MATOLCSI TAMÁS

ANALÍZIS VII.
Differenciálegyenletek

Tartalom

V. TOVÁBBI ISMERETEK

VI. STABILITÁSELMÉLET

VII. ELSŐRENDŰ PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

I. ALAPISMERETEK

1. Elsőrendű közönséges differenciálegyenletek

1.1. A differenciálegyenletek olyan egyenletek, amelyekben függvény az ismeretlen, és az egyenletben szerepel az ismeretlen deriváltfüggvénye is. Ha az ismeretlen függvény értelmezési tartománya egydimenziós valós affin tér (például $\mathbb{R}$) részhalmaza, akkor **közönséges** differenciálegyenletről beszélünk, ha többdimenziós affin tér (például $\mathbb{R}^N$, $N > 1$) részhlamaza, akkor **parciális** differenciálegyenletről. Ha az egyenletben az ismeretlen függvény n-edik deriváltja szerepel, de annál magasabb rendű nem, akkor a differenciálegyenletet **n-edrendűnek** hívjuk.

Ezeket a meglehetősen laza fogalmakat pontossá tehetjük az egyenletek pontos megfogalmazásával (Analízis I.11.).

Legyen $\mathbf{V}$ véges dimenziós vektortér. Tudjuk, hogy $\mathbf{V}$-n minden norma ekvivalens, ezért nyílt halmazokról, folytonosságról, differenciálhatóságról stb. beszélhetünk norma nékül is. Néha azonban – bizonyos nagyságrendi becsléseknél – szükségünk van normára is; ezt szokásosan a $\| \ \|$ szimbólummal jelöljük.

$\mathbb{R} \times \mathbf{V}$ fontos szerepet játszik a differenciálegyenletekkel kapcsolatban. $\mathbf{V}$ lehet komplex vagy valós vektortér, $\mathbb{R} \times \mathbf{V}$ viszont már csak valós vektortér, ami szintén véges dimenziós, tehát itt sem kell a norma az említett fogalmakhoz. Ha mégis szükségünk van rajta normára, mindig a "végtelen" normát használjuk; ekkor a $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbf{V}$ pontnak az ϵ sugarú környezete

$$K_\epsilon(t, x) = \{(s, y) \mid |s - t| < \epsilon, \|y - x\| < \epsilon\}.$$

Legyen $f : \mathbb{R} \times \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbf{V}$ folytonos függvény, amelynek értelmezési tartománya nyílt halmaz. Vezessük be az

$$X_f := \{r : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V} \mid \\ r \text{ folytonosan differenciálható, } \mathrm{Dom} r \text{ intervallum}, \mathrm{Graph} r \subset \mathrm{Dom} f\},$$

valamint a

$$C := \{z : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V} \mid z \text{ folytonos}\}$$

jelölést, és legyen

$$F : X_f \to C, \quad r \mapsto \dot{r} - f \circ (\mathrm{id}_\mathbb{R}, r),$$

ahol $\dot{r}$ az r deriváltja.

Az

$$(x \in X_f)? \qquad F(x) = 0$$

egyenletet **elsőrendű, közönséges differenciálegyenletnek** nevezzük.

1.2. Mint az egyenletek általános értelmezésénél (Analízis I.11.) is utaltunk rá, az egyenletek jelölését értelemszerűen és alkalmasan megváltoztathatjuk, hogy könnyebben áttekinthetők legyenek. Így tesszük ezt most is. Az imént értelmezett differenciálegyenletet

$$(*) \qquad (x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \qquad \dot{x} = f \circ (\mathrm{id}_\mathbb{R}, x)$$

alakba írjuk, és mellé értjük, hogy ennek megoldása olyan $r : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V}$ függvény, hogy

(i) $\mathrm{Dom} r$ nyílt intervallum,
(ii) r folytonosan differenciálható,

és minden $t \in \mathrm{Dom} r$ esetén

(iii) $(t, r(t)) \in \mathrm{Dom} f$,
(iv) $\dot{r}(t) = f(t, r(t))$.

Jegyezzük meg azt a fontos tényt, hogy egy megoldásnak az értelmezési tartománya bármely nyílt intervallumára való leszűkítése is megoldás.

Továbbá a differenciálegyenlet megoldásai intervallumon értelmezett folytonosan differenciálható függvények, tehát folytonosak és értelmezési tartományuk összefüggő. Ezért az értékkészletük és grafikonjuk is összefüggő halmaz.

Tehát megoldások keresésekor az f értelmezési tartományának csak egy összefüggő komponense érdekes. Ezért elméleti meggondolások szempontjából mindig feltehetjük, hogy ez az értelmezési tartomány összefüggő.

1.3. A differenciálegyenletet szemléletessé is tehetjük a következőképpen. Tudjuk, hogy $\{(t, r(t)) \mid t \in \mathrm{Dom} r\}$ görbe $\mathbb{R} \times \mathbf{V}$ -ben (Analízis IV.A.12.5.(i)), amelynek érintője a t paraméterértéknél $(1, \dot{r}(t))$. Ábrázoljuk a lap síkjában $\mathbb{R} \times \mathbf{V}$-t a szokásos módon, és jelenítsük meg az

$$\mathbb{R} \times \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbb{R} \times \mathbf{V}, \quad (t, x) \mapsto (1, f(t, x))$$

vektormezőt úgy, hogy minden $(t, x) \in \mathrm{Dom} f$ ponthoz rajzoljuk be azt a vektort, amelynek "vízszintes" komponense 1, "függőleges" komponense pedig $f(t, x)$. A differenciálegyenlet megoldása olyan függvény, amely grafikonjának bármely pontjában az érintő éppen az ott előírt vektor.

1.4. A következő elnevezések honosodtak meg a differenciálegyenletek elméletében a $(*)$ differenciálegyenletre vonatkozóan:
jobb oldal: az f függvény;
differenciálegyenlet értelmezési tartománya: jobb oldal értelmezési tartománya;
fázistér: $\mathbf{V}$, a jobb oldal érkezési halmaza;
kibővített fázistér vagy fejlődési tér: $\mathbb{R} \times \mathbf{V}$;
megoldásgörbe vagy integrálgörbe: megoldás grafikonja;
fázisgörbe: megoldás értékkészlete.

A megoldásgörbe valóban görbe $\mathbb{R} \times \mathbf{V}$-ben. A fázisgörbe $\mathbf{V}$ részhalmaza, a megoldásgörbe projekciója. Ez nem feltétlenül görbe az általunk használt értelemben; lehet például egyetlen pont is.

A differenciálegyenletet **autonómnak** nevezzük, ha a jobb oldal csak a fázistér pontjaitól függ, azaz, ha van olyan $g : \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbf{V}$ függvény, hogy $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R} \times \mathrm{Dom} g$, és $f(t, x) = g(x)$ minden $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathrm{Dom} g$ esetén.

1.5. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a differenciálegyenletekkel kapcsolatban általában két különböző mennyiséget szokás ugyanazzal a szimbólummal jelölni; mi is követjük ezt a szokást. Nevezetesen, eddigi jelöléseinkben x egyrészt a differenciálegyenlet változóját (a keresett $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V}$ függvényt), másrészt a jobb oldal változóját ($\mathbf{V}$ elemét) jelenti. Ha tudatosítjuk magunkban ezt a kettősséget és mindig figyelünk arra, miről van szó, a félreértés könnyen elkerülhető.

Szokás a differenciálegyenletet $\dot{x} = f(t, x)$ vagy $y' = f(x, y)$ alakban is írni. Ekkor t illetve x a "független változó" "szokásos" jele (t az idő, mint független változó, x valamely távolság, koordináta stb.). Célszerűen mi is alkalmazunk ilyen formát azzal a kiegészítéssel, hogy külön jelölésben feltüntetjük a független változót. Tehát a $(*)$ differenciálegyenlet helyett ezt is írjuk:

$$(x : (t)\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \quad \dot{x} = f(t,x) \quad \text{vagy} \quad \frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

és természetesen

$$(y : (x)\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \quad y' = f(x,y) \quad \text{vagy} \quad \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

ugyanaz a differenciálegyenlet. Ilyen jelölés különösen akkor elengedhetetlen, amikor a jobb oldalon mindenféle betűk (”paraméterek”) is megjelennek, és el akarjuk kerülni a tévedést. Könyvekben sokszor lehet találkozni például

$$\xi' = \alpha\xi^2 + h(p)\xi - \phi$$

alakú differenciálegyenlettel; vajon itt α, p és ϕ adott értékek-e, vagy valamelyik a független változó?

Adott formulával meghatározott differenciálegyenlet értelmezési tartományán, ha mást nem mondunk, azt a legbővebb nyílt halmazt értjük, amelyen a formulának értelme van. Ilyen esetben az első dolgunk legyen az értelmezési tartomány tisztázása. Könyvünk feladataiban erre az (értelmezési tartomány?) figyelmeztet.

Ilyen esetekben a keresett (ismeretlen) függvény értelmezési tartományának vagy értékkészletének szűkebb meghatározásával jelezhetjük, hogy a differenciálegyenlet értelmezési tartományát leszűkítettük arról a legbővebb nyílt halmazról, ahol a formulának értelme van. Például az

$$(x : (t)\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \quad \dot{x} = \frac{x}{t}$$

differenciálegyenlet értelmezési tartománya, megállapodásunk szerint, $\{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid t \neq 0\}$. Ez szétesik az $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$ és $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ diszjunkt nyílt halmazokra. Mivel a megoldások szempontjából az értelmezési tartománynak mindig csak egy-egy összefüggő komponense érdekes, előfordulhat, hogy csak olyan megoldásokra vagyunk kíváncsiak, amelyek a pozitív félegyenesen vannak értelmezve. Ez tulajdonképpen azt jelenti, hogy a differenciálegyenletet leszűkítjük az $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ halmazra, amit célszerűen így jelölünk:

$$(x : (t)\mathbb{R}^+ \rightarrowtail \mathbb{R})? \quad \dot{x} = \frac{x}{t}.$$

Hasonló értelmű az

$$(x : (t)\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^+)? \quad \dot{x} = \frac{t}{x}$$

jelölés.

Végül érdemes megemlíteni, hogy a gyakorlati alkalmazásokban legtöbbször a $\mathbf{V} = \mathbb{K}^N$ esettel találkozunk. Ekkor az ismeretlen is és a differenciálegyenlet jobb oldala is N komponensből álló függvény. Tehát, ha $N > 1$, akkor a differenciálegyenlet mint N darab $\mathbb{K}$ értékű egyenlet együttese jelenik meg; szokás ezért ekkor differenciálegyenlet-rendszerről beszélni. Egyenlet és egyenletrendszer azonban nem elkülönülő dolgok: bizonyos egyenleteket, ha akarjuk, egyenletrendszernek foghatunk fel (Analízis I.11.).

1.6. Elméleti fizikában előfordul, hogy $\mathrm{I} \rightarrowtail \mathrm{V}$ függvényekre írunk fel differenciálegyenletet, ahol I és V affin terek, I egydimenziós. Tudjuk, hogy egy ilyen függvény deriváltjának értékei $\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}}$-ben vannak, ahol $\mathbf{I}$ és $\mathbf{V}$ az I, illetve V alatti vektorterek. Ekkor tehát a differenciálegyenletet egy $f : \mathrm{I} \times \mathrm{V} \rightarrowtail \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}}$ folytonos függvénnyel adjuk meg

$$(x : \mathrm{I} \rightarrowtail \mathrm{V})? \qquad \dot{x} = f \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{I}}, x)$$

alakban.

Az ilyen differenciálegyenletekre, értelemszerűen, minden elmondható, amit a valós változós, vektor értékű függvényekre vonatkozó differenciálegyenletekről el lehet mondani. Ezért a továbbiakban, az egyszerűség kedvéért, maradunk az 1.2-ben meghatározott differenciálegyenleteknél.

1.7. A gyakorlat sokszor vezet **implicit** differenciálegyenletre, vagyis olyanra, amelyben az ismeretlen deriváltja is valamely függvénykapcsolatban jelenik meg. Közelebbről, a differenciálegyenlet

$$F \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{R}}, x, \dot{x}) = 0$$

alakú, ahol $F : \mathbb{R} \times \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbf{V}$ adott függvény. Ezt akkor tudjuk kezelni, ha bizonyos tartományokon explicitté tehetjük, azaz az előbbiekben ismertetett alakra hozhatjuk.

1.8. Feladatok

1. Az $(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad \dot{x} = 3x^{2/3}$ differenciálegyenlet értelmezési tartománya $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, megoldásai például

(i) $r(t) = 0 \quad (t \in \mathbb{R})$;

(ii) bármely adott $t_o \in \mathbb{R}$ és $x_o \in \mathbb{R}$ esetén $r(t) = (t - t_o + \sqrt[3]{x_o})^3 \quad (t \in \mathbb{R})$;

(iii)

$$r(t) = \begin{cases} (t+1)^3 & \text{ha } t \leq -1, \\ 0 & \text{ha } -1 < t < 0, \\ t^3 & \text{ha } 0 \leq t. \end{cases}$$

Keressünk további megoldásokat, amelyek az egész $\mathbb{R}$-en értelmezve vannak!

2. Adott $a \in \mathbb{K}$ esetén az $(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \quad \dot{x} = ax$ differenciálegyenlet értelmezési tartománya $\mathbb{R} \times \mathbf{V}$, és bármely $x_o \in \mathbf{V}$ esetén megoldása az $r(t) = e^{at}x_o$ $(t \in \mathbb{R})$ függvény. Van más, az egész $\mathbb{R}$-en értelmezett megoldás?

3. A differenciálegyenlet értelmezésénél azt követeltük meg, hogy a jobb oldal legyen folytonos függvény. Bizonyítsuk be, hogy ha r a $(*)$ differenciálegylet megoldása, és f n-szer differenciálható, akkor r $(n+1)$-szer differenciálható. (Útmutatás: ha f differenciálható, akkor $t \mapsto f(t, r(t)) = \dot{r}(t)$ differenciálható, és deriváltja a $t \mapsto \mathrm{D}_{\mathbb{R}} f(t, r(t)) + \mathrm{D}_{\mathbf{V}} f(t, r(t))\dot{r}(t) = \ddot{r}(t)$ függvény, ahol $\mathrm{D}_{\mathbb{R}}$ és $\mathrm{D}_{\mathbf{V}}$ a megfelelő változók szerinti parciális deriválást jelöli (Analízis IV.B.4.3.)

2. Kezdetiérték-problémák

2.1. Egy differenciálegyenletnek általában igen sok megoldása lehet, amint azt az előző példák is mutatták. A gyakorlati életben a probléma leginkább úgy merül fel, hogy a megoldások közül csak bizonyos tulajdonságúakat keresünk. E tulajdonságok a leggyakrabban úgy fogalmazódnak meg, hogy elő van írva a megoldás egy adott helyen felvett értéke, amelyet **kezdeti értéknek** szokás hívni.

Pontosan arról van szó, hogy az 1.1-ben értelmezett $F : X_f \to C$ függvénynek egy leszűkítésével keletkező egyenletet vesszük; ezt most csak az 1.2-ben adott formához igazodva fogalmazzuk meg.

