maradnak.

9.3. Az $f : X \to \mathbb{R}$ μ-mérhető függvény μ-**m.m. korlátos**, ha van olyan $\alpha \in \mathbb{R}$, hogy $|f| \le \alpha$ μ-m.m. , és ekkor

$$\mu\text{-ess sup}|f| := \inf\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \ |f| \le \alpha \ \mu\text{-m.m.}\}$$

az f μ-**lényeges szuprémuma**. Ha f nem μ-m.m. korlátos, akkor μ-ess sup$|f| := \infty$.

Bármely f μ-mérhető függvényre

$$|f| \le \text{ess sup}|f| \qquad \mu\text{-m.m.}.$$

Ha $E \in \mathcal{A}$, mindent leszűkítünk E-re illetve $E \cap \mathcal{A}$-ra, így kézenfekvő, mit értünk $f : X \rightarrowtail \mathbb{R}$, $E \subset \text{Dom f}$ esetén az

$$\mu\text{-}\underset{E}{\text{ess sup}}|f|$$

szimbólumon.

Ha f μ-integrálható E-n, akkor

$$\left|\int_E f\right| \le |E|\mu\text{-}\underset{E}{\text{ess sup}}|f|.$$

9.4. **Állítás** *Ha $h : X \to \mathbb{R}_0^+$ μ-mérhető függvény, akkor*

$$h\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}, \quad E \mapsto \begin{cases} \int_E h \, d\mu & \text{ha } h \ \mu\text{-integrálható } E\text{-n,} \\ \infty & \text{ha } h \text{ nem } \mu\text{-integrálható } E\text{-n} \end{cases}$$

mérték.

Bizonyítás Lényegében ugyanúgy kell okoskodnunk, mint ahogy beláttuk, a gyűrűről az integrálással kiterjesztett leképezés σ-additív.

Legyen $E_n \in \mathcal{A}$, $E_n \cap E_m = \emptyset$ $(n, m \in \mathbb{N})$, $n \ne m)$, $E := \biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Három esetet kell megkülönböztetnünk.

(i) Ha h μ-integrálható minden E_n-en és $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\int\limits_{E_n} h\ d\mu < \infty$. Ekkor B. Levi tételéből

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(h\mu)(E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int\limits_{E_n} h\ d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int\limits_X \chi_{E_n} h\ d\mu =$$

$$= \int\limits_X \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n} h\right)\ d\mu = \int\limits_X \chi_E h\ d\mu = \int\limits_E h\ d\mu = (h\mu)(E).$$

(ii) Ha h μ-integrálható minden E_n-en, de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\int\limits_{E_n} h\ d\mu = \infty$. Ekkor B. Levi tételének következményeként $\chi_E h$ nem μ-integrálható, azaz h nem μ-integrálható E-n, ezért a σ-additivitás egyenlősége teljesül: mindkét oldalon ∞ áll.

(iii) Ha van olyan E_n, amelyen h nem μ-integrálható, akkor h nem μ-integrálható E-n sem, így teljesül a kívánt egyenlőség, mindkét oldalán végtelennel.

Megjegyzések (i) Elég h-ról azt feltennünk, hogy μ-m.m. van értelmezve és μ-m.m. nem negatív értékű.

(ii) Ha $E \in \mathcal{A}$ és $\mu(E) = 0$, akkor $(h\mu)(E) = 0$. Ezért $\mathcal{A}$-nak a $h\mu$ szerinti teljesítése bővebb a μ szerinti teljesítésnél: $\mathcal{A}(\mu) \subset \mathcal{A}(h\mu)$.

(iii) A $h\mu$ mérték nem szükségképpen σ-véges; de biztosan az, ha h integrálható a véges μ-mértékű halmazokon.

9.5. Állítás *Legyen a $h : X \to \mathbb{R}_0^+$ μ-mérhető függvény olyan, hogy $h\mu$ σ-véges. Az $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mérhető függvény pontosan akkor $h\mu$-integrálható, ha fh μ-integrálható, és ekkor*

$$\int\limits_X f\, d(h\mu) = \int\limits_X fh\ d\mu.$$

Bizonyítás. Definíció szerint igaz az állítás, ha f=χ_E, ahol $E \in \mathcal{A}$. Ezért nyilván igaz az állítás, ha f=φ, ahol φ $\mathcal{A}$-lépcsős függvény.

Legyen most $f \geq 0$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mérhető függvény. Ekkor van olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nem negatív, monoton növő $\mathcal{A}$-lépcsős függvény sorozat, hogy $f = \lim\limits_n \varphi_n$.

Ha f $h\mu$-integrálható, akkor $\varphi_n \leq f$ miatt minden n-re φ_n $h\mu$-integrálható, és

$$\int\limits_X f\, d(h\mu) = \lim_n \int\limits_X \varphi_n\, d(h\mu) = \lim_n \int\limits_X \varphi_n h\ d\mu,$$

amiből B. Levi tétele alapján $\lim\limits_n \varphi_n h = fh$ μ-integrálható, és

$$\int\limits_X f\, d(h\mu) = \int\limits_X fh\ d\mu. \qquad (*)$$

Ha viszont fh μ-integrálható, akkor $\varphi_n h \leq fh$ miatt minden n-re $\varphi_n h$ μ-integrálható, és

$$\int_X fh\, d\mu = \lim_n \int_X \varphi_n h\, d\mu = \lim_n \int_X \varphi_n\, d(h\mu),$$

azaz $\lim_n \varphi_n = f$ $h\mu$-integrálható, és fennáll a $(*)$ összefüggés.

Ha f akármilyen $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mérhető függvény, akkor az állítás igaz f^+-ra és f^--ra, így magára f-re is.

9.6. A most következő formulát **az integrálhelyettesítés alapképletének** szokás nevezni.

Állítás *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-véges mértéktér, $(Y, \mathcal{B})$ mérhető tér és $T : X \to Y$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}$-mérhető leképezés. A $g : Y \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mérhető függvény akkor és csak akkor $\mu \circ \overset{-1}{T}$-integrálható, ha $g \circ T$ μ-integrálható, és ekkor*

$$\int_Y g\, d(\mu \circ \overset{-1}{T}) = \int_{\overset{-1}{T}(Y)} (g \circ T)\, d\mu. \qquad (*)$$

(Természetesen $\overset{-1}{T}(Y) = X$, csak a jobb megjegyezhetőség kedvéért választottuk a hosszabb jelölést.)

Bizonyítás Legyen $F \in \mathcal{B}$. χ_F akkor és csak akkor $\mu \circ \overset{-1}{T}$-integrálható, (azaz $(\mu \circ \overset{-1}{T})(F) < \infty$) ha $\chi_F \circ T = \chi_{\overset{-1}{T}(F)}$ μ-integrálható (azaz $\mu(\overset{-1}{T}(F)) < \infty$), és ekkor

$$\int_Y \chi_F\, d(\mu \circ \overset{-1}{T}) = (\mu \circ \overset{-1}{T})(F) = \mu(\overset{-1}{T}(F)) = \int_X (\chi_F \circ T)\, d\mu.$$

Ezért igaz az állítás akkor, ha g $\mathcal{B}$-lépcsős függvény.

Ha $g \geq 0$ $\mathcal{B} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mérhető, akkor van olyan $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nem negatív, monoton növő $\mathcal{B}$-lépcsős függvény sorozat, hogy $g = \lim_n \psi_n$; és természetesen $(\psi_n \circ T)_{n\in\mathbb{N}}$ nem negatív, monoton növő $\mathcal{A}$-lépcsős függvénysorozat, $g \circ T = \lim_n \psi_n \circ T$, továbbá

– ha g $\mu \circ \overset{-1}{T}$-integrálható, akkor ψ_n is ilyen, következésképpen $\psi_n \circ T$ μ-integrálható, és

$$\int_Y g\, d(\mu \circ \overset{-1}{T}) = \lim_n \int_Y \psi_n\, d(\mu \circ \overset{-1}{T}) = \lim_n \int_X (\psi_n \circ T)\, d\mu,$$

amiből B. Levi tétele alapján g μ-integrálható, és fennáll a $(*)$ egyenlőség;

– ha $g \circ T$ μ-integrálható, akkor $\psi_n \circ T$ is ilyen, ezért ψ_n $\mu \circ \overset{-1}{T}$-integrálható, és

$$\int_X (g \circ T)\, d\mu = \lim_n \int_X (\psi_n \circ T)\, d\mu = \lim_n \int_Y \psi_n \, d(\mu \circ \overset{-1}{T}),$$

amiből ismét csak B.Levi tétele alapján g $\mu \circ \overset{-1}{T}$-integrálható, és fennáll a $(*)$ egyenlőség.

Tetszőleges g $\mathcal{B}-\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mérhető függvény esetén g^+-ra is, g^--ra is igaz az állítás, így magára g-re is.

9.7. A Borel-halmazokon adott mértékekkel kapcsolatos néhány fogalommal zárjuk a fejezetet.

1. Definíció *Egy metrikus tér Borel-halmazain értelmezett mértéket **Borel-mértéknek** hívunk, ha minden kompakt halmaz mértéke véges.*

A Lebesgue-mérték és bármely Lebesgue–Stieltjess-mérték Borel-féle. $\mathbb{R}$ számláló mértéke nem Borel-féle.

2. Definíció *Egy M metrikus tér Borel-halmazain értelmezett μ Borel-mérték **tartója** a*

$$\mathrm{Supp}\mu := \{x \in M \mid \mu(G) \neq 0,\ G \text{ nyílt},\ x \in G\}$$

halmaz.

Állítás *A tartó zárt halmaz. Ha M szeparábilis, akkor $\mu\left((\mathrm{Supp}\mu)^{\complement}\right) = 0$.*

Bizonyítás

$$(\mathrm{Supp}\mu)^{\complement} = \{x \in M \mid \text{ létezik } G \text{ nyílt}, x \in G, \mu(G) = 0\} = \bigcup \{G \text{ nyílt}, \mu(G) = 0\}$$

nyílt halmaz. Ha M szeparábilis, akkor a fenti formulában szereplő minden G előállítható egy megszámlálható halmaz bizonyos (G-től függő) elemei körüli bizonyos racionális sugarú gömbök uniójaként; e gömbök, mint nulla μ-mértékű halmazok részei, maguk is nulla μ-mértékűek. Az összes ilyen gömb egy megszámlálható halmaz részhalmazának pontjai körüli racionális sugarú gömb, tehát legfeljebb megszámlálható sokan vannak, mindegyik μ-mértéke nulla, és uniójuk a $\mathrm{Supp}\mu$ komplementerte, ami így nulla μ-mértékű. ■

A μ mérték **éles pontjának** nevezzük az M egy x elemét, ha $\mu(\{x\}) \neq 0$. Világos, hogy minden éles pont a tartónak eleme.

9.8. Feladatok

1. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-véges mértéktér, $f : X \to \mathbb{R}$ μ-mérhető függvény. Mutassuk meg, hogy $\{E \in \mathcal{A} \mid f \text{ integrálható } E\text{-n}\}$ kvázi-σ-gyűrű. Mikor lesz σ-gyűrű illetve σ-algebra?

2. Igazoljuk, hogy a $\mathcal{P}(X)$-en értelmezett δ_a Dirac-mértékre bármely $h : X \to \mathbb{R}_0^+$ függvényre $h\delta_a = h(a)\delta_a$.

3. Igazoljuk, hogy ha $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő, folytonosan differenciálható, akkor $\lambda_g = g'\lambda$.

4. Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő, jobbról folytonos, véges sok pontot kivéve folytonosan differenciálható függvény. Legyenek $a_1, \dots, a_n$ a g nem differenciálhatósági helyei, $\alpha_k := g(a_k) - g(a_k - 0)$ $(k = 1, \dots, n)$. Ekkor g' az előbb leírt helyeket kivéve értelmezve van, folytonos, és $g' \geq 0$. Mutassuk meg, hogy

$$\lambda_g = g'\lambda + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta_{a_k}.$$

5. Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-véges mértéktér, $(Y, \mathcal{B})$ mérhető tér, $T : X \to Y$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}$-mérhető bijekció, akkor bármely $h : X \to \mathbb{R}_0^+$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mérhető függvényre $(h\mu) \circ \overset{-1}{T} = (h \circ T^{-1})(\mu \circ \overset{-1}{T})$.

Miért kell itt h-nak $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mérhetőnek lennie és nem μ-mérhetőnek?

6. Bizonyítsuk be, hogy – értelemszerű jelölésekkel – $h_1\mu = h_2\mu$ pontosan akkor teljesül, ha $h_1 = h_2$ μ-m.m..

7. Vegyünk egy metrikus teret és annak egy pontjára koncentrált Dirac-mértéket. Mi ennek a mértéknek a tartója és mik az éles pontjai?

8. Mik a Lebesgue-mérték éles pontjai? Mi a tartója?

9. Mik a 4. feladatban tárgyalt mérték éles pontjai? Mi a mértékek tartója?

10. Igazoljuk, hogy ha $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor $\mathrm{Supp}(h\lambda) = \mathrm{Supp}h := \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid h(x) \neq 0\}}$.

11. Bizonyítsuk be, hogy ha K egy metrikus tér kompakt részhalmaza, és $C(K)$-t (a $K \to \mathbb{R}$ folytonos függvények vektorterét) ellátjuk a maximum-normával, továbbá μ Borel-mérték a metrikus téren, akkor

$$C(K) \to \mathbb{R} \qquad f \mapsto \int_K f \, d\mu$$

folytonos lineáris leképezés.

10. Vektor értékű függvények integrálása

Ebben a fejezetben is $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-véges mértéktér, és $\mathcal{A}(\mu)$ jelöli az $\mathcal{A}$-nak a μ szerinti teljesítését.

10.1. Egy $f : X \to \mathbb{C}$ függvényt akkor nevezünk μ-**integrálhatónak**, ha $\mathrm{Re}f$ és $\mathrm{Im}f$ μ-integrálható, és ekkor

$$\int_X f\, d\mu := \int_X \mathrm{Re}f\, d\mu + i \int_X \mathrm{Im}f\, d\mu.$$

Nem nehéz belátni – kérjük az olvasót, tegye meg –, hogy az intgerálás a komplex értékű függvények körében is lineáris: ha f és g μ-integrálható, $\alpha \in \mathbb{C}$, akkor

$$\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu, \tag{1}$$

$$\int_X \alpha f\, d\mu = \alpha \int_X f\, d\mu. \tag{2}$$

Tudjuk, hogy egy $f : X \to \mathbb{C}$ függvény pontosan akkor $\mathcal{A}(\mu) - \mathcal{B}(\mathbb{C})$-mérhető, röviden μ-**mérhető**, ha f valós és képzetes része μ-mérhető (lásd a 4.7. állítást).

Ezért, ha f komplex értékű μ-mérhető függvény és g nem negatív μ-integrálható függvény, $|f| \le g$, akkor f μ-integrálható. Továbbá $f : X \to \mathbb{C}$ pontosan akkor μ-integrálható, ha μ-mérhető és $|f|$ μ-integrálható, és ekkor

$$\left| \int_X f\, d\mu \right| \le \int_X |f|\, d\mu. \tag{3}$$

10.2. Az $f = (f_1, \ldots, f_N) : X \to \mathbb{K}^N$ függvényt akkor nevezzük μ-**integrálhatónak**, ha minden komponens-függvénye μ-ntegrálható, és ekkor

$$\int_X f\, d\mu := \left(\int_X f_k\, d\mu \;\middle|\; k = 1, \ldots, N \right),$$

vagy ugyanez másképpen,

$$\mathrm{pr}_k \int_X f\, d\mu = \int_X (\mathrm{pr}_k \circ f)\, d\mu \qquad (k = 1, \ldots, N).$$

Ugyancsak nem nehéz belátni, hogy az integrálás itt is lineáris, azaz értelemszerűen érvényben maradnak az előbbi (1) és (2) egyenlőségek. Azt is tudjuk, hogy egy $\mathbb{K}^N$ értékű függvény pontosan akkor $\mathcal{A}(\mu) - \mathcal{B}(\mathbb{K}^N)$-mérhető, röviden μ-**mérhető**, ha minden komponens-függvénye μ-mérhető, és hasonlóan, mint A.15.2-ben, megállapíthatjuk, hogy egy $f : X \to \mathbb{K}^N$ függvény pontosan akkor μ-integrálható, ha μ-mérhető és $|f|$ μ-integrálható, és ekkor értelemszerűen érvényben marad az előbbi (3) egyenlőtlenség.

10.3. Legyen V véges dimenziós vektortér. Az $f : X \to V$ függvényről tudjuk, hogy pontosan akkor $\mathcal{A}(\mu) - \mathcal{B}(V)$-mérhető, röviden μ-**mérhető**, ha minden $p \in V^*$ esetén a $(p \mid f) : X \to \mathbb{K}$, $x \mapsto (p \mid f(x))$ függvény μ-mérhető (lásd a 4.7. állítást).

Tegyük fel, hogy minden $p \in V^*$ esetén $(p \mid f)$ μ-integrálható. Az integrálás tulajdonságai miatt, ha $p, q \in V^*$, $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor

$$\int_X (p+q|f)\ d\mu = \int_X \big((p|f) + (q|f)\big)\ d\mu = \int_X (p|f)\ d\mu + \int_X (q|f)\ d\mu,$$

$$\int_X (\alpha p|f)\ d\mu = \int_X \alpha(p|f)\ d\mu = \alpha \int_X (p|f)\ d\mu,$$

vagyis a $V^* \to \mathbb{K}$, $p \mapsto \int_X (p|f)\ d\mu$ leképezés lineáris, másszóval a $V^{**} = V$ eleme. Ezt hívjuk az f μ szerinti integráljának. A következőképp foglaljuk össze, amit mondtunk.

Definíció *Legyen V véges dimenziós vektortér. Az $f : X \to V$ leképezést μ-**integrálhatónak** nevezzük, ha minden $p \in V^*$ esetén $(p|f)$ μ-integrálható, és ekkor $\int_X f\ d\mu$ az az eleme V-nek, amelyre*

$$\left(p \,\middle|\, \int_X f\ d\mu\right) = \int_X (p|f)\ d\mu \qquad (p \in V^*).$$

Az $X \to V$ μ-integrálható függvények összességét $L_\mu(X, V)$-vel jelöljük.

Nyilvánvaló, hogy f pontosan akkor μ-integrálható, ha V akármely bázisára vonatkozó komponensei μ-integrálhatók, és μ-integráljának a komponensei a komponensek μ-integráljai. Ugyanis, ha $v_1, \dots, v_N$ a V egy bázisa és $p_1, \dots, p_N$ ennek a duálisa, akkor f komponensei e bázisban $(p_k|f)$, $k = 1, \dots, N$. Ha f μ-integrálható, akkor minden $(p_k|f)$ μ-integrálható; ha viszont minden $(p_k|f)$ μ-integrálható, akkor az integrálás linearitása miatt minden $(p|f)$ is μ-integrálható, hiszen p a $p_1, \dots, p_N$ lineáris kombinációja.

Ez azt jelenti, hogy $V = \mathbb{K}^N$ esetén a μ-integrálhatóság általános definíciója visszaadja a korábban bevezetett fogalmat.

10.4. Egyszerű számolást igényel csak, hogy bebizonyítsuk a következőket.

Állítás *Ha $f, g \in L_\mu(X, V)$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $L : V \to U$ lineáris leképezés, akkor $f + g, \alpha f \in L_\mu(X, V)$, $L \circ f \in L_\mu(X, U)$, és*

(i) $\int\limits_X (f+g)\, d\mu = \int\limits_X f\, d\mu + \int\limits_X g\, d\mu,$

(ii) $\int\limits_X \alpha f\, d\mu = \alpha \int\limits_X f\, d\mu,$

(iii) $\int\limits_X L \circ f\, d\mu = L \int\limits_X f\, d\mu.$

10.5. **Állítás** *Legyen $||\ ||$ norma V-n. Az $f : X \to V$ függvény akkor és csak akkor μ-integrálható, ha μ-mérhető és $||f||$ μ-integrálható, és ekkor*

$$\left\| \int_X f\, d\mu \right\| \leq \int_X \|f\|\, d\mu.$$

Bizonyítás Ha $f \in L_\mu(X, V)$, akkor μ-mérhető, ezért $||f||$ is μ-mérhető. Vegyünk egy $p_1, \dots, p_N$ bázist V^*-ban; tudjuk, hogy $x \mapsto |x|_1 := \sum\limits_{k=1}^{n} |(p_k|x)|$ norma V-n, ezért van olyan $\alpha \geq 0$, hogy $||x|| \leq \alpha |x|_1$ minden x-re (véges dimenziós vektortéren bármely két norma metrikusan ekvivalens). Így tehát $||f|| \leq \alpha |f|_1$ és itt a jobb oldalon μ-integrálható függvény áll, ezért a majorálási kritérium szerint $||f||$ is μ-integrálható, továbbá

$$\left\| \int_X f\, d\mu \right\| = \sup_{||p||=1} \left| (p| \int_X f\, d\mu) \right| = \sup_{||p||=1} \left| \int_X (p|f)\, d\mu \right| \leq \sup_{||p||=1} \int_X |(p|f)|\, d\mu \leq$$

$$\leq \int_X ||f||\, d\mu.$$

Ha viszont f μ-mérhető és $||f||$ μ-integrálható, akkor minden $p \in V^*$ esetén $(p|f)$ μ-mérhető és $|(p|f)| \leq ||p||\ ||f||$, így a majorálási kritérium alapján $(p|f)$ μ-integrálható.

10.6. Érvényes vektor értékű függvényekre B. Levi tételének sorokra vonatkozó alakja és Lebesgue tétele. Ezeket lényegében ugyanúgy bizonyíthatjuk be, mint A.15.3. állításait.

1. Állítás *Legyen $g_n \in L_\mu(X,V)$ $(n \in \mathbb{N})$. Ha $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_X ||g_n||\, d\mu < \infty$ a V-n adott valamely $||\ ||$ normára, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n$ sor μ-m.m. abszolút konvergens, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n \in L_\mu(X,V)$ és*

$$\int\limits_X \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n\right) d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_X g_n\ d\mu.$$

2. Állítás *Legyen $f_n \in L_\mu(X,V)$ $(n \in \mathbb{N})$. Ha létezik $g \in L_\mu(X)$ úgy, hogy a V-n adott valamely $||\ ||$ norma esetén $||f_n|| \leq g$ minden n-re és létezik μ-m.m. $\lim\limits_n f_n$, akkor ez μ-integrálható, és*

$$\int\limits_X (\lim_n f_n)\ d\mu = \lim_n \int\limits_X f_n\ d\mu.$$

10.7. Ejtsünk néhány szót nem véges dimenziós vektortér értékű függvények integrálhatóságáról.

Ekkor mindig feltesszük, hogy adott egy norma a vektortéren, azaz egy $(V, ||\ ||)$ normált teret veszünk. Most V duálisa a V-n értelmezett folytonos lineáris funkcionálok összessége. Tudjuk, hogy $V \subset V^{**}$, de általában $V \neq V^{**}$. Ha $f : X \to V$ leképezés és minden $p \in V^*$ esetén $(p|f)$ μ-integrálható, akkor $V^* \to \mathbb{K}$, $p \mapsto \int\limits_X (p|f)\ d\mu$ lineáris leképezés, de nem biztos, hogy folytonos, amit elvárnánk. Ezért f μ-integrálhatóságának meghatározásához további megszorítást célszerű tenni a 10.3. definícióhoz képest.

Azt mondjuk, hogy $f : X \to V$ **gyengén μ-integrálható**, ha minden $p \in V^*$ esetén $(p|f)$ μ-integrálható, és $V^* \to \mathbb{K}$, $p \mapsto \int\limits_X (p|f)\ d\mu$ folytonos lináris funkcionál. Ekkor $\int\limits_X f\ d\mu$ az az eleme V^{**}-nak, amelyre

$$\left(\int\limits_X f\ d\mu \,\middle|\, p\right) = \int\limits_X (p|f)\ d\mu \qquad (p \in V^*).$$

A függvény **erősen μ-integrálható**, ha gyengén μ-integrálható és $\int\limits_X f\ d\mu \in V$.

Látható, hogy reflexív normált terekben (amelyekre $V^{**} = V$ áll fenn, és így szükségképpen teljesek), speciálisan véges dimenziós vektorterekben a gyenge és erős μ-integrálhatóság megegyezik.

10.8. Feladatok

1. Ha V és U véges dimenziós vektorterek, akkor $\mathrm{Lin}(U,V)$ is véges dimenziós vektortér. Mutassuk meg, hogy egy $L : X \to \mathrm{Lin}(U,V)$ leképzés pontosan akkor μ-integrálható, ha minden $u \in U$ esetén $X \to V$, $x \mapsto L(x)u$ μ-integrálható, és ekkor

$$\left(\int_X L(x)\; d\mu(x)\right) u = \int_X L(x)u\; d\mu(x) \qquad (u \in U).$$

2. Legyen $f : X \rightarrowtail V$ függvény, $E \in \mathcal{A}$. Értelmezzük, mit jelent f μ-integrálhatósága E-n. Adjuk meg az ezen értelmezésből fakadó egyszerű összefüggéseket 9.2. mintájára.

3. Legyen $h : X \to V$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}(V)$-mérhető függvény. Igazoljuk, hogy $\{E \in \mathcal{A} \mid h$ μ-integrálható E-n$\}$ kvázi-σ-gyűrű. Mikor lesz σ-gyűrű illetve σ-algebra?

4. Igazoljuk, hogy ha az $f : X \to V$ μ-integrálható függvényre $\int_E f\; d\mu = 0$ teljesül minden $E \in \mathcal{A}$ esetén, akkor $f = 0$ μ-m.m..

5. Integrálható-e erősen vagy gyengén a Lebesgue-mérték szerint az az $f : \mathbb{R} \to l^2$ függvény, amelyet az $f(x)_n := 0$ ha $n \neq \mathrm{int}(x)$, $f(x)_n := 1/1 + x^2$ ha $n = \mathrm{int}(x)$ formula határoz meg? (l^2 duálisa azonosítható l^2-vel a skalárszorzaton keresztül.)

11. Paraméteres integrálok

11.1. Sokszor fordul elő, hogy a függvény, amelyet integrálunk, még egy "paramétertől" is függ. Kérdés, mi mondható a paramétertől való függés tulajdonságairól az integrálás után. Pontosan a következőképp foglamazhatunk.

Adott az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-véges mértéktér.

Adott továbbá egy A nem üres halmaz ("paraméter-halmaz"). Ha $f : A \times X \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy a második változójában μ-integrálható, azaz minden $a \in A$ esetén $f(a,\cdot) : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(a,x)$ μ-integrálható, akkor elkészíthetjük az

$$A \to \mathbb{R}, \qquad a \mapsto \int_X f(a,x)\, d\mu(x)$$

függvényt. Mit tudunk e függvény tulajdonságairól f tulajdonságainak ismeretében?

11.2. Az első eredmény lényegében a Lebesgue-tétel egy átfogalmazása.

Állítás *Legyen M metrikus tér, A az M nem üres részhalmaza, $f : A\times X \to \mathbb{R}$ olyan, hogy*

(i) minden $a \in A$ esetén $f(a,\cdot)$ μ-integrálható,
(ii) van olyan $g \in L_\mu(X)$, hogy $|f(a,\cdot)| \le g$ minden $a \in A$ esetén,
(iii) t az A torlódási pontja és létezik μ-m.m. $x \in X$ esetén $\lim\limits_{a\to t} f(a,x)$,

akkor ez a határérték-függvény a második változójában μ-integrálható, és

$$\int\limits_X \lim_{a\to t} f(a,x)\, d\mu(x) = \lim_{a\to t} \int\limits_X f(a,x)\, d\mu(x).$$

Bizonyítás Legyen $n \mapsto a_n$ tetszőleges olyan sorozat $A\setminus\{t\}$-ben, amelyre $\lim\limits_n a_n = t$. Ekkor

$$f(a_n,\cdot) =: f_n \in L_\mu(X), \quad |f_n| \le g, \quad \text{létezik } \mu\text{-m.m. } \lim_n f_n,$$

ezért Lebesgue tétele alapján a határérték-függvény μ-integrálható, és

$$\int\limits_X \lim_n f(a_n,x)\, d\mu(x) = \lim_n \int\limits_X f(a_n,x)\, d\mu(x).$$

Az átviteli elv alapján ezért a bizonyítandó összefüggés is fennáll.