Legyen f olyan függvény, mint korábban, és $(t_o, x_o) \in \mathrm{Dom} f$. Az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \qquad \dot{x} = f \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{R}}, x),$$

$$(*) \qquad x(t_o) = x_o$$

kezdetiérték-probléma megoldása olyan $r : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V}$ függvény, hogy

(i) r megoldása a differenciálegyenletnek;

(ii) $t_o \in \mathrm{Dom} r,\ r(t_o) = x_o$.

Sokszor a kezdetiérték-probléma megoldása helyett azt mondjuk, hogy a differenciálegyenletnek a (t_o, x_o) **kezdeti feltételt kielégítő megoldása** vagy a differenciálegyenletnek a (t_o, x_o) **ponton áthaladó megoldása**.

2.2. Általában még a kezdetiérték-problémának sem egyértelmű a megoldása. Ha r megoldás, és I a $\mathrm{Dom} r$ részintervalluma, $t_o \in I$, akkor $r|_I$ is megoldás. Egyértelműséget tehát legfeljebb leszűkítés erejéig várhatunk el. Ezt a következőképp fogalmazhatjuk meg pontosan.

Definíció *A $(*)$ kezdetiérték-probléma megoldása* ***lokálisan egyértelmű****, ha van egy olyan intervallum t_o körül, hogy bármely két megoldás megegyezik az értelmezési tartományuk közös részének az intervallumba eső részén.*

Az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad \dot{x} = 3x^{2/3},$$

$$x(0) = 0$$

kezdetiérték-probléma megoldása nem lokálisan egyértelmű: az 1.8.1-ben adott (i) és (iii) is megoldás, és nincs a 0 körül olyan intervallum, ahol a két megoldás megegyezne.

2.3. A kezdetiérték-problémát a későbbiekben jobban kezelhető integrálegyenletté írjuk át. Vezessük be a

$$Z := \{r : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V} \mid \\ r \text{ folytonos}, \operatorname{Dom} r \text{ intervallum}, \operatorname{Graph} r \subset \operatorname{Dom} f,\ t_o \in \operatorname{Dom} r\}$$

jelölést. Ha $r \in Z$, akkor az

$$\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V}, \qquad t \mapsto x_o + \int_{t_o}^{t} f(s, r(s))\, ds$$

függvény

(i) értelmezve van Dom$r$-en,
(ii) folytonos,
(iii) a t_o helyen az x_o értéket veszi fel.

Az (ii) és (iii) tulajdonság miatt van olyan intervallum, amely tartalmazza t_o-t, és a függvény grafikonjának az intervallumhoz tartozó része még Dom$f$-be esik. Jelölje $\operatorname{Dom}\big(\phi(r)\big)$ a legbővebb ilyen intervallumot, és $\phi(r)$ a fenti függvény leszűkítését erre az intervallumra. Ezzel a definícióval $\phi(r)$ is a Z eleme lesz, azaz megadtunk egy $\phi : Z \to Z$ leképezést.

Állítás *$r \in Z$ akkor és csak akkor megoldása a 2.1-beli kezdetiérték-problémának, ha nyílt intervallumon van értelmezve és fixpontja ϕ-nek, azaz $r = \phi(r)$.*

Bizonyítás Legyen r a kezdetiérték-probléma megoldása. Integráljuk az

$$s \mapsto \dot{r}(s) = f(s, r(s)) \qquad (s \in \operatorname{Dom} r)$$

függvényt t_o-tól t-ig, ahol $t \in \operatorname{Dom} r$. A bal oldalon a Newton–Leibniz-szabály szerint $r(t) - r(t_o)$ jelenik meg, a jobb oldalon pedig $\int_{t_o}^{t} f(s, r(s))\, ds$. Egyszerű átrendezés adja, hogy

$$r(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(s, r(s))\, ds \qquad (t \in \operatorname{Dom} r),$$

azaz $r = \phi(r)$.

Tegyük most fel, hogy Dom$r$ nyílt és $r = \phi(r)$. Ekkor $r(t_o) = x_o$, továbbá r differenciálható (Analízis V.A.13.4.) és $\dot{r}(t) = f(t, r(t))$ ha $t \in$ Dom$r$. ∎

Többször fel fogjuk használni a következő egyszerű tényt: ha $r \in Z$ és $r = \phi(r)$, akkor r leszűkítése az értelmezési tartományának belsejére szintén fixpontja ϕ-nek, azaz megoldása a kezdetiérték-problémának.

2.4. Feladatok

1. Az a legegyszerűbb differenciálegyenlet-típus, amelyben a jobb oldal nem függ az ismeretlen függvény értékeitől: adva van valamely I intervallumon értelmezett folytonos $h : I \to \mathbf{V}$, az f jobb oldal értelmezési tartománya $I \times \mathbf{V}$ és $f(t, x) = h(t)$ minden $t \in I, x \in \mathbf{V}$ esetén. Más szóval a differenciálegyenlet

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})?, \quad \dot{x} = h$$

alakú. Ekkor a megoldásokat egyszerű integrálással kapjuk meg.

Állítsuk elő a következő kezdetiérték-problémák megoldásait:
(i) $(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \quad \dot{x} = \sin, \qquad x(0) = 2;$
(ii) $(x : (t)\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{C})? \quad \dot{x} = t + it^2, \quad x(1) = i;$
(iii) $(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{C})? \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t+i}, \qquad x(2) = 0.$

3. Megoldások létezése és egyértelműsége

3.1. Láttuk, hogy az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \qquad \dot{x} = f \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{R}}, x),$$

$$(*) \qquad x(t_o) = x_o$$

kezdetiérték-probléma megoldása általában nem egyértelmű. De azt se tudjuk még, hogy van-e egyáltalán megoldása. Meg lehet mutatni, hogy mindig létezik megoldás; mi ezzel most nem foglalkozunk (az úgynevezett Peano-féle egzisztencia-tétel szerint a fenti kezdetiérték-problémának – folytonos f függvény esetén – mindig van megoldása). Mi az f-re kirótt további feltétellel bizonyítjuk be a megoldás létezését és lokális egyértelműségét.

Bevezetjük $\delta > 0$ esetére az

$$I_\delta(t_o) := \{t \in \mathbb{R} \mid |t - t_o| < \delta\},$$

$$G_\delta(x_o) := \{x \in \mathbf{V} \mid \|x - x_o\| < \delta\}$$

jelöléseket, ahol $\| \ \|$ valamely norma $\mathbf{V}$-n (emlékeztetünk, hogy véges dimenziós vektortéren a normák ekvivalensek).

3.2. Definíció *Azt mondjuk, hogy az* $f : \mathbb{R} \times \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbf{V}$ *függvény a* $(t_o, x_o) \in \mathrm{Dom} f$ *egy környezetében a* $\mathbf{V}$*-változója szerint* ***univerzális Lipschitz-feltételnek*** *tesz eleget, ha létezik a* t_o*-nak* I *környezete, az* x_o*-nak* G *környezete és* $L > 0$ *úgy, hogy* $I \times G \subset \mathrm{Dom} f$, *és*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\| \qquad (t \in I,\ x, y \in G))\,.$$

Ha f a $\mathbf{V}$-változója szerint folytonosan differenciálható a (t_o, x_o) egy $I \times G$ konvex környezetében, akkor ott eleget tesz az univerzális Lipschitz-feltételnek. Valóban, ekkor a középértéktétel szerint minden $t \in I$, $x, y \in G$ esetén

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\|,$$

ahol $L := \sup_{I \times G} \|\mathrm{D}_{\mathbf{V}} f\| < \infty$.

Állítás *Ha* K *kompakt halmaz az* f *értelmezési tartományában, és* f *a* K *minden pontjának egy környezetében univerzális Lipschitz-feltételnek tesz eleget a* $\mathbf{V}$*-változójában, akkor létezik* $L > 0$ *úgy, hogy* $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\|$ *minden* (t,x), $(t,y) \in K$ *esetén.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz. Ekkor minden n természetes számhoz létezik olyan $(t_n, x_n), (t_n, y_n) \in K$, hogy

$$\|f(t_n, x_n) - f(t_n, y_n)\| > n\|x_n - y_n\|.$$

Az $n \mapsto (t_n, x_n)$ sorozatnak van a K-ban konvergens részsorozata; válasszunk ki egy ilyen részsorozatot, és ugyanazzal az indexsorozattal vegyük az $n \mapsto (t_n, y_n)$ részsorozatát is. A részsorozatok átjelölésével feltehetjük, hogy az eredeti sorozatok egyenlők ezekkel a részsorozatokkal. Most az $n \mapsto (t_n, y_n)$ sorozatnak válasszuk ki egy konvergens részsorozatát és ugyanazzal az indexsorozattal az $n \mapsto (t_n, x_n)$ részsorozatát. Most már mindkét részsorozat konvergens, és ismét átjelöléssel vehetjük úgy, hogy az eredeti sorozatok konvergensek:

$$(t_o, x_o) := \lim_{n\to\infty} (t_n, x_n), \qquad (t_o, y_o) := \lim_{n\to\infty} (t_n, y_n).$$

Mivel f folytonos, a fenti egyenlőtlenség bal oldalának van határértéke, és ez éppen $\|f(t_o, x_o) - f(t_o, y_o)\|$. Következésképpen az egyenlőtlenség jobb oldala korlátos, ami csak úgy lehet, hogy $x_o = y_o$.

A (t_o, x_o) pontnak van olyan környezete, amelyben bármely (t, x), (t, y) pontra

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L_o\|x - y\|$$

teljesül. Viszont egy n_o küszöbindexnél nagyobb n-ek esetén (t_n, x_n), (t_n, y_n) már benne van ebben a környezetben; ha n az L_o-nál is nagyobb, a két egyenlőtlenség ellentmond egymásnak. Feltételezésünk tehát tarthatatlan, és ezzel bebizonyítottuk, amit akartunk.

3.3. Állítás (***Picard–Lindelöf-tétel***) *Ha f (amelyet eleve folytonosnak tettünk fel) a (t_o, x_o) egy környezetében a $\mathbf{V}$-változójában univerzális Lipschitz-feltételnek tesz eleget, akkor van olyan $\alpha > 0$, hogy a 2.1-beli $(*)$ kezdetiérték-problémának létezik az $I_\alpha(t_o)$ intervallumon értelmezett egyértelmű megoldása.*

Bizonyítás Legyenek I, G és L a 3.2. definícióban szereplő mennyiségek, és legyen $\eta > 0$, $\beta > 0$ olyan, hogy $\overline{I_\eta(t_o)} \subset I$, $\overline{G_\beta(x_o)} \subset G$. Minthogy $\mathbf{V}$ véges dimenziós, az $\overline{I_\eta(t_o)} \times \overline{G_\beta(x_o)}$ korlátos és zárt halmaz kompakt, így a folytonos f függvény korlátos rajta, ezért

$$M := \sup\{\|f(t, x)\| \mid t \in \overline{I_\eta(t_o)}, x \in \overline{G_\beta(x_o)}\} < \infty.$$

Zárjuk ki az $M = 0$ triviális esetet, és legyen

$$\alpha := \min\left\{\eta, \frac{\beta}{M}, \frac{1}{2L}\right\}.$$

Emlékeztetünk arra, hogy $C(\overline{I_\alpha(t_o)}, \mathbf{V})$, – vagyis az $r : \overline{I_\alpha(t_o)} \to \mathbf{V}$ folytonos függvények az

$$|||r||| := \max\{\|r(t)\| \mid t \in \overline{I_\alpha(t_o)}\}$$

normával ellátva – Banach-tér (Analízis III.B.8.12.). Ebben

$$S := \{r \in C(\overline{I_\alpha(t_o)}, \mathbf{V}) \mid |||r - x_o||| \leq \beta\}$$

(az x_o konstans függvény körüli β sugarú zárt gömb) zárt részhalmaz, tehát S teljes metrikus tér (Analízis III.B.4.4.2.).

Megmutatjuk, hogy a 2.3-ban értelmezett ϕ leképezés S-et önmagába képezi. Ha ugyanis $r \in S$, akkor

$$\|\phi(r)(t) - x_o\| = \left\|\int_{t_o}^{t} f(s, r(s))\, ds\right\| \leq \alpha M \leq \beta$$

minden $t \in \overline{I_\alpha(t_o)}$ esetén. Tehát $\phi(r)$ értelmezve van az egész $\overline{I_\alpha(t_o)}$ intervallumon, folytonos, és $|||\phi(r) - x_o||| \leq \beta$, azaz $\phi(r) \in S$.

Most azt mutatjuk meg, hogy ϕ leszűkítése S-re kontrakció. Legyen ugyanis $r_1, r_2 \in S$; ekkor a Lipschitz-tulajdonság miatt

$$\begin{aligned}\|\phi(r_1)(t) - \phi(r_2)(t)\| &= \left\| \int_{t_o}^{t} \big(f(s, r_1(s)) - f(s, r_2(s))\big)\, ds \right\| \\ &\leq \alpha \sup\big\{ \|f(s, r_1(s)) - f(s, r_2(s))\| \mid s \in \overline{I_\alpha(t_o)} \big\} \\ &\leq \alpha L \sup\big\{ \|r_1(s) - r_2(s)\| \mid s \in \overline{I_\alpha(t_o)} \big\},\end{aligned}$$

azaz $\alpha L \leq 1/2$ miatt

$$|||\phi(r_1) - \phi(r_2)||| \leq \frac{1}{2} |||r_1 - r_2|||.$$

Ismeretes, hogy ϕ-nek S-en létezik egyetlen fixpontja (Analízis III.B.9.3.), azaz létezik a kezdetiérték-problémának egyetlen $r : I_\alpha(t_o) \to \overline{G_\beta(x_o)} \subset \mathbf{V}$ megoldása (lásd 2.3.).

Vegyük észre, a bizonyítás érvényes az α-nál kisebb bármely pozitív számra is; tehát a t_o-nak az $I_\alpha(t_o)$-nél szűkebb környzetén értelmezett és $\overline{G_\beta(x_o)}$-ba képező megoldás is csak egy van (amely éppen a bizonyításban kapott megoldásnak a leszűkítése). Viszont azt még nem tudjuk, nem létezik-e esetleg egy másik olyan megoldás az $I_\alpha(t_o)$ intervallumon, amely "elhagyja" a $\overline{G_\beta(x_o)}$ halmazt. Most megmutatjuk, hogy ha $z : I_\alpha(t_o) \to \mathbf{V}$ a kezdetiérték-probléma megoldása, akkor $z = r$.

Tekintsük ugyanis a

$$H := \{t \in I_\alpha(t_o) \mid z(t) = r(t)\}$$

halmazt, amely nyilvánvalóan nem üres, hiszen t_o az eleme. H zárt $I_\alpha(t_o)$-ban, mert a $\{0\} \subset \mathbf{V}$ zárt halmaznak a $z - r$ folytonos függvény általi őségpe. Viszont H nyílt is $I_\alpha(t_o)$-ban a következők miatt. Legyen $t_1 \in H$. Ekkor az $x_1 := r(t_1) = z(t_1)$ jelöléssel $(t_1, x_1) \in I \times G$, ezért a (t_1, x_1) egy környezetében f a $\mathbf{V}$-változója szerint univerzális Lipschitz-feltételnek tesz eleget. Következésképpen létezik a (t_1, x_1)-nek valamely $I_1 \times G_1$ környezete úgy, hogy van a szóban forgó differenciálegyenletnek a (t_1, x_1) kezdeti feltételt kielégítő egyetlen $r_1 : I_1 \to G_1$ megoldása. A z és r folytonossága miatt létezik a t_1 körül egy olyan $I_{zr} \subset I_1$ intervallum, amelyet z és r is beleképez G_1-be. Minthogy z és r a (t_1, x_1) kezdeti feltételt kielégítő megoldás, az előző bekezdésben tett megjegyzésünk szerint mind z, mind r megegyezik r_1-gyel az I_{zr} intervallumon. Ez pontosan azt jelenti, hogy t_1 belső pontja H-nak.

Minthogy H nem üres, nyílt-zárt részhalmaza az összefüggő $I_\alpha(t_o)$ halmaznak, szükségképpen $H = I_\alpha(t_o)$.

3.4. Érdemes most egy kis kitérőt tennünk: ha **V** akármilyen Banach-tér (nem szükségképpen véges dimenziós), f folytonos és a **V**-változója szerint univerzális Lipschitz-feltételnek tesz eleget az $\overline{I_\eta(t_o)} \times \overline{G_\beta(x_o)}$ halmazon, akkor itt korlátos is.

Valóban,

$$\|f(t,x)\| \le \|f(t,x) - f(t,x_o)\| + \|f(t,x_o)\|;$$

a jobb oldal első tagja nem nagyobb, mint $L\beta$, második tagjánál pedig már kihasználhatjuk, hogy az $\overline{I_\eta(t_o)} \to \mathbf{V}, \ t \mapsto f(t,x_o)$ folytonos függvény korlátos.

Ezért a Picard–Lindelöf-tétel fenti bizonyítása érvényes Banach-terekben értelmezett differenciálegyenletekre is.

3.5. Vegyük most szemügyre az 1.8.1-beli autonóm differenciálegyenletet. A jobb oldal értelmezési tartománya $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. A $(t,x) \mapsto 3x^{2/3}$ függvény a $\{(t,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ pontokat kivéve mindenütt folytonosan differenciálható, tehát teljesíti a szükséges Lipschitz-feltételt.

Ha tehát $x_o \neq 0$, akkor bármely $t_o \in \mathbb{R}$ esetén a (t_o, x_o) kezdeti értékkel a differenciálegyenlet lokálisan egyértelműen megoldható. A megoldás egy harmadfokú parabolaág, és egészen addig tart az egyértelműség, amíg a parabola el nem éri a nullát; közelebbről, ha például $x_o > 0$, akkor a $]t_0 - \sqrt[3]{x_o}, \infty[$ intervallumon értelmezett $t \mapsto (t - t_o + \sqrt[3]{x_o})^3$ függvény az egyetlen megoldás. A $t_o - \sqrt[3]{x_o}$ érték alatt a megoldás a nullából bárhol "elágazhat" (lásd a 2. ábrát).

A $(t_o, 0)$ kezdeti értékkel a megoldás lokálisan sem egyértelmű, amint arról már korábban is szóltunk.

3.6. A kezdetiérték-probléma megoldásához a Banach-féle fixpont-tétellel jutottunk el. Mint tudjuk, a fixpontot egy sorozat határértékeként szukcesszív approximációval (fokozatos közelítéssel) kaphatjuk meg. Ha tehát r_o az S bármelyik eleme, akkor $r_1 := \phi(r_o), \ r_2 := \phi(r_1), \ldots, r_n := \phi(r_{n-1})$ olyan sorozat, amelynek a határértéke (a $|||\ |||$ normában, vagyis egyenletes konvergenciában) a megoldás. A gyakorlatban általában az $r_o := x_o$ (konstans függvény) indulást szokás alkalmazni.

3.7. Feladatok

1. Teljesíti-e a 2.4 feladatok elején megemlített legegyszerűbb típusú jobb oldal (amelyik nem függ **V** elemeitől) az univerzális Lipschitz-feltételt?

2. Ha egy autonóm differenciálegyenlet jobb oldala az x_o egy környezetében globális Lipschitz-feltételnek tesz eleget, akkor a (t_o, x_o) egy környezetében teljesül az univerzális Lipschitz-feltétel.

3. Milyen választ adhatunk az 1.8.2. feladat kérdésére?

4. Adjuk meg az $(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \quad \dot{x} = x, \ x(0) = 1$ kezdetiérték-probléma megoldásának fokozatos közelítéseit az 1 konstans függvényből kiindulva. Mi a kezdetiérték-probléma megoldása?

5. Állítsuk elő az $(x : (t)\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \quad \dot{x} = x + t, \ x(0) = 0$ kezdetiérték-probléma megoldását fokozatos közelítéssel.

6. Oldjuk meg fokozatos közelítéssel az

$$((x_1, x_2) : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^2)? \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \qquad & x_1(0) &= 1, \\ \dot{x}_2 &= x_1, \qquad & x_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

kezdetiérték-problémát!

4. Maximális megoldások

4.1. Be tudtuk bizonyítani, hogy ha f eleget tesz a megfelelő Lipschitz-feltételnek, akkor az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \qquad \dot{x} = f \circ (id_{\mathbb{R}}, x),$$

$$(*) \qquad x(t_o) = x_o$$

kezdetiérték-problémának létezik egyetlen megoldása a t_o körül egy intervallumban. Azonnal felmerül a kérdés, mondható-e valami közelebbi az illető intervallum nagyságáról. Mi lehet a legnagyobb ilyen intervallum? Egyáltalán megadható-e legnagyobb intervallum, és ha igen, milyen feltételekkel?

4.2. Tekintsük a differenciálegyenlet megoldásainak halmazán a tartalmazással meghatározott szokásos rendezést (Analízis I.8.5.). **Maximálisnak** mondunk egy megoldást, ha maximális elem erre a rendezésre vonatkozóan. Más szóval egy r_m megoldás maximális, ha bármely r megoldásra $r \subset r_m$ vagy r nem összehasonlítható r_m-mel.

A kezdetiérték-probléma maximális megoldása a differenciálegyenlet olyan maximális megoldása, amely egyben kielégíti a kezdeti feltételt.

A kezdetiérték-probléma r_1 és r_2 megoldása összeilleszthető, ha megegyeznek az értelmezési tartományaik közös részén (Analízis I.8.6.; itt a két értelmezési tartomány nem lehet diszjunkt, hiszen tartalmazzák t_o-t).

Ha $\mathcal{P}$ a kezdetiérték-probléma páronként összeilleszthető megoldásaiból álló halmaz, akkor $\mathcal{P}$ elemeinek összeillesztése, $\bigcup_{r \in \mathcal{P}} r$, szintén megoldás.

4.3. Állítás *Tegyük fel, hogy a folytonos $f : \mathbb{R} \times \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbf{V}$ függvény az értelmezési tartományának minden pontjának egy környezetében $\mathbf{V}$ szerint univerzális Lipschitz-feltételnek tesz eleget. Ekkor a $(*)$ kezdetiérték-problémának létezik egyetlen maximális megoldása.*

Bizonyítás Jegyezzük meg először is, hogy az f-re kirótt feltétel miatt $\mathrm{Dom} f$-ben levő bármilyen kezdeti feltétellel meghatározott kezdetiérték-probléma lokálisan egyértelműen oldható meg.

A bizonyításunk azon alapszik, hogy megmutatjuk, bármely két megoldás összeilleszthető; ezért az összes megoldás összeillesztése nyilvánvalóan az egyetlen maximális megoldás.

Legyen tehát r_1 és r_2 a kezdetiérték-probléma két megoldása, és tegyük fel, hogy nem összeilleszthetők. Ez azt jelenti, hogy van olyan $t' \in \mathrm{Dom} r_1 \cap \mathrm{Dom} r_2$, hogy $r_1(t') \neq r_2(t')$; az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $t' > t_o$. A

$$H := \{t \in \mathrm{Dom} r_1 \cap \mathrm{Dom} r_2 \mid r_1(t) \neq r_2(t)\}$$

halmaz nem más, mint a $\mathbf{V} \setminus \{0\}$ nyílt halmaznak az $r_1 - r_2$ folytonos függvény általi ősképe, tehát nyílt a nyílt $\mathrm{Dom} r_1 \cap \mathrm{Dom} r_2$ halmazban, így nyílt $\mathbb{R}$-ben is. A H metszete a $]t_o, \infty[$ intervallummal szintén nyílt, és a két megoldás a t_o körül egy intervallumon megegyezik, ezért

$$t_1 := \inf(H \cap]t_o, \infty[)$$

nem tartozik H-hoz, és nagyobb t_o-nál.

Találtunk tehát egy olyan t_1 elemet, amely nagyobb t_o-nál, $r_1(t) = r_2(t)$, ha $t \in [t_o, t_1]$, viszont van olyan $\delta > 0$, hogy $r_1(t) \neq r_2(t)$, ha $t \in]t_1, t_1 + \delta[$.

Legyen $x_1 := r_1(t_1) = r_2(t_1)$. r_1 és r_2 olyan megoldásai a differenciálegyenletnek, amelyek kielégítik a (t_1, x_1) kezdeti feltételt, és nem egyeznek meg egy intervallumon a t_1 körül. Ez azt jelenti, hogy a (t_1, x_1) kezdeti feltétellel meghatározott kezdetiérték-probléma nem oldható meg lokálisan egyértelműen, ami ellentmondás. Ezért az a feltevésünk, hogy r_1 és r_2 nem összeilleszthető, hamis.

4.4. Szemléletesen azt szokták mondani, hogy a maximális megoldások "határtól határig terjednek": maximális megoldás nem "végződhet" a jobb oldal értelmezési tartományában. Ezt a következőképpen fogalmazhatjuk meg pontosan.

Állítás *Tegyük fel, hogy f az értelmezési tartományának minden pontjának egy környezetében* $\mathbf{V}$ *szerint univerzális Lipschitz-feltételnek tesz eleget, és legyen r a $(*)$ kezdetiérték-probléma maximális megoldása. Ha K kompakt halmaz a differenciálegyenlet értelmezési tartományában, akkor van olyan $t_1, t_2 \in \mathrm{Dom} r$, hogy $t_1 > t_o$, $t_2 < t_o$ és $(t_1, r(t_1)) \notin K$, $\quad (t_2, r(t_2)) \notin K$.*

Bizonyítás Legyen r értelmezési tartománya az $]a, b[$ intervallum. Tegyük fel, hogy r grafikonja benne van K-ban. Ekkor a grafikon lezártja is benne van. K vetülete $\mathbb{R}$-re – $\mathrm{pr}_{\mathbb{R}}[K]$ – szintén kompakt, ezért a és b véges, továbbá $\mathrm{pr}_{\mathbb{R}}[\overline{\mathrm{Graph} r}] = [a, b]$. Tudjuk, hogy

$$r(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(s, r(s))\, ds \qquad (t \in]a, b[).$$

f korlátos a K kompakt halmazon, tehát létezik

$$x_o + \lim_{t \to b-0} \int_{t_o}^{t} f(s, r(s))\, ds =: x_b.$$

Létezik a differenciálegyenletnek a b körüli intervallumban a (b, x_b) kezdeti feltételnek eleget tevő egyetlen megoldása. Ez a megoldás összeilleszthető r-rel; összeillesztésük – r maximalitása miatt – szükségképpen megegyezik r-rel. Ez azt jelenti, találtunk olyan t_1-et az r értelmezési tartományában, amelyre $t_1 > b$. Ez az ellentmondás mutatja, az a feltételezésünk, hogy r grafikonja benne van K-ban, nem tartható, tehát $(t_1, r(t_1)) \notin K$.

Teljesen hasonlóan érvelhetünk a-ra vonatkozóan, hogy megkapjuk a kívánt t_2 értéket.

4.5. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a maximális megoldás egyértelműsége csak akkor bizonyos, ha a jobb oldal mindenütt eleget tesz a megfelelő Lipschitz-feltételnek. Idézzük fel a 3.5-ben tárgyalt példát. Ekkor minden kezdeti feltételnek nagyon sok maximális megoldása van; a nullából bármely elágazást vesszük, mindenütt értelmezett – tehát maximális – megoldást kapunk.

Érdemes megjegyezni: előfordulhat, hogy a jobb oldal ugyan mindenütt – az egész $\mathbb{R} \times \mathbf{V}$-n – értelmezve van, de bizonyos maximális megoldások még sincsenek mindenütt – az egész $\mathbb{R}$-en – értelmezve. Példa erre az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad \dot{x} = -x^2$$

differenciálegyenlet, amelynek (t_o, x_o) kezdeti feltételnek eleget tevő maximális megoldása

– a mindenütt (az egész $\mathbb{R}$-en) értelmezett nulla függvény, ha $x_o = 0$,

– a $t \mapsto \frac{x_o}{1+x_o(t-t_o)}$ függvény, amelynek értelmezési tartománya
 – $]t_o - 1/x_o, \infty[$, ha $x_o > 0$,
 – $]-\infty, t_o - 1/x_o[$, ha $x_o < 0$.

4.6. Ha a differenciálegyenlet jobb oldala mindenütt eleget tesz az univerzális Lipschitz-feltételnek, akkor a megoldások egyértelműsége miatt különböző maximális megoldásgörbék (megoldások grafikonjai) nem metszhetik egymást.

Ezzel szemben, a különböző maximális megoldásoknak megfelelő fázisgörbék (megoldások értékkészlete) metszhetik egymást. Példa erre az

$$((x, y) : (t)\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^2)? \quad \dot{x} = 2t, \quad \dot{y} = 1$$

differenciálegyenlet, amelynek bármely $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ esetén maximális megoldása az egész $\mathbb{R}$-en értelmezett $t \mapsto (t^2 + x_o, t + y_o)$ függvény. Ennek értékkészlete: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y - y_o)^2 = x - x_o\}$. Különböző (x_o, y_o) értékekre ezek a görbék metszhetik egymást (például (0,0) és (1,1) esetén).

Viszont, ha a differenciálegyenlet autonóm, akkor a különböző maximális fázisgörbék sem metszhetik egymást; ezt majd a 23.3-ban fogjuk látni.

4.7. Feladatok

1. Mi a 2.4. feladatok elején említett legegyszerűbb típusú differenciálegyenlet esetén a maximális megoldások értelmezési tartománya?

2. Valamely fizikai feladat formailag az 1.8.1-ben ismertetett differenciálegyenletre vezet, de azt is tudjuk, hogy a keresett függvény – fizikai értelméből eredően – csak 1 és 10 között veheti fel az értékét. Adjuk meg a differenciálegyenlet értelmezési tartományát, és keressük meg a maximális megoldásokat.

3. Vizsgáljuk meg az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad \dot{x} = a - b\mathrm{sign}x, \quad x(0) = x_o$$

kezdetiérték-probléma maximális megoldásait, ahol a és b különböző pozitív számok.

A differenciálegyenlet értelmezési tartománya, megállapodásunk szerint, $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, amely szétesik az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$ és az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ összefüggő halmazokra. Ezért szét kell választani az $x_o > 0$ és az $x_o < 0$ eseteket.

(i) Ha $x_o > 0$, akkor

$$r(t) = x_o + (a-b)t, \quad \text{ahol} \quad \begin{cases} t > \frac{-x_o}{a-b} & \text{ha} \quad a > b, \\ t < \frac{x_o}{b-a} & \text{ha} \quad a < b. \end{cases}$$

(ii) Ha $x_o < 0$, akkor

$$r(t) = x_o + (a+b)t, \qquad \left(t < \frac{-x_o}{a+b}\right).$$

5. Magasabb rendű egyenletek

5.1. Magasabb rendű –másodrendű, harmadrendű stb.– differenciálegyenletről beszélünk, ha az egyenletben az ismeretlen függvény magasabb – legfeljebb másodrendű, legfeljebb harmadrendű stb – deriváltjai is szerepelnek.