11.3. Az iménti eredményünk egyszerű folyománya a következő.

Állítás *Legyen M metrikus tér, $f : M \times X \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy*

(i) minden $m \in M$ estén $f(m,\cdot)$ μ-integrálható,
(ii) μ-m.m. $x \in X$ esetén $f(\cdot,x)$ folytonos,
(iii) minden $m \in M$ esetén létezik m-nek G környezete és $g \in L_\mu(X)$ úgy, hogy $|f(m,x)| \le g(x)$ ha $(m,x) \in G \times X$;

ekkor az $M \to \mathbb{R}$, $m \mapsto \int\limits_X f(m,x)\, d\mu(x)$ leképezés folytonos.

11.4. Állítás *Legyen V véges dimenziós vektortér, $A \subset V$ nemüres nyílt konvex halmaz. Ha $f : A \times X \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy*

(i) minden $v \in A$ esetén $f(v, \cdot)$ μ-integrálható,

(ii) μ-m.m. $x \in X$ esetén $f(\cdot, x)$ differenciálható,

(iii) minden $v \in A$ esetén $D_1 f(v, \cdot) : X \to V^*$ μ-mérhető (azaz $\mathcal{A}(\mu) - \mathcal{B}(V^*)$-mérhető), továbbá létezik v-nek G környezete és $g \in L_\mu(X)$ úgy, hogy $||D_1 f(v, x)|| \leq g(x)$ ha $(v, x) \in G \times X$ valamely $||\ ||$ normára vonatkozóan; ekkor az $A \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \int_X f(v, x)\, d\mu(x)$ leképezés differenciálható, és deriváltja $v \mapsto \int_X D_1 f(v, x)\, d\mu(x)$.

Ez utóbbi tényt az alábbi formulával szokás kifejezni:

$$\frac{d}{dv} \int_X f(v, x)\, d\mu(x) = \int_X \frac{\partial f(v, x)}{\partial v}\, d\mu(x).$$

Bizonyítás Legyen $v \in A$ és G a v-nek (iii) szerint létező környezete. Ha $0 \neq h \in V$, $v + h \in G$, akkor (ii) és a középértéktétel szerint μ-m.m. x esetén

$$||f(v + h, x) - f(v, x)|| \leq \sup_{u \in A} ||D_1 f(u, x)||\ ||h|| \leq g(x)||h||,$$

ezért

$$\frac{|f(v + h, x) - f(v, x) - D_1 f(v, x)h|}{||h||} \leq 2g(x).$$

A majorálási kritérium alaján a bal oldal mint x függvénye μ-integrálható, és a 11.2. állítás miatt

$$\lim_{h \to 0} \int_X \frac{f(v + h, x) - f(v, x) - D_1 f(v, x)h}{||h||}\, d\mu(x) =$$

$$= \int_X \lim_{h \to 0} \frac{f(v + h, x) - f(v, x) - D_1 f(v, x)h}{||h||}\, d\mu(x) = 0,$$

ami épp azt jelenti, hogy

$$\int_X f(v + h, x)\, d\mu(x) - \int_X f(v, x)\, d\mu(x) = \int_X D_1 f(v, x)h\, d\mu(x) + \mathrm{o}(h),$$

és ezt kellett bizonyítanunk.

11.5.. Az előző eredmény birtokában választ tudunk adni egy fontos kérdésre.

Legyen V véges dimenziós vektortér, $P : V \rightarrowtail \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény. Ekkor, mint tudjuk, minden $v \in \mathrm{Dom}P$ esetén $\mathrm{D}^2P(v) : V \times V \to \mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris leképezés. Másképp ezt így fogalmazhatjuk meg az $S := \mathrm{D}P : V \rightarrowtail V^*$ jelöléssel: $\mathrm{D}S(v) : V \to V^*$ szimmetrikus lineáris leképezés, azaz $(\mathrm{D}S)(v)^* = \mathrm{D}S(v)$; más szóval $\mathrm{D} \wedge S = 0$ (Analízis IV.B.18.1.)

Igaz-e fordítva: ha $S : V \rightarrowtail V^*$ differenciálható leképezés és $\mathrm{D} \wedge S = 0$, akkor van-e olyan $P : V \rightarrowtail \mathbb{R}$, amelyre $S = \mathrm{D}P$? A válasz általában tagadó, de egy kis többlet feltevéssel már igenlő.

Állítás *Ha $S : V \rightarrowtail V^*$ folytonosan differenciálható, értelmezési tartománya csillagszerű és $(\mathrm{D}S)^* = \mathrm{D}S$ (azaz $\mathrm{D} \wedge S = 0$), akkor van olyan $P : V \rightarrowtail \mathbb{R}$ differenciálható függvény, hogy $S = \mathrm{D}P$.*

Bizonyítás Legyen $c \in \mathrm{Dom}S$ csillagcentrum és

$$f : \mathrm{Dom}S \times [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad (v,x) \mapsto \big(S(c + x(v-c)|v-c\big),$$

ahol, szokásosan, $(\ |\ )$ jelöli a dualitás bilineáris formáját.

f az első változójában differenciálható, és $h \in V$ esetén

$$\mathrm{D}_1 f(v,x)h = \big(S(c + x(v-c))|h\big) + \big(x\mathrm{D}S(c + x(v-c))h|v-c\big).$$

Megállapíthatjuk, hogy $\mathrm{Dom}S \times [0,1] \to V^*$, $(v,x) \mapsto \mathrm{D}_1 f(v,x)$ a két változóban együttesen folytonos, ezért egyrészt minden v esetén a második változójában $\mathcal{B}([0,1]) - \mathcal{B}(V^*)$-mérhető, másrészt minden v-nek van olyan G környezete, amelyen a függvény korlátos, azaz létezik $\gamma < 0$ úgy, hogy $||\mathrm{D}_1 f(v,x)|| \leq \gamma$ ha $(v,x) \in G \times [0,1]$.

Mivel a konstans γ függvény Lebesgue-integrálható $[0,1]$-en, az itteni f függvényünk teljesíti a 11.4. tétel követelményeit, amikor is $X = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])$, μ=λ (Lebesgue-mérték).

Ezért a

$$P : V \rightarrowtail \mathbb{R}, \qquad v \mapsto \int_0^1 \big(S(c + x(v-c))|v-c\big)\, dx$$

függvény differenciálható, és deriváltját úgy számíthatjuk ki, hogy "bedifferenciálunk" az integráljel alá. Tehát

$$\mathrm{D}P(v)h = \int_0^1 \big(S(c + x(v-c))|h\big)\, dx + \int_0^1 x\big(\mathrm{D}S(c + x(v-c))h|v-c\big)\, dx.$$

Lévén $(\mathrm{D}S)^* = \mathrm{D}S$, a második integrandust átírhatjuk így:

$$\big(\mathrm{D}S(c + x(v-c))h|v-c\big) = \big(\mathrm{D}S(c + x(v-c))(v-c)|h\big) = \frac{d}{dx}\big(S(c + x(v-c))|h\big).$$

Ezután parciális integrálással megkapjuk a

$$\mathrm{D}P(v)h = \big(S(v)|h\big) \qquad (v \in \mathrm{Dom}S, h \in V)$$

egyenlőséget, amit akartunk. ■

Speciálisan, $V = \mathbb{R}^N$ esetén az $S = (S_1, \dots, S_N)$ függvényre a $(\mathrm{D}S)^* = \mathrm{D}S$ vagy más jellel a $\mathrm{D} \wedge S = 0$ feltétel azt jelenti, hogy $\partial_i S_k = \partial_k S_i$ minden $i, k = 1, \dots, N$ estén.

Ha V három dimenziós, irányított euklideszi vektortér, akkor a $\mathrm{D} \wedge S = 0$ tulajdonságot így is írhatjuk: $\mathrm{rot}S = 0$. Ha S folytonosan differenciálható és csillagszerű tartományon van értelmezve, akkor van olyan P, hogy $S = \mathrm{grad}P$

11.6. Legyen V három dimenziós irányított euklideszi vektortér. Ha $Z : V \rightarrowtail V$ kétszer differenciálható függvény, akkor div $\mathrm{rot}Z = 0$. Itt is felmerül a kérdés, igaz-e ennek a fordítottja: egy függvény, amelynek a divergenciája nulla, egy másik függvény rotációja?

Állítás *Ha $F : V \rightarrowtail V$ folytonosan differenciálható, az értelmezési tartománya csillagszerű és $\mathrm{div}F = 0$, akkor van olyan $Z : V \rightarrowtail V$ differenciálható függvény, hogy $F = \mathrm{rot}Z$.*

Bizonyítás Az előző tétel bizonyításának lépéseit kell értelemszerűen lemásolnunk, hogy belássuk,

$$Z(v) := \int_0^1 xF(c + x(v - c)) \times (v - c)\,dx \qquad (v \in \mathrm{Dom}F)$$

ilyen függvény; itt $\times$ a vektoriális szorzást jelöli.

11.7. Az előző két állításban a csillagszerűség igen fontos követelmény. Ennek hiányában az állítás következtetése általában nem igaz. Íme az ellenpéldák.

(i) $S : \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0,0)\} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(\dfrac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \dfrac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, 0\right)$ olyan, hogy $\mathrm{rot}S = 0$, azonban S nem állítható elő egy függvény gradienseként. Ugyanis, ha függvény gradiense volna, akkor az értelmezési tartományában levő bármely zárt görbére vett integrálja nulla volna (lásd 22.5.(i)), márpedig ennek az $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ síkban az origó körüli bármely körre vett integrálja 2π.

(S egy végtelen egyenes vezetőben folyó egyenáram mágneses mezőjét írja le.)

(ii) $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{x}{|x|^3}$ olyan, hogy $\mathrm{div}F = 0$, azonban F nem állítható elő egy függvény rotációjaként. Ugyanis, ha függvény rotációja volna, akkor az értelmezési tartományában levő bármely zárt felületre vett integrálja nulla volna (lásd 22.5.(ii)), márpedig ennek az origó körüli bármely gömbre vett integrálja 4π.

(F egy ponttöltés elektromos mezőjét írja le.)

11.8. Feladatok

1. Legyen $f : \mathbb{R}\times]0,1[\to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto \left(\dfrac{3t^2}{x^2} - \dfrac{2t^4}{x^3}\right) e^{-t^2/x}$.
Mutassuk meg, hogy
(i) $f(t,\cdot)$ Lebesgue-integrálható minden $t \in \mathbb{R}$ esetén,
(ii) $f(\cdot,x)$ folytonos minden $x \in]0,1[$ esetén,
azonban $t \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t,x)\,dx$ nem folytonos a nullában.

2. Legyen $f : \mathbb{R}\times]0,1[\to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto \dfrac{t^3}{x^2} e^{-t^2/x}$.
Mutassuk meg, hogy
(i) $f(t,\cdot)$ Lebesgue-integrálható minden $t \in \mathbb{R}$ esetén,
(ii) $f(\cdot,x)$ differenciálható minden $x \in]0,1[$ esetén,
(iii) $\mathrm{D}_1 f(t,\cdot)$ Lebesgue-integrálható minden $t \in \mathbb{R}$ esetén,
(iv) $t \mapsto \int_0^1 f(t,x)\,dx$ differenciálható,
azonban

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 f(t,x)\,dx \neq \int_0^1 \frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\,dx.$$

3. Általánosítsuk úgy a 11.3. és 11.4. állításokat úgy, hogy $\mathbb{R}$ értékű függvények helyett U értékűek álljanak, ahol U véges dimenziós vektortér.

4. Legyen I nyílt intervallum, V véges dimenziós vektortér, $s : I \to \mathbb{R}$ és $f : I \times \mathrm{Ran}s \to V$ folytonosan differenciálható függvények. Tegyük fel, hogy $\mathrm{D}_1 f$-nek van az első változójától független integrálható majoránsa a második változójában, azaz van olyan $g \in L(\mathbb{R})$, hogy a V-n adott valamely normára $||\mathrm{D}_1 f(t,x)|| \leq g(x)$ minden $t \in I$, $x \in \mathrm{Ran}s$ esetén. Ha $a \in I$, akkor az

$$I \to V, \qquad t \mapsto \int_{s(a)}^{s(t)} f(t,x)\,dx$$

függvény differenciálható, és

$$\frac{d}{dt}\int_{s(a)}^{s(t)} f(t,x)\,dx = f(t,s(t))s'(t) + \int_{s(a)}^{s(t)} \frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\,dx.$$

12. Szorzatmértékek

12.1. Most érkeztünk el oda, hogy megtárgyaljuk, hogyan építjük fel a terület- és térfogatfogalmat a hosszmértékből. A téglalap területét a két oldal hosszának szorzataként, a téglatest térfogatát a három oldalél hosszának szorzataként értelmezzük. E minta szolgál arra, hogy általában bevezessük a következő fogalmat.

Mindenek előtt állapodjunk meg abban, hogy a mértékelméletben

$$0 \cdot \infty := 0.$$

Definíció *Legyen $N \geq 2$ természetes szám és $(X_k, \mathcal{A}_k, \mu_k)$ σ-véges mértékterek, $k = 1, ..., N$. A μ_k-k* ***szorzata*** *a*

$$\bigotimes_{k=1}^{N} \mu_k : \mathop{\times}_{k=1}^{N} \mathcal{A}_k \to \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}, \qquad \mathop{\times}_{k=1}^{N} E_k \mapsto \prod_{k=1}^{N} \mu(E_k)$$

leképezés.

Állítás $\bigotimes_{k=1}^{N} \mu_k$ *σ-véges mérték.*

Bizonyítás Tudjuk, hogy $\mathop{\times}_{k=1}^{N} \mathcal{A}_k$ félgyűrű, amelyben benne van $\mathop{\times}_{k=1}^{N} X_k$ (ezért rajta egy mérték σ-végessége és a teljesen σ-végessége egyenértékű).

Az egyszerű írásmód kedvéért az $N = 2$ esetet vesszük; ebből nem nehéz látni, hogyan érvelnénk az általános esetben. Hogy még egyszerűbbé váljanak a formulák, jelölje a két mértékteret $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$.

Ha belátjuk, hogy $\mu \otimes \nu$ mérték (azaz σ-additív), akkor már az is következik, hogy σ-véges. Ugyanis $X = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} H_n$, $0 < \mu(H_n) < \infty$ és $Y = \biguplus_{m\in\mathbb{N}} G_m$, $0 < \nu(G_m) < \infty$, és ezért $X \times Y = \biguplus_{n,m\in\mathbb{N}} H_n \times G_m$, $0 < (\mu \otimes \nu)(H_n \times G_m) < \infty$.

Azt kell megmutatnunk, hogy ha $E \times F, E_n \times F_n \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ $(n \in \mathbb{N})$ és $E \times F = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n \times F_n$, akkor

$$\mu(E)\nu(F) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)\nu(F_n). \tag{$*$}$$

Ekkor $E_n \subset E$ és $F_n \subset F$ minden n-re, ezért a mértékek monotonitása és szubadditivitása miatt $\mu(E_n) \leq \mu(E)$ és $\nu(F_n) \leq \nu(F)$ minden n-re, valamint $\mu(E) \leq \biguplus \mu(E_n)$ és $\nu(F) \leq \biguplus \nu(F_n)$.

Nyilván igaz a kívánt egyenlőség, ha $\mu(E) = 0$ vagy $\nu(F) = 0$, ezért ezt a lehetőséget kizárhatjuk.

Ugyancsak igaz az egyenlőség, ha $0 < \mu(E) < \infty$ és $\nu(F) = \infty$, vagy $0 < \nu(F) < \infty$ és $\mu(E) = \infty$.

Feltehetjük tehát, hogy $\mu(E) < \infty$ és $\nu(F) < \infty$.

Tudjuk, hogy $\chi_{E\times F} = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n\times F_n}$, azaz ha $x \in X$, $y \in Y$, akkor

$$\chi_E(x)\chi_F(y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n}(x)\chi_{F_n}(y).$$

Tegyük fel, hogy $\nu(F) < \infty$.

Rögzítsük x-et; ekkor az

$$Y \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \chi_E(x)\chi_F(y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n}(x)\chi_{F_n}(y)$$

függvény ν-integrálható, ezért B. Levi tétele alapján az összegzés és az integrálás sorrendje felcserélhető, azaz

$$\chi_E(x)\nu(F) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n}(x)\nu(F_n) \qquad (x \in X).$$

Mivel $x \mapsto \chi_E(x)\nu(F)$ pontosan akkor μ-integrálható, ha $\mu(E) < \infty$, ugyancsak B.Levi tételével megkapjuk a kívánt $(*)$ egyenlőséget, $\mu(E)$ akár véges, akár végtelen.

Ha $\nu(F) = \infty$, akkor a σ-végesség miatt F véges ν-mértékű halmazok diszjunkt uniója, így az előbbiek alapján most $(*)$ mindkét oldalán végtelen áll. ■

A $\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N} \mathcal{A}_k$ félgyűrűn értelmezett szorzatmérték σ-véges, ezért egyértelműen kiterjeszthető $\bigotimes\limits_{k=1}^{N} \mathcal{A}_k$-ra mértékké, amit szokásunkhoz híven továbbra is $\bigotimes\limits_{k=1}^{N} \mu_k$-val jelölünk.

12.2. (i) $\mathbb{R}^N$ -en a λ_N N-dimenziós Lebesgue-mértéket mint a valós számok Lebesgue-mértékének N-szeres szorzatát, pontosabban ennek teljesítését értelmezzük. Az N-dimenziós Lebesgue-mérték értelmezési tartománya $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ teljesítése magára a Lebesgue-mértékre.

Ha nem okoz félreértést, az N-dimenziós jelzőt elhagyjuk, és egyszerűen Lebesgue-mértéket mondunk. A λ_N szerinti integrálásnál is sokszor nem írjuk ki a mértéket, ugyanúgy, mint N=1 esetén:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} f d\lambda_N =: \int\limits_{\mathbb{R}^N} f =: \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)dx.$$

Rögtön megállapíthatjuk, hogy a koordináta-tengelyekkel párhuzamos egyenesek, síkok, stb. vagyis az $\{a_1, \ldots, a_{N-1}\} \times \mathbb{R}$, $\{a_1, \ldots, a_{N-2}\} \times \mathbb{R}^2$ stb. halmazok nulla Lebesgue-mértékűek. Tehát egy ilyen egyenes egy dimenziós Lebesgue-mértéke végtelen, viszont például két dimenziós Lebesgue-mértéke nulla: $\lambda(\mathbb{R}) = \infty$, viszont $\lambda_2(\{0\} \times \mathbb{R}) = 0$.

(ii) Ha X_k tetszőleges nem üres halmazok és és $a_k \in X_k$, δ_{a_k} az a_k-ra koncentrált Dirac-mérték ($k = 1, \dots, N$), akkor $\bigotimes_{k=1}^{N} \delta_{a_k} = \delta_{(a_1,\dots,a_N)}$.

(iii) Számláló mértékek szorzata a halmazok Descartes-szorzatának számláló mértéke.

12.3. Az egyszerűbb tárgyalás kedvéért a továbbiakban is csak két mérték szorzatát tekintjük; eredményeink nyilvánvaló módon általánosíthatók véges sok mérték szorzatára is.

A következő formula általánosítja és pontosan megfogalmazza az úgynevezett Cavalieri-elvet, amely azt mondja: messünk el párhuzamos síkokkal egymás mellé tett két testet a fizikai terünkben; ha bármely sík esetén a két síkmetszet területe egyenlő, akkor a testek térfogata megegyezik.

Állítás *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-véges mértéktér, $R \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Ha $(\mu \otimes \nu)(R) < \infty$, akkor*

$$X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \nu(R_{(x,\cdot)}) \qquad \text{és} \qquad Y \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \mu(R_{(\cdot,y)}) \qquad (*)$$

μ-integrálható illetve ν-integrálható függvények, és

$$(\mu \otimes \nu)(R) = \int\limits_X \nu(R_{(x,\cdot)})\, d\mu(x) = \int\limits_Y \mu(R_{(\cdot,y)})\, d\nu(y).$$

Megfordítva, ha a $(*)$ függvények közül az egyik a megfelelő mérték szerint integrálható, akkor $(\mu \otimes \nu)(R) < \infty$.

Bizonyítás Legyen $(\mu \otimes \nu)(R) < \infty$. Minthogy X és Y szerepe szimmetrikus, elég csak az első egyenlőséget megmutatni. Továbbá a 9.1-ben mondottak alapján a σ-végesség miatt elég azt az esetet vennünk, amikor a mértékek végesek.

Legyen $\mathcal{F}$ azon $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-beli R halmazok összessége, amelyekre igaz az állítás.

Egyszerű tény, hogy a mérhető téglák benne vannak $\mathcal{F}$-ben, azaz $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$. Továbbá, ha $R_n \in \mathcal{F}$, $R_n \cap R_m = \emptyset$ $(n, m \in \mathbb{N}, n \neq m)$ és $R := \biguplus_{n\in\mathbb{N}} R_n$, akkor

$$\nu(R_{(x,\cdot)}) = \nu\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} R_{n(x,\cdot)}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(R_{n(x,\cdot)}),$$

és

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_X \nu(R_{n(x,\cdot)})\, d\mu(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu \otimes \nu)(R_n) = (\mu \otimes \nu)(R),$$

így B. Levi tétele alapján

$$(\mu \otimes \nu)(R) = \int_X \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(R_{n(x,\cdot)})\, d\mu(x) = \int_X \nu(R_{(x,\cdot)})\, d\mu(x),$$

azaz R is hozzátartozik $\mathcal{F}$-hez.

Hasonlóan csak még egyszerűbben láthatjuk be, hogy ha $R, S \in \mathcal{F}$, $S \subset R$, akkor $R \setminus S \in \mathcal{F}$.

Mindent összevetve tehát $\mathcal{F}$ olyan σ-öv, amely tartalmazza az $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ félgyűrűt, így az általa generált σ-övet is, ami viszont az 1.8. állítás miatt éppen $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Legyen most $(\mu \otimes \nu)(R) = \infty$. Ekkor van olyan $R_n \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $(\mu \otimes \nu)(R_n) < \infty$, $R_n \cap R_m = \emptyset$ $(n, m \in \mathbb{N}, n \neq m)$, hogy $R = \biguplus_{n \in \mathbb{N}} R_n$, továbbá az előzőek szerint

$$(\mu \otimes \nu)(R_n) = \int_X \nu(R_{n(x,\cdot)}) d\mu(x) = \int_Y \mu(R_{n(\cdot,y)}) d\nu(y).$$

Mivel $\sum_{n \in \mathbb{N}} (\mu \otimes \nu)(R_n) = (\mu \otimes \nu)(R) = \infty$, B. Levi tétele miatt $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(R_{n(x,\cdot)})$ $= \nu(R_{(x,\cdot)})$ μ szerint nem integrálható, és $y \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(R_{n(\cdot,y)}) = \mu(R_{(\cdot,y)})$ ν szerint nem integrálható.

12.4. Most $F : X \times Y \to \mathbb{R}$ függvények $\mu \otimes \nu$-integrálhatóságáról fogunk beszélni. Ilyen függvényekre szokás az

$$\int_{X \times Y} F d(\mu \otimes \nu) =: \int_{X \times Y} F(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) =: \int_{X \times Y} F(x,y) \mu(dx) \nu(dy)$$

jelölést is alkalmazni.

Az előző állítás szerint ha $R \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, χ_R pontosan akkor $\mu \otimes \nu$-integrálható – azaz $(\mu \otimes \nu)(R) < \infty$ –, ha

- $\chi_R(x, \cdot)$ ν-integrálható minden x-re – azaz $R_{(x,\cdot)} \in \mathcal{B}$ és $\nu(R_{(x,\cdot)} < \infty$ –
- $x \mapsto \int_Y \chi_R(x,y) d\nu(y) = \big(\nu(R_{(x,\cdot)})\big)$ μ-integrálható,

és ekkor

$$\int_{X \times Y} \chi_R d(\mu \otimes \nu) = \left((\mu \otimes \nu)(R) = \int_X \nu(R_{(x,\cdot)}) d\mu(x) \right) =$$

$$= \int_X \left(\int_Y \chi_R(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

Ez közel hozza a **szukcesszív (egymás utáni) integrálásra** vonatkozó következő fontos tételt.

Állítás *(**Fubini tétele**) Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-véges mértéktér. Az $F : X \times Y \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mérhető függvény akkor és csak akkor $\mu \otimes \nu$-integrálható, ha*

- *μ-m.m. $x \in X$ esetén $|F(x, \cdot)| : Y \to \mathbb{R}$, $y \mapsto |F(x, y)|$ ν-integrálható,*
- *$x \mapsto \int\limits_Y |F(x, y)| d\nu(y)$ μ-integrálható,*

és ekkor

$$\int\limits_{X \times Y} F(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y F(x, y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

(Természetesen a két mértéktér szerepe felcserélhető, tehát a másik sorrendbeni – először a μ szerinti, aztán a ν szerinti – integrálhatóságra hasonló mondható.)

Bizonyítás Az állítás előtti bevezetőből tudjuk, hogy a tétel igaz $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-beli halmazok karakterisztikus függvényeire (azzal a kis többlettel, hogy ott nemcsak μ-m.m. x-re, hanem minden x-re tudjuk a másik változóbeli integrálhatóságot), így igaz $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-lépcsős függvényekre is.

Legyen most $F \geq 0$. Ekkor van olyan $\Phi_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ monoton növő $\mu \otimes \nu$-integrálható $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-lépcsős függvény sorozat, hogy $F = \lim\limits_n \Phi_n$. Ekkor $\Phi_n(x, \cdot)$ ν-integrálható, $x \mapsto \int\limits_Y F(x, y) d\nu(y)$ μ-integrálható, és

$$\int\limits_{X \times Y} \Phi_n d(\mu \otimes \nu) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y \Phi_n(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x). \qquad (*)$$

Ha μ-m.m. x -re $y \mapsto F(x, y)$ ν-integrálható, és $x \mapsto \int\limits_Y F(x, y) d\nu(y)$ μ-integrálható, akkor $\Phi_n(x, \cdot) \leq F(x, \cdot)$ miatt

$$\int\limits_X \left(\int\limits_Y \Phi_n(x, y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) \leq \int\limits_X \left(\int\limits_Y F(x, y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x),$$

így $(*)$ és B. Levi tétele alapján $\lim\limits_n \Phi_n = F$ $\mu \otimes \nu$-integrálható.

Tegyük most fel, hogy F $\mu \otimes \nu$-integrálható. B. Levi tétele miatt

$$\lim_n \int\limits_{X \times Y} \Phi_n\, d(\mu \otimes \nu) = \int\limits_{X \times Y} F\, d(\mu \otimes \nu),$$

továbbá

$$\int_X \left(\int_Y \Phi_n(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{X\times Y} \Phi_n\, d(\mu\otimes\nu) \le \int_{X\times Y} F\, d(\mu\otimes\nu),$$

(i) tehát alkalmazva B. Levi tételét μ-m.m. x-re értelmes az $x \mapsto \lim_n \int_Y \Phi_n(x,y)\, d\nu(y)$ függvény, amely μ-integrálható;

(ii) ezért ismét B. Levi tételéből: μ-m.m. x-re $y \mapsto \lim_n \Phi_n(x,y) = F(x,y)$ ν-integrálható, és

$$\int_Y F(x,y)\, d\nu(y) = \lim_n \int_Y \Phi_n(x,y)\, d\nu(y);$$

(iii) így végül (i) miatt $x \mapsto \int_Y F(x,y) d\nu(y)$ μ-integrálható, és ugyancsak B. Levi tétele miatt

$$\int_X \left(\int_Y F(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \lim_n \int_X \left(\int_Y \Phi_n(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) =$$
$$= \lim_n \int_{X\times Y} \Phi_n\, d(\mu\otimes\nu) = \int_{X\times Y} F\, d(\mu\otimes\nu).$$

Végezetül ejtsük el azt a követelményt, hogy F legyen nemnegatív.

Ha F $\mu\otimes\nu$-integrálható, akkor $|F|$ is, ezért igaz $|F|$ változónkénti integrálhatósága, de ezzel együtt F^+ és F^- változónkénti integrálhatósága, amiből következik $F = F^+ - F^-$ változónkénti integrálhatósága és F-nek $\mu\otimes\nu$ szerinti integrálját a μ és ν szerinti szukcessziv integrálással is előállíthatjuk.

Ha viszont $|F|$ változónkénti integrálhatósága fennáll, akkor $|F|$ $\mu\otimes\nu$-integrálható, így F – amely mérhető – szintén $\mu\otimes\nu$-integrálható.

12.5. Vegyük észre, hogy $X = Y = \mathbb{N}$ esetén, ha mind μ és ν a számláló mérték, Fubini tétele a kettős indexű sorozatok sorrendi összegezhetőségére vonatkozó, ismert eredményünket adja vissza (Analízis III.A.20.2.).