A magasabb rendű differenciálegyenletek visszavezethetők elsőrendűre.

5.2. Másodrendű differenciálegyenletet egy $f : \mathbb{R} \times \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbf{V}$ folytonos függvénnyel

$$(*) \qquad (x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \qquad \ddot{x} = f \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{R}}, x, \dot{x})$$

alakban adunk meg. Ennek megoldása olyan $r : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V}$ függvény, hogy

(i) r kétszer folytonosan differenciálható,

(ii) $\mathrm{Dom}r$ intervallum,

és minden $t \in \mathrm{Dom}r$ esetén

(iii) $(t, r(t), \dot{r}(t)) \in \mathrm{Dom}f$,

(iv) $\ddot{r}(t) = f(t, r(t), \dot{r}(t))$.

5.3. Fogjuk fel $\mathbf{V}\times\mathbf{V}$-t "egységes" vektortérnek, definiáljuk az

$$F:\mathbb{R}\times(\mathbf{V}\times\mathbf{V})\rightarrowtail(\mathbf{V}\times\mathbf{V})\qquad(t,(x,v))\mapsto(v,f(t,x,v))$$

függvényt, és adjuk meg ezzel az

$$\big((x,v):\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbf{V}\times\mathbf{V}\big)?\qquad(x,v)^{\cdot}=F\circ(\mathrm{id}_{\mathbb{R}},(x,v))$$

elsőrendű differenciálegyenletet, amely komponensekbe írva

$$(**)\qquad\big((x,v):\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbf{V}\times\mathbf{V})\big)?\qquad\begin{aligned}\dot{x}&=v,\\ \dot{v}&=f\circ(\mathrm{id}_{\mathbb{R}},x,v)\end{aligned}$$

alakú.

Nyilvánvaló, hogy ha r megoldása a $(*)$ másodrendű differenciálegyenletnek, akkor $(r,\dot{r})$ megoldása a $(**)$ elsőrendű differenciálegyenletnek; viszont ha (r,z) megoldása a $(**)$ egyenletnek, akkor r megoldása az $(*)$ egyenletnek, és $z=\dot{r}$.

Tehát egy $\mathbf{V}$ értékű másodrendű differenciálegyenletet vissza lehet vezetni egy $\mathbf{V}\times\mathbf{V}$ értékű elsőrendű differenciálegyenletre. Ezt sokszor úgy fejezik ki, hogy egy másodrendű differenciálegyenletet elsőrendű, két tagú differenciálegyenlet-rendszerre vezetünk vissza. Azt viszont már az egyenletek általános értelmezésénél láttuk, hogy az egyenletrendszer fogalmilag ugyanolyan, mint az egyenlet, és sokszor rajtunk áll, mit tekintünk rendszernek, mit nem. Itt, a mi esetünkben, ha például $\mathbf{V}=\mathbb{R}^N$, akkor már az eredeti másodrendű differenciálegyenlet is egy N tagú egyenletrendszernek fogható fel, a neki megfelelő elsőrendű pedig $2N$ tagúnak.

Akár rendszerben gondolkodunk, akár nem, annyi bizonyos, hogy másodrendű egyenletnek megfelelő elsőrendű "kétszer akkora" (kétszer annyi dimenziós) vektortérben van megfogalmazva, mint a másodrendű.

5.4. Eljárásunknak az a lényege, hogy bevezettük új ismeretlenként a keresett függvény deriváltját. Ebből nyilvánvaló, mit kell tennünk általában a magasabb rendű differenciálegyenleteknél. Ha a differenciálegyenlet n-edrendű, akkor az $x_1:=\dot{x},x_2:=\ddot{x},\ldots,x_{n-1}:=x^{(n-1)}$ meghatározással az $(x,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}):\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbf{V}^n$ függvényre írhatunk fel egy elsőrendű differenciálegyenletet (n tagú differenciálegyenlet-rendszert). A részleteket az olvasóra bízzuk.

5.5. Az elsőrendűre való visszavezetés azt is megmutatja, hogyan értelmezzünk n-ed rendű differenciálegyenlet esetében kezdeti feltételt: meg kell adni a függvénynek és $(n-1)$-ed rendig a deriváltjainak az értékét valamely helyen. Másodrendűre egy kezdetiérték-probléma így fest:

$$(x:\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbf{V})?\qquad\ddot{x}=f\circ(\mathrm{id}_{\mathbb{R}},x,\dot{x}),$$

$$x(t_o)=x_o,\quad\dot{x}(t_o)=v_o,$$

ahol (t_o, x_o, v_o) a Dom$f$ adott eleme.

5.6. Miért jó, hogy vissza tudjuk vezetni a magasabb rendű differenciálegyenleteket elsőrendűre? Könnyebb egy többdimenziós elsőrendű egyenletet kezelni, mint egy kevesebb dimenziós magasabb rendűt? Nem mindig. Sőt, majd arra is látunk példát, amikor a megoldás megtalálása érdekében éppen fordítva, elsőrendű egyenletrendszert vezetünk vissza másodrendűre. Elvi szempontból azonban igen jelentős: a differenciálegyenletek alaptételének számító Picard–Lindelöf-tételt azonnal át tudjuk vinni magasabb rendű differenciálegyenletekre is. Nézzük ezt meg közelebbről másodrendű egyenletekre.

Ha az $f : \mathbb{R} \times \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbf{V}$ függvény az értelmezési tartománya (t_o, x_o, v_o) pontjának egy környezetén a $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ változójában univerzális Lipschitz-feltételnek tesz eleget, azaz (célszerűen az "1-es" normát használva $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$-n)

$$\|f(t,x,v) - f(t,y,u)\| \leq L\|(x,v) - (y,u)\| = L\big(\|x-y\| + \|v-u\|\big),$$

akkor az 5.3-ban bevezetett F függvény is eleget tesz egy ilyen Lipschitz-feltételnek ezen a környezeten:

$$\|F(t,x,v) - F(t,y,u)\| = \|v-u\| + \|f(t,x,v) - f(t,y,u)\| \leq (L+1)\big(\|x-y\| + \|v-u\|\big).$$

A kezdetiérték-problémák megoldásának létezése és lokális egyértelműsége tehát magasabb rendű differenciálegyenletekre is érvényben marad, ha a jobb oldal megfelelő Lipschitz-feltételnek tesz eleget.

5.7. Feladatok

A feladatokban csak valós értékű ismeretlen függvény szerepel, tehát mindenütt értsük oda az $(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})$? szimbólumot.

1. Vezessük vissza az alábbi magasabb rendű differenciálegyenleteket elsőrendűre:

$$(i)\ \ddot{x} = -x, \qquad (ii)\ \ddot{x} + 2\dot{x} + 4x = 0, \qquad (iii)\ \dddot{x} = (\ddot{x})^2 - 3\ddot{x} + 2\sin\dot{x}.$$

2. Nem csak úgy lehet elsőrendűre visszavezetni magasabb rendű differenciálegyenletet, hogy az ismeretlen függvény deriváltjait nevezzük el új függvényeknek. Sokszor valamely más kombináció szerencsésebb, mert "szebb" alakot eredményez.

Vegyük például az $\omega > 0$ paraméterrel meghatározott $\ddot{x} = -\omega^2 x$ differenciálegyenletet. Ekkor az $\omega v := \dot{x}$ választással "szimmetrikusabb" elsőrendű egyenletrendszert kapunk.

Keressük az alábbi differenciálegyenletek elsőrendűre való olyan visszavezetését, amely szebb vagy egyszerűbb alakot eredményez:

$$(i)\ \ddot{x} = \sqrt{2x}, \qquad (ii)\ \ddot{x} = e^{-\dot{x}}.$$

II. LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

6. A maximális megoldások

6.1. Meg fogunk ismerkedni néhány speciális típusú differenciálegyenlettel és megoldási módszerrel. Ezek közül kiemelkedően fontosak a lineáris differenciálegyenletek, amelyeket a következőképpen határozzuk meg.

Jelölje szokásosan $\mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ a $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezések összességét. Emlékeztetünk, hogy véges dimenziós vektortéren minden lineáris leképezés folytonos, és az F lineáris leképezés normáját a $\|F\| := \sup\limits_{\|x\|=1} \|Fx\|$ formulával értelmezzük (Analízis III.B.10.3.).

Legyen I nyílt intervallum (lehet nem korlátos is) és $0 \neq A : I \to \mathrm{Lin}(\mathbf{V}), b : I \to \mathbf{V}$ folytonos leképezések. Az $f : I \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $(t, x) \mapsto A(t)x + b(t)$ jobb oldallal meghatározott, vagyis az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \qquad \dot{x} = Ax + b$$

differenciálegyenletet **lineáris** differenciálegyenletnek hívjuk. Az egyenlet **homogén**, illetve **inhomogén**, ha $b = 0$, illetve $b \neq 0$.

6.2. Legyen K az I-nek kompakt részintervalluma. Az A és b függvény korlátos K-n, azaz

$$0 < L := \sup_{t \in K} \|A(t)\| < \infty, \qquad d := \sup_{t \in K} \|b(t)\| < \infty.$$

Ezért $\|(A(t)x + b(t)) - (A(t)y + b(t))\| \leq L\|x - y\|$ minden $t \in K$ és $x, y \in \mathbf{V}$ esetén, vagyis a lineáris differenciálegyenlet jobb oldala mindenütt eleget tesz $\mathbf{V}$ szerint az univerzális Lipschitz-feltételnek. Tehát minden kezdetiérték-problémának van egyértelmű maximális megoldása. A lineáris differenciálegyenletek jó tulajdonsága, hogy ismeretes a maximális megoldások értelmezési tartománya.

6.3. Állítás *A lineáris differenciálegyenlet maximális megoldásai az egész I intervallumon értelmezve vannak.*

Bizonyítás Vegyünk egy (t_o, x_o) elemet $I \times \mathbf{V}$-ből. Válasszunk egy K kompakt intervallumot I-ben úgy, hogy t_o benne van K belsejében, továbbá legyenek L és d az előbbi számok, továbbá jelölje κ a K intervallum hosszát.

Tudjuk, hogy $C(K, \mathbf{V})$ Banach-tér a maximum-normával (amelyet a $|||\ |||$ szimbólummal jelölünk). Ha $r \in C(K, \mathbf{V})$, akkor

$$\phi(r)(t) := x_o + \int_{t_o}^{t} \big(A(s)r(s) + b(s)\big)\, ds$$

értelmes minden $t \in K$ esetén, a $t \mapsto \phi(r)(t)$ hozzárendelés folytonos, azaz $\phi(r)$ is a $C(K, \mathbf{V})$ eleme; más szóval, megadtunk egy $\phi : C(K, \mathbf{V}) \to C(K, \mathbf{V})$ leképezést. ϕ formailag olyan, mint ami a Picard–Lindelöf-tétel bizonyításában szerepelt; itt is igaz, hogy r akkor és csak akkor megoldás, ha $\phi(r) = r$, csak itt ϕ általában (ha $\kappa L \geq 1$) nem kontrakció, másképp kell hát okoskodnunk.

Legyen $r_o(t) := x_o$ $(t \in K)$ és $r_n := \phi(r_{n-1})$ $(n \in \mathbb{N})$. Ekkor

$$\|r_1(t) - r_o(t)\| \leq (L\|x_o\| + d)|t - t_o| = \alpha L|t - t_o| \leq \alpha L\kappa,$$

ahol

$$\alpha := \|x_o\| + \frac{d}{L}.$$

Továbbá

$$\begin{aligned}\|r_2(t) - r_1(t)\| &\leq \left|\int_{t_o}^{t} \|A(s)\big(r_1(s) - r_o(s)\big)\|\, ds\right| \leq \left|\int_{t_o}^{t} L\alpha L|s - t_o|\, ds\right| \\ &= \alpha L^2 \frac{|t - t_o|^2}{2} \leq \alpha \frac{(L\kappa)^2}{2}.\end{aligned}$$

Így folytatva azt kapjuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|r_n(t) - r_{n-1}(t)\| \leq \alpha L^n \frac{|t - t_o|^n}{n!} \leq \alpha \frac{(L\kappa)^n}{n!}.$$

Vegyük észre, a becslések levezetésénél fontos volt a közbülső lépés, amikor is a függvények különbségének a t helyen felvett értékeit $|t - t_o|$ megfelelő hatványával majoráltuk. Most azonban már csak az a fontos, hogy

$$|||r_n - r_{n-1}||| \leq \alpha \frac{(L\kappa)^n}{n!},$$

mert ebből – lévén $\sum_{n=1}^{\infty} (L\kappa)^n/n! = e^{L\kappa} - 1$ – a Weierstrass-kritérium alapján (Analízis III.A.23.5.) látjuk, hogy a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (r_n - r_{n-1})$ függvénysor egyenletesen konvergens a K-n; minthogy e sor n-edik részletösszege $r_n - r_o$, végül is azt kapjuk, hogy az $n \mapsto r_n$ függvénysorozat egyenletesen konvergens, azaz létezik

$$r := \lim_{n\to\infty} r_n = x_o + \sum_{n\in\mathbb{N}} (r_n - r_{n-1}),$$

és r folytonos függvény (Analízis III.A.31.2.).

Minthogy ϕ definíciója alapján $|||\phi(r_n) - \phi(r)||| \leq L\kappa|||r_n - r|||$, az $n \mapsto \phi(r_n)$ sorozat egyenletesen konvergál $\phi(r)$-hez. Ez az $r_n = \phi(r_{n-1})$ összefüggés miatt maga után vonja, hogy

$$r = \phi(r),$$

vagyis r a K-n (pontosabban a K belsejében) értelmezett megoldás. Minthogy K az I-nek tetszőleges kompakt részintervalluma volt, ez azt jelenti, hogy a maximális megoldás az I-n mindenütt értelmezve van. ■

Eredményünk alapján a lineáris differenciálegyenletek megoldásain mindig maximális megoldásokat értünk, és ezt már hangsúlyozzuk azzal is, hogy a differenciálegyenletben $(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})?$ helyett az $(x : I \to \mathbf{V})?$ szimbólumot írjuk.

6.4. Feladatok

1. Az $(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})?$ $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}$ differenciálegyenlet olyan formájú, mintha lineáris lenne, de nem az. Miért? (Megállapodásunk szerint a konkrét formulákkal felírt differenciálegyenletek értelmezési tartományán azt a legbővebb halmazt értjük, amelyen a formulának értelme van; így ennek a differenciálegyenletnek az értelmezési tartománya $\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$.) Hogyan lehet ezt a differenciálegyenletet felbontani két lineáris differenciálegyenlet "uniójára"?

2. Adjuk meg mátrixalakban a lineáris differenciálegyenletet a $\mathbf{V} = \mathbb{K}^N$ esetben.

3. A szám értékű függvényekre a lineáris differenciálegyenlet

$$(x : I \to \mathbb{K})? \qquad \dot{x} = ax + b$$

alakú, ahol $a, b : I \to \mathbb{K}$ folytonos függvények. Keressünk megoldásokat abban az esetben, amikor a és b állandó.

4. Mutassuk meg a 6.3 bizonyítása alapján, az ottani jelölésekkel, hogy ha r a lineáris differenciálegyenletnek a (t_o, x_o) kezdeti feltételt kielégítő megoldása, akkor

$$|||r||| \leq \|x_o\| + \alpha\big(e^{L\kappa} - 1\big) = \|x_o\|e^{L\kappa} + \frac{d}{L}\big(e^{L\kappa} - 1\big).$$

7. Homogén lineáris differenciálegyenletek

7.1. Most az

$$(x : I \to \mathbf{V})? \qquad \dot{x} = Ax$$

homogén lineáris differenciálegyenletet vizsgáljuk, ahol, emlékezzünk, $A : I \to \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ folytonos leképezés, $A \neq 0$.

A homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásainak (amin megállapodásunk szerint maximális megoldásokat értünk) összességét $\mathcal{M}_0$-val jelöljük. Minden megoldás az I-n értelmezett $\mathbf{V}$ értékű folytonosan differenciálható függvény, azaz a $C^1(I, \mathbf{V})$ eleme.

Állítás *$\mathcal{M}_0$ a $C^1(I, \mathbf{V})$ lineáris altere. Ha t_o az I tetszőleges eleme, akkor*

$$\delta_{t_o} : \mathcal{M}_0 \to \mathbf{V}\,, \quad r \mapsto r(t_o)$$

lineáris bijekció.

Bizonyítás Ha r_1 és r_2 megoldás, akkor $r_1 + r_2$ is megoldás, mert $(r_1 + r_2)^{\cdot} = \dot{r}_1 + \dot{r}_2 = Ar_1 + Ar_2 = A(r_1 + r_2)$; hasonlóan érvelhetünk, hogy egy megoldás számszorosa is megoldás, azaz $\mathcal{M}_0$ lineáris altér.

Az is nyilvánvaló, hogy δ_{t_o} lineáris leképezés.

Ha $\delta_{t_o}(r_1) = \delta_{t_o}(r_2)$, akkor r_1 és r_2 ugyanazt a kezdeti feltételt kielégítő megoldások, tehát egyenlők; ez azt jelenti, hogy δ_{t_o} injektív.

Viszont akárhogy adjunk is meg egy x_o elemet $\mathbf{V}$-ből, van a (t_o, x_o) kezdeti értéket kielégítő r megoldás, és erre $\delta_{t_o}(r) = x_o$; ez pedig azt jelenti, hogy δ_{t_o} szürjektív.

7.2. Az előző állítás azonnali következményei:
(i) $\dim\mathcal{M}_0 = \dim\mathbf{V}$;
(ii) ha létezik $t_o \in I$ úgy, hogy $r(t_o) = 0$, akkor $r = 0$;
(iii) az alábbi három tulajdonság egyenértékű:
– $r_1, \ldots, r_k$ az $\mathcal{M}_0$-ban lineárisan függetlenek,
– létezik olyan $t_o \in I$, hogy $r_1(t_o), \ldots, r_k(t_o)$ lineárisan függetlenek $\mathbf{V}$-ben,
– minden $t \in I$ esetén $r_1(t), \ldots, r_k(t)$ lineárisan függetlenek $\mathbf{V}$-ben.

7.3. Legyen $v_1, \ldots, v_N$ a $\mathbf{V}$ egy bázisa, és válasszunk egy tetszőleges s elemet I-ből. Ekkor azok az $r_1, \ldots, r_N$ megoldások, amelyek az s-ben rendre a $v_1, \ldots, v_N$ értéket veszik fel, bázist alkotnak $\mathcal{M}_0$-ban. Következésképpen bármely megoldás

$$\sum_{k=1}^{N} c_k r_k$$

alakú, ahol a c_k együtthatók a $\mathbb{K}$ elemei (valós vagy komplex számok, aszerint, hogy $\mathbf{V}$ valós vagy komplex vektortér). Megemlítjük, hogy differenciálegyenletekkel foglalkozó könyvekben az $r_1, \dots, r_N$ bázist **alaprendszernek** szokás nevezni, a fenti összeget pedig "általános megoldásnak".

A (t_o, x_o) kezdeti feltételt kielégítő megoldás megadásához meg kell találnunk azokat az együtthatókat, amelyek az alaprendszer megfelelő lineáris kombinációiban szerepelnek. Az együtthatókat tehát a

$$\sum_{k=1}^{N} c_k r_k(t_o) = x_o$$

algebrai lineáris egyenlet határozza meg.

7.4. Külön figyelmet érdemel a $\mathbf{V} = \mathbb{K}^N$ eset. Ekkor célszerű olyan alaprendszert választani, amelynek elemei egy adott t_o-ban éppen a standard bázisvektorokkal egyenlők. Vagyis, ha az r_k alapmegoldást $(r_{1k}, r_{2k}, \dots, r_{Nk})$ komponensekkel adjuk meg, akkor $r_{ik}(t_o) = 0$, ha $i \neq k$, és $r_{kk}(t_o) = 1$.

Tekintsük azt a mátrixot – azaz mátrixfüggvényt, hiszen minden tagja függvény–, amelynek oszlopai az alaprendszer elemei:

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \dots & r_{1N} \\ r_{21} & r_{22} \dots & r_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{N1} & r_{N2} \dots & r_{NN} \end{pmatrix}.$$

E mátrixnak az értéke t_o-ban éppen az egységmátrix. Továbbá, mivel bármely t-re az oszlopvektorai lineárisan függetlenek, a determinánsa sehol sem nulla. E mátrix determinánsát szokás Wronski-determinánsnak nevezni.

7.5. A 7.1. állítás alapján

$$R(t,s) := \delta_t \circ \delta_s^{-1} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$$

lineáris bijekció minden $t, s \in I$ esetén. Jegyezzük meg, ha $v \in \mathbf{V}$, akkor $R(t,s)v$ az (s,v) ponton áthaladó megoldás értéke a t helyen.

Definíció *Az $I \times I \to \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$, $\quad (t,s) \mapsto R(t,s)$ leképezést a homogén lineáris differenciálegyenlet **rezolvensének** nevezzük.*

A rezolvens értelmezéséből azonnal adódnak az alábbi tulajdonságok: ha t, t' és t'' az I tetszőleges elemei, akkor

(i) $R(t,t) = \mathrm{id}_{\mathbf{V}}$,
(ii) $R(s,t) = R(t,s)^{-1}$,
(iii) $R(t,t')\,R(t',s) = R(t,s)$.

7.6. Ha $T \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$, akkor a T-vel való balról szorzás $\mathrm{Lin}(\mathbf{V})$-n, azaz $L_T : \mathrm{Lin}(\mathbf{V}) \to \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$, $X \mapsto TX$, lineáris leképezés.

Továbbá egyszerű tény, hogy a $T \mapsto L_T$ hozzárendelés lineáris és $\|L_T\| = \|T\|$, hiszen $\|L_T X\| = \|TX\| \le \|T\|\,\|X\|$, és $\|L_T \mathrm{id}_{\mathbf{V}}\| = \|T\|\|\mathrm{id}_{\mathbf{V}}\|$.

Ha tehát $A : I \to \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ az eddig is szerepelt leképezés, akkor $t \mapsto L_{A(t)}$ folytonos, hiszen $\|L_{A(t_1)} - L_{A(t_2)}\| = \|A(t_1) - A(t_2)\|$.

Ezért – ne feledjük, hogy L_A az A-val való balról szorzás – felírhatjuk az

$$(X : I \to \mathrm{Lin}(\mathbf{V}))?, \qquad \dot{X} = AX$$

homogén lineáris differenciálegyenletet.

Állítás *A fenti differenciálegyenletnek az $X(s) = \mathrm{id}_{\mathbf{V}}$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása $t \mapsto R(t,s)$.*

Bizonyítás Tudjuk, hogy a szóban forgó kezdetiérték-problémának létezik egyetlen $R_s : I \to \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$, $t \mapsto R_s(t)$ megoldása. Ha $v \in \mathbf{V}$, akkor $t \mapsto r(t) := R_s(t)v$ olyan függvény, amelyre $r(s) = v$ és $\dot{r}(t) = A(t)R_s(t)v = A(t)r(t)$, vagyis $t \mapsto R_s(t)v$ az eredeti homogén lineáris differenciálegyenletnek az (s,v) ponton áthaladó megoldása. Ez azt jelenti, hogy $R_s(t)v = R(t,s)v$; mivel v a $\mathbf{V}$ tetszőleges eleme, $R_s(t) = R(t,s)$, amit bizonyítani akartunk.

7.7. Eredményeink általánosíthatók arra az esetre, amikor $\mathbf{V}$ (nem szükségképpen véges dimenziós) Banach-tér, és $\mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ a folytonos $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezések összességét jelenti. Ekkor megmutathatjuk, hogy az $R(t,s)$ lineáris bijekció folytonos minden $t, s \in I$ esetén.

Legyen ugyanis K olyan kompakt intervallum, amely belsejében tartalmazza a t, s elemeket, és ha r a differenciálegyenlet megoldása, akkor legyen $|||r||| := \sup_{t\in K} \|r(t)\| < \infty$.

Nyilvánvaló, hogy $\|\delta_t(r)\| \le |||r|||$ minden r megoldásra. Továbbá, ha v a $\mathbf{V}$ akármelyik eleme, akkor $\delta_s^{-1}(v)$ nem más, mint a differenciálegyenletnek az (s,v) ponton áthaladó megoldása, ezért a 6.4.4. feladat szerint $|||\delta_s^{-1}(v)||| \le \|v\|e^{L\kappa}$.

Végeredményben tehát $\|R(t,s)v\| \le \|v\|e^{L\kappa}$ minden $v \in \mathbf{V}$ esetén.

7.8. Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy az $(x : I \to \mathbb{K})?\quad \dot{x} = ax$ homogén lineáris differenciálegyenletnek (lásd a 6.4.3. feladatot)

(i) alaprendszere $\exp \circ \int a$, ahol $\int a$ az a valamely primitív-függvénye; tehát megoldásainak összessége $\{c \exp \circ \int a \mid c \in \mathbb{K}\}$;

(ii) a (t_o, x_o) ponton áthaladó megoldása

$$I \to \mathbb{K}, \quad t \mapsto \left(\exp \int_{t_o}^{t} a\right) x_o;$$

(iii) rezolvense $(t,s) \mapsto \exp \int_s^t a$.

2. Tudjuk, hogy a Ch és Sh függvény egymás deriváltjai. Ennek alapján adjuk meg az

$$((x_1, x_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^2)? \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 \end{aligned}$$

homogén lineáris differenciálegyenlet egy alaprendszerét.

3. A 7.4. jelöléseivel adjuk meg $R(t,s)$ mátrixát a $\mathbf{V} = \mathbb{K}^N$ esetben. (Tudjuk, hogy ha $e_1, \dots, e_N$ a standard bázis $\mathbb{K}^N$-ben, akkor a keresett mátrix ik-adik tagja $R(t,s)_{ik} = e_i \cdot R(t,s)e_k$, ahol a pont a szokásos skaláris szorzatot jelöli.

8. Állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletek

8.1. Az

$$(x : \mathbb{R} \to \mathbf{V})? \qquad \dot{x} = Ax$$

homogén lineáris differenciálegyenletet **állandó együtthatósnak** hívjuk, ha A mindenütt értelmezett konstans függvény, azaz egyetlen adott nem nulla $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezés.

Másképpen megfogalmazva: az autonóm homogén lineáris differenciálegyenleteket hívjuk állandó együtthatósnak.

Állítás *Az állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletnek a (t_o, x_o) kezdeti feltételt kielégítő megoldása*

$$\mathbb{R} \to \mathbf{V}, \quad t \mapsto e^{(t-t_o)A} x_o.$$

Következésképpen, a rezolvense

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathrm{Lin}(\mathbf{V}), \ (t,s) \mapsto e^{(t-s)A}.$$

Bizonyítás Tekintsük az $\mathbb{R} \to \mathrm{Lin}(\mathbf{V}), \quad t \mapsto e^{tA}$ leképezést (Analízis III.10.8.). Ez differenciálható, a differenciálhányadosa $\mathbb{R} \to \mathrm{Lin}(\mathbf{V}), \ t \mapsto Ae^{tA}$.

Valóban, bármely h valós számra

$$e^{hA} - \mathrm{id}_{\mathbf{V}} = hA + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(hA)^n}{n!} = hA + \mathrm{ordo}(h),$$

tehát

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{(t+h)A}-e^{tA}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{hA}-\mathrm{id}_{\mathbf{V}}}{h}e^{tA}=Ae^{tA}.$$

Nyilvánvaló ezután, hogy bármely $v\in\mathbf{V}$ esetén az $\mathbb{R}\to\mathbf{V},\ t\mapsto e^{tA}v$ leképezés is differenciálható, differenciálhányadosa $t\mapsto Ae^{tA}v$.

Ezekből azonnal adódnak az állításunk formulái. ■

Jegyezzük meg, hogy az iménti eredményünkből az is következik, hogy az állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásai végtelen sokszor differenciálhatók.

8.2. Formailag tehát igen egyszerűen megkaphatjuk az állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásait. Azonban az egyszerű forma mögött egy sorösszeg bújik meg, amelyet nem mindig könnyű előállítani.

Elég azonban egy alaprendszert (a megoldások vektorterének egy bázisát) megadni, és ez viszonylag nem nehéz feladat a Jordan-féle alak ismeretében (Analízis II.39.).

Jegyezzük meg először is, hogy ha v az A-nak λ sajátértékű sajátvektora – $Av=\lambda v$ –, akkor

$$t\mapsto r(t):=e^{\lambda t}v$$

megoldása a differenciálegyenletnek, hiszen

$$\dot r(t)=\lambda e^{\lambda t}v=Ar(t).$$

Továbbá, ha v λ sajátértékű sajátvektor és $u_1,\dots,u_n$ olyan nem nulla vektorok, hogy $Au_k=\lambda u_k+u_{k+1}$ $(k=1,\dots,n-1)$ és $u_n=v$ (azaz $Au_n=\lambda u_n$), akkor minden $i=1,\dots,n$ esetén

$$t\mapsto r(t):=e^{\lambda t}\sum_{k=i}^{n}\frac{t^{k-i}}{(k-i)!}u_k$$

megoldása a differenciálegyenletnek, hiszen

$$\dot r(t)=e^{\lambda t}\sum_{k=i}^{n}\frac{t^{k-i}}{(k-i)!}\lambda u_k\ +\ e^{\lambda t}\sum_{k=i}^{n-1}\frac{t^{k-i}}{(k-i)!}u_{k+1}=e^{\lambda t}\sum_{k=i}^{n}\frac{t^{k-i}}{(k-i)!}Au_k=Ar(t).$$

8.3. Tegyük fel most, hogy $\mathbf{V}$ komplex vektortér, és $N:=\dim(\mathbf{V})$.

Tudjuk, hogy ekkor, ha az A λ sajátértékének az m algebrai és s geometriai multiplicitása nem egyezik meg, akkor van s darab lineárisan független λ sajátértékű sajátvektora, $v_1,\dots,v_s$, és minden v_j-hez $u_{jk}\quad(k=1,\dots,n_j)$ olyan lineárisan független ”háttérvektorok”, hogy $(A-\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{V}})u_{jk}=u_{j,k+1}\quad(k=1,\dots,n_j-1)$ és $u_{jn_j}=v_j$.