Már a kettős indexű sorozatoknál is láttuk, hogy az összegezhetőséghez nem elég a sorrendi összegek létezése: az abszolútértékek sorrendi összegezhetősége szükséges.

Felhívjuk tehát a figyelmet arra, az $F : X\times Y \to \mathbb{R}$ mérhető függvény esetén F $\mu\otimes\nu$-integrálhatóságához nem elég, hogy μ-m.m. x-re $y \mapsto F(x,y)$ ν-integrálható és $x \mapsto \int_Y F(x,y)\, d\nu(y)$ μ-integrálható.

Ha F integrálható, akkor bármelyik sorrendben változónként integrálható, és bármelyik sorrendi integrál egyenlő F-nek $\mu \otimes \nu$ szerinti integráljával. Ha tehát valamelyik sorrendi integrál létezik, de a másik nem, akkor a függvény nem integrálható. Ha mindkét sorrendi integrál létezik, de nem egyenlők, akkor sem integrálható a függvény.

Íme egy példa, hogy ez előfordulhat a Lebesgue-mérték szerinti integrálásnál is: a

$$]0,1[\times]0,1[\to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

függvényre értelmesek a sorrendi integrálok a Lebesgue-mérték szerint, azonban nem egyenlők, mert parciális integrálással azt kapjuk, hogy

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx = \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}dx - \int_0^1 \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{x}{x^2+y^2}\Bigg|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}dx\right] - \int_0^1 \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx;$$

ebből átrendezéssel kifejezhetjük a kiindulásul vett integrált, így

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\right) dy = -\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}dy = -\operatorname{arctg}(y)\,\Big|_{y=0}^{y=1} = -\frac{\pi}{4}.$$

Minthogy az x és az y szerepe csak egy előjelben különbözik egymástól, a másik sorrendi integrál is létezik, és éppen ennek az ellentettje.

12.6. Ha μ és ν teljes mérték is $\mathcal{A}$-n illetve $\mathcal{B}$-n, $\mu \otimes \nu$ nem szükségképpen teljes $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-n. Például, ha $E \in \mathcal{A}$ és $\mu(E) = 0$, valamint $B \subset Y$ de $B \notin \mathcal{B}$, akkor $E \times B \notin \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ (mert csak olyan tégla lehet $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-ben, amelynek mindkét oldala mérhető), viszont $E \times B \subset E \times Y$ és $(\mu \otimes \nu)(E \times Y) = 0$ miatt $E \times B$ benne van $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-nek a $\mu \otimes \nu$ szerinti teljesítésében.

Spciálisan: a (teljes) Lebesgue-mértékek szorzata nem teljes.

Az eddigiekkel összhangban $\mathcal{A}(\mu)$, $\mathcal{B}(\nu)$ és $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})(\mu \otimes \nu)$ a σ-algebráknak a megfelelő mérték szerinti teljesítését jelöli.

Állítás *Legyen $R \in (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})(\mu \otimes \nu)$. Ekkor μ-m.m. $x \in X$ illetve ν-m.m. $y \in Y$ esetén $R_{(x,\cdot)} \in \mathcal{B}(\nu)$, $R_{(\cdot,y)} \in \mathcal{A}(\mu)$. Ha $(\mu \otimes \nu)(R) < \infty$, akkor*

$$x \mapsto \nu(R_{(x,\cdot)}) \qquad \text{és} \qquad y \mapsto \mu(R_{(\cdot,y)}) \tag{$*$}$$

μ-integrálható illetve ν-integrálható, és

$$(\mu \otimes \nu)(R) = \int\limits_X \nu(R_{(x,\cdot)})d\mu(x) = \int\limits_Y \mu(R_{(\cdot,y)})d\nu(y).$$

Viszont, ha a $(*)$ függvények közül az egyik integrálható a megfelelő mérték szerint, akkor $(\mu \otimes \nu)(R) < \infty$.

Bizonyítás Ha $R \in (\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})(\mu\otimes\nu)$, akkor van olyan $S, T \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, hogy $S \subset R \subset T$ és $(\mu \otimes \nu)(T \setminus S) = 0$. Ezért

$$0 = (\mu \otimes \nu)(T \setminus S) = \int\limits_X \nu((T \setminus S)_{(x,\cdot)})\, d\mu(x),$$

amiből $\nu((T \setminus S)_{(x,\cdot)}) = 0$ μ-m.m. x -re.

Mivel $(T \setminus S)_{(x,\cdot)} = T_{(x,\cdot)} \setminus S_{(x,\cdot)}$ és $S_{(x,\cdot)} \subset R_{(x,\cdot)} \subset T_{(x,\cdot)}$, ez azt jelenti, hogy $R_{(x,\cdot)} \in \mathcal{B}(\nu)$ azon x-ekre, amelyekre $\nu((T \setminus S)_{(x,.)}) = 0$, azaz μ-m.m. x-re.

Ha R véges $\mu \otimes \nu$ mértékű, akkor

$$(\mu \otimes \nu)(R) = (\mu \otimes \nu)(S) = \int\limits_X \nu(S_{(x,\cdot)})d\mu(x) = \int\limits_X \nu(R_{(x,\cdot)})d\mu(x).$$

Ha R nem véges $\mu \otimes \nu$ mértékű, akkor ugyanúgy okoskodhatuk, mint 12.3-ban.

12.7. Feladatok

1. Bizonyítsuk be a 12.6. segítségével, hogy a Fubini-tétel ugyanolyan formában igaz $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})(\mu \otimes \nu)$-mérhető függvényekre.

2. Legyen $H \subset [0,1]$ Lebesgue-féle értelemben nem mérhető halmaz. Mutassuk meg, hogy a

$$[0,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{ha } x \in H, \\ 1 & \text{ha } x \notin H \end{cases}$$

függvénynek az egyik sorrendi ismételt integrálja létezik, noha maga a függvény nem is Lebesgue-mérhető.

3. Legyen g és h monoton növő, jobbról folytonos függvény. Adjuk meg a $\lambda_g \otimes \lambda_h$ mértéket $\mathbb{R}^2$ intervallum-oldalú tégláin.

4. Legyen $a \in \mathbb{R}$. Jellemezzük a $\delta_a \otimes \lambda$ mértéket.

5. Legyen $h : X \to \mathbb{R}^+$ $\mathcal{A}-\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mérhető, $k : Y \to \mathbb{R}^+$ $\mathcal{B}-\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mérhető függvény. Mutassuk meg, hogy $(h\mu) \otimes (k\nu) = (h \otimes k)(\mu \otimes \nu)$, ahol $h \otimes k : X \times Y \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto h(x)k(y)$.

6. Integrálhatók-e a következő fügvények a Lebesgue-mérték szerint:

(i) $[1, \infty[\times[1, \infty[\to \mathbb{R}, \;\; (x, y) \mapsto \dfrac{1}{x^2 + y^2}$,

(ii) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \;\; (x, y) \mapsto \dfrac{x}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}}$ $\quad (a > 0$ adott).

7. Használjuk a szukcesszív integrálást a következő síkidomok területének illetve testek térfogatának a kiszámítására.

(i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2, x > y^2\}$,

(ii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2/4) - x < y < x - 3\}$,

(iii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, (x - 2)^2 + y^2 \le 4\}$,

(iv) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < z < 1\}$,

(v) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le r^2\}$ $\quad (r > 0$ adott).

8. Legyen I intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Mutassuk meg 12.3. segítségével, hogy a

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2^2 + x_3^2 \le f(x_1)^2\}$$

"forgástest" térfogata pontosan akkor véges, ha f^2 Lebesgue-integrálható, és ez esetben a térfogat $\pi \int\limits_I f^2$.

13. Helyettesítéses integrálás

13.1. Tudjuk, hogy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények Lebesgue-integráljának a kiszámítására igen jól használható a helyettesítés módszere. Ezt általánosítjuk most $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ függvények Lebesgue-integrálására.

Legyenek H és G az $\mathbb{R}^N$ összefüggő nyílt részhalmazai, és jelölje most λ_H és λ_G az N dimenziós Lebesgue-mérték leszűkítését a H illetve a G Borel-halmazaira. Azt fogjuk megmutatni, hogy bizonyos $S : G \to H$ mérhető leképezések esetén λ_H kapcsolatba hozható $\lambda_G \circ \overset{-1}{S}$-gyel.

Állítás *Ha $S : G \to H$ olyan folytonosan differenciálható bijekció, amelyre $\mathrm{D}S(t)$ is bijekció minden $t \in G$ esetén, akkor*

$$\lambda_H = (|\det \mathrm{D}S|\lambda_G) \circ \overset{-1}{S}.$$

(Emlékezzünk függvény és mérték szorzatára, amelyet 9.4-ben definiáltunk. Továbbá a helyettesítéses integrálás 9.6.-beli alapképlete szerint állításunk azt mondja, hogy egy $f : H \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvény akkor és csak akkor Lebesgue-integrálható, ha $(f \circ S)|\det \mathrm{D}S|$ Lebesgue-integrálható, és ekkor

$$\int_H f(x)dx = \int_G f(S(t))|\det \mathrm{D}S(t)|\,dt.$$

Ez a helyettesítéses integrálás megszokott és igen gyakran alkalmazott formája, amely magában foglalja az állítás formuláját is, ha f-nek karakterisztikus függvényt veszünk.)

Bizonyítás Teljes indukciót alkalmazunk.

$N = 1$ esetén az állítás igaz, amint azt az A.13.8.-ból jól látjuk.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz $(N-1)$-re.

Első lépés.

Vegyünk olyan S-et, amelyre létezik $i, j \in \{1, ..., N\}$, hogy $S_i \subset \mathrm{pr}_j$, azaz $S_i(t_1, \dots, t_N) = t_j$. Az általánosság megszorítása nélkül, a könnyebb írásmód kedvéért feltehetjük, hogy $i = N, j = 1$. Ekkor $\partial_k S_N = \delta_{1k}$, vagyis $\mathrm{D}S$ utolsó sorában az első helyen 1 áll, mindenhol máshol 0:

$$\mathrm{D}S = \begin{pmatrix} \partial_1 S_1 & \partial_2 S_1 & \dots & \partial_N S_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 S_{N-1} & \partial_2 S_{N-1} & \dots & \partial_N S_{N-1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Rögzítsük t_1-et; ezzel rögzítjük S_N-et. Így megadunk egy

$$\xi(t_1) : \mathbb{R}^{N-1} \rightarrowtail \mathbb{R}^{N-1}, \quad (t_2, \dots, t_N) \mapsto \big(S_1(t), \dots, S_{N-1}(t)\big)$$

leképezést, ahol $t := (t_1, t_2, \dots, t_N)$. Ez nyilván folytonosan differenciálható injekció, amelynek deriváltját úgy kapjuk meg $\mathrm{D}S$-ből, hogy elhagyjuk az utolsó sort és az első oszlopot; ezért

$$|\det(\mathrm{D}\xi(t_1))(t_2, \dots, t_N)| = |\det \mathrm{D}S(t)| \neq 0,$$

tehát az indukciós feltevés szerint alkalmazhatjuk az $N-1$ dimenziós helyettesítéses integrálást $\xi(t_1)$-gyel. Fubini tétele alapján, ha E a H-nak véges Lebesgue-mértékű részhalmaza, akkor

$$\lambda_N(E) = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} \chi_E(x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N) dx_1 \ldots dx_{N-1} \right) dx_N =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} \chi_E(x_1, \ldots, x_{N-1}, t_1) dx_1 \ldots dx_{N-1} \right) dt_1 =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} \chi_E(\xi_1(t_1)(t_2, \ldots, t_N), \ldots, \xi_{N-1}(t_1)(t_2, \ldots, t_N), t_1) \times$$

$$\times \, |\det \mathrm{D}\xi(t_1)(t_2, \ldots, t_N) dt_2, \ldots, dt_N \Bigg) dt_1 =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \chi_E(S(t)) |\det \mathrm{D}S(t)| \, dt.$$

Az utolsó egyenlőségnél felhasználtuk, hogy $t_1 = S_N(t)$, és újra alkalmaztuk Fubini tételét.

Bebizonyítottuk tehát a helyettesítéses integrálás képletét olyan S-re, amelyre létezik i, j úgy, hogy $S_i \in \mathrm{pr}_j$.

Második lépés.

Legyen most S tetszőleges, a tételben megfogalmazott tulajdonságú leképezés.

Ha $t_o \in G$, akkor $\mathrm{D}S(t_o) \neq 0$ miatt van olyan i és j, hogy $\partial_j S_i(t_o) \neq 0$. Vezessük be a

$$\Phi : G \to \mathbb{R}^N, \quad \Phi(t) := \begin{cases} t_k & \text{ha } k \neq j, \\ S_i(t) & \text{ha } k = j \end{cases} \qquad (k = 1, \ldots, N)$$

függvényt. Nyilvánvaló, hogy Φ folytonosan differenciálható, deriváltjának j-ik sorában S deriváltjának i-ik sora áll, egyébként a főátlóban 1-esek vannak, mindenütt másutt nullák ezért $\det \mathrm{D}\Phi(t_o) = \partial_j S_i(t_o) \neq 0$. Az inverzfüggvény-tétel értelmében van t_o-nak olyan U környezete, hogy $\Phi|_U$ injektív és az inverze is folytonosan differenciálható. Jelölje a továbbiakban Φ ezt a leszűkítést.

Minthogy $\Phi_k \subset \mathrm{pr}_k$, ha $k \neq j$, valamint $\Phi \circ \Phi^{-1} \subset \mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}$ azaz $\Phi_k \circ \Phi^{-1} \subset \mathrm{pr}_k$ minden k-ra, azt kapjuk, hogy $\left(\Phi^{-1}\right)_k \subset \mathrm{pr}_k$ ha $k \neq j$, továbbá $\Phi_j \subset S_i$, ezért $S_i \circ \Phi^{-1} \subset \mathrm{pr}_j$.

Ezek szerint Φ és $S \circ \Phi^{-1}$ olyan leképezések, mint amilyenek az első lépésben szerepeltek, és

$$S|_U = (S \circ \Phi^{-1}) \circ \Phi,$$

tehát $S|_U$-ra alkalmazhatjuk egymás után kétszer az előzőekben már levezetett eredményt. Ha tehát E az $S[U] \subset H$ véges Lebesgue-mértékű részhalmaza, akkor

$$\lambda_N(E) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \chi_E((S \circ \Phi^{-1})(y)|\det \mathrm{D}(S \circ \Phi^{-1})(y)|dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \chi_E((S \circ \Phi^{-1})(\Phi(t))|\det \mathrm{D}(S \circ \Phi^{-1})(\Phi(t))||\det \mathrm{D}\Phi(t)|dt =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \chi_E(S(t))|\det \mathrm{D}S(t)|\, dt.$$

Bebizonyítottuk tehát, hogy G minden pontjának van olyan környezete, amelyben igaz a helyettesítéses integrálás képlete.

Harmadik lépés.
Igaz a helyettesítéses integrálás képlete az előzőekben szereplő környezet minden – nem feltétlenül nyílt – Borel-féle részhalmazára is. G lefedhető megszámlálható sok ilyen környezettel (például a racionális középpontúakkal). Ezekből az ismert eljárárással G-t előállíthatjuk megszámlálható sok diszjunkt olyan halmaz egyesítéseként, amelyek mindegyikében igaz a helyettesítéses integrálás képlete. Ezért igaz magára G-re is.

13.2. A helyettesítéses integrálás segítségével megmutathatjuk, hogy az N dimenziós Lebesgue-mérték invariáns olyan $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ lineáris leképezésekre – azaz $\lambda_N \circ \overset{-1}{L} = \lambda_N$ –, amelyekre $|\det L| = 1$. Ilyenek például a "forgatások" és a "tükrözések", vagyis a skalárszorzattartó leképezések.

A Lebesgue-mérték transzlációinvariáns is (ezt $N = 1$ esetére már eddig is tudtuk): ha $a \in \mathbb{R}^N$ és $L_a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $x \mapsto x - a$, akkor $\lambda \circ \overset{-1}{L_a} = \lambda$, vagyis ha $E \subset \mathbb{R}^N$ Lebesgue-mérhető, akkor $\lambda_N(a + E) = \lambda_N(E)$, ugyanis L_a folytonosan differenciálható és $\mathrm{D}L_a = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}$.

Érdekes kérdés, milyen más transzlációinvariáns mérték adható meg $\mathbb{R}^N$ Borel-halmazain.

Állítás *Ha μ nem azonosan nulla és nem azonosan végtelen transzlációinvariáns mérték $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$-en, akkor van olyan $\alpha \in \mathbb{R}^+$ hogy $\mu = \alpha\lambda_N$.*

Bizonyítás Van olyan $\displaystyle\times_{k=1}^{N}]a_k, b_k]$ tégla, amelynek a μ-mértéke véges és nem nulla; jelölje r ezt a számot. Eltoljuk ezt téglát a $-(a_1, \dots, a_N)$ vektorral, ugyanolyan mértékű téglát kapunk; ez a $c_k := b_k - a_k$ jelöléssel $\displaystyle\times_{k=1}^{N}]0, c_k]$. Toljuk most ezt el a $(c_1, 0, ..., 0)$ vektorral; a két tégla diszjunkt, uniójuk $]0, 2c_1] \times \displaystyle\times_{k=2}^{N}]0, c_k]$, amelynek a μ-mértéke $2r$. Ehhez hasonlóan kapjuk, hogy ha $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}$, akkor

$\mu\left(\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N}]0,n_kc_k]\right) = r\prod\limits_{k=1}^{N} n_k$. A $]0,c_1/2]\times\mathop{\times}\limits_{k=2}^{N}]0,c_k]$ téglát egyesítve a $(c_1/2,0,...,0)$ vektorral való eltoltjával megkapjuk a $\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N}]0,c_k]$ téglát; ezért könnyen jutunk arra, hogy ha $m_1,\dots,m_N\in\mathbb{N}$, akkor $\mu\left(\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N}]0,c_k/m_k]\right) = r\prod\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{m_k}$.

Mindezeket egybevetve $\mu\left(\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N}]0,p_kc_k]\right) = r\prod\limits_{k=1}^{N} p_k$, , ha $p_1,\dots,p_N$ pozitív racionális számok. A mérték monoton folytonossága miatt igaz lesz akkor is, ha p_k pozitív valós számok. Végülis tehát az

$$\alpha := \frac{r}{\prod\limits_{k=1}^{N} c_k}$$

jelöléssel

$$\mu\left(\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N}]0,x_k]\right) = \alpha\prod_{k=1}^{N} x_k = \alpha\lambda_N\left(\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N}]0,x_k]\right) \qquad (x_1,\dots,x_N\in\mathbb{R}^+).$$

Ebből mindkét mérték transzlációinvarianciája miatt ugyanilyen egyenlőség igaz minden alulról nyílt, felülről zárt téglára, amelyek félgyűrűt alkotnak és generálják a Borel-halmazokat. Ezért $\mu = \alpha\lambda_N$.

13.3. Tudjuk, hogy $a\in\mathbb{R}$ esetén $\mathbb{R}^{N-1}\times\{a\}$ – amely tulajdonképpen mérhető tégla – nulla Lebesgue-mértékű. Mivel bármely hipersík egy ilyennek az elforgatottja és eltoltja, minden hipersík $\mathbb{R}^N$-ben nulla Lebesgue-mértékű. Természetesen akkor minden egyenes, minden sík, miden $M<N$ dimenziós affin altér, mint hipersíkok részei, nulla Lebesgue-mértékűek. Ennél még többet is mondhatunk.

Állítás *Ha F M dimenziós $(0<M<N)$ részsokaság $\mathbb{R}^N$-ben, akkor F nulla Lebesgue-mértékű.*

Bizonyítás F minden pontjának van olyan U környezete, hogy megadható $K : U\to\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^{N-M}$ folytonosan differenciálható leképezés, amelynek a deriváltja mindenütt bijekció (azaz K az U koordinátázása), és $K[F\cap U]\subset\mathbb{R}^M\times\{0\}$ (Analízis IV.B.13.4.). Ezért, ha U véges mértékű (mindig korlátozódhatunk ilyenre), akkor

$$\lambda_N(F\cap U) = \int\limits_{\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^{N-M}} \chi_{F\cap U}(K^{-1}(\xi,\eta))|\det \mathrm{D}K(\xi,\eta)^{-1}|d\xi d\eta = 0$$

hiszen $\chi_{F\cap U} \circ K^{-1} = \chi_{K[F\cap U]}$.

F minden pontjának van egy olyan környezete, amelybe eső része F-nek nulla Lebesgue-mértékű; megszámlálható sok ilyen környezettel F lefedhető, ezért F maga is nulla Lebesgue-mértékű.

13.4. Igen sokszor jó hasznát vesszük az $\mathbb{R}^2$ polárkoordinátázásának és $\mathbb{R}^3$ gömbkoordinátázásának integrálok helyettesítéssel történő kiszámításához. Noha sem a polárkoordinátázás sem a gömbkoordinátázás értelmezési tartománya nem az egész $\mathbb{R}^2$ illetve $\mathbb{R}^3$, mindkettő csak egy nulla mértékű halmazt hagy ki. Ezért a helyettesítéses integrálás szempontjából lényegtelen, hogy az integrálandó függvény értelmezve van-e e koordinátázások értelmezési tartományán kívül is, és ha igen, hogyan; azaz végül is az egész $\mathbb{R}^2$ illetve $\mathbb{R}^3$ "helyettesítődik" így.

Szokásosan a koordinátázást K-val jelöljük, inverzét, a paramétertezést P-vel. Az előző állításban szereplő jelölésekkel $P = S$, $K = S^{-1}$.

A polárkordinátázásra

$$P : \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}^2, \quad (r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi),$$

$$\mathrm{D}P(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix},$$

tehát $\det \mathrm{D}P(r,\varphi) = r$, és így ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrálható, akkor

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x)dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi.$$

A gömbkoordinátázásra

$$P : \mathbb{R}^+ \times]0,\pi[\times]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}^3, \quad (r, \vartheta, \varphi) \mapsto (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta),$$

$$\mathrm{D}P(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\varphi\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix},$$

tehát $\det \mathrm{D}P(r,\vartheta,\varphi) = r^2\sin\vartheta$, és így, ha $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ integrálható, akkor

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)dx = \int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta) r^2 \sin\vartheta d\varphi d\vartheta dr.$$

Felhívjuk a figyelmet: ha egy függvény polár- vagy gömbkoordinátázásban a változók egyik sorrendjében integrálható, nem jelenti azt, hogy a függvény maga integrálható. Például a nullán kívül mindenütt értelmezett

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{y}{x^2 + y^2}$$

függvény nem integrálható, ellenben

$$\int_0^\infty \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r \sin \varphi}{r^2} r d\varphi \right) dr = 0.$$

Természetesen, ha a koordinátázott függvény abszolút értéke integrálható valamilyen sorrendben, akkor már maga a függvény is integrálható.

13.5. Feladatok

1. Számítsuk ki integrál-helyettesítéssel az alábbi síkidomok területét illetve testek térfogatát:

(i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2)^2 \leq 2xy\}$,

(ii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2)^2 \leq a^2x^2 - b^2y^2\} \quad (a > 0, b > 0)$,

(iii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \geq cz, x^4 + y^4 \leq a^2(x^2 + y^2), z \geq 0\} \quad (c > 0, a > 0)$,

(iv) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x^2 + y^2 > a|x|\} \quad (a > 0)$.

2. Bizonyítsuk be, hogy $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. (Útmutatás: $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2$. Alkalmazzunk polárkoordinátás helyettesítést.)

3. Írjuk fel a helyettesítéses integrálás formuláját hengerkoordinátákra vonatkozóan.

III. FÜGGVÉNYTEREK

14. Alapvető egyenlőtlenségek

14.1. Legyen adott az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-véges mértéktér és a $(V, |\ |)$ normált tér.

Véges dimenziós V-re értelmeztük már egy $f : X \to V$ függvény μ-integrálhatóságát, és láttuk, ez egyenértékű azzal, hogy f $\mathcal{A}(\mu) - \mathcal{B}(V)$-mérhető, más szóval μ-mérhető és $|f|$ μ-integrálható. Ez utóbbi két tulajdonság végtelen dimenzióra is minden további nélkül értelmes; ezért, ha eltekintünk attól, hogy a μ-integrálható függvények μ-integrálját is megadjuk, egyszerű lehetőség áll rendelkezésünkre a μ-integrálhatóság értelmezéséhez. Ezt a lehetőséget szélesebb körben használjuk ki.

Definíció *Legyen $1 \le p < \infty$. Az $f : X \to V$ függvényt **p-ik hatványon μ-integrálhatónak** nevezzük, ha*

(i) f μ-mérhető,

(ii) $|f|^p$ μ-integrálható.

A p-ik hatványon μ-integrálható, V értékű függvények összességét $L^p_\mu(X, V)$ jelöli.

Használjuk továbbá az

$$L^\infty_\mu(X, V) := \{f : X \to V \mid f \mu\text{-mérhető}, |f| \ \ \mu\text{-korlátos}\}$$

jelölést is.

A $V = \mathbb{K}$ esetben egyszerűen $L^p_\mu(X)$-et írunk, hacsak nem akarjuk valami miatt hangsúlyozni, hogy a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ illetve a $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esettel van dolgunk.

Minden $1 \le p \le \infty$ esetén $L^p_\mu(X, V)$ vektortér a szokásos műveletekkel. Ez nyilvánvaló, ha $p = \infty$; ha $p < \infty$ és $f, g \in L^p_\mu(X, V)$, akkor $|f + g|^p \le 2^p\, (|f|^p \vee |g|^p)$, ami a majorlási kritérium alapján azt eredményezi, hogy $f + g \in L^p_\mu(X, V)$.

Bevezetjük e függvénytereken a következő félnormákat:

- ha $f \in L^\infty_\mu(X, V)$, akkor $||f|_\infty := \mu\text{-ess sup}|f|$,

- ha $f \in L^p_\mu(X,V)$, akkor $||f|_p := \left(\int\limits_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \quad (p < \infty)$.

A félnorma arra az elnevezésre utal, hogy olyan tulajdonságú leképezés, mint a norma, azzal az egy kivétellel, hogy nem nulla elem félnormája is lehet nulla: ha $f \neq 0$ de $f = 0$ μ-m.m., akkor $||f|_p = 0$.

Világos, hogy minden $1 \leq p \leq \infty$ esetén $||f|_p \geq 0$, és ha $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor $||\alpha f|_p = |\alpha| \, ||f|_p$. Azt kell csak megmutatnunk, hogy a háromszögegyenlőtlenség is teljesül. Ezt két lépésben tesszük meg.

Mindenek előtt azonban jegyezzük meg, hogy ha $f \in L^p_\mu(X,V)$, akkor $|f| \in L^p_\mu(X)$ és $||f|_p = \Big\| |f| \Big|_p$.

14.2. Állítás *(**Hölder-egyenlőtlenség**) Legyen $1 \leq p \leq \infty$ és $1 \leq q \leq \infty$ olyan, hogy $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ha $f \in L^p_\mu(X,V)$ és $g \in L^q_\mu(X,V)$, akkor $|f|\,|g| \in L_\mu(X)$ és*

$$\int\limits_X |f|\,|g| \, d\mu \leq ||f|_p ||g|_q.$$

Bizonyítás Ha $p = \infty$ és $q = 1$ vagy $p = 1$ és $q = \infty$, akkor szembeötlően igaz az állítás.