(i) Tekintsük most a szerencsés esetet, amikor A sajátalterei kifeszítik $\mathbf{V}$-t (más szóval, A diagonalizálható: Analízis II.39.4.). Legyen $v_1, \dots, v_N$ az A sajátvektoraiból álló bázis, és legyenek a vektorokhoz tartozó sajátértékek rendre $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ (e sajátértékek nem feltétlenül különbözők). Ekkor

$$\{t \mapsto e^{\lambda_n t} v_n \mid n = 1, \dots, N\}$$

az állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet egy alaprendszere.

(ii) Ha A sajátalterei nem feszítik ki $\mathbf{V}$-t, akkor egy alaprendszert a következőképpen állítunk elő:

– vesszük exponenciális függvények és sajátvektorok szorzatát ugyanúgy, mint az előbb, azoknak a sajátértékeknek megfelelően, amelyek geometriai és algebrai multiplicitása megegyezik;

– ha a λ sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása nem egyezik meg, akkor ezen sajátértékhez az exponenciális függvény és sajátvektor szorzatán kívül vesszük a sajátértékhez tartozó háttérvektoroknak az exponenciális függvénnyel és polinomokkal vett szorzataiból készített alkalmas összegét is; így az előbbi jelölésekkel a

$$\left\{ t \mapsto e^{\lambda t} \sum_{k=i}^{n_j} \frac{t^{k-i}}{(k-i)!} u_{jk} \mid i = 1, \dots, n_j \right\}$$

függvényeket is.

8.4. Ha $\mathbf{V}$ valós vektortér, és A olyan, hogy van sajátvektoraiból és "háttérvektoraiból" álló bázisa $\mathbf{V}$-nek (komplex esetben az ilyen létezése szükségszerű, valós esetben lehetséges), akkor ugyanúgy adhatunk meg egy alaprendszert, mint a komplex esetben.

Ha viszont A nem olyan, akkor $\mathbf{V}$ és A komplexifikáltján keresztül jutunk el egy megfelelő alaprendszerhez. Ugyanis tekinthetjük az

$$(x : \mathbb{R} \to \mathbf{V}_{\mathbb{C}})? \qquad \dot{x} = A_{\mathbb{C}} x$$

differenciálegyenletet és ennek az előbbiekben előállított alaprendszerét.

Ha λ az $A_{\mathbb{C}}$ sajátértéke, akkor λ^* is sajátértéke, és a megfelelő sajátalterek is egymás komplex konjugáltjai (Analízis II.37.4). Mi több, azt is igen egyszerű belátni, hogy a komplex konjugált sajátértékekhez tartozó vektorsorozatok, amelyek az algebrai és geometriai multiplicitás különbözőségéből adódnak, szintén egymás komplex konjugáltjainak vehetők. Tehát a komplexifikált differenciálegyenlet alaprendszerében

$$t \mapsto e^{(\alpha+i\beta)t}(x+iy) \quad \text{és} \quad t \mapsto e^{(\alpha-i\beta)t}(x-iy)$$

alakú függvények ugyanolyan valós együtthatókkal vett lineáris kombinációi szerepelnek. Ezeknek a lineáris kombinációja ismét megoldás. Vegyük tehát a fenti két függvény összegének felét és különbségük $1/2i$-szeresét; így az

$$t \mapsto e^{\alpha t}(x \cos \beta t - y \sin \beta t) \quad \text{és} \quad t \mapsto e^{\alpha t}(x \sin \beta t + y \cos \beta t)$$

valós (azaz $\mathbf{V}$ értékű) függvényekhez jutunk, és ilyenek valós lineáris kombinációi lesznek az eredeti $\mathbf{V}$ értékű differenciálegyenlet alaprendszerében.

8.5. Feladatok

1. Az $A : I \to \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ leképezés folytonos, így ha $t_o, t \in I$, akkor értelmes $\int_{t_o}^t A$. Vajon miért nem igaz $\dim(\mathbf{V}) > 1$ esetén az, hogy általában a homogén lineáris differenciálegyenletnek a (t_o, x_o) ponton áthaladó megoldása a 7.7.1. feladatban mondotthoz hasonlóan $t \mapsto \left(\exp \int_{t_o}^t A\right) x_o$ alakú?

Láttuk, ha A állandó, akkor mégis ez a megoldás. Találjunk A-ra ennél általánosabb feltételt, amely biztosítja a megoldás ilyen formáját.

2. Adjuk meg a 7.8.2. feladatban szereplő differenciálegyenlet egy alaprendszerét az ebben a fejezetben tárgyaltak szerint.

3. Határozzuk meg az alábbi mátrixokkal felírt $\mathbb{R}^3$ értékű homogén lineáris differenciálegyenletek egy-egy alaprendszerét:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Legyen $\omega \in \mathbb{R}^3$, jelölje most $\times$ a vektoriális szorzást $\mathbb{R}^3$ -on. Ekkor

$$(x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3)? \qquad \dot{x} = \omega \times x$$

állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet. Állítsuk elő a megoldásait! Útmutatás: a differenciálegyenlet mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Vegyünk egy A antiszimmetrikus lineáris leképezést egy 3 dimenziós $(\mathbf{E},\mathbf{D},\mathbf{b})$ euklideszi térben (Analízis II.32.). Legyen $\alpha := |A|$. Bizonyítsuk be, hogy

$$e^{tA} = \mathrm{id}_{\mathbf{E}} + A\frac{\sin \alpha t}{\alpha} + A^2 \frac{1 - \cos \alpha t}{\alpha^2}.$$

9. Inhomogén lineáris differenciálegyenletek

9.1. Most az

$$(x : I \to \mathbf{V})? \qquad \dot{x} = Ax + b$$

inhomogén lineáris differenciálegyenletet vizsgáljuk, ahol, emlékezzünk, $A : I \to \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ és $b : I \to \mathbf{V}$ folytonos leképezések, $b \neq 0$.

Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldásainak (amin megállapodásunk szerint maximális megoldásokat értünk) összességét $\mathcal{M}$-mel jelöljük. Minden megoldás az I-n értelmezett $\mathbf{V}$ értékű folytonosan differenciálható függvény, azaz a $C^1(I, \mathbf{V})$ eleme.

Emlékeztetünk, hogy a megfelelő homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásainak összegésségét $\mathcal{M}_0$ jelöli.

Állítás *$\mathcal{M}$ a $C^1(I, \mathbf{V})$-nek $\mathcal{M}_0$ fölötti affin altere, azaz $\mathcal{M} = \hat{r} + \mathcal{M}_0$, ahol $\hat{r}$ az $\mathcal{M}$ egy tetszőlegesen választott eleme.*

Bizonyítás Ha r az inhomogén egyenlet megoldása, akkor $(r - \hat{r})^{\cdot} = \dot{r} - \dot{\hat{r}} = (Ar + b) - (A\hat{r} + b) = A(r - \hat{r})$, azaz $r - \hat{r} \in \mathcal{M}_0$ és $r = \hat{r} + (r - \hat{r})$.

Viszont ha r_o a homogén egyenlet megoldása, akkor $\hat{r} + r_o$ megoldása az inhomogénnek, amint arról az előzőhöz hasonlóan egyszerű meggyőződni. ■

Szokták a fenti tényt úgy megfogalmazni, hogy az inhomogén egyenlet általános megoldása egyenlő a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy "partikuláris" (azaz konkrétan adott) megoldásának az összege.

9.2. Az inhomogén egyenlet adott kezdeti feltételt kielégítő megoldását is ki tudjuk fejezni a homogén egyenletre vonatkozó ismereteink segítségével. Egyszerű differenciálással, a változó határú integrálok differenciálására vonatkozó ismereteink alapján (Analízis V.B.11.8.4.) azonnal bebizonyíthatjuk a következő állítást.

Állítás *Az inhomogén egyenlet (t_o, x_o) kezdeti feltételű megoldása*

$$I \to \mathbf{V}, \quad t \mapsto R(t, t_o)x_o + \int_{t_o}^{t} R(t, s)b(s)\, ds,$$

ahol R a homogén egyenlet rezolvense.

9.3. Az előbbi eredményünk igen szép, elméleti meggondolások szempontjából fontos, azonban konkrét gyakorlati alkalmazásokban kevéssé használható, mert a rezolvens előállítása általában nehéz feladat.

Most megismerkedünk egy módszerrel, amely megadja az inhomogén egyenlet egy megoldását a homogén egyenlet általános megoldásának (alaprendszerének) ismeretében, így a 9.1. állítás alapján az inhomogén egyenlet bármely megoldását megkapjuk. Ezt a módszert az **állandók variálásának** szokás nevezni.

Tudjuk, hogy a homogén egyenlet $r_1, \ldots, r_N$ alaprendszerével a homogén egyenlet minden megoldása $\sum_{k=1}^{N} c_k r_k$ alakban adható meg. Próbáljuk megtalálni az inhomogén egyenlet egy megoldását is ilyen alakban, azzal a különbséggel, hogy a c_k együtthatók nem állandók, hanem az I-n értelmezett függvények. Ekkor tehát annak kell teljesülnie, hogy

$$\left(\sum_{k=1}^{N} c_k r\right)^{\cdot} = A\sum_{k=1}^{N} c_k r_k \ + b,$$

azaz

$$\sum_{k=1}^{N} \dot{c}_k r_k \ + \sum_{k=1}^{N} c_k \dot{r}_k = \sum_{k=1}^{N} c_k A r_k \ + b.$$

Az r_k-k a homogén egyenlet megoldásai, ezért a bal oldal második és a jobb oldal első tagja egyenlő. Továbbá minden t-re $r_1(t), \ldots, r_N(t)$ bázis $\mathbf{V}$-ben, tehát $b(t)$ kifejthető szerinte: $b(t) = \sum_{k=1}^{N} \beta_k(t) r_k(t)$. Így a "variált állandókra" a

$$\dot{c}_k = \beta_k \qquad (k = 1, \ldots, N)$$

egyenleteket kapjuk, amelyeket – elvben – egyszerű integrálással megoldhatunk.

9.4. Feladatok

1. Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldásait könnyen megkaphatjuk akkor, ha A és b is állandó, továbbá A bijektív. Ugyanis ekkor vissza lehet vezetni homogén egyenletre: $(x + A^{-1}b)^{\cdot} = A(x + A^{-1}b)$. Mutassuk meg ennek alapján, hogy ekkor a (t_o, x_o) kezdeti feltételt kielégítő megoldás

$$t \mapsto e^{(t-t_o)A} x_o + \left(e^{(t-t_o)A} - \mathrm{id}_{\mathbf{V}}\right) A^{-1} b.$$

2. Az $(x : I \to \mathbb{K})? \quad \dot{x} = ax + b$ inhomogén lienáris differenciálegyenletnek a (t_o, x_o) ponton áthaladó megoldása $t \mapsto \left(\exp \int_{t_o}^{t} a\right) x_o + \int_{t_o}^{t} \left(\exp \int_{t}^{s}\right) b(s)\, ds$ (lásd a 7.7.1. feladatot).

3. Alkalmazzuk az állandók variálásának módszerét, hogy megtaláljuk a

$$((x_1, x_2) : (t)\mathbb{R} \to \mathbb{R})? \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \omega x_2 + t, \\ \dot{x}_2 &= -\omega x_1 + t \end{aligned}$$

differenciálegyenlet összes megoldását, ahol $\omega \in \mathbb{R}^+$ adott.

Mi az $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldás?

4. Találjuk meg az állandók variálásának módszerével az

$$(x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R})? \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} + t^2$$

differenciálegyenlet összes megoldását a 7.7.1. feladat eredményei alapján.

10. Magasabb rendű lineáris differenciálegyenletek

10.1. Az n-edrendű lineáris differenciálegyenletet egy I nyílt intervallumon adott $A_k : I \to \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$, $\quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$ és $b : I \to \mathbf{V}$ folytonos leképezésekkel

$$(x : I \to \mathbf{V})? \qquad x^{(n)} + A_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + A_1\dot{x} + A_0 x = b$$

alakba szokás írni.

Az

$$x_k := x^{(k)}, (k = 0, 1, \ldots, n-1), \quad \mathbf{x} := (x_0, \ldots, x_{n-1}), \quad \mathbf{b} := (0, 0, \ldots, b),$$

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ -A_o & -A_1 & A_2 & \ldots & \ldots & A_{n-1} \end{pmatrix},$$

jelöléssel az n-edrendű differenciálegyenletet az

$$(\mathbf{x} : I \to \mathbf{V}^n)? \qquad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

elsőrendűre vezetjük vissza; megoldásának a nulladik komponense az eredeti feladat megoldása.

10.2. Az n-edrendű homogén egyenlet (maximális) megoldásainak összessége az n-szer folytonosan differenciálható $I \to \mathbf{V}$ függvények – azaz $C^n(I, \mathbf{V})$ – egy lineáris alterét alkotják, és bármely $t_o \in I$ esetén $r \mapsto (r(t_o), \dot{r}(t_o), \ldots, r^{(n-1)}(t_o))$ lineáris bijekció a megoldások vektortere és $\mathbf{V}^n$ között.

Ha $N := \dim(\mathbf{V})$, akkor az n-edrendű homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásainak vektortere az előbbi megállapítás alapján $N \cdot n$ dimenziós. Ennek egy bázisát most is **alaprendszernek** nevezzük.

A fenti elsőrendű egyenletnek a homogén esetben van $N \cdot n$ darab $I \to \mathbf{V}^n$ megoldásból álló alaprendszere. Egy ilyen alaprendszernek a nulladik komponensei adják az n-edrendű egyenlet egy alaprendszerét, mert

– megoldásai az eredeti n-edrendű egyenletnek, és lineárisan független $I \to \mathbf{V}$ függvények (ha ugyanis lineárisan összefüggők volnának, akkor minden deriváltjuk is lineárisan összefüggő volna, így a deriváltak együttese, az elsőrendű egyenlet alaprendszere is összefüggő volna),

– az n-edrendű egyenlet minden megoldása ezeknek a lineáris kombinációja (mert minden megoldás az elsőrendű megoldásának nulladik komponense, és az elsőrendű egyenlet minden megoldása az ottani alaprendszer tagjainak lineáris kombinációja).

10.3. Különösen fontosak és érdekesek a $\mathbb{K}$ értékű állandó együtthatós n-edrendű lineáris differenciálegyenletek, amelyek az előzőek alapján a következő alakúak: adott $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$, $b : I \to \mathbb{K}$ folytonos függvény és

$$(x : \mathbb{R} \to \mathbb{K})? \qquad x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{x} + a_0 x = b.$$

Tudjuk (az elsőrendűre való visszavezetésből, lásd 8.1.), hogy az n-ed rendű állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásai végtelen sokszor differenciálhatók, és az előző pont alapján a $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$-nak n dimenziós lineáris alterét alkotják. Vezessük be a

$$D : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}), \quad r \mapsto \dot{r}$$

lineáris leképezést, a "differenciálás operátorát". Tekintsük továbbá a

$$P := \mathrm{id}_{\mathbb{K}}^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{id}_{\mathbb{K}}^k$$

polinomot, amelyet a differenciálegyenlet **karakterisztikus polinomjának** hívunk. Értelmezhetjük a $P(D) : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ lineáris leképezést (Analízis II.8.3.), és ezzel a differenciálegyenlet az

$$(x : \mathbb{R} \to \mathbb{K})? \qquad P(D)x = b$$

alakot ölti.