Legyen tehát $p \neq \infty$, $q \neq \infty$, és zárjuk ki a triviális $||f|_p = 0$ vagy $||g|_q = 0$ esetet. Vezessük be az $\alpha := 1/p$, $\beta := 1/q$ jelölést. Az $\mathbb{R}^+_0 \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t^\alpha$ függvényről egyszerű differenciálszámítási eszközökkel megállapíthatjuk, hogy grafikonja mindenütt az érintője alatt halad. Ezt a tulajdonságot a $t = 1$ pontbeli érintőre felírva azt kapjuk, hogy $t^\alpha \leq \alpha t + \beta \quad (t \geq 0)$. Ebből a $t = \frac{u}{v}$ helyettesítéssel azt származtatjuk, hogy

$$u^\alpha v^\beta \leq \alpha u + \beta v \qquad (u > 0, v > 0).$$

Ezért a

$$\varphi := \left(\frac{|f|}{||f|_p}\right)^p, \qquad \psi := \left(\frac{|g|}{||g|_q}\right)^q$$

függvényekre

$$\varphi^\alpha \psi^\beta \leq \alpha\varphi + \beta\psi$$

teljesül. Minthogy itt a bal oldalon μ-mérhető függvény áll, a jobb oldalon pedig μ-integrálható, a bal is μ-integrálható. A fenti egyenlőtlenség mindkét oldalát integrálva μ szerint megkapjuk a kívánt egyenlőtlenséget, tekintetbe véve, hogy

$$\varphi^\alpha = \frac{|f|}{||f|_p}, \quad \psi^\beta = \frac{|g|}{||g|_q}, \quad \int\limits_X \varphi \, d\mu = \int\limits_X \psi \, d\mu = 1.$$

14.3. Az előbb felbukkant, és még sokszor fog szerepelni az $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ összefüggés. Érdemes felírni ennek néhány más alakját:

$$q=\frac{p}{p-1}, \qquad p=\frac{q}{q-1},$$

$$p-\frac{p}{q}=1 \quad (p\neq\infty), \qquad q-\frac{q}{p}=1 \quad (q\neq\infty).$$

Állítás *(**Minkowski-egyenlőtlenség**) Legyen $1\leq p\leq\infty$. Ha $f,g\in L^p_\mu(X,V)$, akkor*

$$||f+g|_p\leq ||f|_p+||g|_p.$$

Bizonyítás Ha $p=\infty$ vagy $p=1$, akkor az egyenlőtlenség nyilvánvaló. Ha $1<p<\infty$, akkor a p és a $q:=\dfrac{p}{p-1}$ számmal az $|f|+|g|\in L^p_\mu(X)$ és az $|f+g|^{p-1}\in L^q_\mu(X)$ függvényekre alkalmazhatjuk a Hölder-egyenlőtlenséget, és az

$$\left\| |f+g|^{p-1}\right|_q=(||f+g|_p)^{p/q}$$

összefüggéssel a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$(||f+g|_p)^p=\int\limits_X |f+g|^p\,d\mu=\int\limits_X |f+g|\;|f+g|^{p-1}\,d\mu\leq$$
$$\leq\int\limits_X (|f|+|g|)|f+g|^{p-1}\,d\mu\leq (||f|_p+||g|_p)\,(||f+g|_p)^{p/q},$$

amiből – a triviális $||f+g|_p=0$ esetet leszámítva – átosztással megkapjuk a kívánt eredményt.

14.4 Állítás *Ha μ véges mérték, $1\leq r<p\leq\infty$, akkor $L^p_\mu(X,V)\subset L^r_\mu(X,V)$ és*

$$||f|_r\leq\mu(X)^{1/r-1/p}||f|_p \qquad (f\in L^p_\mu(X,V).$$

Bizonyítás Ha $p=\infty$, akkor nyilván igaz az állítás. Ha $p\neq\infty$, akkor $a:=p/r$ és $b:=\dfrac{p}{p-r}=\dfrac{a}{a-1}$ olyan számok, amelyekkel alkalmazható a Hölder-egyenlőtlenség.

Legyen $f \in L^p_\mu(X,V)$. Ekkor $|f|^r \in L^a_\mu(X)$. A μ mérték végessége folytán $1 \in L^b_\mu(X)$. Ezért $1 \cdot |f|^r \in L_\mu(X)$, azaz $f \in L^r_\mu(X,V)$ és

$$\int_X 1 \cdot |f|^r \, d\mu \leq ||1|_b \Big\| |f|^r \Big|_a ,$$

amiből r-ik gyökvonással megkapjuk a bizonyítandó egyenlőséget, hiszen

$$||1|_b = \left(\int_X 1 \, d\mu \right)^{1-r/p} , \quad \Big\| |f|^r \Big|_a = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{r/p} .$$

14.5. Érdemes külön megemlíteni az $\mathbb{N}$-nek s-sel jelölt számláló mértékét. A meghonosodott jelölés szerint $l^p := L^p_s(\mathbb{N})$.

Ha $1 \leq p < \infty$, akkor l^p elemei azok az $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozatok, amelyek abszolút értékben a p-ik hatványon felösszegezhetők.

l^∞ a korlátos sorozatok összessége.

Mivel a számláló mérték szerint csak az üres halmaz nulla mértékű, a 14.1.-ben bevezetett félnorma itt valójában norma.

Ez a számláló mérték nem véges. Az előző pontban levezetett helyett itt épp ellenkező irányú tartalmazás igaz: ha $1 \leq r < p \leq \infty$, akkor $l^r \subset l^p$. Ugyanis egy r-ik hatványon felösszegezhető sorozat szükségképpen nulla-sorozat, tehát egyrészt korlátos ($p = \infty$), másrészt csak véges sok tagja lehet abszolút értékben nagyobb vagy egyenlő 1-nél, ezért tagjainak r-ik hatványa véges sok kivételével majorálja a p-ik hatványokat, így azok is felösszegezhetők.

14.6. Feladat

Mutassuk meg, hogy $1 \leq r < p \leq \infty$ esetén általában $L^p_\mu(X)$ és $L^r_\mu(X)$ egyike sem tartalmazza a másikát. (Találjunk olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amely a Lebesgue-mérték szerint integrálható de négyzetesen nem integrálható, illetve olyat, amely négyzetesen integrálható, de nem integrálható.)

15. Teljesség

15.1. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(V, |\ |)$ mint az előző fejezetben.

Nyilván $Z := \{f : X \to V \mid f = 0 \ \mu\text{-m.m.}\}$ lineáris altere $L^p_\mu(X,V)$-nek tetszőleges $1 \leq p \leq \infty$ esetén. Értelmezhetjük tehát az

$$\mathcal{L}^p_\mu(X,V) := L^p_\mu(X,V)/Z$$

faktorteret. Emlékeztetünk arra, mit is jelent ez. $\mathcal{L}^p_\mu(X,V)$ elemei a függvények olyan ekvivalencia-osztályai, amelyekben μ-m.m. egyenlő függvények vannak. Tehát minden $f \in L^p_\mu(X,V)$ meghatározza $\mathcal{L}^p_\mu(X,V)$ egy elemét (a saját ekvivalencia-osztályát), amely

$$\{g \in L^p_\mu(X,V) \mid g = f \ \mu\text{-m.m.}\}.$$

Jól ismert a vektorterek elméletéből, de azonnal ellenőrizhető is, hogy $\mathcal{L}^p_\mu(X,V)$ vektortér a komplexusműveletekkel. Más szóval, ha $F, G \in \mathcal{L}^p_\mu(X,V)$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor

$$F + G := \{f + g \mid f \in F, g \in G\}, \quad \alpha F := \{\alpha f \mid f \in F\}.$$

A nulla eleme ezeknek a vektortereknek épp a μ-m.m. nulla V értékű függvények összessége.

$\mathcal{L}^p_\mu(X,V)$-n normát értelmezünk a következőképpen:

$$||F||_p := ||f|^p \qquad (f \in F).$$

Az értelmezés jó: ha $f, g \in F$, akkor $f = g$ μ-m.m. és ezért $||f|_p = ||g|_p$.

Ha $||F||_p = 0$, akkor minden $f \in F$ esetén $||f|_p = 0$, azaz ha $p = \infty$, akkor μ-ess sup$|f| = 0$, ha $p < \infty$, akkor $\int\limits_X |f|^p \, d\mu = 0$; mindkettőből az adódik, hogy $f = 0$ μ-m.m., azaz $F = 0$.

Az $||\alpha F||_p = |\alpha| \, ||F||_p$ és az $||F+G||_p \le ||F||_p + ||G||_p$ tulajdonságok közvetlenül öröklődnek a félnormák hasonló tulajdonságaiból.

15.2. Állítás *(**Riesz–Fischer-tétel**) Ha $(V, |\ |)$ teljes, akkor minden $1 \le p \le \infty$ esetén $\left(\mathcal{L}^p_\mu(X,V), ||\ ||_p\right)$ teljes.*

Bizonyítás Legyen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat $\mathcal{L}^p_\mu(X,V)$-ben és $f_n \in F_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Ha $p = \infty$, akkor az

$$A_k := \{x \in X \mid f_k(x) > ||f_k|_\infty\} \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

$$B_{m,n} := \{x \in X \mid |f_m(x) - f_n(x)| > ||f_m - f_n|_\infty\} \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

halmazok mindegyike nulla μ-mértékű, így az uniójuk is nulla μ-mértékű. Ezen az unión kívül $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos függvényekből álló egyenletesen Cauchy-féle sorozat, amely a V teljessége miatt konvergens sorozat, ezért a határértéke μ-m.m. értelmezett korlátos f függvény. Egyszerűen belátható, hogy f ekvivalencia-osztálya $\mathcal{L}^\infty_\mu(X,V)$-ben az $n \mapsto F_n$ sorozat határértéke.

Ha $p \neq \infty$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik $i_n \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $j, k \geq i_n$ természetes számra $||F_j - F_k||_p \leq \frac{1}{2^n}$, speciálisan $||F_{i_{n+1}} - F_{i_n}||_p \leq \frac{1}{2^n}$, azaz

$$||f_{i_{n+1}} - f_{i_n}|_p = \left(\int_X |f_{i_{n+1}} - f_{i_n}|^p \, d\mu \right)^{1/p} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Bármely $N \in \mathbb{N}$ esetére definiáljuk a

$$g_N := \sum_{n=1}^{N} |f_{i_{n+1}} - f_{i_n}|$$

függvényt, amely nyilvánvalóan az $L^p_\mu(X)$ eleme, és

$$||g_N|_p \leq \sum_{n=1}^{N} ||f_{i_{n+1}} - f_{i_n}|_p \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \leq 1,$$

amiből

$$\int_X (g_N)^p \, d\mu \leq 1.$$

Mivel $N \mapsto (g_N)^p$ monoton növő μ-integrálható függvénysorozat, az előbbi egyenlőtlenség és B. Levi tétele alapján létezik μ-m.m. $\lim_N (g_N)^p$ és így $\lim_N g_N$ is, ami nem más, mint $\sum_{n \in \mathbb{N}} |f_{i_{n+1}} - f_{i_n}|$. Ez viszont maga után vonja, V teljessége miatt, hogy

$$\text{létezik } \mu\text{-m.m. } \sum_{n \in \mathbb{N}} (f_{i_{n+1}} - f_{i_n}) = \lim_n f_{i_n} =: f.$$

Azt kell már csak megmutatnunk, hogy f az $L^p_\mu(X, V)$ eleme, és ekvivalencia-osztálya, amelyet F-fel jelölünk, az $n \mapsto F_n$ sorozat határértéke.

Minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan n_ε és m_ε természetes szám, hogy ha $n > n_\varepsilon$ és $m > m_\varepsilon$, akkor $||F_n - F_{i_m}||_p < \varepsilon$, azaz

$$\int_X |f_n - f_{i_m}|^p \, d\mu < \varepsilon^p.$$

Fatou lemmája következtében minden $n > n_\varepsilon$ esetén $\lim_m |f_n - f_{i_m}|^p = |f_n - f|^p$ μ-integrálható, és

$$\int_X |f_n - f|^p \, d\mu \leq \varepsilon^p,$$

ami azt jelenti, hogy $f_n - f \in L^p_\mu(X,V)$, ezért $f = f_n - (f_n - f)$ is benne van $L^p_\mu(X,V)$-ben, és $||f_n - f|_p \leq \varepsilon$, azaz

$$||F_n - F||_p \leq \varepsilon \qquad \text{ha} \qquad n > n_\varepsilon. \blacksquare$$

A bizonyítás egy fontos mellékeredménnyel is járt. Ha $F_n \in \mathcal{L}^p_\mu(X,V)$ $F = \lim_n F_n$ és $f_n \in F_n$, $f \in F$, akkor nem biztos, hogy $f = \lim_n f_n$ μ-m.m., viszont van olyan $(f_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ részsorozat, amelyre $f = \lim_n f_{i_n}$ μ-m.m..

15.3. Állítás *Ha $\mathcal{R}$ olyan gyűrű, amely generálja $\mathcal{A}$-t, akkor a μ-integrálható $\mathbb{K}$ értékű $\mathcal{R}$-lépcsős függvények ekvivalencia-osztályai $1 \leq p < \infty$ esetén sűrűn vannak $\mathcal{L}^p_\mu(X,\mathbb{K})$-ban.*

Bizonyítás Világos, elég belátni, hogy ha $f \in L^p_\mu(X,\mathbb{K})$, akkor van olyan $n \mapsto \varphi_n$ $\mathbb{K}$ értékű $\mathcal{R}$-lépcsős függvény sorozat, amelyre $\lim_n ||f - \varphi_n|_p = 0$. Nyilván elég továbbá azt vennünk, amikor $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mert a $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ eset erre visszavezethető a függvények valós és képzetes részén keresztül. Végül elég azt tekintenünk, amikor $|f|^p \in P_\mu(X)$.

Ekkor van olyan nemnegatív, μ-integrálható, monoton növő $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{R}$-lépcsős függvény sorozat, hogy $|f|^p = \lim_n \psi_n$ μ-m.m..

Mivel f μ-mérhető, van olyan μ-integrálható $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{R}$-lépcsős függvény sorozat, hogy $f = \lim_n \xi_n$ μ-m.m..

Ekkor

$$\varphi_n := \left(\xi_n \wedge (\psi_n)^{1/p}\right) \vee \left(-(\psi_n)^{1/p}\right)$$

is μ-integrálható $\mathcal{R}$-lépcsős függvény, $\lim_n \varphi_n = f$ és $|f - \varphi_n|^p \leq 2^p|f|^p$, ezért Lebesgue tétele szerint

$$\lim_n \int_X |f - \varphi_n|^p \, d\mu = 0,$$

és ezt akartuk megmutatni. $\blacksquare$

$p = \infty$ esetére az állítás nem igaz még akkor sem, ha elhagyjuk az $\mathcal{R}$-lépcsős függvények μ-integrálhatóságának a követelményét. Ugyanis például a valós számok Lebesgue-mértéke esetén $1 \in L^\infty(\mathbb{R})$, és ha $\mathcal{R}$ a korlátos intervallumok gyűrűje, akkor minden φ $\mathcal{R}$-lépcsős függvényre $||1 - \varphi|_\infty = 1$.

Nyilvánvaló az állításból, hogy $1 \leq p < \infty$ esetén a μ-integrálható $\mathcal{A}$-lépcsős függvények ekvivalencia-osztályai sűrűn vannak $\mathcal{L}^p_\mu(X)$-ben. Az $\mathcal{A}$-lépsős függvények sűrűn vannak $\mathcal{L}^\infty_\mu(X)$-ben az 5.3. megjegyzése szerint.

15.4. Feladatok

1. Hogyan viszonylik a 15.3. állításhoz ez: $1 \leq p < \infty$ esetén l^p-ben a véges sorozatok sűrű lineáris alteret alkotnak?

2. Általánosítsuk a 14.3. állítást így: ha V véges dimenziós vektortér, $1 \leq p < \infty$, akkor a V értékű μ-integrálható $\mathcal{R}$-lépcsős függvények ekvivalencia-osztályai sűrűn vannak $\mathcal{L}^p_\mu(X, V)$-ben.

3. Bizonyítsuk be, hogy a folytonos függvények ekvivalencia-osztályai sűrűn vannak $\mathcal{L}^p([a, b])$-ben, ha $1 \leq p < \infty$. (Elég belátni, hogy ha $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ intervallum-lépcsős függvény, akkor van olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folytonos függvény sorozat, hogy $\lim\limits_n ||\varphi - f_n|_p = 0$, sőt elég φ helyett intervallum-karakterisztikus függvényt venni.)

Ezt az eredményt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha $C[a, b]$-t ellátjuk az $f \mapsto \left(\int\limits_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$ normával, e normált tér teljessé tétele $\mathcal{L}^p([a, b])$.

IV. VEKTORMÉRTÉKEK

16. A vektormértékek alaptulajdonságai

16.1. A mértékek fogalma nem csak a matematikában alapvetően fontos, hanem a fizikai alkalmazásokban is. Például egy test tömegeloszlását mértékkel tudjuk leírni: feltehetjük, hogy valamiképp meg tudjuk mérni fizikai terünk minden téglájában a benne levő tömegmennyiséget. Reprezentáljuk terünket $\mathbb{R}^3$-mal, a tömegmennyiségeket valós számokkal. Ekkor az előzőek szerint a téglákon értelmezett nem negatív értékű leképzés nyilván additív: véges sok diszjunkt téglából előálló tégla által tartalmazott tömeg mennyisége épp az egyes téglákban levő tömegmennyiségek összege. Talán nem túl nagy absztrakció, ha azt is feltesszük, hogy σ-additív is, azaz a tömegeloszlás mérték az egymással párhuzamos állású téglák félgyűrűjén.

Viszont a fizikában változó előjelű mennyiségek eloszlása is szóba jöhet: gondoljunk például arra, hogy a fizikai terünkben elhelyezkedő elektromos töltéseket akarjuk leírni; ekkor a téglákhoz valós – pozitív, nulla vagy negatív – számot rendelünk, attól függően, mennyi a téglában levő össztöltés.

Sőt elektromos vagy mágneses dipólusok eloszlását olyan módon írjuk le, hogy a téglákhoz vektorokat rendelünk: a téglában levő összdipólus értékét.

16.2. Definíció *Legyen $\mathcal{S}$ az X halmaz részhalmazaiból álló félgyűrű és $(V, \|\ \|)$ normált tér. Egy $m : \mathcal{S} \to V$ σ-additív leképezést, azaz amelyre $I_n \in \mathcal{S}$, $I_n \cap I_m = \emptyset$ $(n, m \in \mathbb{N}, n \neq m)$ és $\biguplus_{n\in\mathbb{N}} I_n \in \mathcal{S}$ esetén*

$$m\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} I_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(I_n)$$

*teljesül, V értékű **vektormértéknek** hívunk.*

Jegyezzük meg, hogy ha $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció, akkor $\biguplus_{n\in\mathbb{N}} I_{p(n)} = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} I_n$, ezért a fenti definícióban feltétlen konvergens sor összege szerepel.

$V = \mathbb{R}$ illetve $V = \mathbb{C}$ estén valós illetve komplex mértékről beszélünk. Az eddig tárgyalt véges mértékek speciális vektormértékek: olyanok, amelyeknek az értékei nem negatív valós számok. Olykor, ha ki akarjuk hangsúlyozni, hogy a korábban megismert mértékről van szó, pozitív mértéket mondunk.

A félgyűrűről az általa generált gyűrűre a vektormérték a mértékekre megismert elárással egyértelműen kiterjeszthető. Ezért a továbbiakban mindig úgy tekintjük, hogy a vektormérték egy $\mathcal{R}$ gyűrűn van értelmezve.

A korábbiakhoz hasonlóan egyszerűen származtathatjuk az m vektormértékre is a mértékekre már megismert alaptulajdonságokat:

(i) $m(\emptyset) = 0$,

(ii) m szubtraktív, azaz $E, F \in \mathcal{R}$, $F \subset E$ esetén $m(E \setminus F) = m(E) - m(F)$,

(iii) m additív, azaz $m\left(\biguplus\limits_{k=1}^{n} I_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} m(I_k)$,

(iv) m monoton folytonos, azaz ha $E_n, E \in \mathcal{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ és

– $E_n \subset E_{n+1}$, $\quad E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{R}$, akkor $m(E) = \lim\limits_{n} m(E_n)$,

– $E_n \supset E_{n+1}$, $\quad E = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{R}$, akkor $m(E) = \lim\limits_{n} m(E_n)$.

A vektormértékek monotonitásának természetesen nincs értelme általában, de még egy valós mérték sem feltétlenül monoton: $F \subset E$ nem vonja maga után, hogy $m(F)$ kisebb vagy egyenlő volna mint $m(E)$.

Ha m és n ugyanazon a gyűrűn értelmezett V értékű vektormérték és $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, akkor $\alpha m + \beta n$ is V értékű vektormérték.

Az m komplex mérték valós és képzetes része, $\mathrm{Re}\, m$ és $\mathrm{Im}\, m$ valós mértékek. Viszont, ha m_1 és m_2 ugyanazon a gyűrűn értelmezett valós mérték, akkor $m_1 + im_2$ komplex mérték.

Ha m V értékű vektormérték és $p \in V^*$ (azaz $p : V \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris leképezés), akkor $(p|m) := p \circ m$ $\mathbb{K}$ értékű mérték.

16.3. Lássunk példákat vektormértékekre!

(i) A legegyszerűbben így adhatunk meg vektormértéket: legyen μ véges mérték az $\mathcal{R}$ gyűrűn és v a V vektortér rögzített eleme; ekkor $v\mu := \mu v : \mathcal{R} \to V$, $E \mapsto \mu(E)v$ V értékű vektormérték.

(ii) Az előzőnél kevésbé triviálisan így járhatunk el: legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-véges mértéktér, V véges dimenziós vektortér. Ha $h : X \to V$ μ-mérhető leképezés, akkor

$$\mathcal{R}_{h\mu} := \{E \in \mathcal{A} \mid h \ \mu\text{-integrálható } E\text{-n}\}$$

gyűrű (sőt kvázi-σ-gyűrű, lásd 10.7.4.), és

$$h\mu : \mathcal{R}_{h\mu} \to V, \quad E \mapsto \int\limits_E h \, d\mu$$

V értékű vektormérték (a σ-additivitást ugyanúgy láthatjuk be, mint 9.4.-ben).

(iii) Legyen V egydimenziós irányított valós vektortér (azaz ki vannak jelölve V pozitív elemei, egy választott nem nulla elem pozitív számszorosai). Rendezzük V-t így: $a \leq b$ ha $b - a$ pozitív elem. Ezután értelmes V intervallumairól beszélni hasonló módon mint a valós számok esetén. Az alulról nyílt, felülről zárt intervallumok félgyűrűjén definiálhatjuk a V értékű λ_V Lebesgue-mértéket:

$$]a, b] \mapsto b - a.$$

(iv) Legyen V véges dimenziós irányított valós vektortér (azaz ki vannak jelölve a pozitív irányítású rendezett bázisok: egy választott rendezett bázisból pozitív determinánsú áttérési mátrixszal megkapható bázisok összessége). Legyen $(e_1, \dots, e_N)$ pozitívan irányított bázis. E bázisvektorok kifeszítette, alulról nyílt, felülről zárt parallelepipedonnak nevezzük az

$$T(\eta) := \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \eta_k e_k \;\middle|\; \alpha_k \in]0, 1], \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1 \right\} \qquad (\eta_1, \dots, \eta_N \in \mathbb{R}_0^+)$$

alakú halmazokat. Az üres halmaz és ezeknek a parallalelepipedonoknak az eltoltjai – az $x + T(\eta)$ alakú halmazok, ahol $x \in V$ – félgyűrűt alkotnak.

Definiáljuk ezen a félgyűrűn a $\bigwedge^{N} V$ értékű λ_V Lebesgue-mértéket így:

$$x + T(\eta) \mapsto \bigwedge^{N} \eta_k e_k = \left(\prod_{k=1}^{N} \eta_k \right) \bigwedge^{N} e_k. \qquad (*)$$

Jegyezzük meg, hogy $N = 1$ esetére ez megegyezik az (iii)-ben bevezetett vektormértékkel. Vegyük azt is észre, hogy $\bigwedge^{N} V$ egy dimenziós.

Próbáljuk meg kézzelfoghatóbbá tenni ezt a mértéket, hogy lássuk, miről is van szó tulajdonképpen.

Vegyük az adott bázis meghatározta $K : V \to \mathbb{R}^N$ koorinátázást és a neki megfelelő $P := K^{-1} : \mathbb{R}^N \to V$ paraméterezést (ez utóbbi az $\mathbb{R}^N$ standard bázisvektorait a V adott bázisvektoraiba képezi).

Mivel a V minden x elemére és E részhalmazára $\overset{-1}{P}(x + E) = P^{-1}x + \overset{-1}{P}(E)$, egyszerű tény, hogy $\lambda_N \circ \overset{-1}{P}$ eltolásinvariáns mérték a V Borel-halmazain. Mivel

$$\overset{-1}{P}(x + T(\eta)) = \mathop{\times}_{k=1}^{N} [\xi_k, \xi_k + \eta_k],$$

ahol $P(\xi_1, \dots, \xi_N) = x$, látjuk, hogy a szóbanforgó parallelepipedonokon

$$\lambda_V = \left(\lambda_N \circ \overset{-1}{P} \right) \bigwedge_{k=1}^{N} e_k,$$

ahol a jobb oldal az (i) példa szerint értendő. E formulával λ_V-t kiterjeszthetjük V korlátos Borel-halmazaira, ugyanis azokon $\lambda_N \circ \overset{-1}{P}$ véges értéket vesz fel.

Ha most $d_1, \dots, d_N$ egy másik bázis és R az ennek megfelelő paraméterezés, akkor $\lambda_N \circ \overset{-1}{R}$ is eltolás invariáns mérték a V Borel-halmazain. Ezért $(\lambda_N \circ \overset{-1}{R}) \circ \overset{-1}{K}$ eltolás invariáns mérték $\mathbb{R}^N$-en, tehát van olyan $\alpha \in \mathbb{R}^+$, hogy $\lambda_N = \alpha(\lambda_N \circ \overset{-1}{R}) \circ \overset{-1}{K} = \lambda_N \circ (K \circ \overset{-1}{R})$. azaz $\lambda_N \circ \overset{-1}{R} = \alpha(\lambda_N \circ \overset{-1}{P})$.

A helyettesítéses integrálás formulája szerint $\alpha = |\det(K \circ R)|$. Lineáris algebrából azt is tudjuk, hogy $\bigwedge_{k=1}^{N} d_k = \det(K \circ R) \bigwedge_{k=1}^{N} e_k$. Ezért a V korlátos Borel-halmazain

$$\left(\lambda_N \circ \overset{-1}{R}\right) \bigwedge_{k=1}^{N} d_k = \operatorname{sign}\left(\det(K \circ R)\right) \left(\lambda_N \circ \overset{-1}{P}\right) \bigwedge_{k=1}^{N} e_k.$$

Ha a két bázis azonos irányítású, akkor

$$\left(\lambda_N \circ \overset{-1}{R}\right) \bigwedge_{k=1}^{N} d_k = \left(\lambda_N \circ \overset{-1}{P}\right) \bigwedge_{k=1}^{N} e_k.$$

Tehát: egy bázis által alkototott alulról nyílt felülről zárt parallelepipedonok félgyűrűjén a $(*)$ formulával értelmezett vektormérték előjel erejéig egyértelmű eltolásinvaráns vektormértéket határoz meg a V korlátos Borel-halmazain. Ha a vektortér irányított, akkor a pozitív bázisok akármelyike ugyanazt az eltolásinvariáns $\overset{N}{\bigwedge} V$ értékű vektormértéket szolgáltatja.

Más szóval, a V irányított valós vektortéren van egy $\overset{N}{\bigwedge} V$ értékű, kitüntetett eltolásinvariáns vektormérték. (Persze ennek számszorosai is eltolásinvariánsok, de ez "jobb, mint a többi"; ezt $N = 1$ esetére láthatjuk igen jól: az $]a, b]$ intervallumhoz rendelhetnénk az $\alpha(b - a)$ értéket is, ahol $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges; ez azonban nem volna "természetes".)

Jegyezzük meg, hogy a gondolatmenetünk mellékterméke az, hogy V-n is van és számszorzó erejéig egyértelmű a pozitív eltolásinvariáns mérték.

(v) Ha (V, B, h) pszeudoeuklideszi tér (Analízis II.29.), és mind V, mind B irányított, akkor $\bigwedge_{k=1}^{N} V$ azonosítható $\bigotimes_{k=1}^{N} B$-vel úgy, hogy egy $(e_1, \dots, e_N)$ pozitívan irányított, a B pozitív a elemére normált h-ortogonális bázis esetén $\bigwedge_{k=1}^{N} e_k \equiv \bigotimes_{k=1}^{N} a$. Ezzel a kanonikus vektormérték V-n $\bigotimes_{k=1}^{N} B$ értékű lesz. Ez az, amit megszoktunk a "fizikai terünkben", amikor az a élhosszúságú kocka térfogatául a^3-t választjuk.

Érdemes megemlíteni, hogy ha $(v_1, \dots, v_N)$ akármilyen pozitívan irányított bázis, akkor a fenti azonosításban

$$\bigwedge_{k=1}^{N} v_k \equiv \sqrt{\det\{v_i \cdot v_k \mid i, k = 1, \dots, N\}},$$

ahol a szokásos pontszorzást írtuk h helyett. Ugyanis ha $A : V \to V$ az a lineáris bijekció, amelyet $Ae_k := v_k \quad k = 1, \dots, N$ határoz meg, akkor $\bigwedge_{k=1}^{N} v_k = \det A \bigwedge_{k=1}^{N}$ és

$$0 < \det A = \det \left\{ \frac{e_j \cdot v_k}{e_j \cdot e_j} \mid i, k = 1, \dots, N \right\},$$

$$(\det A)^2 = \det \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{e_j \cdot e_j}{v_i \cdot e_j} \frac{e_j \cdot v_k}{e_j \cdot e_j} \;\middle|\; i, k = 1 \dots, N \right\} = \det\{v_i \cdot v_k \mid i, k = 1, \dots, N\}.$$

16.4. Definíció *Az $m : \mathcal{R} \to V$ vektormérték* ***variációja*** *az*

$$|m| : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\},$$
$$E \mapsto \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} \|m(E_k)\| \;\middle|\; E_1, \dots, E_n \in \mathcal{R}, \biguplus_{k=1}^{n} E_k = E, n \in \mathbb{N} \right\}$$

leképezés.

A következő egyszerű összefüggések igazak minden $E \in \mathcal{R}$ esetén:
(i) $|m|(\emptyset) = 0$,
(ii) $\|m(E)\| \le |m|(E)$,
(iii) $|m|(F) \le |m|(E)$ ha $F \in \mathcal{R}$, $F \subset E$,
(iv) $|m|(E) = 0$ pontosan akkor, ha $m(F) = 0$ minden $F \in \mathcal{R}$, $F \subset E$ esetén.

16.5. A vektormértékek variációjához kapcsolódóan érdemes bevezetni a következő fogalmat: az $\mathcal{R}$-beli E halmaz **felosztásán** olyan véges sok, diszjunkt $\mathcal{R}$-beli halmazt értünk, amelyek uniója E.

Állítás *Az $m : \mathcal{R} \to V$ vektormérték variációja mérték $\mathcal{R}$-en.*

Bizonyítás Legyen $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathcal{R}$-beli diszjunkt halmazsorozat, amelynek az uniója is $\mathcal{R}$-ben van.

(i) Megmutatjuk, hogy

$$|m| \left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n \right) \ge \sum_{n\in\mathbb{N}} |m|(E_n).$$

Legyen E és F diszjunkt halmaz $\mathcal{R}$-ben. Ha $A_1, \dots, A_m$ és $B_1, \dots, B_n$ az E illetve az F felosztása (és ugye senki se keveri össze az itteni m indexet az m vektormértékkel), akkor $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n$ az $E \uplus F$ felosztása, ezért

$$\sum_{i=1}^{m} \|m(A_i)\| + \sum_{k=1}^{n} \|m(B_k)\| \leq |m|(E \uplus F).$$

Rögzítve az $A_1, \dots, A_m$ halmazokat és véve a szuprémumot az összes lehetséges $B_1, \dots, B_n$ halmazokra, majd véve a szuprémumot az összes lehetséges $A_1, \dots, A_m$ halmazokra, azt kapjuk, hogy

$$|m|(E) + |m|(F) \leq |m|(E \uplus F).$$

Ebből indukcióval arra jutunk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} |m|(E_k) \leq |m| \left(\biguplus_{k=1}^{n} E_k \right) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Az $|m|$ monotonitása miatt viszont

$$\sum_{k=1}^{n} |m|(E_k) \leq |m| \left(\biguplus_{k \in \mathbb{N}} E_k \right)$$

adódik, amiből határátmenettel származtathatjuk a kívánt egyenlőtlenséget.

(ii) Megmutatjuk, hogy

$$|m| \left(\biguplus_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |m|(E_n).$$

Legyen $A_1, \dots, A_m$ az $\biguplus_{n \in \mathbb{N}} E_n$ felosztása. Ekkor minden n-re $(E_n \cap A_i)_{i=1,\dots,m}$ $\mathcal{R}$-beli diszjunkt halmazrendszer E_n-ben, és minden i-re $\biguplus_{n \in \mathbb{N}} (E_n \cap A_i) = A_i$. Ezért

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \|m(A_i)\| &= \sum_{i=1}^{m} \left\| m \left(\biguplus_{n \in \mathbb{N}} (E_n \cap A_i) \right) \right\| = \sum_{i=1}^{m} \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} m(E_n \cap A_i) \right\| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{n \in \mathbb{N}} \|m(E_n \cap A_i)\| = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{m} \|m(E_n \cap A_i)\| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |m|(E_n), \end{aligned}$$

amiből, véve a bal oldal szuprémumát a lehetséges $A_1, \dots, A_m$ halmazokra, megkapjuk a kívánt egyenlőtlenséget.

16.6. Vizsgáljuk meg a 16.3.-ban ismertetett vektormértékek variációját!

(i) Ha μ mérték és $v \in V$, akkor nyilvánvaló a $|v\mu| = \|v\|\mu$ egyenlőség.

(ii) Ha μ mérték és $h : X \to V$ μ-mérhető függvény, akkor a szokásos $\|h\| : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|h(x)\|$ jelöléssel $|h\mu| \subset \|h\|\mu$, ahol a tartalmazás a leképezésekkel kapcsolatban ismert foglamat jelöli: a bal oldal értelmezési tartománya része a jobb oldalénak, és a két leképezés egyenlő a szűkebb tartományon. Ugyanis $|h\mu|$ csak azokra a halmazokra van értelmezve, amelyeken h μ-integrálható; $\|h\|\mu$ viszont minden mérhető halmazra értelmezve van: ahol h nem μ-integrálható, ott a végtelen értéket veszi fel (lásd 9.4.).

Az egyszerűbb írásmód kedvéért jelentse most $\|h\|\mu$ az $\mathcal{R}_{h\mu}$-re való leszűkítést. Azt kell tehát bebizonyítanunk, hogy $|h\mu| = \|h\|\mu$.

A $|h\mu| \leq \|h\|\mu$ egyenlőtlenség egyszerű: ha $E_1, \dots, E_n$ az $E \in \mathcal{R}_{h\mu}$ felosztása, akkor

$$\sum_{k=1}^{n} \|(h\mu)(E_k)\| = \sum_{k=1}^{n} \left\| \int_{E_k} h \, d\mu \right\| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{E_k} \|h\| \, d\mu = \int_{E} \|h\| \, d\mu.$$

A jobb oldalon $(\|h\|\mu(E)$ áll, a bal oldal szuprémuma a lehetséges $E_1, \dots, E_n$ halmazokara adja $|h\mu|(E)$-t.

Az ellenkező irányú egyenlőtlenség bizonyításához vegyük először észre, hogy az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy h μ-integrálható, hiszen úgyis csak olyan halmazokra korlátozódunk, amelyeken h μ-integrálható. E feltétellel $\mathcal{R}_{h\mu} = \mathcal{A}$.

Ha $\varphi := \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \chi_{F_k}$ V értékű, μ-integrálható $\mathcal{A}$-lépcsős függvény, akkor minden $E \in \mathcal{A}$ esetén $\biguplus\limits_{k=1}^{n} (E \cap F_k) \subset E$, ezért

$$|(\varphi\mu)| \geq \sum_{k=1}^{n} \|(\varphi\mu)(E \cap F_k)\| = \sum_{k=1}^{n} \left\| \int_{E \cap F_k} \varphi \, d\mu \right\| = \sum_{k=1}^{n} \|c_k\|\mu(E \cap F_k)\| =$$
$$= (\|\varphi\|\mu)(E).$$

Tehát $\varphi : X \to V$ μ-integrálható $\mathcal{A}$-lépcsős függvényre $|\varphi\mu| = \|\varphi\|\mu$.

Ezután megmutatjuk, hogy ha f és g V értékű μ-integrálható függvények, akkor

$$\Big| |f\mu| - |g\mu| \Big| \leq \|f - g\|\mu. \tag{$*$}$$

Ugyanis rögzített $E \in \mathcal{A}$ esetén minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $E_1, \dots, E_n$ felosztása E-nek, hogy

$$|f\mu|(R) - \sum_{k=1}^{n} \|(f\mu)(E_k)\| < \varepsilon, \quad |g\mu|(R) - \sum_{k=1}^{n} \|(g\mu)(E_k)\| < \varepsilon.$$

Továbbá

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\|(f\mu)(E_k)\| - \sum_{k=1}^{n}\|(g\mu)(E_k)\|\right| \le \sum_{k=1}^{n}\left|\|(f\mu)(E_k)\| - \|(g\mu)(E_k)\|\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n}\|(f\mu)(E_k) - (g\mu)(E_k)\| = \sum_{k=1}^{n}\left\|\int_{E_k}(f-g)\ d\mu\right\| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n}\int_{E_k}\|f-g\|\ d\mu = \int_{E}\|f-g\|\ d\mu,$$

ezért az alábbi egyenlőtlenség bal oldalában a fentiekben szereplő mennyiségek hozzáadásával és kivonásával és a háromszög-egyenlőtlenséggel azt kapjuk, hogy

$$\Big||f\mu|(E) - |g\mu|(E)\Big| \le 2\varepsilon + (\|f-g\|)(E).$$

Mivel ez minden ε-ra igaz, igaz a kívánt egyenlőtlenség is.

Legyen most $n \mapsto \varphi_n$ olyan V értékű, μ-integrálható $\mathcal{A}$-lépcsős függvény sorozat, hogy $\lim_n \varphi_n = h$ és $|\varphi_n| \le |h|$ minden minden n-re (lásd .....?). Minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy ha $n > n_\varepsilon$, akkor $\int_X \|h-\varphi_n\|\ d\mu < \varepsilon$; még inkább igaz, hogy $\int_E \|h-\varphi_n\|\ d\mu < \varepsilon$. Ezért $(*)$ alapján

$$\Big||h\mu|(E) - |\varphi\mu|(E)\Big| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad n > n_\varepsilon,$$

azaz

$$|h\mu|(E) = \lim_n |\varphi_n\mu|(E) = \lim_n(\|\varphi_n\|\mu)(E) = \lim_n \int_E \|\varphi_n\|\ d\mu =$$

$$= \int_E \|h\|\ d\mu = (\|h\|\mu)(E).$$

16.8. Feladatok

1. Legyen V az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korlátos mérhető függvények vektortere, amelyet az $\|f\| := \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$ normával látunk el. Vektormérték-e a $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \to V$, $E \mapsto \chi_E$ leképezés?

2. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-véges mérték tér. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{A} \to L^\mu(X)$, $E \mapsto \{f|\ f = \chi_E\ \mu\text{-m.m.}\}$ vektormérték. (Emlékezzünk, hogy $L^\mu(X)$ egy eleme

olyan μ-integrálható függvények osztálya, amelyek μ-majdnem mindenütt egyenlők, és egy ilyen elem normája egy a függvényosztályhoz tartozó függvény abszolút értékének az integrálja μ szerint.) Mi ennek a vektormértéknek a variációja?

3. Ha m és n V értékű vektormérték ugyanazon a gyűrűn, $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor $|m+n| \leq |m| + |n|$ és $|\alpha m| = |\alpha|\,|m|$.

4. Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ folytonosan differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy az alulról nyílt, felülről zárt intervallumok félgyűrűjén $\lambda_g(]a,b]) := g(b)-g(a)$ komplex mérték. Mi ennek a variációja? (λ_g-nek kiterjesztése a 16.3.(ii) szerint értelmezett $g'\lambda$ komplex mérték.)

5. Ha m vektormérték az $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ gyűrűn és $T : Y \to X$ leképezés, akkor $m \circ \overset{-1}{T}$ vektormérték a $\{B \in \mathcal{P}(Y) \mid \overset{-1}{T}(B) \in \mathcal{R}\}$ gyűrűn. Mutassuk meg, hogy $|m \circ \overset{-1}{T}| = |m| \circ \overset{-1}{T}$.

6. Legyen $(\mathsf{X}, \mathcal{A})$ és $(Y, \mathcal{B})$ mérhető tér és $T : X \to Y$ mérhető leképezés. Ha m vektormérték egy $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ gyűrűn, akkor $m \circ \overset{-1}{T}$ vektormérték a $\{B \in \mathcal{B} \mid \overset{-1}{T}(B) \in \mathcal{R}\}$ gyűrűn. Ekkor $|m \circ \overset{-1}{T}| \leq |m| \circ \overset{-1}{T}$, és ha minden $E \in \mathcal{R}$ esetén van olyan $B \in \mathcal{B}$, hogy $E = \overset{-1}{T}(B)$ – például ha T bijekció –, akkor egyenlőség áll.

Vessük össze ezt a feladatot az előzővel!

17. Vektormértékek kiterjesztése

17.1. Az előző fejezetben láttuk, hogy az eltolásinvariáns vektormérték nem értelmezhető az összes Borel-halmazon. Egy gyűrűn értelmezett teljesen σ-véges mérték kiterjeszthető a gyűrű generálta σ-gyűrűre. Ez nem lesz igaz vektormértékekre; az okozza a nehézséget, hogy vektormérték nem vehet fel végtelen értéket.

Most arra keresünk választ, meddig terjeszthető ki egy gyűrűn értelmezett vektormérték. Valós értékű mértékek vizsgálatával kezdjük.

17.2. Definíció *Az $\mathcal{R}$ gyűrűn adott m valós mérték* ***pozitív*** *illetve* ***negatív*** *része*

$$m^+ := \frac{|m|+m}{2}, \qquad m^- := \frac{|m|-m}{2}.$$

A 16.4.(ii) alapján nyilvánvaló a következő:

Állítás *m^+ és m^- az $\mathcal{R}$-en adott pozitív mérték, $m \le m^+ \le |m|$, $m^- \le |m|$, és*

$$|m| = m^+ + m^-,$$

továbbá, ha $|m|$ véges, akkor

$$m = m^+ - m^-.$$

Ha $|m|$ nem véges, akkor valamely halmazon m^+ és m^- a végtelen értéket veszi fel, és így nincs értelme a fenti különbségnek.

Tehát minden véges variációjú valós mérték két pozitív mérték különbségeként áll elő. Az előállítás nem egyértelmű: ha ν véges pozitív mérték, akkor $m = (m^+ + \nu) - (m^- + \nu)$. Viszont egyértelmű, ha a variációra vonatkozó fenti egyenlőséget is megköveteljük.

17.3. Ha az $\mathcal{R}$ gyűrűn értelmezett m valós mérték variációja teljesen σ-véges, akkor az $m^+ \le |m|$ és $m^- \le |m|$ összefüggések miatt m^+ és m^- is teljesen σ-véges. Ekkor tehát mind e három mérték egyértelműen kiterjeszthető σ-véges mértékké az $\mathcal{R}$ generálta σ-algebrára. Most ideiglenesen a kiterjesztéseket felülhúzással jelölve, az egyértelműség miatt, érvényben marad az $\overline{|m|} = \overline{m^+} + \overline{m^-}$ összefüggés. Maga az m mérték nem feltétlenül terjeszthető ki (esetleg kiterjeszthető, de nem az egész σ-algebrára), hiszen az $\overline{m^+} - \overline{m^-}$ formula az előbb is említett probléma miatt nem szükségképpen értelmes.

Ha $|m|$ teljesen σ-véges és véges (vagyis az $\mathcal{R}$ gyűrű minden E elemére $|m|(E) < \infty$, akkor az m-**véges halmazok** összessége,

$$\mathcal{R}_m := \{E \in \sigma(\mathcal{R}) \mid \overline{|m|}(E) < \infty\}$$

olyan kvázi-σ-gyűrű, amely tartalmazza $\mathcal{R}$-et, és erre m kiterjeszthető az $\overline{m} := \overline{m^+} - \overline{m^-}$ formulával.

17.4. Definíció *Legyen m az $\mathcal{R}$ gyűrűn értelmezett valós mérték. Azt mondjuk, hogy $E \in \mathcal{R}$ m-**pozitív** (m-**negatív**, m-**nulla**), ha minden $F \in \mathcal{R}$, $F \subset E$ esetén $m(F) \ge 0$ ($m(F) \le 0, m(F) = 0$).*

Egyszerű tények a következők:

- Egy halmaz pontosan akkor m-pozitív és m-negatív egyszerre, ha m-nulla.
- E pontosan akkor m-nulla, ha $|m|(E) = 0$.
- Ha E m-pozitív, akkor m leszűkítése az $E \cap \mathcal{R}$ gyűrűre pozitív mérték.
- m-pozitív (m-negatív, m-nulla) halmaz minden $\mathcal{R}$-beli részhalmaza m-pozitív (m-negatív, m-nulla).
- Ha E_n ($n \in \mathbb{N}$) m-pozitív (m-negatív, m-nulla) és $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{R}$, akkor ez utóbbi is m-pozitív (m-negatív, m-nulla). Ez nyilvánvaló, ha az E_n-ek diszjunktak;

ha nem azok, az ismert eljárással megadhatók F_n diszjunkt halmazok $\mathcal{R}$-ben úgy, hogy $F_n \subset E_n$ és $\biguplus_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

Állítás *Az $\mathcal{R}$ bármely E elemére a következők egyenértékűek:*
(i) E m-pozitív,
(ii) $|m|(E) = m(E)$,
(iii) $m^+(E) = m(E)$,
(iv) $m^-(E) = 0$.

Bizonyítás A variáció definíciójából rögtön adódik, hogy (i) maga után vonja (ii)-t, (ii)-ből a (iii) a 17.2. állításban szereplő egyenlőtlenség alapján következik, a pozitív és negatív rész definíciója szerint (iii) rögtön szolgáltatja (iv)-t. Ha viszont $m^-(E) = 0$, akkor minden $F \in \mathcal{R}$, $F \subset E$ esetén $m^-(F) = 0$, azaz $m(F) = |m|(F) \geq 0$, és így E m-pozitív. ■

Világos, hogy ezek is egyenértékűek:
(i) E m-negatív,
(ii) $|m|(E) = -m(E)$,
(iii) $m^-(E) = -m(E)$,
(iv) $m^+(E) = 0$.

17.5. Ne tévedjünk: $m(E) > 0$ még nem jelenti azt, hogy E m-pozitív. Azt viszont igen – legalábbis bizonyos feltételek mellett –, hogy tartalmaz m-pozitív halmazt.

Állítás *Ha m az $\mathcal{R}$ kvázi-σ-gyűrűn értelmezett valós mérték, és $E \in \mathcal{R}$ olyan, hogy $m(E) > 0$, akkor van olyan $P \in \mathcal{R}$, $P \subset E$, amely m-pozitív és $m(P) > 0$.*

Bizonyítás A következőkben minden tekintetbe vett halmaz az $\mathcal{R}$ eleme, anélkül, hogy ezt mindig külön mondanánk.

Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, vagyis az E minden részhalmaza nem m-pozitív vagy nulla m-mértékű. Ekkor maga E is ilyen, tehát – lévén nem nulla m-mértékű – van negatív m-mértékű részhalmaza. Legyen

$$k_1 := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \text{ létezik } H \subset E, m(H) < -1/k\}.$$

Van tehát olyan $H_1 \subset E$, amelyre $m(H_1) < -1/k_1$ és minden $H \subset E \setminus H_1$ esetén $m(H) \geq -1/(k_1 + 1)$, továbbá

$$m(E \setminus H_1) = m(E) - m(H_1) > m(E) + 1/k_1 > 0.$$

$E \setminus H_1$ az E részhalmaza, nem nulla m-mértékű, ezért a feltételezésünk szerint van negatív m-mértékű részhalmaza. Legyen

$$k_2 := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \text{ létezik } H \subset E \setminus H_1, m(H) < -1/k\}.$$

Van tehát olyan $H_2 \subset E \setminus H_1$, amelyre $m(H_2) < -1/k_2$ és minden $H \subset (E \setminus H_1) \setminus H_2$ esetén $m(H) \geq -1/(k_2+1)$, továbbá

$$m(E \setminus (H_1 \cup H_2) > m(E) + 1/k_1 + 1/k_2 > 0.$$

Tovább folytatva ezt az eljárást, minden $n \in \mathbb{N}$ számhoz találhatunk olyan H_n halmazt és k_n pozitív egész számot, hogy

$$H_n \subset E \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} H_k, \quad m(H_n) < -1/(k_n+1),$$

és minden $H \subset \left(E \setminus \biguplus_{k=1}^{n} H_k\right)$ esetén $m(H) \geq -1/k_n$, továbbá

$$m\left(E \setminus \biguplus_{k=1}^{n} H_k\right) > m(E) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1} k_n > 0.$$

A $H_0 := \biguplus_{n\in\mathbb{N}} H_n$ halmaz benne van $\mathcal{R}$-ben, hiszen minden H_n az E részhalmaza, és $\mathcal{R}$ kvázi-σ-gyűrű. Persze H_0 is az E részhalmaza.

Mivel

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{k_n} \leq -\sum_{n\in\mathbb{N}} m(H_n) = -m(H_0) < \infty,$$

az $n \mapsto 1/k_n$ sorozat felösszegezhető, így $\lim\limits_{n} 1/k_n = 0$.

Ezért, ha $H \subset E \setminus H_0$, azaz minden n-re $H \subset \left(E \setminus \biguplus_{k=1}^{n} H_k\right)$, akkor $m(H) \geq -1/(k_n+1)$ minden n-re, így $m(H) \geq 0$. Más szóval $E \setminus H_0$ m-pozitív. Feltételezésünk szerint ekkor nulla m-mértékűnek kell lennie, viszont

$$m(E \setminus H_0) \geq m(E) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{k_n} > 0.$$

Ez az ellentmondás tarthatlanná teszi az állításunkkal ellentétes feltételezést.

17.6. Állítás ***(Hahn-féle felbontás)*** *Ha m az $\mathcal{R}$ kvázi-σ-gyűrűn értelmezett valós mérték, akkor minden $E \in \mathcal{R}$ esetén létezik $E^+, E^- \in \mathcal{R}$ úgy, hogy $E^+ \cap E^- = \emptyset$, $E^+ \cup E^- = E$, és E^+ m-pozitív, E^- m-negatív.*

Bizonyítás Legyen

$$\alpha := \sup\{m(F) \mid F \subset E, F \text{ } m\text{-pozitív}\}.$$

Van olyan m-pozitív $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat, amelyre $F_n \subset F_{n+1}$ és $\alpha = \lim_n m(F_n)$ teljesül. Mivel minden n-re $F_n \subset E$, $E^+ := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ is a kvázi-σ-gyűrű eleme, és m-pozitív; a mérték monoton folytonossága miatt $\alpha = m(E^+)$. Megmutatjuk, hogy $E^- := E \setminus E^+$ m-negatív.

Ha ugyanis nem az volna, akkor volna olyan $F \subset E^-$ halmaz, amelyre $m(F) > 0$ teljesülne; az előző állítás szerint viszont ekkor volna olyan m-pozitív $R \subset F$, amelyre $m(R) > 0$. Ez azonban lehetetlen, mert akkor $R \uplus E^+$ olyan m-pozitív halmaz volna, amelynek m-mértéke nagyobb volna α-nál. ∎

Az (E^+, E^-) pár az E **Hahn-felbontása** m szerint.

A Hahn-felbontás általában nem egyértelmű; ha azonban (A^+, A^-) is az E-nek m szerinti Hahn-felbontása, akkor $(E^+ \setminus A^+) \cup (A^+ \setminus E^+) = (E^- \setminus A^-) \cup (A^- \setminus E^-)$ m-nulla halmaz. Ez abból adódik, hogy például $E^+ \setminus A^+ = E^+ \cap A^-$ egyben m-pozitív (E^+ része) és m-negatív (A^- része) halmaz is.

Ha m σ-algebrán van értelmezve, akkor maga az X alaphalmaznak is van (X^+, X^-) Hahn-felbontása, és ekkor bármely E mérhető halmazra $E^+ = E \cap X^+$, $E^- = E \cap X^-$.

17.7. Állítás *Legyen m az $\mathcal{R}$ kvázi-σ-gyűrűn értelmezett valós mérték. Ekkor minden $E \in \mathcal{R}$ esetén*

(i) $m^+(E) = m(E^+)$, $m^-(E) = -m(E^-)$, ahol (E^+, E^-) az E Hahn-felbontása,

(ii) $|m|(E) < \infty$.

Bizonyítás (i) A 17.4-ben mondottak szerint m-pozitív halmazokon m^+ és m megegyezik, m-negatív halmazokon m^+ nulla. Így minden $E \in \mathcal{R}$ esetén $m^+(E) = m^+(E^+ \uplus E^-) = m^+(E^+) + m^+(E^-) = m^+(E^+) = m(E^+)$, és teljesen hasonlóan láthatjuk be a másik egyenlőséget is.

(ii) $|m|(E) = m^+(E) + m^-(E) = m(E^+) - m(E^-) < \infty$. ∎

Az (ii)-beli összefüggést szavakban így is megfogalmazhatjuk: kvázi-σ-gyűrűn értelmezett valós mérték variációja véges.

17.8. Legyen m komplex mérték az $\mathcal{R}$ gyűrűn. Könnyű belátni, hogy

$$|\mathrm{Re}m| \le |m|, \quad \text{és} \quad |\mathrm{Im}m| \le |m|,$$

valamint

$$|m| \le |\mathrm{Re}m| + |\mathrm{Im}m|.$$

Tehát $|m|$ pontosan akkor teljesen σ-véges, illetve véges, ha $\mathrm{Re}m$ és $\mathrm{Im}m$ ilyen. Ezért a komplex mértékek kiterjesztéséről értelemszerűen mindent elmondhatunk, amit a valós mértékek kiterjesztéséről:

(i) Ha az $\mathcal{R}$ gyűrűn értelmezett m komplex mérték variácója teljesen σ-véges és véges, akkor a mérték egyértelműen kiterjeszthető az m-véges halmazok

$$\mathcal{R}_m := \{E \in \sigma(\mathcal{R}) \mid \overline{|m|}(E) < \infty\}$$

kvázi-σ-gyűrűjére,

(ii) kvázi-σ-gyűrűn értelmezett komplex mérték variációja véges. Egy fontos fogalom bevezetésével zárjuk ezt a részt.

Definíció *Egy metrikus tér kompakt halmazai által generált kvázi-σ-gyűrűn (a Baire-féle kvázi-σ-gyűrűn) értelmezett komplex mértéket* ***Radon-mértéknek*** *nevezünk.*

Ha m Radon-mérték, akkor $|m|$ véges mérték, speciálisan a metrikus tér minden K kompakt halmazára $|m|(K) < \infty$. Ha tehát a mérték még teljesen σ-véges is – például, ha a metrikus tér σ-kompakt, azaz megszámlálható sok kompakt halmaz uniója (tehát a Baire-féle kvázi-σ-gyűrű egyenlő a Borel-féle σ-algebrával) –, akkor a Radon-mérték variációja (pontosabban a kiterjesztése) Borel-mérték (lásd 9.7.).

17.9. Ha $(V, \| \ \|)$ normált tér és $m : \mathcal{R} \to V$ vektormérték, akkor minden $p \in V^*$ esetén $(p|m) : \mathcal{R} \to \mathbb{K}$ mérték. Egyszerű tény, hogy $p, q \in V^*$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén $(p + q|m) = (p|m) + (q|m)$, $(\alpha p|m) = \alpha(p|m)$. Továbbá

$$\Big|(p|m)\Big| \leq \|p\| \ |m|, \tag{$*$}$$

hiszen minden $E \in \mathcal{R}$ esetén a definíció szerint $(p|m)(E) = (p|m(E))$, és így $|(p|m)(E)| \leq \|p\| \ \|m(E)\|$, amiből a variáció meghatározása alapján rögtön következik a $(*)$ egyenlőség.

Ha tehát $|m|$ teljesen σ-véges, illetve véges, akkor $|(p|m)|$ is az minden $p \in V^*$ esetén. Ha ez a két két feltétel együttesen teljesül, akkor $|m|$ egyértelműen kiterjeszthető az $\mathcal{R}$ generálta σ-algebrára az $\overline{|m|}$ mértékké, és $(p|m)$ egyértelműen kiterjeszthető az m-**véges halmazok**

$$R_m := \{E \in \sigma_A(\mathcal{R}) \mid \overline{|m|} < \infty\}$$

kvázi-σ-gyűrűjére (szintén felülhúzásssal jelölt) $\mathbb{K}$ értékű mértékké. Az egyértelműség miatt $\Big|\overline{(p|m)}\Big| = \overline{|(p|m)|}$, és ezért a kiterjesztésekre is érvényben marad a $(*)$ egyenlőség. Mi több, ha $p, q \in V^*$, $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor $\overline{(p|m)} + \overline{(q|m)} = \overline{(p+q|m)}$, $\overline{(\alpha p|m)} = \alpha\overline{(p|m)}$.