10.4. Ha $\lambda \in \mathbb{K}$, használjuk az $\exp^\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{K}, t \mapsto e^{\lambda t}$ jelölést.
Minden nehézség nélkül ellenőrizhető, hogy
(i) $D \exp^\lambda = \lambda \exp^\lambda$, vagy másképpen,

$$(D - \lambda) \exp^\lambda = 0;$$

(ii) bármely m, k pozitív egész számra

$$(D - \lambda)^m \frac{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^k}{k!} \exp^\lambda = \begin{cases} 0 & \text{ha } m > k, \\ \frac{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{k-m}}{(k-m)!} \exp^\lambda & \text{ha } m \leq k. \end{cases}$$

10.5. Tegyük most fel, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Ekkor $P = \prod_{i=1}^{s} (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - \lambda_i)^{m_i}$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ a P polinom különböző gyökei, amelyek multiplicitása rendre $m_1, \ldots, m_s$.

Állítás *A 10.3.-ban megadott állandó együtthatós n-edrendű homogén lineáris differenciálegyenlet egy alaprendszere*

$$\left\{ \frac{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^k}{k!} \exp^{\lambda_i} \mid k = 0, 1, \ldots, m_i - 1,\ i = 1, \ldots, s \right\},$$

ahol λ_i a differenciálegyenlet karakterisztikus polinomjának gyöke m_i multiplicitással.

Bizonyítás A polinom gyöktényezős alakjának megfelelően $P(D) = \prod_{i=1}^{s}(D - \lambda_i)^{m_i}$. Ebből azonnal látjuk 10.4. alapján, hogy a fenti függvények megoldások, továbbá a számuk n. Azt kell tehát csak megmutatnunk, hogy ezek a függvények lineárisan függetlenek.

Tegyük fel, hogy összefüggők, azaz

$$f := \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=0}^{m_i - 1} c_{ik} \frac{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^k}{k!} \exp^{\lambda_i} = 0$$

és van olyan i_o, k_o, hogy $c_{i_o k_o} \neq 0$. Ekkor létezik a $\{0, 1, \ldots, m_{i_o} - 1\}$ halmazban olyan legnagyobb k_{i_o}, hogy $c_{i_o k_{i_o}} \neq 0$, de $c_{i_o k} = 0$, ha $k > k_{i_o}$.

Ha $M(D) := (D - \lambda_{i_o})^{k_{i_o}} \prod_{i | i \neq i_o}(D - \lambda_i)^{m_i}$, akkor egyrészt $f = 0$ miatt $M(D)f = 0$, másrészt a 10.4. formulái alapján $M(D)f \neq 0$, ami ellentmondás, tehát a szóban forgó függvények lineárisan függetlenek.

10.6. Vizsgáljuk most azt, amikor $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. A differenciálegyenletet minden további nélkül felfoghatjuk komplex értékűnek, és alkalmazhatjuk az előző eredményt. Tudjuk továbbá, hogy ekkor, ha λ nem valós gyöke a P valós polinomnak, akkor λ^* is gyöke. Ezért az alaprendszerben együtt szerepelnek

$$t \mapsto \frac{t^k}{k!} e^{(\alpha + i\beta)t} \quad \text{és} \quad t \mapsto \frac{t^k}{k!} e^{(\alpha - i\beta)t}$$

alakú függvények. Ezek összegének fele és különbségének $1/2i$-szerese is megoldás; így kapjuk a valós

$$t \mapsto \frac{t^k}{k!} e^{\alpha t} \cos \beta t \quad \text{és} \quad t \mapsto \frac{t^k}{k!} e^{\alpha t} \sin \beta t$$

függvényeket, amelyek a valós differenciálegyenlet alaprendszerét alkotják.

10.7. Az n-edrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet összes megoldását is megkaphatjuk úgy, hogy egy tetszőlegesen választott megoldáshoz hozzáadjuk a homogén egyenlet összes megoldását. Egy tetszőleges megoldást most is az állandók variálásának módszerével állíthatunk elő. Ennek alkalmazhatóságához az elsőrendűre való visszavezetéshez kell fordulnunk. Ha $r_1, \ldots, r_n$ az n-edrendű homogén egyenlet egy alaprendszere, akkor az inhomogén egyenlet egy megoldását $\sum_{k=1}^{n} c_k r_k$ alakban keressük, ahol a c_k együtthatók olyan függvények, amelyekre

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{c}_k r_k = b, \qquad \sum_{k=1}^{n} \dot{c}_k r_k^{(i)} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-1)$$

teljesül.

Viszont olykor egyszerűbb lehetőségünk is van: ha

– a differenciálegyenlet állandó együtthatós,

– az inhomogenitás polinom, exponenciális, szinusz-, koszinuszfüggvények szorzatának lineáris kombinációja,

akkor a megoldást az inhomogenitáshoz hasonló alakban kereshetjük. (Megjegyezzük, hogy a szinusz és koszinusz függvények általában együtt szerepelnek a megoldásban, még akkor is, ha az inhomogenitásban csak az egyikük van jelen.)

10.8. Feladatok

1. Adjuk meg az

$$(x : \mathbb{R} \to \mathbb{R})? \qquad \dddot{x} - \ddot{x} - \dot{x} + x = 0$$

homogén differenciálegyenlet egy alaprendszerét.

Hogyan módosul a válasz az ugyanilyen alakú, de $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ismeretlenre felírt differenciálegyenletre?

2. Adjuk meg az

$$(x : \mathbb{R} \to \mathbb{C})? \qquad \ddot{x} + i\dot{x} + 2x = 0$$

differenciálegyenlet egy alaprendszerét.

3. Keressük meg az $(x : (t)\mathbb{R} \to \mathbb{R})? \quad \ddot{x} + x = \frac{1}{1+\cos^2 t}$ differenciálegyenlet összes megoldását az állandók variálásának módszerével (nem baj, ha egy integrálást nem tudunk konkrétan elvégezni).

4. Legyen $\omega \in \mathbb{R}^+$. Adjuk meg az

$$(x : \mathbb{R} \to \mathbb{R})? \qquad \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

homogén differenciálegyenlet egy alaprendszerét és összes megoldását.

Legyen továbbá $\beta \in \mathbb{R}^+,\ k \in \mathbb{R}$, és keressük meg az

$$(x : \mathbb{R} \to \mathbb{R})? \qquad \ddot{x} + \omega^2 x = \phi$$

inhomogén differenciálegyenlet egy megoldását, ha

$$(i)\ \phi(t) = kt^2, \qquad (ii)\ \phi(t) = ke^{\beta t}, \qquad (iii)\ \phi(t) = k\cos\beta t.$$

(Útmutatás: keressük a megoldást $at^2 + bt + c,\ ae^{\beta t},\ a\cos\beta t$, illetve $at\cos\beta t$ alakaban, ahol a, b, c valós számok; ügyeljünk a $\beta = \omega$ esetre.)

5. Keressük meg az

$$(x : (t)\mathbb{R} \to \mathbb{R})? \qquad \ddot{x} + \gamma\dot{x} = k\cos\beta t$$

differenciálegyenlet összes megoldását, ha $\gamma, k, \beta \in \mathbb{R}$.

III. EGYÉB SPECIÁLIS TÍPUSÚ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

11. Szétválasztható differenciálegyenletek

11.1. Legyenek $h : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{K}$ és $g : \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbf{V}$ nyílt halmazon értelmezett folytonos függvények. Ekkor az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \qquad \frac{dx}{dt} = h(t)g(x)$$

differenciálegyenletet **szétválaszthatónak** nevezzük (a jobb oldalon szétválik a két változótól való függés).

Ha g az x_o egy környezetében globális Lipschitz-feltételnek tesz eleget, akkor a differenciálegyenlet jobb oldala bármely (t_o, x_o) egy környezetében teljesíti az univerzális Lipschitz-feltételt.

Az autonóm differenciálegyenletek speciális szétválasztható egyenletek ($h =$állandó). Ugyancsak szétválaszthatók a legegyszerűbb differenciálegyenletek, amelyekben a jobb oldal nem tartalmazza az ismeretlen függvényt ($g =$állandó).

11.2. Keressük a fenti differenciálegyenletnek a (t_o, x_o) ponton áthaladó megoldását!

Egyszerű tény, hogy ha $g(x_o) = 0$, akkor az x_o konstans függvény megoldás.

Ennél többet általában csak a $\mathbf{V} = \mathbb{K}$ esetben mondhatunk.

Jegyezzük meg mindenek előtt, hogy h-nak van primitív függvénye, vagyis olyan $H : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{K}$, hogy $H' = h$.

Vegyük először a $\mathbf{V} = \mathbb{R}$ esetet. Ha $g(x_o) \neq 0$, akkor van az x_o-nak olyan U környezete, amelyen $1/g$ értelmezve van, folytonos és nem vált előjelet, létezik primitív függvénye. Ha φ az $1/g$ primitív függvénye U-n, akkor φ szigorúan monoton, tehát injektív, és ezért értelmes a

$$t \mapsto r(t) := \varphi^{-1}\left(\varphi(x_o) + H(t) - H(t_o)\right)$$

függvény, amely a kezdetiérték-probléma megoldása. Valóban, nyilvánvaló, hogy $r(t_o) = x_o$, és az ismert

$$(\varphi^{-1})' = \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}}$$

képlet alapján r kielégíti a differenciálegyenletet is.

Vegyük ezután a $\mathbf{V} = \mathbb{C}$ esetet és tegyük fel, hogy $g : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ differenciálható. Ekkor hasonló formulát írhatunk fel, mint az előbb. Ugyanis létezik $1/g$-nek φ primitív függvénye az x_o egy környezetén, φ folytonosan differenciálható, a deriváltja nem nulla az x_o-ban, ezért az inverzfüggvény-tétel miatt injektív az x_o egy U (konvex) környezetén.

11.3. Megtaláltuk tehát a kezdetiérték-probléma megoldását, hangsúlyozzuk, a $\mathbf{V} = \mathbb{K}$ esetben. Érdemes egy egyszerű "konyhaszabályt" adni, amellyel könnyen észben tarthatjuk, hogyan is állíthatjuk elő a megoldást. Íme: a differenciálegyenlet

$$\frac{dx}{dt} = h(t)g(x)$$

alakjában válasszuk szét a változókat formálisan az egyenletek átrendezési szabálya szerint:

$$\frac{dx}{g(x)} = h(t)dt.$$

Ezután már csak integrálni kell a két oldalt a kezdeti értéktől a változó értékig, hogy megkapjuk a megoldást implicit alakban:

$$\int_{x_o}^{r(t)} \frac{1}{g} = \int_{t_o}^{t} h.$$

Itt a bal oldali integrál a valós esetben a szokásos integrált jelenti, a komplex esetben pedig az x_o-t és az $r(t)$-t összekötő bármely görbére – például egyenesszakaszra – vett integrált.

11.4. Feladatok

1. Adjuk meg a következő differenciálegyenleteknek (amelyek $x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvényekre vannak felírva a t változóban) a (t_o, x_o) ponton áthaladó maximális megoldásait (vizsgáljuk meg a differenciálegyenletek értelmezési tartományát, amely megszorítást adhat a t_o és x_o értékére):

$$(i)\ \dot{x} = \frac{x}{t}, \quad (ii)\ \dot{x} = -\frac{x}{t}, \quad (iii)\ \dot{x} = \frac{t}{x}, \quad (iv)\ \dot{x} = -\frac{t}{x},$$

$$(v)\ \dot{x} = \frac{1}{x}, \quad (vi)\ \dot{x} = ax^2, \text{ahol } a \in \mathbb{R} \text{ adott.}$$

2. Keressük meg az alábbi differenciálegyenleteknek (amelyek $x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvényekre vannak felírva a t változóban) a maximális megoldásait:

$$(i)\ \dot{x} = x\cos t, \quad (ii)\ \dot{x} = (1+x^2)e^t, \quad (iii)\ \dot{x} = \frac{t^3}{\cos x}.$$

Vigyázzunk a nem össszefüggő értelmezési tartománnyal!

3. Próbáljuk megoldani az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \qquad \dot{x} = \frac{x}{\|x\|^2}, \qquad x(t_o) = x_o \neq 0$$

kezdetiérték-problémát! (A megoldás értéke mindenütt párhuzamos x_o-val, ezért a feladat visszavezethető $\mathbb{K}$ értékű differenciálegyenletre.)

4. Az előző feladathoz fűzött útmutatás felhasználásával oldjuk meg az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \qquad \frac{dx}{dt} = x\sin t, \quad x(t_o) = x_o \neq 0$$

kezdetiérték-problémát!

5. Oldjuk meg az 1. feladatot úgy, hogy a keresett függvény $x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{C}$! Használjuk fel a 11.3.-beli formulát, ha lehet, és próbálkozzunk a differenciálegyenletek valós alakjával is (azaz $x = x_1 + ix_2$, majd a valós és képzetes rész szétválasztásával írjunk fel differenciálegyenletet az $(x_1, x_2) : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^2$ függvényre). Hasonlítsuk össze a kétféle módszert az egyes esetekben!

6. Hasonlítsuk össze az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \quad \dot{x} = |x| \quad \text{és az} \quad (x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{C})? \quad \dot{x} = |x|$$

differenciálegyenletek maximális megoldásait! (Útmutatás: a második differenciálegyenletet írjuk fel valós alakban: $\dot{x}_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\dot{x}_2 = 0$.)

7. Keressük meg az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{C})? \quad \dot{x} = x^*$$

differenciálegyenlet maximális megoldásait.

12. Szétválaszthatóra visszavezethető differenciálegyenletek

12.1. Legyen $F : \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbf{V}$ nyílt halmazon értelmezett folytonos függvény, és a differenciálegyenlet

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \qquad \dot{x} = F \circ \left(\frac{x}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}\right)$$

alakú (szokás az ilyen differenciálegyenletet **homogén fokszámúnak** nevezni).

Definiáljuk az $u := \frac{x}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}} : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V}$ új ismeretlen függvényt. Differenciálva az $x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\, u$ egyenlőséget azt kapjuk, hogy $\dot{x} = u + \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\, \dot{u}$, amiből az

$$(u : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \qquad \dot{u} = \frac{F(u) - u}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$$

szétválasztható differenciálegyenletet nyerjük.

Ennek megoldásaiból egyértelműen elő tudjuk állítani az eredeti differenciálegyenlet megoldásait.

12.2. Legyen $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ és $F : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett folytonos függvény. Az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad \dot{x} = F \circ (ax + b\mathrm{id}_{\mathbb{R}} + c)$$

differenciálegyenletet az $u := ax + b\mathrm{id}_{\mathbb{R}} + c$ új ismeretlennel, az $\dot{u} = a\dot{x} + b$ összefüggés alapján az

$$(u : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad \dot{u} = aF(u) + b$$

autonóm (tehát szétválasztható) differenciálegyenletre vezetjük vissza.

Ennek megoldásaiból egyértelműen elő tudjuk állítani az eredeti differenciálegyenlet megoldásait.

12.3. Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy F-re a 12.1.-ben és 12.2.-ben kirótt feltételek elegendők ahhoz, hogy az új differenciálegyenlet jobb oldala nyílt halmazon értelmezett és folytonos legyen.