A mondottak alapján rögzített $E \in \mathcal{R}_m$ esetén

$$\overline{m}(E) : V^* \to \mathbb{K}, \quad p \mapsto \overline{(p|m)}(E)$$

folytonos lineáris leképezés, azaz V^{**} eleme. A V értékű m vektormértéket tehát kiterjesztettük $\overline{m} : \mathcal{R}_m \to V^{**}$, $E \mapsto \overline{m}(E)$ leképezéssé. Vajjon mérték-e ez a kiterjesztés?

Azt tudjuk, hogy minden $p \in V^*$ esetén

$$\left(\overline{m}\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \middle| \, p\right) = \overline{(p|m)}\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (p|m)(E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \big(\overline{m}(E_n)|p\big),$$

ahol $E_n \in \mathcal{R}_m$ $(n \in \mathbb{N})$ páronként diszjunkt halmazok, amelyek uniója is benne van $\mathcal{R}_m$-ben. Ha a fenti egyenlőségsorozat utolsó tagja egyenlő volna $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{m}(E_n) \middle| \, p\right)$-vel, akkor $\overline{m}$ σ-additív volna. Az egyenlőség fennállna, ha tudnánk, hogy létezik a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{m}(E_n)$ összeg. Ez azonban nem feltétlenül teljesül.

Ha azonban V véges dimenziós, akkor egyrészt $V^{**} = V$, másrészt az, hogy minden $p \in V^*$ esetén a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \big(\overline{m}(E_n)|p\big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \big(p|\overline{m}(E_n)\big)$ összeg létezik, maga után vonja a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{m}(E_n)$ összeg létezését (Analízis III.B.4.7.), és így $\overline{m}$ σ-additivitását.

Véges dimenziós vektortér értékű teljesen σ-véges és véges variációjú m vektormérték egyértelműen kiterjeszthető az m-véges halmazok kvázi-σ-gyűrűjére V értékű vektormértékké.

17.10. Feladatok

1. Igazoljuk, hogy egy m valós mértékre $(-m)^+ = m^-$ és $(-m)^- = m^+$.

2. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-véges mértéktér és $h : X \to \mathbb{R}$ μ-mérhető függvény. Vegyük a 16.3.(ii)-ben definiált $h\mu$ valós mértéket. Mutassuk meg, hogy $(h\mu)^+ = h^+\mu$, $(h\mu)^- = h^-\mu$, $|h\mu| = |h|\mu$. Ha h μ-integrálható, akkor $h\mu$ az egész $\mathcal{A}$-n értelmezve van. Adjuk meg ekkor az X-nek a $h\mu$ szerinti Hahn-felbontását.

3. Vegyünk egy m valós mértéket az $\mathcal{A}$ σ-algebrán. Bizonyítsuk be, hogy minden $E \in \mathcal{A}$ esetén

$$m^+(E) = \sup\{m(F) \mid F \in \mathcal{A}, F \subset E\}, \quad m^- = \sup\{-m(F) \mid F \in \mathcal{A}, F \subset E\}.$$

4. Legyen μ és ν véges pozitív mérték ugyanazon a σ-algebrán, $m := \mu - \nu$. Igazoljuk, hogy

(i) $|m| \le \mu + \nu$, $\mu \le |m|$, $\nu \le |m|$,

(ii) $m^+ \le \mu$, $m^- \le \nu$.

5. Adjunk meg olyan valós mértéket valamely gyűrűn, hogy a pozitív és negatív része véges, teljesen σ-véges, de kiterjesztésük a generált σ-algebrára nem véges, tehát a mérték nem terjeszthető ki az egész generált σ-algebrára.

18. Integrálás vektormérték szerint

18.1. A továbbiakban mindig véges dimenziós vektorterekre szorítkozunk. Tudjuk, ekkor nem is szükséges normát megadni, hogy végtelen összegről, határértékről, folytonosságról beszéljünk.

Definíció *Legyen m valós mérték az X nemüres halmaz részhalmazaiból álló $\mathcal{R}$ gyűrűn, és tegyük fel, hogy $|m|$ teljesen σ-véges. Az $f : X \to \mathbb{R}$ függvény **integrálható** m szerint, vagy másnéven m-**integrálható**, ha integrálható m^+ és m^- szerint, és ekkor*

$$\int_X f\ dm := \int_X f\ dm^+ - \int_X f\ dm^-.$$

Ne feledjük, ha $|m|$ teljesen σ-véges, akkor m^+ és m^- is.

Állítás *Ha az $f : X \to \mathbb{R}$ függvény integrálható m szerint, akkor $|f|$ integrálható $|m|$ szerint, és*

$$\left|\int_X f\ dm\right| \leq \int_X |f|\ d|m|.$$

Továbbá, ha $f : X \to \mathbb{R}$ $\sigma_A(\mathcal{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mérhető és $|f|$ integrálható $|m|$ szerint, akkor ha f integrálható m szerint.

Bizonyítás Ha f m-integrálható, akkor $|f|$ integrálható m^+ és m^- szerint, így $|m| = m^+ + m^-$ szerint is (lásd 8.10.3.), és

$$\left|\int_X f\ dm\right| = \left|\int_X f\ dm^+ - \int_X f\ dm^-\right| \leq \left|\int_X f\ dm^+\right| + \left|\int_X f\ dm^-\right| \leq$$
$$\leq \int_X |f|\ dm^+ + \int_X |f|\ dm^- = \int_X |f|\ d|m|.$$

Ha viszont $|f|$ integrálható $|m|$ szerint, akkor integrálható m^+ és m^- szerint is, hiszen $m^+ \leq |m|$, $m^- \leq |m|$ (lásd 7.6.6.); ezért, lévén f mérhető, f is integrálható m^+ és m^- szerint.

18.2. Az előbbiek értelemszerű általánosításaként kapjuk a komplex értékű függvények komplex mérték szerinti integrálását.

Az $f : X \to \mathbb{C}$ függvény **integrálható** az m komplex mérték szerint, amennyiben $|m|$ teljesen σ-véges, ha $f_1 := \mathrm{Re} f$ és $f_2 := \mathrm{Im} f$ integrálhatók $m_1 := \mathrm{Re} m$ és $m_2 := \mathrm{Im} m$ szerint, és ekkor

$$\int_X f\ dm := \int_X f_1\ dm_1 - \int_X f_2\ dm_2 + i \left(\int_X f_1\ dm_2 + \int_X f_2\ dm_1 \right).$$

Itt is igaz, hogy ha f integrálható az m komplex mérték szerint, akkor $|f|$ integrálható $|m|$ szerint, és

$$\left| \int_X f\ dm \right| \le \int_X |f|\ d|m|.$$

Ugyanis $|f| \le |f_1| + |f_2|$ és $|m| \le |m_1| + |m_2|$ miatt $|f|$ integrálható $|m|$ szerint. Továbbá, ha $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$ komplex értékű, $|m|$-integrálható $\sigma_A(\mathcal{R})$-lépcsős függvény, akkor

$$\left| \int_X \varphi\ dm \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} c_k m(E_k) \right| \le \sum_{k=1}^{n} |c_k\, |m(E_k)| \le \sum_{k=1}^{n} |c_k|\, |m|(E_k) = \int_X |\varphi|\ d|m|.$$

Mivel van olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplex értékű, $|m|$-integrálható $\sigma_A(\mathcal{R})$-lépcsős függvény sorozat, hogy $|\varphi_n| \le |\varphi_{n+1}| \le |f|$ és $\lim\limits_n \varphi_n = f$ (lásd 5.4.7.), és ezért

$$\lim_n \int_X |\varphi_n|\ d|m| = \int_X |f|\ d|m|, \quad \lim_n \int_X \varphi_n\ dm_1^+ = \int_X f\ dm_1^+, \quad \text{stb.},$$

az

$$\left| \int_X \varphi_n\ dm \right| \le \int_X |\varphi_n|\ d|m| \le \int_X |f|\ d|m|$$

egyenlőtlenségből határátmenettel megkapjuk a kívánt összefüggést.

Végül, ha $f : X \to \mathbb{C}$ olyan $\sigma_A(\mathcal{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{C})$-mérhető függvény, hogy $|f|$ integrálható $|m|$ szerint, akkor f integrálható m szerint. Ugyanis $|m_1| \le |m|$ és $|m_2| \le |m|$ miatt $|f|$ integrálható $|m_1|$ és $|m_2|$ szerint, ami $|f_1| \le |f|$ és $|f_2| \le |f|$ valamint az előző pont alapján maga után vonja, hogy f_1 és f_2 integrálhatók m_1 és m_2 szerint.

18.3. Beszéljünk most vektor értékű függvények vektormérték szerinti integrálásáról. Ilyen a fizikában gyakran előfordul: például munkavégzés kiszámításakor, mágneses fluxus meghatározásakor.

Legyen m az X részhalmazaiból álló $\mathcal{R}$ gyűrün értelmezett V értékű vektormérték, és tegyük fel, hogy $|m|$ teljesen σ-véges.

Legyen U is véges dimenziós vektortér és $f : X \to U$ olyan függvény, hogy minden $q \in U^*$ és $p \in V^*$ esetén $(q|f)$ integrálható a $(p|m)$ $\mathbb{K}$ értékű mérték szerint. Ekkor nyilvánvaló, hogy az

$$U^* \times V^* \to \mathbb{K}, \quad (q,p) \mapsto \int_X (q|f)\ d(p|m)$$

leképezés bilineáris, azaz a szokásos azonosítással $U \otimes V$ eleme (Analízis II.24.4.).

Definíció *Az előbbi jelölésekkel az f vektorfüggvényt az m vektormérték szerint **integrálhatónak** mondjuk, ha $(q|f)$ integrálható $(p|m)$ szerint minden $q \in U^*$, $p \in V^*$ esetén, és ekkor $\int_X f \otimes dm$ az az eleme $U \otimes V$-nek (azaz $U^* \times V^* \to \mathbb{K}$ bilineáris leképezés), amelyre*

$$\left(\int_X f \otimes dm\right)(q,p) = \int_X (q|f)\ d(p|m) \qquad (q \in U^*, p \in V^*).$$

Természetesen, ha $E \in \sigma_A(\mathcal{R})$, akkor $\chi_E f$ is integrálható m szerint, és

$$\int_E f \otimes dm := \int_X \chi_E f\ dm.$$

18.4. Ha $B : U \times V \to \mathbb{K}$ bilineáris leképezés, akkor, mint tudjuk a vektorterek elméletéből, létezik egyetlen olyan $L : U \otimes V \to \mathbb{K}$ lineáris leképezés, hogy $L(u \otimes v) = B(u,v)$ minden $(u,v) \in U \times V$ esetén.

Definíció *Az előbbi jelölésekkel, ha f integrálható m szerint, akkor*

$$\int_X B(f, dm) := L \int_X f \otimes dm.$$

Könnyű belátni, hogy ha $\varphi = \sum_{k=1}^{n} u_k \chi_{E_k}$ U értékű, m-integrálható $\sigma_A(\mathcal{R})$-lépcsős függvény, akkor

$$\int_X B(\varphi, dm) = \sum_{k=1}^{n} B(u_k, m(E_k)).$$

18.5. Vezessünk be normát U-n és V-n; ezek a normák indukálnak egy normát U^*-on és V^*-on, és így $U \otimes V$-n is (Analízis III.B.10.11.). Jelöljük mindhárom normát ugyanúgy a $\|\ \|$ szimbólummal.

Állítás *Ha az $f : X \to U$ függvény integrálható a V értékű m vektormérték szerint, akkor $\|f\|$ integrálható $|m|$ szerint, és*

$$\left\| \int_X f \otimes dm \right\| \leq \int_X \|f\|\ d|m|.$$

Továbbá, ha $f : X \to U$ $\sigma_A(\mathcal{R}) - \mathcal{B}(U)$-mérhető és $\|f\|$ integrálható $|m|$ szerint, akkor f integrálható m szerint.

Bizonyítás Mivel $q \in U^*$ és $p \in V^*$ esetén $|(q|f)| \leq \|q\|\ \|f\|$ és $|(p|m)| \leq \|p\|\ |m|$ (vigyázzunk: az első egyenlőtlenségben $|\ |$ számok abszolút értékét jelenti, a másodikban mértékek variációját), továbbá $\|f\| \leq \sum_{k=1}^{M} |(q_k|f)|$, ahol $q_1, \dots, q_M$ az U^* egy alkalmas bázisa, nyilvánvalóan igazak az integrálhatóságra tett kijelentéseink. Továbbá

$$\left\| \int_X f \otimes dm \right\| = \sup_{\|q\|=1, \|p\|=1} \left| \left(\int_X f \otimes dm \right) (q,p) \right| = \sup_{\|q\|=1, \|p\|=1} \left| \int_X (q|f)\ d(p|m) \right|$$
$$\leq \sup_{\|q\|=1, \|p\|=1} \int_X |(q|f)|\ d|(p|m)| \leq \int_X \|f\|\ d|m|. \blacksquare$$

Az előbbi eredményünkhöz hasonlóan, az előző pont jelöléseivel

$$\left| \int_X B(f, dm) \right| \leq \|B\| \int_X \|f\|\ d|m|.$$

Ez ugyanis egyszerűen igaz akkor, ha f m-integrálható, U értékű $\sigma_A(\mathcal{R})$-lépcsős függvény; általános f-re veszünk olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ m-integrálható, U értékű $\sigma_A(\mathcal{R})$-lépcsős függvény sorozatot, hogy $\lim_n \varphi_n = f$ és $\|\varphi_n\| \leq \|\varphi_{n+1}\|$ minden n-re, és úgy érvelünk, mint 18.2-ben.

18.6. Ha $u_1, \dots, u_M$ az U-nak, $v_1, \dots, v_N$ a V-nek bázisa, akkor $f = \sum_{i=1}^{M} f_i u_i$, $m = \sum_{k=1}^{n} m_k v_k$, ahol $f_i : X \to \mathbb{K}$ függvények és $m_k : \mathcal{R} \to \mathbb{K}$ mértékek.

Ekkor az integrálás linearitása folytán

$$\int\limits_X f \otimes dm = \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} u_i \otimes v_k \int\limits_X f_i \, dm_k,$$

és

$$\int\limits_X B(f,\ d\mu) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} B(u_i, v_k) \int\limits_X f_i \ dm_k.$$

Különösen fontos az az eset, amikor $U = V^*$ és a dualitás bilineáris formájáról van szó, azaz $B = (\ |\ )$. Ha f és m komponenseit duális bázisokban adjuk meg, akkor

$$\int\limits_X (f|dm) = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_X f_k \ dm_k.$$

A másik fontos eset az, amikor $U = V$ és a bilineáris leképezés skaláris szorzás (komplex esetben ez ugyan szeszkilineáris, de azt ugyanígy lehet tárgyalni), azaz azaz $B = <\ ,\ >$. Ha f és m komponenseit ugyanabban az ortonormált bázisban adjuk meg, akkor

$$\int\limits_X < f, dm >= \sum_{k=1}^{N} \int\limits_X f_k \ dm_k.$$

18.7. Feladatok

1. Integrálhatók-e a következő függvények az $\dfrac{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}{1+\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2}\lambda$ valós mérték szerint:
(i) $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^n \ (n \in \mathbb{N})$, (ii) $x \mapsto e^{-|x|}$, (iii) sin.

2. Általánosítsuk a 18.4. definíciót arra az esetre, amikor W vektortér és $B : U \times V \to W$ bilineáris leképezés.

3. Értelmezzük szeszkilineáris $U \times V \to \mathbb{C}$ leképezésre (speciálisan komplex skaláris szorzatra az $\int\limits_X B(f, dm)$ integrált.

4. Legyen m komplex mérték az $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ σ-algebrán, V véges dimenziós komplex vektortér, $h : X \to V$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}(V)$-mérhető függvény. Értelmezzük hm-et mint V értékű vektormértéket.

5. Legyen m komplex mérték az $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ σ-algebrán, h és g komplex értékű $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{C})$-mérhető függvények. Igazoljuk, hogy a következők egyenértékűek:
(i) hg m-integrálható,
(ii) g m-integrálható és h gm-integrálható,
és ekkor

$$\int\limits_X hg \ dm = \int\limits_X h \ d(gm).$$

6. Legyen μ és ν teljesen σ-véges és véges mérték az $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ gyűrűn, $m := \mu - \nu$. A 17.10.4.(ii) és a 7.6.6. feladat következtében ha f integrálható μ és ν szerint, akkor integrálható m szerint. Igazoljuk ennek alapján a következőt.

Legyen m és n olyan valós mérték az $\mathcal{R}$ gyűrűn, amelyek variációja teljesen σ-véges, és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ha f integrálható m és n szerint, akkor integrálható $\alpha m + \beta n$ szerint, és

$$\int_X f\, d(\alpha m + \beta n) = \alpha \int_X f\, d\mu + \beta \int_X f\, dn.$$

7. Általánosítsuk az előző feladatot vektormértékekre.

19. Abszolút folytonosság

19.1. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-véges mértéktér, V véges dimenziós vektortér. Már megállapítottuk, hogy egy $h : X \to V$ μ-mérhető függvényre

$$\mathcal{R}_{h\mu} := \{E \in \mathcal{A} \mid h \ \mu\text{-integrálható E-n}\}$$

kvázi-σ-gyűrű, és

$$h\mu : \mathcal{R}_{h\mu} \to V, \qquad E \mapsto \int_E h\, d\mu$$

vektormérték.

Jegyezzünk meg két egyszerű tényt:
(i) ha $\mu(E) = 0$, akkor $(h\mu)(E) = 0$,
(ii) $h\mu = g\mu$ pontosan akkor, ha $h = g$ μ-m.m..
Az (i) nevezetes tulajdonságot általános meghatározásba foglaljuk.

Definíció *Legyen m vektormérték, μ pozitív mérték a $\mathcal{Q}$ kvázi-σ-gyűrűn. Azt mondjuk, hogy m* ***abszolút folytonos*** *μ-re, ha minden $E \in \mathcal{Q}$ esetén $\mu(E) = 0$ maga után vonja, hogy $m(E) = 0$.*

19.2. Állítás *(**Radon–Nikodym-tétel**) Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-véges mértéktér, $\mathcal{Q}$ olyan kvázi-σ-gyűrű, amelyre $\sigma(\mathcal{Q}) = \mathcal{A}$. Ha ν az $\mathcal{A}$-n értelmezett σ-véges pozitív mérték, és $\nu|_{\mathcal{Q}}$ abszolút folytonos $\mu|_{\mathcal{Q}}$-ra, akkor van olyan $h : X \to \mathbb{R}_0^+$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mérhető függvény, amellyel $\nu = h\mu$.*

Bizonyítás Elég azt az esetet vennünk, amikor μ és ν véges. Ugyanis $X = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n = \biguplus_{m\in\mathbb{N}} B_m$, $\mu(A_n) < \infty$, $\nu(B_m) < \infty$, tehát az $A_n \cap B_m$ halmazokon μ és

ν véges; ha minden n-re és m-re van olyan h_{nm}, hogy $E \in \mathcal{A}$, $E \subset A_n \cap B_m$ esetén $\nu(E) = (h_{nm})(E)$, akkor a h_{nm}-ek összeillesztésével nyert h-val $\nu = h\mu$.

Először belátjuk a következő segédtételt.

Lemma Ha $\mu \neq 0$, továbbá $\rho \neq 0$ a $\mathcal{Q}$-n értelmezett, $\mu|_{\mathcal{Q}}$-ra nézve abszolút folytonos, véges pozitív mérték, akkor van olyan $\alpha \in \mathbb{R}^+$ és $A \in \mathcal{Q}$, hogy $\mu(A) > 0$ és A $(\rho - \alpha\mu)$-pozitív.

Vegyünk ugyanis egy olyan $E \in \mathcal{Q}$ halmazt, amelyre $\mu(E) > 0$, és legyen (P_n, N_n) az E Hahn-felbontása a $\rho - (1/n)\mu$ valós mérték szerint. $P := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} P_n$ és $N := \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} N_n = E \setminus P$ a kvázi-σ-gyűrű elemei. Mi több, minden n-re $(\rho - (1/n)\mu)(N) \leq 0$, azaz $0 \leq \rho(N) \leq (1/n)\mu(N)$, ami azt jelenti, hogy $\rho(N) = 0$. Mivel ρ nem azonosan nulla, $\rho(P) > 0$; de ekkor $\mu(P) > 0$ is teljesül, lévén ρ abszolút foytonos μ-re. Ez viszont azt jelenti, létezik $k \in \mathbb{N}$, amelyre $\mu(P_k) > 0$. Az $\alpha := 1/k$ szám és az $A := P_k$ halmaz teljesíti a kívánt tulajdonságokat.

Térjünk most rá az eredeti állítás bizonyítására. A

$$\mathcal{K} := \{f : X \to \mathbb{R}_0^+ \mid f \ \mu\text{-integrálható}, \ f\mu \leq \nu\}$$

függvényosztály nem üres, mert az azonosan nulla függvény benne van. Legyen

$$s := \sup\left\{ \int\limits_X f \, d\mu \;\middle|\; f \in \mathcal{K} \right\}.$$

Van olyan $f_n \in \mathcal{K}$ $(n \in \mathbb{N})$, hogy $\lim\limits_n \int\limits_X f_n \, d\mu = s$. Vezessük be a

$$g_n := \bigvee_{k=1}^{n} f_k$$

függvényeket. Az $n \mapsto g_n$ függvénysorozat monoton nő, minden tagja μ-integrálható és $f_n \leq g_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Mivel a szóban forgó függvények μ-mérhetők (azaz $\mathcal{A}(\mu) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mérhetők, ahol $\mathcal{A}(\mu)$ az $\mathcal{A}$-nak μ szerinti teljesítése), rögzített n estén

$$E_k := \{x \in X \mid g_n(x) = f_k(x), g_n(x) > f_i(x), i = 1, \ldots, k-1\} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

diszjunkt μ-mérhető halmazok, uniójuk az egész X. Bármely E$\in \mathcal{A}$ esetén

$$\int\limits_X g_n \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{E_k \cap E} f_k \, d\mu \leq \sum_{k=1}^{n} \nu(E_k \cap E) = \nu(E),$$

azaz g_n is eleme $\mathcal{K}$-nak. Továbbá B. Levi tétele miatt ezért (az előbb $E = X$ is lehetséges), létezik μ-m.m. $\lim_n g_n = \bigvee_{k\in\mathbb{N}} f_k =: g$. Mivel az $\mathcal{A}$ minden E elemére

$$\int_E g\ d\mu = \lim_n \int_X g_n\ d\mu \le \nu(E),$$

továbbá

$$s = \lim_n \int_X f_n\ d\mu \le \lim_n \int_X g_n\ d\mu \le s,$$

az is igaz, hogy $g \in \mathcal{K}$ és $\int_X g\ d\mu = s$.

Azt állítjuk, $g\mu = \nu$. Tegyük fel az ellenkezőjét. Ekkor $(\nu - g\mu)|_{\mathcal{Q}}$ nem azonosan nulla pozitív mérték, amely abszolút folytonos $\mu|_{\mathcal{Q}}$-ra. Ezért a lemmánk szerint létezik $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $A \in \mathcal{Q}$ úgy, hogy minden $F \in \mathcal{Q}$, $F \subset A$ esetén

$$\alpha\mu(F) \le \nu(F) - \int_F g\ d\mu.$$

Ekkor egyrészt

$$\int_X (g + \alpha\chi_A)\ d\mu = s + a\mu(A) > 0,$$

tehát $g + \alpha\chi_A$ nem lehet benne $\mathcal{K}$-ban; másrészt ha $E \in \mathcal{A}$ – ez esetben 1.6. szerint $E \cap A \in \mathcal{Q}$ –, akkor

$$\int_E (g + \alpha\chi_A)\ d\mu = \int_E g\ d\mu + \alpha\mu(E\cap A) \le \nu(E\cap A) - \int_{E\cap A} g\ d\mu + \int_E g\ d\mu =$$
$$= \nu(E\cap A) + \int_{E\setminus A} g\ d\mu \le \nu(E\cap A) + \nu(E\setminus A) = \nu(E),$$

azaz $g + \alpha\chi_A \in \mathcal{K}$, ami ellentmondás.

Tehát $\nu = g\mu$, ahol $g \ge 0$ μ-mérhető függvény. Tudjuk, van olyan $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mérhető h függvény, hogy $h = g$ μ-m.m. (lásd 8.8.1.). Ezért $\nu = h\mu$, ahogy azt bizonyítani akartuk. ∎

Érdemes felfigyelni arra, hogy ezek szerint, ha $\nu|_{\mathcal{Q}}$ abszolút folytonos $\mu|_{\mathcal{Q}}$-ra, akkor – $\sigma(\mathcal{Q}) = \mathcal{A}$ esetén – ν is abszolút folytonos μ-re, hiszen $\nu = h\mu$.

19.3. Állítás *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-véges mértéktér, $\mathcal{Q}$ kvázi-σ-gyűrű, amelyre $\sigma(\mathcal{Q}) = \mathcal{A}$, és V véges dimenziós vektortér. Ha m a $\mathcal{Q}$-n értelmezett, V értékű, a $\mu|_{\mathcal{Q}}$-ra abszolút folytonos vektormérték, akkor van olyan $h : X \to V$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}(V)$-mérhető függvény, hogy $m = h\mu|_{\mathcal{Q}}$.*

Bizonyítás Legyen először m valós mérték. Ekkor m^+ és m^- véges mérték $\mathcal{Q}$-n (lásd 17.7.), és abszolút folytonos $\mu|_{\mathcal{Q}}$-ra, ezért van olyan h^+ és h^- mérhető függvény, hogy $m^+ \subset h^+\mu$, $m^- \subset h^-\mu$ (a bal oldalak $\mathcal{Q}$-n, a jobb oldalak $\mathcal{A}$-n vannak értelmezve, ezért áll itt a leképezésekre szokásos tartalmazás jele). Így tehát $m \subset h\mu$, ahol $h := h^+ - h^-$.

Egyszerűen tovább léphetünk, és láthatjuk, hogy igaz az állítás komplex mértékekre is.

Ha m V értékű vektormérték, akkor minden $p \in V^*$ esetén $(p|m)$ komplex mérték, amely abszolút folytonos $\mu|_{\mathcal{Q}}$-ra, tehát van olyan h_p mérhető függvény, hogy $(p|m) \subset h_p\mu$. Legyen $v_1, \ldots, v_N$ a V bázisa, $p_1, \ldots, p_N$ ennek a duálisa. A $h := \sum_{k=1}^{n} h_{p_k} v_k$ függvénnyel

$$m = \sum_{k=1}^{n} (p_k|m)v_k \subset \sum_{k=1}^{n} (h_{p_k})v_k = h\mu.$$

19.4. Ha m abszolút folytonos μ-re és $m = h\mu$, a h függvényt – amely μ-m.m. egyértelműen meg van határozva – az m-nek μ szerinti **Radon–Nikodym-deriváltjának** is szokás nevezni és $\frac{dm}{d\mu}$-vel jelölni; más elnevezés szerint h az m **sűrűségfüggvénye** μ-re vonatkozóan.

A fizikában szokásos a tömeg- vagy töltés- vagy dipólus- stb. eloszlás sűrűségét a $\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$ formulával meghatározni, ahol Δm a ΔV térfogatban levő tömeg stb. mennyisége. Itt a következő kérdések merülnek fel: milyen halmazok ΔV térfogatáról van szó? mit jelentsen a halmazokra az, hogy ΔV a nullához tart? létezik-e ilyen határérték?

Fogalmazzunk pontosan. Vegyük $\mathbb{R}^N$-et, a Lebesgue-mérhető halmazokat és a Lebesgue-mértéket. Legyen tehát $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mérhető halmazsorozat, és vegye át ΔV szerepét $\lambda_N(E_n) \neq 0$. Ekkor Δm szerepét $(h\lambda_N)(E_n)$ veszi át, ahol h a meghatározandó sűrűségfüggvény. Az, hogy ΔV nullához tart, azaz $\lim_n \lambda_N(E_n) = 0$ teljesüljön, nyilván nem elég ahhoz, hogy a h sűrűségfüggvényt meghatározzuk, hiszen h-nak az $\mathbb{R}^N$ pontjaiban felvett értékeit kellene valahogy megkapnunk. Hogy adná meg ezt például $N = 2$ esetén, ha $E_n := [0,1] \times [0, 1/n]$? A halmazsorozatnak "rá kell húzódnia egy pontra", azaz rögzíteni kell egy $x \in \mathbb{R}^N$ pontot és olyan halmazsorozatot venni, hogy $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n = \{x\}$. Most már csak az a kérdés maradt, igaz-e ekkor, hogy $h(x) = \lim_n \frac{(h\lambda_N)(E_n)}{\lambda_N(E_n)}$? Ismét nyilvánvaló, hogy általában nem; hiszen ha létezik is a határérték és még egyenlő is $h(x)$-szel, akkor $g = h$ μ-m.m. és $g(x) \neq h(x)$ esetén $\lim_n \frac{(g\lambda_N)(E_n)}{\lambda_N(E_n)} = h(x) \neq g(x)$.

Állítás *Legyen V véges dimenziós vektortér, $h{:}\mathbb{R}^N \to V$ folytonos függvény, $x \in \mathbb{R}^N$, E_n korlátos nyílt halmazok, $E_{n+1} \subset E_n$ $(n \in \mathbb{N})$, $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Ekkor*

$$h(x) = \lim_n \frac{(h\lambda_N)(E_n)}{\lambda_N(E_n)}.$$

Bizonyítás

$$\left|\frac{(h\lambda_N)(E_n)}{\lambda_N(E_n)} - h(x)\right| = \frac{1}{\lambda_N(E_n)}\left|\int_{E_n}(h - h(x))\, d\mu\right| \leq \sup_{y\in E_n} |h(y) - h(x)|.$$

Az E_n halmazokra kirótt feltételek és h folytonossága maguk után vonják, hogy az utolsó kifejezés határértéke nulla, miközben n tart a végtelenhez.

19.5. Feladatok

1. Abszolút folytonos-e egy Dirac-mérték a Lebesgue-mertékre? És a Lebesgue-mérték egy Dirac-mértékre?

2. Milyen Lebesgue–Stieltjess-mérték abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre? Milyen Lebesgue–Stieltjess-mértékre abszolút folytonos a Lebesgue-mérték?

3. Lehet-e egy Dirac mérték abszolút folytonos egy Lebesgue–Stieltjess-mértékre? És fordítva?

20. Ívmértékek

20.1. Elemi tanulmányainkból tudjuk, hogy a kör kerületét úgy határozták meg, mint a körbe írt sokszögek (poligonok) kerületének a felső határát. Sokszögek kerülete helyett törött vonalak hosszát mondva általánosíthatjuk ezt az eljárást más görbék hosszának a meghatározására is. Tehát görbék hosszát az egyenesdarabok hosszának természetszerűleg definiált fogalmára vezetjük vissza.

Legyen G görbe a $(V, |\ |)$ normált térben. Felhívjuk a figyelmet arra, most fontos, hogy norma legyen adva még akkor is, ha véges dimenziós a vektortér, hiszen nem közelségről, konvergenciáról, folytonosságról beszélünk, hanem hosszról, azaz távolságról.

Legyen $p : I \to G$ a görbe paraméterezése, $[a, b] \subset I$. Értelmezni akarjuk a görbe $p(a)$ és $p(b)$ közötti szakaszának, vagyis a $\{p(t) \mid t \in [a, b]\}$ résznek a hosszát. Mivel p (folytonosan) differenciálható, az $[a, b]$ intervallum minden t pontjához van egy ordo_t kisordó függvény úgy, hogy

$$p(t + h) - p(t) = \dot{p}(t)h + \mathrm{ordo}_t(h).$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges; ekkor az $[a, b]$ minden t elemének van olyan $K(t)$ környezete, hogy $|\mathrm{ordo}_t(h)| \le \varepsilon|h|$ minden olyan h-ra, amelyre $t+h \in K(t)$. Mivel ezek a környezetek lefedik az $[a, b]$ kompakt halmazt, létezik n természetes szám és $a =: t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n := b$ úgy, hogy az ezeknek a pontoknak megfelelő környezetek is lefedik az intervallumot. A $p(t_0), p(t_1), \ldots, p(t_n)$ pontokat összekötő törött vonal hossza

$$\sum_{k=1}^{n} |p(t_k) - p(t_{k-1}| = \sum_{k=1}^{n} |\dot{p}(t_k)|(t_k - t_{k-1}) + \mathrm{ordo}_{t_{k-1}}(t_k - t_{k-1}).$$

A mondottak szerint a jobb oldal második tagjának abszolútértéke kisebb vagy egyenlő mint $\varepsilon(b-a)$. Az első tag pedig az $\int\limits_a^b |\dot{p}|$ egy közelítő összege (lásd A.12.4.); ezért ezt az integrált fogadjuk el a megfelelő görbeszakasz hosszának. Ezzel hosszmértéket definiálunk a görbén, pontosabban a görbe Borel-halmazain.

20.2. Definíció *Legyen G görbe a $(V, |\ |)$ normált térben. Ha $p : I \to G$ a görbe paraméterezése és λ_I jelöli az I Lebesgue-mértékét, akkor*

$$\lambda_G := (|\dot{p}|\lambda_I) \circ \overset{-1}{p}$$

a görbe ***ívhossz-mértéke*** *vagy* ***Lebesgue-mértéke*** *(a $|\ |$ normára vonatkozóan).*

Ez a definíció visszaadja az előbb tekintett fogalmat. $|\dot{p}| : I \to \mathbb{R}^+$ folytonos függvény, értelmes a λ_I-vel vett szorzata, ami mérték I Borel-halmazain. Ezt $\overset{-1}{p}$-gyel átvisszük G Borel-halmazaira mértéknek. Ha $[a, b] \subset I$, akkor a $p[a, b] \subset G$ szakasz mértéke

$$\lambda_G\,(p[a, b]) = (|\dot{p}|\lambda_I)\,([a, b]) = \int\limits_a^b |\dot{p}|\ d\lambda_I.$$

Az integráltranszformáció alapképlete azt mondja, az $f : G \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}(G) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mérhető függvény pontosan akkor integrálható λ_G szerint, ha $f \circ p$ integrálható $|\dot{p}|\lambda_I$ szerint, azaz ha $(f \circ p)|\dot{p}|$ Lebesgue-integrálható, és ekkor

$$\int\limits_G f\ d\lambda_G = \int\limits_I (f \circ p)|\dot{p}| = \int\limits_I f(p(t))|\dot{p}(t)|\ dt.$$

Valamivel azért adósak vagyunk még. λ_G-t a G egy paraméterzésével definiáltuk. Hátha más paraméterezés más ívhossz-mértéket határoz meg? A válasz: nem.

Állítás *Ha $p : I \to G$ és $q : J \to G$ paraméterezések, akkor*

$$(|\dot{p}|\lambda_I) \circ \overset{-1}{p} = (|\dot{q}|\lambda_J) \circ \overset{-1}{q}.$$

BIZONYÍTÁS Tudjuk, hogy $S := q^{-1} \circ p : I \to J$ folytonosan differenciálható, a deriváltja seholsem nulla. Ezért a $p = q \circ S$ egyenlőség, a belőle adódó $\dot{p} = (\dot{q} \circ S)\dot{S}$ összefüggés, a helyettesítéses integrálás formulája és 9.8.5. alapján

$$(|\dot{p}|\lambda_I) \circ \overset{-1}{p} = \Big(|\dot{q} \circ S|\,|\dot{S}|\lambda_I\Big) \circ \overset{-1}{S} \circ \overset{-1}{q} = (|\dot{q}|\lambda_J) \circ \overset{-1}{q}.$$

20.3. **Állítás** *Legyen G görbe a $(V, |\ |)$ normált térben, $x_0 \in G$, p a G paraméterezése. Ekkor*

$$G \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \int\limits_{p^{-1}(x_0)}^{p^{-1}(x)} |\dot{p}|$$

folytonos injekció, amelynek inverze a G-nek p-vel azonos irányítású paraméterezése.

BIZONYÍTÁS Jelölje z a fenti leképezést, és legyen $t_0 := p^{-1}(x_0)$. Ekkor

$$(z \circ p)(t) = \int\limits_{t_0}^{t} |\dot{p}| \qquad (t \in \mathrm{Dom}p),$$

tehát $z \circ p : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett, folytonosan differenciálható, a deriváltja $(z \circ p)^{\cdot} = |\dot{p}| > 0$. Ezért $z \circ p$ szigorúan monoton nő, azaz injektív, az inverze $(z \circ p)^{-1}$ is folytonosan differenciálható, a deriváltja $(1/|\dot{p}|) \circ (z \circ p)^{-1}$. Mivel $z \circ p$ injektív, injektív $z = (z \circ p) \circ p^{-1}$ is, és a mondottak következtében az $r := z^{-1}$ jelöléssel $r = p \circ (z \circ p)^{-1}$ is folytonosan differenciálható, és

$$\dot{r} \circ r^{-1} = \frac{\dot{p}}{|\dot{p}|} \circ p^{-1}. \tag{$*$}$$

Mindezek együttvéve azt jelentik, hogy r a G paraméterezése, és $r^{-1} \circ p (= z \circ p)$ deriváltja pozitív, azaz r és p azonos irányítású. ■

r-et a görbe egy **ívhosszparaméterezésének** szokás nevezni. Ha $s \in \mathrm{Dom}r$, akkor $r(s)$, értelmezése szerint, az a pontja a görbének, amely s "irányított" távolságra van $x_0 = r(0)$-tól (vagyis, ha $s > 0$, akkor s távolságra a paraméterezés meghatározta pozitív irányban, ha $s < 0$, akkor $|s|$ távolságra az ellentétes irányban).

Érdemes megjegyezni, hogy ívhossz-paraméterezés deriváltjának normája $(*)$ szerint mindig egységnyi: $|\dot{r}| = 1$.

20.4. Egy görbe vektori Lebesgue-mértéke véges dimenziós vektortérben norma nélkül is definiálható, viszont szükséges hozzá a görbe irányítása. A vektori Lebesgue-mérték kevésbé szemléletes, mint az ívhossz-mérték, de lagalább annyira fontos fizikai alkalmazásokban.

Definíció *Legyen G irányított görbe a V véges dimenziós vektortérben, $p : I \to G$ pozitív paraméterezése. Ekkor*

$$\boldsymbol{\lambda}_G := (\dot{p}\lambda_I) \circ \overset{-1}{p}$$

*az irányított görbe **vektori Lebesgue-mértéke**.*

Vegyük közelebbről szemügyre ezt a kifejezést is. $\dot{p} : I \to V$ folytonos függvény, ezért $\dot{p}\lambda_I$ az I korlátos Borel-halmazain értelmezett V értékű vektormérték, amelyet $\overset{-1}{p}$-gyel átviszünk a G korlátos Borel-halmazaira. Ha például $f : G \to V^*$ a $\boldsymbol{\lambda}_G$ szerint integrálható függvény, akkor

$$\int_G (f|d\boldsymbol{\lambda}_G) = \int_I (f \circ p|\dot{p}) = \int_I \big(f(p(t))|\dot{p}(t)\big)\ dt,$$

vagy ha $f : G \to V$ $\boldsymbol{\lambda}_G$-integrálható és $<\ ,\ >$ skaláris szorzat V-n, akkor

$$\int_G < f, d\boldsymbol{\lambda}_G >= \int_I < f \circ p, \dot{p} >= \int_I < f(p(t)), \dot{p}(t) >\ dt.$$

A vektori Lebesgue-mérték sem függ a paraméterezéstől, noha szerepel a definícióban.

Állítás *Ha $p : I \to G$ és $q : J \to G$ azonos irányítású paraméterezések, akkor*

$$(\dot{p}\lambda_I) \circ \overset{-1}{p} = (\dot{q}\lambda_J) \circ \overset{-1}{q}.$$

Ezt az állítást ugyanúgy bizonyítjuk, mint az előzőt, figyelembe véve, hogy most $\dot{S} > 0$. A bizonyításból egyébként az is látszik, hogy ellentétes irányítású paraméterzések ellentétes előjelű vektori Lebesgue-mértéket határoznak meg.

20.5. Vegyük a $(V, |\ |)$ normált térben levő G görbének egy p paraméterezését. Ekkor $v := \dfrac{\dot{p}}{|\dot{p}|} \circ p^{-1} : G \to V$ olyan folytonos leképezés, amelyre $|v| = 1$, azaz

$v(x)$ a görbe egységnyi hosszú érintővektora az x pontban. Mivel $(\dot{p}\lambda_I) \circ \overset{-1}{p} = \left(\frac{\dot{p}}{|\dot{p}|}|\dot{p}|\lambda_I\right) \circ \overset{-1}{p}$, a 9.8.5. feladat alapján világos, hogy

$$\boldsymbol{\lambda}_G = v\lambda_G.$$

Ebből 16.6.(ii) szerint az is következik, hogy adott norma mellett λ_G a $\boldsymbol{\lambda}_G$ variációjának kiterjesztése:

$$|\boldsymbol{\lambda}_G| \subset \lambda_G.$$

20.6. Értelemszerűen átvihető az ívhossz-mérték és vektori Lebesgue-mérték definíciója peremes görbére, zárt görbére és szakaszos görbére. Ez utóbbi esetben bármely p paraméterezés deriváltja csak véges sok helyen nincs értelmezve, ami az integrálás szempontjából lényegtelen.

20.7. Bizonyos alkalmazásokban, éppen a fizikában is, előfordul, hogy görbéken másképp kell megadnunk mértéket.

Legyen V véges dimenziós vektortér és $\Phi : V \to \mathbb{R}$ olyan $\mathcal{B}(V) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mérhető leképezés, hogy minden $\alpha \in \mathbb{K}$ és $v \in V$ esetén $\Phi(\alpha v) = |\alpha|\Phi(v)$. Ekkor a V-ben levő G görbe bármely $p : I \to G$ paraméterezése a

$$((\Phi \circ \dot{p})\lambda_I) \circ \overset{-1}{p}$$

formulával ugyanazt a mértéket határozza meg, amint erről a 20.2. bizonyításhoz hasonlóan könnyen meggyőződhetünk.

Ezt egyszerűen lehet általánosítani arra az esetre, amikor Φ valamely egy dimenziós valós vektortérben ("fizikai mértékegyenesben") veszi fel az értékeit.

Speciálisan, ha (V, B, h) pszeudo-euklideszi vektortér, B irányított, akkor $\Phi : V \to B$, $v \mapsto \sqrt{|h(v,v)|} =: |v|$ a mondott tulajdonságú. Az ezzel meghatározott ívmérték fogalmilag ugyanolyan, mint a normával meghatározott mérték: itt $|\dot{p}| := \sqrt{|h(\dot{p},\dot{p})|}$ a paraméterezés deriváltjának "pszeudohossza" szerepel a mérték definíciójában.

Itt azt állíthatjuk, hogy ha G olyan, hogy minden nem nulla v érintővektorára $|v| \neq 0$, akkor $x_0 \in G$ esetén

$$G \to B, \quad x \mapsto \int_{p^{-1}(x_0)}^{p^{-1}(x)} |\dot{p}|$$

folytonos injekció, amelynek r inverze folytonosan differenciálható, a deriváltja seholsem nulla; azt is mondhatjuk, hogy r a G görbének a B egy dimenziós vektortéren értelmezett paraméterezése.

20.8. Feladatok

1. Ha I intervallum, $u : I \to \mathbb{R}^N$ folytonosan differenciálható, akkor u grafikonja görbe $\mathbb{R}^{1+N}$-ben, amelynek paraméterzése $p := (\mathrm{id}_{\mathbb{R}}, u)$; erre $\dot p = (1, \dot u)$.

Ennek alapján adjuk meg a következő $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények grafikonjának ívhosszát az $\mathbb{R}^2$-nek $|\ |_1$, $|\ |_2$ és $|\ |_\infty$ normájában:

(i) $\mathrm{id}^n_{\mathbb{R}}|_{[0,1]}$ $(n \in \mathbb{N})$, (ii) $\mathrm{ch}|_{[0,1]}$, (iii) $\log|_{[1,2]}$.

2. Mi az alábbi görbék ívhossza az $\mathbb{R}^2$-nek $|\ |_1$, $|\ |_2$ és $|\ |_\infty$ normájában:

(i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$, $r > 0$ adott,

(ii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1, |y| < 1\}$.

3. Számítsuk ki a következő $\int\limits_G f\, d\lambda_G$ integrálokat, ahol

(i) $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x > 0\}$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$;

(ii) $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y = x^2, 1 < y < 2\}$, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y/x$.

4. Számítsuk ki a következő $\int\limits_G < f, d\boldsymbol{\lambda}_G >$ integrálokat, ahol $<\ ,\ >$ a szokásos skaláris szorzat $\mathbb{R}^2$-n illetve $\mathbb{R}^3$-on, és

(i) $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2, y < 1\}$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (-y, x)$;

(ii) $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (0, x)$;

(iii) $G := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \cos z, y = \sin z, 0 < z < 1\}$,
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (-yz, xz, e^z)$.

5. Legyen G irányított peremes elemi görbe a V vektortérben, $F : V \rightarrowtail \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, $G \subset \mathrm{Dom}F$. Mutassuk meg, hogy

$$\int\limits_G (\mathrm{D}F|d\boldsymbol{\lambda}_G) = F(v) - F(k),$$

ahol v és k az irányított peremes görbe vég- illetve kezdőpontja.

Ha G zárt görbe, akkor

$$\int\limits_G (\mathrm{D}F|d\boldsymbol{\lambda}_G) = 0.$$

6. Teintsük $\mathbb{R}^2$-n az $\big((x, y), (u, v)\big) \mapsto -xu + yv$ Lorentz-formát, és számítsuk ki a következő görbéknek a 20.7. szerinti “pszeudohosszát”:

(i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$, $r > 0$ adott,

(ii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1, |y| < 1\}$.

21. Sokaság-mértékek

21.1. Elemi tanulmányainkból tudjuk, hogy a gömb felszínét úgy határozták meg, mint a gömbbe írható poliéderek felszínének a felső határát. Ilyen eljárást más felületekre is alkalmazhatunk; tehát a felületek felszínét a síkidomok területének már ismert fogalmára vezetjük vissza. Ehhez azonban már nem elég, hogy normát adjunk meg: skaláris szorzat kell.

Legyen F elemi felület (két dimenziós részsokaság) a V véges dimenziós valós vektortérben, amelyen adott a $<\ ,\ >$ skaláris szorzás.

Legyen $p : D \to F$ a felület paraméterezése, $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset D$. Értelmezni akarjuk a felület $p[[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]]$ részének a felszínét. Vegyünk n és m termérszetes számokat, és az $a_1 =: \xi_{10} < \xi_{11} < \cdots < \xi_{1n} = b_1$ valamint $a_2 =: \xi_{20} < \xi_{21} < \cdots < \xi_{2m} := b_2$ értékeket. A $p\left[[\xi_{1k}, \xi_{1(k-1)}] \times [\xi_{2i}, \xi_{2(i-1)}]\right]$ felületdarabkát helyettesítsük egy parallelogrammával, amelynek oldalvektorai

$$u_{ki} := p(\xi_{1k}, \xi_{2i}) - p(\xi_{1(k-1)}, \xi_{2i}), \quad v_{ki} := p(\xi_{1k}, \xi_{2i}) - p(\xi_{1k}, \xi_{2(i-1)}).$$

Ha α_{ki} jelöli u_{ki} és v_{ki} szögét – azért kell a skaláris szorzás, hogy ennek értelme legyen –, akkor a parallelogramma területe

$$|u_{ki}|\,|v_{ki}| \sin \alpha_{ki} = |u_{ki}|\,|v_{ki}| \sqrt{1 - \left(\frac{< u_{ki}, v_{ki} >}{|u_{ki}|\,|v_{ki}|} \right)^2} = \\ = \sqrt{|u_{ki}|^2 |v_{ki}|^2 - < u_{ki}, v_{ki} >^2}.$$

A felületdarab felszínét közelítjük az ilyen parallelogrammák területeinek az összegével, vagyis a

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \sqrt{|u_{ki}|^2 |v_{ki}|^2 - < u_{ki}, v_{ki} >^2}$$

mennyiséggel. Mivel

$$u_{ki} = \partial_1 p(\xi_{1(k-1)}, \xi_{2i})(\xi_{1k} - \xi_{1(k-1)}) + \mathrm{ordo}(\xi_{1k} - \xi_{1(k-1)}),$$

$$v_{ki} = \partial_2 p(\xi_{1k}, \xi_{2(i-1)})(\xi_{2i} - \xi_{2(i-1)}) + \mathrm{ordo}(\xi_{2i} - \xi_{2(i-1)}),$$

a görbék ívhosszának meghatározására vonatkozó meggondolásainkhoz hasonlóan elfogadjuk, hogy a felületdarab felszíne

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \sqrt{|\partial_1 p(\xi_1, \xi_2)|^2 |\partial_2 p(\xi_1, \xi_2)|^2 - < \partial_1 p(\xi_1, \xi_2), \partial_2 p(\xi_1, \xi_2) >^2}\, d\xi_1 d\xi_2.$$

Mielőtt azonban ezt a formulát definíció rangjára emelnénk, átalakítjuk egy kicsit.

Az $A : \mathbb{R}^2 \to V$ lineáris leképezés adjungáltján azt az $A^* : V \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezést értjük, amelyre $< x, A^*v >=< Ax, v >$ teljesül minden $v \in V$ és $x \in \mathbb{R}^2$ esetén; itt a bal oldalon az $\mathbb{R}^2$-beli szokásos, a jobb oldalon a V-beli skaláris szorzat áll. Az $A^*A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezés mátrixa (az $e_1 := (1, 0)$ és $e_2 := (0, 1)$ standard bázisban) az $a_1 := Ae_1$, $a_2 := Ae_2$ jelöléssel

$$\Big(< e_i, Ae_k >\big|\ i, k = 1, 2\Big) = \begin{pmatrix} |a_1|^2 & < a_1, a_2 > \\ < a_1, a_2 > & |a_2|^2 \end{pmatrix}.$$

Ennek a mátrixnak a determinánsa $|a_1|^2|a_2|^2- < a_1, a_2 >^2$. Tudjuk, hogy $\partial_1 p(\cdot) = \mathrm{D}p(\cdot)e_1 \quad \partial_2 p(\cdot) = \mathrm{D}p(\cdot)e_2$. Ezért a fenti integrálban a gyökjel alatt szereplő mennyiséget $\det\big((\mathrm{D}p)^*\mathrm{D}p)$ alakba is írhatjuk.

21.2. Definíció *Legyen F elemi felület a $(V, <, >)$ véges dimenziós, valós, skaláris szorzatos vektortérben. Ha $p : D \to F$ a felület paraméterezése, és λ_D jelöli a D Lebesgue-mértékét, akkor*

$$\lambda_F := \Big(\sqrt{\det((\mathrm{D}p)^*\mathrm{D}p)}\lambda_D\Big) \circ \overset{-1}{p}$$

*a felület **felszíni mértéke** vagy **Lebesgue-mértéke** (a $<\ ,\ >$ skaláris szorzatra vonatkozóan).*

Ez a definíció visszadja az előbb tekintett fogalmat. Ha ugyanis $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset D$, akkor

$$\lambda_F\big(p\,[[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]]\big) = \Big(\sqrt{\det((\mathrm{D}p)^*\mathrm{D}p)}\lambda_D\Big)\,([a_1, b_1] \times [a_2, b_2]) = \\ = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \sqrt{\det((\mathrm{D}p)^*\mathrm{D}p)}\, d\lambda_d.$$

Az integráltranszformáció alapképlete azt mondja, az $f : F \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}(F) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mérhető függvény pontosan akkor λ_F-integrálható, ha $f \circ p$ integrálható $\sqrt{\det((\mathrm{D}p)^*\mathrm{D}p)}\lambda_D$ szerint, azaz $(f \circ p)\sqrt{\det((\mathrm{D}p)^*\mathrm{D}p)}$ integrálható a két dimenziós Lebesgue-mérték szerint, és ekkor

$$\int_F f\ d\lambda_F = \int_D (\varphi \circ p)\sqrt{\det((\mathrm{D}p)^*\mathrm{D}p)} = \\ = \int_D f(p(\xi_1, \xi_2)\sqrt{\det((\mathrm{D}p(\xi_1, \xi_2))^*\mathrm{D}p(\xi_1, \xi_2))}\ d\xi_1 d\xi_2.$$

Állítás *A felszíni mérték nem függ a paraméterezéstől, azaz ha $p : D \to F$ és $q : C \to F$ paraméterezések, akkor*

$$\left(\sqrt{\det((\mathrm{D}p)^*\mathrm{D}p)}\lambda_D\right) \circ \overset{-1}{p} = \left(\sqrt{\det((\mathrm{D}q)^*\mathrm{D}q)}\lambda_C\right) \circ \overset{-1}{q}.$$

Bizonyítás Tudjuk, hogy $S := q^{-1} \circ p : D \to C$ folytonosan differenciálható, a deriváltja mindenütt bijekció. A $p = q \circ S$ egyenlőségől $\mathrm{D}p = \mathrm{D}q(\circ S)\mathrm{D}S$, amiből – az adjungálás és a determináns ismert tulajdonságai alapján –

$$\begin{aligned}\det((\mathrm{D}p)^*\mathrm{D}p) = \det\big((\mathrm{D}S)^*(\mathrm{D}q(\circ S))^*\mathrm{D}q(\circ S)\mathrm{D}S\big) = \\ = \big(\det \mathrm{D}S\big)^2 \det\big((\mathrm{D}q(\circ S))^*\mathrm{D}q(\circ S)\big)\end{aligned}$$

adódik; ebből a helyettesítéses integrálás formulája és 9.8.5. alapján megkapjuk a kívánt egyenlőséget.

21.3. Egy elemi felület vektori Lebesgue-mértéke skalárszorzat nélkül is definiálható, viszont szükséges hozzá a felület irányítása. A vektori Lebesgue-mérték kevésbé szemléletes, mint a felszíni mérték, de legalább annyira fontos fizikai alkalmazásokban.

Definíció *Legyen F irányított elemi felület a V véges dimenziós vektortérben, $p : D \to F$ egy pozitív paraméterezése. Ekkor*

$$\boldsymbol{\lambda}_F := \big((\partial_1 p \wedge \partial_2 p)\lambda_D\big) \circ \overset{-1}{p}$$

*az irányított felület **vektori Lebesgue-mértéke**.*

$\partial_1 p : D \to V$ és $\partial_2 p : D \to V$ folytonos függvények, így $\partial_1 p \wedge \partial_2 : D \to V \wedge V$ folytonos függvény, $(\partial_1 p \wedge \partial_2 p)\lambda_D$ a D korlátos Borel-halmazain értelmezett $V \wedge V$ értékű vektormérték, ezt viszi át $\overset{-1}{p}$ az F korlátos Borel-halmazaira.

Állítás *Ha $p : D \to F$ és $q : C \to F$ azonos irányítású paraméterezések, akkor*

$$\big((\partial_1 p \wedge \partial_2 p)\lambda_D\big) \circ \overset{-1}{p} = \big((\partial_1 q \wedge \partial_2 q)\lambda_C\big) \circ \overset{-1}{q}.$$

Bizonyítás Az $S := q^{-1} \circ p$ függvény folytonosan differenciálható, determinánsa pozitív, hiszen p és q azonos irányítású. A $p = q \circ S$ egyenlőségből

$$\partial_i p = \mathrm{D}q(\circ S)\partial_i S = \sum_{k=1}^{2} \partial_k q(\circ S)\partial_i S_k \qquad (i = 1, 2).$$

A jobban áttekinthető formulák kedvéért a fenti összefüggést értelemszerűen az

$$a_i = \sum_{k=1}^{2} A_{ik} b_k$$

alakba írva a következő átalakításokat tehetjük:

$$\begin{aligned} a_1 \wedge a_2 = &\left(\sum_{k=1}^{2} A_{1k} b_k\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{2} A_{2j} b_j\right) = \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} A_{1k}A_{2j} b_k \wedge b_j = \\ =&A_{11}A_{22}(b_1 \wedge b_2) + A_{12}A_{21}(b_2 \wedge b_1) = \\ =&(\det A)(b_1 \wedge b_2), \end{aligned}$$

ahol A az $(A_{ik} \mid i,k = 1,2)$ mátrix. Visszaírva az eredeti mennyiségeket tehát azt kapjuk, hogy

$$\partial_1 p \wedge \partial_2 p = (\det \mathrm{D}S)(\partial_1 q(\circ S) \wedge \partial_2 q(\circ S)),$$

amiből már a helyettesítéses integrálás képlete alapján következik a kívánt egyenlőség. ■

A bizonyításból látszik, hogy ellentétes irányítású paraméterezések ellentétes előjelű vektori Lebesgue-mértéket határoznak meg.

21.4. A V-n adott $< \ , \ >$ skaláris szorzás meghatároz egy skaláris szorzást $V \wedge V$-n a

$$< (x \wedge y, u \wedge v > := < x, u >< y, v > - < x, v >< y, u >$$

formulával. Ekkor a G görbe p paraméterezésére a skaláris szorzatnak megfelelő normákra

$$|\partial_1 p \wedge \partial_2 p| = \sqrt{|\partial_1 p|^2 |\partial_2 p|^2 - < \partial_1 p, \partial_2 p >^2},$$

tehát

$$n := \frac{\partial_1 p \wedge \partial_2 p}{|\partial_1 p \wedge \partial_2 p|} \circ p^{-1} : G \to V \wedge V$$

olyan folytonos leképezés, amelyre $|n| = 1$, és a 9.8.5. feladat alapján világos, hogy

$$\boldsymbol{\lambda}_F = n \lambda_F,$$

továbbá 16.6.(ii) szerint az adott skaláris szorzatnak megfelelő norma mellett λ_F a $\boldsymbol{\lambda}_F$ variációjának kiterjesztése:

$$|\boldsymbol{\lambda}_F| \subset \lambda_F.$$

21.5. Ha V három dimenziós és irányított, akkor $V \wedge V$ azonosítható V-vel, és ebben azonosításban $\partial_1 p \wedge \partial_2 p$ átmegy $-\partial_1 p \times \partial_2 p$-ba, ahol $\times$ a vektoriális szorzást jelenti. Ekkor tehát a felület vektori Lebesgue-mértéke V értékűnek is tekinthető:

$$\boldsymbol{\lambda}_F := \big((-\partial_1 p \times \partial_2 p)\lambda_D\big) \circ \overset{-1}{p}$$

Mivel a felület $p(\xi)$ pontjában az érintősíkot a $\partial_1 p(\xi), \partial_2 p(\xi)$ vektorok feszítik ki, $\partial_1 p \times \partial_2 p$ minden pontban az érintősíkra merőleges vektor. Ezért a 21.4-nek megfelelő

$$n := -\frac{\partial_1 p \times \partial_2 p}{|\partial_1 p \times \partial_2 p|} \circ p^{-1}$$

most "normálvektor-függvény", azaz $|n| = 1$ és n minden pontban merőleges az érintősíkra.

21.6. Példaként megadjuk $\mathbb{R}^3$-ban a nulla középpontú, r sugarú gömbhéj skaláris és vektori Lebesgue-mértékét (a szokásos skaláris szorzatra és egy irányításra vonatkozóan).

A

$$p :]0,\pi[\times]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}^3, \quad (\vartheta,\varphi) \mapsto (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta)$$

paraméterezésben

$$\mathrm{D}p(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\varphi\sin\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}.$$

Ebből könnyen származtathatjuk, hogy $\sqrt{\det \mathrm{D}p(\vartheta,\varphi)^* \mathrm{D}p(\vartheta,\varphi)} = r^2 \sin\vartheta$, és így, ha $f : \mathbb{R}^3 \rightarrowtail \mathbb{R}$ integrálható a gömbfelületen, akkor

$$\int\limits_{S_r(0)} f(x)d\lambda_{S_r(0)}(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} f(r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta)r^2\sin\vartheta d\varphi d\vartheta,$$

amit szokás úgy kifejezni, hogy ezekben a paraméterekben a felületi mérték

$$r^2 \sin\vartheta d\varphi d\vartheta.$$

A gömbfelület vektori Lebesgue-mértékét a 21.5. szerinti azonosításban $\mathrm{D}p(\vartheta,\varphi)$ két oszlopának a vektoriális szorzata adja; az előbb említett szokásnak megfelelően a felületi vektormérték

$$r^2(\sin^2\vartheta\cos\varphi, \sin^2\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta\sin\vartheta)d\varphi\, d\vartheta.$$

A

$$p : \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < r^2\} \to \mathbb{R}^3, \quad (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2})$$

paraméterezésben

$$\mathrm{D}p(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{x_1}{\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}} & \frac{x_2}{\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}}, \end{pmatrix}$$

amiből

$$\sqrt{\det \mathrm{D}p(x_1, x_2)^* \mathrm{D}p(x_1, x_2)} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}},$$

és

$$-\partial_1 p(x_1, x_2) \times \partial_2 p(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}}, -1 \right).$$

21.7. Az eddigi formulák alkalmasak arra, hogy akárhány dimenziós elemi részsokaságon értelmezzünk Lebesgue-mértéket és vektori Lebesgue-mértéket.

Definíció *(i) Legyen R a véges dimenziós valós V vektortér irányított, $M > 0$ dimenziós elemi részsokasága, $p : H \to R$ pozitív paraméterezés. Ekkor*

$$\boldsymbol{\lambda}_R := \left(\left(\bigwedge_{k=1}^{M} \partial_k p \right) \lambda_H \right) \circ \overset{-1}{p}$$

*az irányított részsokaság **vektori Lebesgue-mértéke**.*

(ii) Ha $< \ , \ >$ skaláris szorzat V-n, akkor

$$\lambda_R := \left(\sqrt{\det((\mathrm{D}p)^* \mathrm{D}p)} \lambda_H \right) \circ \overset{-1}{p} \qquad (*)$$

*a részsokaság **Lebesgue-mértéke** (skaláris sokaság-mértéke).*

Ugyanúgy, mint eddig, beláthatjuk, hogy a definíció független a paraméterezéstől.

Az $M = 1$ és $M = 2$ esetben ez a definíció megegyezik a korábbival.

Természetesen az $M = N$ eset is lehetséges. Egy N dimenziós részsokaság a V nyílt részhalmaza, amely akár az egész V is lehet. Legyen P a V-nek pozitív irányítású lineáris paraméterezése. Ekkor $\mathrm{D}P = P$ és $v_k := \partial_k P = \mathrm{D}P e_k$, ahol e_k az $\mathbb{R}^N$ k-ik standard bázisvektora. A

$$\boldsymbol{\lambda}_V = \left(\left(\bigwedge_{k=1}^{N} \partial_k P \right) \lambda_N \right) \circ \overset{-1}{P} = \left(\bigwedge_{k=1}^{N} v_k \right) (\lambda_N \circ \overset{-1}{P})$$

vektori Lebesgue-mértékkel már találkoztunk (lásd 16.3.(iv)).

Továbbá az $M = N$ esetben a $(*)$ összefüggés nem más, mint a helyettesítéses integrálás formulájának általánosítása, hiszen ekkor – és csak is ekkor – értelmes $\mathrm{D}p$ determinánsa, és $\sqrt{\det(\mathrm{D}p)^*\mathrm{D}p} = \sqrt{\det(\mathrm{D}p)^* \det \mathrm{D}p} = |\mathrm{D}p|$.

A V egy pontját nulla dimenziós sokaságnak tekintjük. Az $\{x\}$ skaláris Lebesgue-mértéke skaláris szorzattól függetlenül az x-re koncentrált Dirac-mérték: $\lambda_{\{x\}} := \delta_x$. Vektori Lebesgue-mértéke pedig az "irányítástól" függően δ_x vagy $-\delta_x$. Itt az irányításnak nem lehet az $M > 0$ dimenziós sokaságra definiált értelmet adni, ezért is tettük idézőjelbe; itt az irányítást mindig alkalomszerűen értelmezzük, ha szükséges.

21.8. Értelemszerűen általánosíthatjuk e fejezet definícióit (irányított) részsokaszágokra (amelyek nem szükségképpen elemiek). Egy ilyen részsokaság minden pontjának egy környezetében értelmes a vektori illetve skaláris sokaság-mérték (ez utóbbi akkor, ha adott egy skaláris szorzat). Két ilyen környezet közös részén a környezetek definiálta két vektori illetve két skaláris mérték megegyezik. Maga a sokaság lefedhető megszámlálható sok ilyen paraméterezett környezettel, s így a mértékek értelmezve vannak az egész sokaság olyan Borel-halmazain, amelyek részei véges sok paraméterezett környezet uniójában.

21.9. Még egy kicsit lehet – és kell is – általánosítani a szokásos skaláris sokaság-mértéket úgy, hogy skaláris szorzat helyett más bilineáris leképezést veszünk.

Legyen (V, B, h) pszeudo-euklideszi vektortér, B irányított. Az $A : \mathbb{R}^M \to V$ lineáris leképezés adjungáltja ekkor az az $A^* : V \to \mathbb{R}^M \otimes (B \otimes B)$ lineáris leképezés, amelyre minden $v \in V$ és $\xi \in \mathbb{R}^M$ esetén $h(v, A\xi) = b < A^*v/b, \xi >$ a $B \otimes B$ tetszőleges nemnulla b elemére. Ekkor $A^*A : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M \otimes (B \otimes B)$ lineáris leképezés, amelynek determinánsa $\overset{M}{\otimes}(B \otimes B)$ értékű. Ha tehát R M dimenziós részsokaság, amelynek p az $\mathbb{R}^M$ H nyílt részhalmazán értelmezett paraméterezése, akkor az R skaláris sokaság-mértékének a

$$\lambda_R := \left(\sqrt{|\det((\mathrm{D}p)^*\mathrm{D}p)|}\lambda_H\right) \circ \overset{-1}{p}$$

mennyiséget fogadjuk el. A gyökjel alatt azért kellett az abszolútérték, mert a szóbanforgó determináns nem szükségképpen pozitív, ha h nem pozitív definit. A sokaság skaláris mértéke szigorúan véve vektormérték, azonban az egy dimenziós $\overset{M}{\otimes} B$ vektortérben veszi fel az értékeit, ezért hívjuk mégis skalárisnak. Ez megfelel annak, hogy egy M dimenziós részsokaság mértékének a "fizikai dimenziója", más néven "mértékegysége" a hosszmérték "dimenziójának" M-ik hatványa (m :=méter a hosszegység, m^2 a területegység, m^3 a térfogategység).

21.10. Legyen R részsokaság a (V, B, h) pszeudoeuklideszi vektortérben és $L : V \rightarrowtail V$ olyan injektív folytonosan differenciálható leképezés, amelynek az inverze is folytonosan differenciálható (más szóval: L kis diffeomorfizmus). Tegyük fel, hogy R invariáns L-re, azaz $R \subset \mathrm{Dom}L$ és $L[R] \subset R$.

Ekkor, ha $p : H \to V$ az R (lokális) paraméterezése, akkor $L \circ p$ is az, ezért

$$\lambda_R = \left(\sqrt{\det(\mathrm{D}p)^*(\mathrm{D}L(\circ p))^*\mathrm{D}L(\circ p)\mathrm{D}p}\lambda_H\right) \circ \overset{-1}{p} \circ \overset{-1}{L}.$$

Emlékezetetünk arra, hogy egy $L : V \to V$ leképezést h-ortogonálisnak neveztünk, ha lineáris és $L^* = L^{-1}$. Ezek után a fentiekből egyszerűen adódik a következő:

Állítás *Ha az R részsokaság invariáns a h-ortogonális L leképezésre, akkor az R Lebesgue-mértéke is invariáns L-re, azaz*

$$\lambda_R = \lambda_R \circ \overset{-1}{L}.$$

21.11. A sokaságmértékeket felhasználhatjuk egy speciális típusú helyettesítéses integrálás elegáns és jól alkalmazható megfogalmazásához.

Vegyük a gömbkoordinátázást $\mathbb{R}^3$-ban (lásd 13.4.). Nyilvánvaló, hogy rögzített r mellett a (ϑ, φ) pár az r sugarú gömbhéj koordinátázása. Ismerve a gömb felületi mértékét (lásd 21.6.) a helyettesítéses integrálás formuláját átírhatjuk így:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x)dx = \int_0^\infty \left(\int_{S_r(0)} f(r\xi)\, d\lambda_{S_1(0)} \right) dr,$$

amit szimbolikusan szokás

$$\lambda_3 = \int_0^\infty \lambda_{S_1(0)}\, dr$$

alakba is írni. Ez hasonlít a Fubini-tételhez (Cavalieri-elvhez): egy halmaz mértékét megkapjuk úgy, hogy gömbfelületekkel való metszeteinek területeit összeintegráljuk.

Ezt általánosítjuk most.

Állítás *Legyen $G \subset \mathbb{R}^N$ összefüggő nyílt halmaz, $S : G \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, amelynek deriválltja sehol sem nulla. Ekkor $F_c := \overset{-1}{S}(\{c\})$ $N-1$ dimenziós hiperfelület minden $c \in \mathrm{Ran}S$ esetén, és*

$$\lambda_N(G) = \int_{\mathrm{Ran}S} \left(\frac{\lambda_{F_c}}{|\mathrm{D}S|} \right) (G \cap F_c)\, dc.$$

Bizonyítás Vegyük a G egy a elemét. Az általánosság megszorítása n nélkül feltehetjük, hogy $\partial_N S(a) \neq 0$. Ekkor az S változóját $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$ formába csoportosítva, az $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$, $(\xi, \eta, c) \mapsto S(\xi, \eta) - c$ függvényt tekintve, az implicitfüggvény-tétel szerint megadhatunk egy $\hat{\eta} : \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$, függvényt úgy, hogy $S(\xi, \hat{\eta}(\xi, c)) - c = 0$ és a szokásos pongyola jelöléssel (a "kalapot" is elhagyva $\hat{\eta}$-ról)

$$\frac{\partial \eta}{\partial \xi} = -\frac{\frac{\partial S}{\partial \xi}}{\frac{\partial S}{\partial \eta}}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial c} = \frac{1}{\frac{\partial S}{\partial \eta}}.$$

Ezzel rögzített c esetén $\xi \mapsto p_c(\xi) := (\xi, \eta(\cdot, c))$ az F_c paraméterezése, és $P : \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^N$, $(\xi, c) \mapsto (\xi, \eta(\xi, c))$ a G paraméterezése az a környezetében, továbbá

$$\mathrm{D}p_c = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{D}P = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial \xi} & \frac{\partial \eta}{\partial c} \end{pmatrix}.$$

Tehát

$$(\mathrm{D}p_c)^* \mathrm{D}p_c = \mathbf{1} + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \otimes \frac{\partial \eta}{\partial \xi},$$

$$(\mathrm{D}P)^* \mathrm{D}P = \begin{pmatrix} \mathbf{1} + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \otimes \frac{\partial \eta}{\partial \xi} & \frac{\partial \eta}{\partial c} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \eta}{\partial c} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^* & \left(\frac{\partial \eta}{\partial c} \right)^2 \end{pmatrix},$$

következésképpen

$$\det(\mathrm{D}p_c)^* \mathrm{D}p_c = 1 + \left| \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right|^2 = \frac{|\mathrm{D}S|^2}{|\frac{\partial S}{\partial \eta}|^2},$$

$$\det(\mathrm{D}P)^* \mathrm{D}P = \left(\frac{\partial \eta}{\partial c} \right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{\partial S}{\partial \eta} \right)^2},$$

másszóval,

$$\sqrt{\det(\mathrm{D}P(\xi, c))^* \mathrm{D}P(\xi, c)} = \frac{\sqrt{\det(\mathrm{D}p_c(\xi))^* \mathrm{D}p_c(\xi)}}{|\mathrm{D}S|},$$

és a helyettesítéses integrálás képlete, valamint a részsokaság-mérték definíciója alapján ezt kellett bizonyítanunk. ■

Természetesen ezt az eredményünket is lehet általánosítani arra az esetre, amikor G egy (V, B, h) pszeudoeuklideszi vektortér nyílt részhalmaza; ekkor azt kell megkövetelnünk, hogy S gradiense seholsem izotróp vektor, és $|\ |$ a pszeudohosszat jelöli.

21.12. Feladatok

1. Számítsuk ki a következő felületek felszínét (a felület mértékét a szokásos skaláris szorzattal definiált skaláris Lebesgue-mértékre vonatkozóan):

(i) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, z < 1\}$,

(ii) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ $\quad r > 0$ adott,

(iii) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1, z = e^{-(x^2+y^2)}\}$.

2. Legyen I intervallum, $f : I \to \mathbb{R}^+$ folytonosan differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy az

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = f(x)^2\}$$

"forgásfelület" felszíne pontosan akkor véges, ha $f\sqrt{1+(f')^2}$ Lebesgue-integrálható, és ez esetben a felszín $2\pi \int_I f\sqrt{1+(f')^2}$. (A forgásfelület felének paraméterezése $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y) \mapsto (x, y, \sqrt{f(x)^2 - y^2}$.)

3. Ha $u : \mathbb{R}^N \rightarrowtail \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor u grafikonja hiperfelület (N dimenziós részsokaság) $\mathbb{R}^{N+1}$-ben, $p := (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}, u)$ egy paraméterezése. Igazoljuk, hogy a szokásos skaláris szorzatra vonatkozóan $(\mathrm{D}p)^*\mathrm{D}p = 1 + |\mathrm{D}u|^2$.

4. Adjuk meg a következő részsokaságok skaláris Lebesgue-mértékét a szokásos skaláris szorzásra vonatkozóan, és adjuk meg, milyen számot rendel ez a mérték az egész részsokasághoz:

(ii) $\{(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = 1, u^2 - v^2 = 1\}$,

(ii) $\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$.

5. Számítsuk ki adott $r > 0$ esetére az $F := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x|^2 = r^2\}$ felületre vett $\int_R < f, d\boldsymbol{\lambda}_R >$ integrálokat az $\mathbb{R}^3$ szokásos skalárszorzatára vonatkozóan, ahol $\boldsymbol{\lambda}_R$ a 21.5. szerinti azonosításban adott $\mathbb{R}^3$ értékű mértéket jelöli (egy tetszés szerint választott irányításra vonatkozóan):

(i) $f := \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$,

(ii) $f := \alpha \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, ahol $a \in \mathbb{R}^3$ adott, és $\times$ a vektoriális szorzás.

6. Vegyük $\mathbb{R}^4$-en az $(x,y) \mapsto x \cdot y := -x_0 y_0 + \sum_{k=1}^{3} x_k y_k$ Lorentz-formát. Adjuk meg az

$$\{x \in \mathbb{R}^4 \mid x \cdot x = -1, x_0 > 0\}$$

hiperfelület skaláris mértékét a Lorentz-formára (lásd 21.8.) és a szokásos skaláris szorzásra vonatkozóan is. (Útmutatás: használjuk az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, x_1, x_2, x_3\right)$ paraméterezést.)

7. Az N dimenziós V-beli hiperfelületek vektori mértéke $\bigwedge^{N-1} V$ értékű. Tegyük fel, hogy V-n adott egy skaláris szorzás és V irányított, és azonosítsuk a vektori mértéket egy V értékűvel. Általánosítsuk ezt a (V, B, h) pszeudoeuklideszi esetre.

8. Használjuk a 21.11. jelöléseit. Legyen $f : G \to G$ folytonosan differenciálható bijekció, amelynek az inverze is folytonosan differenciálható, és tegyük fel, hogy

(i) az N dimenziós Lebesgue-mérték invariáns f-re, azaz $\lambda_N \circ \overset{-1}{f} = \lambda_N$,

(ii) minden F_c részsokaság invariáns f-re, azaz $f[F_c] = F_c$, ami azzal egyenértékű, hogy $S \circ f = S$.

Ekkor $\dfrac{\lambda_{F_c}}{|\mathrm{D}S|}$ az $f|_{F_c}$-re invariáns mérték.

9. Mutassuk meg, hogy az ebben a fejezetben mondottak értelemszerűen átvihetők (normált illetve véges dimenziós vektortér feletti) affin térben levő részsokaságokra.

22. A Gauss–Stokes-tétel

22.1. A híres és sokat használt Gauss–Stokes tételt pontosan megfogalmazzuk, nem bizonyítjuk; az egyes különösen fontos speciális eseteket közelebbről megvizsgáljuk.

22.2. Legyen V N dimenziós valós vektortér, $1 \le M \le N$, és $f : V \rightarrowtail \overset{M-1}{\bigwedge} V^*$ folytonosan differenciálható függvény. $\overset{M-1}{\bigwedge}$ a $\overset{M-1}{\otimes} V^*$ lineáris altere, ezért f-et $\overset{M-1}{\otimes} V^*$ értékűnek is tekinthetjük. Ha $x \in \mathrm{Dom} f$, akkor $\mathrm{D}f(x) : V \to \overset{M-1}{\otimes} V^*$ lineáris leképezés, azaz $\overset{M}{\otimes} V^*$ eleme. $\mathrm{D}f(x)$ antiszimmetrikus részének $(-1)^{M-1}(M-1)!$-szorosát $(\mathrm{D} \wedge f)(x)$-szel (vagy vagy $df(x)$-szel jelöljük, és f **antiszimmetrikus** vagy **külső** deriváltjának hívjuk.

Az $M = 1$ esetben f valós értékű függvény, és $\mathrm{D} \wedge f = \mathrm{D}f$.

Ha $M = 2$, akkor $f : V \rightarrowtail V^*$, $\mathrm{D} \wedge f : V \rightarrowtail V^* \wedge V^*$, és $\mathrm{D} \wedge f = (\mathrm{D}f)^* - \mathrm{D}f = \mathrm{D} \otimes f - (\mathrm{D} \otimes f)^*$ (Analízis IV.B.18.1.).

22.3. Állítás *Legyen a V véges dimenziós valós vektortérben R olyan $M > 0$ dimenziós irányítható részsokaság, amelynek $\partial R := \overline{R} \setminus R$ pereme (határa) nemüres $M - 1$ dimenziós részsokaság. Ekkor ∂R irányítható, és V valamint R irányítása meghatározza ∂R egy irányítását.*

22.4. Állítás (***Gauss–Stokes-tétel***) *Legyen a V véges dimenziós irányított vektortérben R olyan $M > 0$ dimenziós irányított részsokaság, hogy ∂R $M-1$ dimenziós részsokaság vagy üres.*

Legyen $C \subset V$ olyan nyílt halmaz, hogy $R \subset C$, $\overline{R} \subset \overline{C}$, és $f : \overline{C} \to \bigwedge^{M-1} V^*$ folytonos függvény, amely folytonosan differenciálható C-n.

Ha $\partial R \neq \emptyset$, lássuk el az előbbi állítás szerinti irányítással, és vegyük R-en is, ∂R-en is az adott irányításnak megfelelő vektori Lebesgue-mértéket. Ez esetben f pontosan akkor integrálható $\boldsymbol{\lambda}_{\partial R}$ szerint, ha $\mathrm{D} \wedge f$ integrálható $\boldsymbol{\lambda}_R$ szerint, és ekkor

$$\int_R (\mathrm{D} \wedge f | d\lambda_R) = \int_{\partial R} (f | d\boldsymbol{\lambda}_{\partial R}). \qquad (*)$$

Ha ∂R üres és $\mathrm{D} \wedge f$ integrálható $\boldsymbol{\lambda}_R$ szerint, akkor is teljesül a fenti egyenlőség, ha az üres halmaz vektori Lebesgue-mértékét nullának definiáljuk (tehát a bal oldalon nulla áll).

22.5. Megvizsgáljuk, mit is mond a Gauss–Stokes-tétel egyes speciális esetekben.

(i) Ha $M = 1$, akkor $R =: G$ olyan görbe, melynek lezártja peremes görbe. G határa a peremes görbe k kezdő és v végpontja. A perem "irányítása" itt azt jelenti, hogy $\boldsymbol{\lambda}_{\partial G} = \delta_v - \delta_k$. Ennek megfelelően az $f : V \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvényre $(*)$ a már megismert (lásd 20.8.5.)

$$\int_G (\mathrm{D}f | d\boldsymbol{\lambda}_G) = f(v) - f(k)$$

Newton–Leibniz-formulába megy át. Ha a görbe zárt (a pereme üres), akkor az integrál nulla.

Ha V-n adott egy skaláris szorzás, akkor a $V^* \equiv V$ azonosítással $\mathrm{D}f$ helyét $\mathrm{grad}f$ veszi át, $(\ |\ )$ helyét pedig a skaláris szorzás:

$$\int_G < \mathrm{grad}f | d\boldsymbol{\lambda}_G >= f(v) - f(k)$$

(ii) Ha $M = 2$, akkor $R =: F$ olyan felület, amelynek a pereme görbe. A $(*)$ összefüggés ekkor Stokes-tétel néven ismert. A szokásosan idézett alakját akkor kapjuk, ha feltesszük, hogy V három dimenziós, skalárszorzatos (és eleve irányított); ekkor a

$$V \wedge V \equiv V \quad \text{és} \quad V^* \equiv V$$

azonosítással mind $\boldsymbol{\lambda}_F$, mind f V értékűnek tekinthető, $\mathrm{D}\wedge f$ helyét átveszi $\mathrm{rot} f$, $(\ |\ )$ helyét pedig a skaláris szorzás:

$$\int_F < \mathrm{rot} f, d\boldsymbol{\lambda}_F >= \int_{\partial F} < f, d\boldsymbol{\lambda}_{\partial F} > .$$

Ha a felület zárt, akkor az integrál nulla.

A felület és a peremének egymáshoz tartozó irányítását szemléletesen így írhatjuk le: a perem (görbe) bármely x pontjában a $v(x)$ érintővektor, a felületnek az x-hez elég közeli z pontjában az $n(z)$ normálvektor és az $x-z$ vektor jobb sodrású (azaz pozitívan irányított) rendszert alkotnak.

(iii) Ha $M = N$, akkor $R =: U$ olyan nyílt halmaz, amelynek a pereme hiperfelület. Ekkor a $(*)$ összefüggés Gauss-tétel néven ismert, amelyet (V, B, h) pszeudoeuklideszi térben át lehet fogalmazni, és így kapjuk a szokásos alakját. Most az egyszerűbb irásmód kedvéért azt vesszük, amikor $B = \mathbb{R}$; ebből az általános eset egy kis bonyolítással megkapható. Ekkor az

$$\bigwedge^N V \equiv \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \bigwedge^{N-1} V \equiv V$$

(Analízis II.30.10.), valamint a

$$V^* \equiv V$$

azonosítással a $\boldsymbol{\lambda}_U$ mérték valós értékűnek, az f függvény V értékűnek tekinthető, $\mathrm{D}\wedge f$ szerepét átveszi $\mathrm{div} f$, a dualitás $(\ |\ )$ bilineáris formájának helyébe $\overset{N-1}{\bigwedge} \equiv V$ esetén h (azaz a pontszorzás), $\overset{N}{\bigwedge} \equiv \mathbb{R}$ esetén a valós számok szorzása lép. Így tehát

$$\int_U \mathrm{div} f \; d\boldsymbol{\lambda}_U = \int_{\partial U} < f, d\boldsymbol{\lambda}_{\partial U} > .$$

A jobb megértés kedvéért egy kicsit részletezzük a mondottakat.

Legyen $e_1, \dots, e_N$ a V-nek pozitívan irányított ortonormált bázisa. Ekkor az idézett azonosításokat

$$\bigwedge^N V \equiv \mathbb{R}, \quad \bigwedge_{i=1}^N e_i \equiv 1,$$

$$\bigwedge^{N-1} V \equiv V, \quad (-1)^{k-1} \bigwedge_{i=1, i\neq k}^N e_i \equiv e_k \quad (k = 1, \dots, N)$$

írja le a bázistól függetlenül.

Ha tehát $f = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k (-1)^{k-1} \bigwedge_{i=1, i\neq k}^{N} e_k$, akkor

$$D \wedge f = \sum_{k=1}^{n} \partial_j \varphi_k (-1)^{k-1} e_j \wedge \bigwedge_{i=1, i\neq k}^{N} e_i = \sum_{k=1}^{n} \partial_k \varphi_k \bigwedge_{i=1}^{N} e_i \equiv \mathrm{div} f.$$

22.6. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az f függvénynek, amelyre a Gauss–Stokes-tételt alkalmazzuk, az R részsokaságot magába foglaló nyílt halmazon differenciálhatónak kell lennie, különben nem feltétlenül igaz az integrálok egyenlősége. Íme két ellenpélda:

(i) Az $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto \dfrac{x}{|x|^3}$ függvény folytonosan differenciálható, a divergenciája nulla. Ezért az r sugarú, nulla középpontú gömbre integrálva a divergenciáját – amely csak egy pontban nincs értelmezve, de ez az integrálás szempontjából lényegtelen – nullát kapunk, míg magát a függvényt integrálva e halmaz határára, vagyis az r sugarú gömbhéjra, az eredmény $4\pi \neq 0$. (Ez a függvény egy ponttöltés elektromos mezőjét írja le.)

(ii) Az $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0) \times \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}(-x_2, x_1, 0)$ függvény folytonosan differenciálható, a rotációja nulla. Ezért az $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ síkban levő r sugarú, nulla középpontú körlapra integrálva a rotációját – amely itt csak egy pontban nincs értelmezve – nullát kapunk, míg magát a függvényt integrálva e halmaz határára, vagyis az r sugarú körvonalra, az eredmény $2\pi \neq 0$. (Ez a függvény egy végtelen egyenes vezetőben folyó egyenáram mágneses mezőjét írja le.)