2. Legyen $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ folytonos lineáris leképezés, $b, c \in \mathbf{V}$, $F : \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbf{V}$ nyílt halmazon értelmezett folytonos függvény, és tekintsük az $(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})?$ $\dot{x} = F(Ax + b\mathrm{id}_{\mathbb{R}} + c)$ differenciálegyenletet. Az $u := Ax + b\mathrm{id}_{\mathbb{R}} + c$ új ismeretlenre itt is autonóm egyenletet kapunk. Biztos, hogy megkapjuk az új egyenlet megoldásaiból az eredetiét is?

3. Oldjuk meg a megismert módszerrel az $(x : (t)\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})?$ $\dot{x} = \frac{x}{t}$, $x(1) = 0$ kezdetiérték-problémát, és hasonlítsuk össze a megoldás menetét a korábbival (11.5.1. feladat), amikor az eredeti egyenletet szétválaszthatónak vettük.

4. Keressük meg az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \quad \frac{dx}{dt} = \frac{t + x}{t - x}$$

differenciálegyenlet maximális megoldásait! (A jobb oldal számlálóját is, nevezőjét is elosztva t-vel homogén fokszámú egyenletet kapunk. Vizsgáljuk meg az értelmezési tartományokat!)

13. Egzakt differenciálegyenletek

13.1. A most tárgyalásra kerülő differenciálegyenletek leginkább síkgeometriai (azaz $\mathbb{R}^2$-ben megfogalmazott) feladatokban kerülnek elő, ezért a szokáshoz híven itt az ismeretlen függvényt y-nal, a függvény változóját x-szel, a differenciálást pedig vesszővel jelöljük. Legyenek $p, q : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett folytonos függvények, és tekintsük az

$$(y : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{p(x,y)}{q(x,y)}$$

differenciálegyenletet. Célszerűnek látszik ezt átírni

$$(*) \qquad p(x,y) + q(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

alakba (sőt szokásos a még "szimmetrikusabb" $p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0$ forma is, amit mi nem használunk) és megengedni a differenciálegyenlet értelmezési tartományában azokat az elemeket is, amelyekben q a nulla értéket veszi fel.

A $(*)$ differenciálegyenletet **egzaktnak** nevezzük, ha van olyan $F : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ differenciálható függvény, hogy

$$p = \partial_1 F, \qquad q = \partial_2 F.$$

13.2. Az F függvény $\mathrm{D}F = (\partial_1 F, \partial_2 F)$ deriváltjával az egzakt differenciálegyenlet így fogalmazható meg:

$$\mathrm{D}F(x,y)\cdot(1, \frac{dy}{dx}) = 0$$

(itt a pont az $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, azaz 1×2 -es mátrix hatását jelöli az $\mathbb{R}^2$ elemein).

Ezután nyilvánvaló, hogy az intervallumon értelmezett ϕ függvény pontosan akkor elégíti ki az egzakt differenciálegyenletet, ha van olyan c valós szám, hogy

$$F(x, \phi(x)) = c \qquad (x \in \mathrm{Dom}\phi).$$

Az egzakt differenciálegyenlet megoldásait tehát ezen implicit függvénykapcsolatból határozhatjuk meg.

13.3. Keressük az egzakt differenciálegyenletnek az $y(x_o) = y_o$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását. Az implicitfüggvény-tételből (Analízis IV.B.7.2.) tudjuk, hogy ha $\partial_2 F(x_o, y_o) = q(x_o, y_o) \neq 0$ (azaz (x_o, y_o) benne van az eredeti, nem átfogalmazott differenciálegyenlet értelmezési tartományában), akkor van az x_o egy környezetén értelmezett ϕ függvény, amelyre

$$F(x, \phi(x)) = F(x_o, .y_o) \qquad (x \in \mathrm{Dom}\phi),$$

és ez megoldás lesz.

Viszont $q(x_o, y_o) = 0$ esetén (azaz amikor (x_o, y_o) nincs benne az eredeti, nem átfogalmazott differenciálegyenlet értelmezési tartományában)

– ha $p(x_o, y_o) \neq 0$, akkor nincs megoldás;

– ha $p(x_o, y_o) = 0$, akkor lehet, hogy van megoldás, lehet, hogy nincs.

13.4. Hogyan döntjük el egy $(*)$ alakú differenciálegyenletről, hogy egzakt-e vagy sem? Ha p, q folytonosan differenciálhatók és (ugyanazon) a csillagszerű halmazon vannak értelmezve, továbbá

$$\partial_2 p = \partial_1 q,$$

akkor van olyan F, amelynek a parciális differenciálhányadosai p és q (Analízis V.B.11.5.). Sőt azt is tudjuk, hogy bármely (x_o, y_o) körül egy téglában F-et a következőképp lehet előállítani:

$$F(x, y) = \int_{x_o}^{x} p(\xi, y_o)\, d\xi \; + \; \int_{y_o}^{y} q(x, \eta)\, d\eta.$$

13.5. Előfordulhat, hogy a $(*)$ differenciálegyenlet nem egzakt, de **egzakttá tehető**, vagyis az egyenlet egzakt lesz, ha megszorozzuk egy alkalmas $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvénnyel, amelyet **integráló tényezőnek** szokás hívni.

Most néhány egyszerű módszert tárgyalunk, hogyan lehet integráló tényezőt találni csillagszerű halmazon értelmezett differenciálegyenlet esetén. Az alapösszefüggés az, hogy μp második változó szerinti parciális deriváltja és μq első változó szerinti parciális deriváltja legyen egyenlő, amiből

$$(*) \qquad \mu(\partial_2 p - \partial_1 q) = q\partial_1 \mu - p\partial_2 \mu$$

adódik.

Mielőtt a részletekre térnénk, felidézünk egy jelölést: ha f és g $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvények, akkor $f \otimes g : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x)g(y)$; speciálisan például $f \otimes 1$ olyan kétváltozós függvény, amely nem függ a második változótól.

(i) Ha μ nem függ a második változótól, akkor $(*)$ így írható: $\frac{\partial_2 p - \partial_1 q}{q} = \frac{\partial_1 \mu}{\mu}$. Itt a jobb oldal nem függ a második változótól, tehát a bal oldal sem, azaz van olyan $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$(**) \qquad \frac{\partial_2 p - \partial_1 q}{q} = f \otimes 1.$$

Ha tehát $\mu = \nu \otimes 1$, akkor a $\frac{\nu'}{\nu} = f$ összefüggésre jutunk, amiből

$$\mu = \left(\exp \circ \int f\right) \otimes 1.$$

Egyszerűen látható ezután, hogy a $(**)$ feltétel elégséges is ahhoz, hogy legyen olyan μ, amely nem függ a második változótól és a fenti alakú.

(ii) Teljesen hasonlóan, ha

$$\frac{\partial_2 p - \partial_1 q}{p} = -1 \otimes g, \quad \text{akkor} \quad \mu = 1 \otimes \left(\exp \circ \int g\right).$$

(iii) Az előző kettő kombinációjából: ha van olyan f és g, hogy

$$\partial_2 p - \partial_1 q = q(f \otimes 1) - (1 \otimes g)p, \quad \text{akkor} \quad \mu = \left(\exp \circ \int f\right) \otimes \left(\exp \circ \int g\right).$$

(iv) Ha $\mu = \lambda \circ \omega$, ahol $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ valamilyen "egyszerű" függvény és $\lambda : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$, akkor $\partial_1 \mu = (\lambda' \circ \omega)\partial_1 \omega$; ezt és a második parciális deriváltra vonatkozó hasonló kifejezést beírva a $(*)$ összefüggésbe, látjuk, hogy ha van olyan $\varphi : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$, hogy

$$\frac{\partial_2 p - \partial_1 q}{q\partial_1 \omega - p\partial_2 \omega} = \varphi \circ \omega, \quad \text{akkor} \quad \mu = \left(\exp \circ \int \varphi\right) \circ \omega.$$

13.6. Feladatok

1. Keressük meg az $y : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvényre az x változóval felírt következő differenciálegyenletek (értelmezési tartomány?) összes megoldását:

$$(i)\ y' = -\frac{y \cos xy}{1 + x \cos xy}, \qquad (ii)\ y(y - 2x) - x(x - 2y)y' = 0,$$

$$(iii)\ x^3 + xy^2 + (x^2 y + y^3)y' = 0.$$

(Az utolsót jól nézzük meg, nem lehet-e egyszerűbbé tenni!)

2. Keressünk integráló tényezőt az alábbi differenciálegyenletekhez:

$$(i)\ y' = \frac{(1 + xy)y}{x}, \qquad (ii)\ y'(ye^x - 1) + y = 0.$$

3. Fejtsük ki, pontosan milyen formájú a 13.5.(iv)-ben tárgyalt feltétel az "egyszerű" $\omega(x, y) = x + y$ és $\omega(x, y) = xy$ függvények esetén.

14. Néhány egyéb differenciálegyenlet

Ebben a fejezetben az ismeretlen függvény mindig $x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$, a változót pedig t jelöli.

14.1. Euler-féle differenciálegyenlet: adott $a, b \in \mathbb{R}$, az $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett folytonos függvény, és

$$t^2\ddot{x} + at\dot{x} + bx = f.$$

A differenciálegyenletet t^2-tel való osztással tehetjük explicitté. Ez azt jelenti, hogy $\{0\} \times \mathbb{R}$ biztosan nincs benne az értelmezési tartományában, vagyis mindenképpen külön vizsgálandó az értelmezési tartománynak az $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$-ben és $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$-ben levő része.

A differenciálegyenletet egyszerűbb alakra, másodrendű állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenletre vezethetjük vissza: például az $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ tartományban legyen $z := x \circ \exp$. Ekkor nem túl hosszú számolás után azt kapjuk, hogy

$$\ddot{z} - (1 - a)\dot{z} + bz = f \circ \exp\,.$$

14.2. Bernoulli-féle differenciálegyenlet: adottak a $g, h : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett folytonos függvények, az α valós szám, $h \neq 0$, $\alpha \neq 0, 1$, és

$$\dot{x} = g\,x + h\,x^\alpha.$$

A $z := x^{1-\alpha}$ új ismeretlenre az

$$\frac{1}{1-\alpha}\dot{z} = g\,z + h$$

inhomogén lineáris differenciálegyenletet kapjuk.

14.3. Riccati-féle differenciálegyenlet: adott a $g, h, k : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett folytonos függvény, és

$$\dot{x} = g\,x + h\,x^2 + k.$$

A Riccati-féle differenciálegyenletet egy r megoldásának ismeretében visszavezethetjük Bernoulli-féle differenciálegyenletre; ugyanis ekkor a $z := y - r$ ismeretlen függvényre a

$$\dot{z} = (2hr + g)z + hz^2$$

összefüggés adódik.

Ha $g = 0$ és létezik olyan $a, b, \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, hogy $h = a$, $k = b\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^\alpha$, akkor a Riccati-egyenlet **speciális**:

$$\dot{x} = ax^2 + bt^\alpha.$$

Ha $\alpha = 0$, az egyenlet szétválasztható. Továbbá α bizonyos értekeinél az egyenlet szétválaszthatóra vezethető vissza.

A legegyszerűbb, amikor $\alpha = -2$. Ekkor a $z := 1/x$ függvényre homogén fokszámú egyenletet kapunk (amely visszavezethető szétválaszthatóra).

Ha $\alpha = -\frac{4n}{2n-1}$, ahol $0 \neq n \in \mathbb{Z}$, akkor például $n > 0$ esetén, a $\{(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mid tx = -1/a\}$ halmaz kizárásával a $\beta := \frac{1}{\alpha+3}$ jelöléssel a differenciálegyenletet az

$$s := t^{1/\beta}, \qquad z(s) := \frac{1}{(s^\beta)\left(s^\beta y(s^\beta) + \frac{1}{a}\right)}$$

helyettesítéssel

$$\frac{dz}{ds} = -b\beta z^2 - a\beta s^{-(1+\beta)}$$

alakúra hozhatjuk, amely ismét speciális Riccati-féle, és $-(1+\beta) = -\frac{4(n-1)}{2(n-1)-1}$.

Az ismertetett transzformációt tehát n-szer alkalmazva az $\alpha = 0$ esetre jutunk.

14.4. Legendre-féle differenciálegyenlet: adott $n \in \mathbb{N}_0$, és

$$(1-t^2)\ddot{x} - 2t\dot{x} + n(n+1)x = 0.$$

Ennek a differenciálegyenletnek van n-edfokú polinom-megoldása, amelyet Legendre-polinomnak hívunk. Ha $P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k$, akkor

$$P_n'(t) = \sum_{k=1}^{n} k c_k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) c_{k+1} t^k,$$

$$P_n''(t) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) c_k t^{k-2} = \sum_{k=0}^{n-2} (k+2)(k+1) c_{k+2} t^k.$$

Feltéve, hogy P_n kielégíti a differenciálegyenletet, a

$$c_{k+2} = \frac{k(k+1) - n(n+1)}{(k+1)(k+2)}\, c_k$$

rekurziós képletet kapjuk, amelyből az együtthatók páros n esetén c_0 tetszőleges és $c_1 := 0$ választásával, páratlan n esetén $c_0 := 0$ és c_1 tetszőleges választásával kiszámíthatók.

14.5. Hermite-féle differenciálegyenlet: adott $n \in \mathbb{N}_0$, és

$$\ddot{x} - 2t\dot{x} + 2nx = 0.$$

Ennek is van n-edfokú polinom-megoldása, amelyet Hermite-polinomnak hívunk és H_n-nel jelölünk. Az előbbi módszerrel az együtthatókra a

$$c_{k+2} = \frac{2(k-n)}{(k+1)(k+2)}\, c_k$$

rekurziós képletet kapjuk.

14.6. Feladatok

1. Mit tegyünk, ha az Euler-féle differenciálegyenletet az $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$ részben kell megoldanunk?

2. Mi a Bernoulli-féle differenciálegyenlet értelmezési tartománya?

3. Különösen egyszerű – és fontos – az $\dot{x} = ax + bx^{n+1}$ alakú Bernoulli-féle differenciálegyenlet, ahol $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és $n \in \mathbb{N}$. A (t_o, x_o) kezdeti feltételt kielégítő megoldása

$$t \mapsto (\mathrm{sign} x_o)^n \left(-\frac{b}{a} + e^{-na(t-t_o)} \left(\frac{1}{x_o^n} + \frac{b}{a} \right) \right)^{-1/n}.$$

Mi a maximális megoldások értelmezési tartománya?

4. Oldjuk meg az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{x}{2t} + \frac{t^2}{2x}$$

differenciálegyenletet az $x(1) = 1$, az $x(1) = -1$ és az $x(-1) = 1$ kezdeti feltétellel.

5. Keressük meg az

$$(x : (t)\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad \dot{x} = -4x^2 + \frac{1}{t^4}$$

maximális megoldásait!

6. Mutassuk meg, hogy a P_n Legendre-polinomokra

$$\big((1 - \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2) P_n'\big)' + n(n+1)P_n = 0.$$

Felírva ezt az m indexre is, a két összefüggésből azt kapjuk, hogy

$$\big((1 - \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2)(P_m P_n' - P_n P_m')\big)' + \big(n(n+1) - m(m+1)\big) P_n P_m = 0.$$

Lássuk be ennek alapján, hogy

$$\int_{-1}^{1} P_n P_m = 0 \quad \text{ha} \quad n \neq m.$$

7. Az Hermite-polinomokra

$$(\rho H_n')' + 2n\rho H_n = 0$$

teljesül, ahol $\rho(t) := e^{t^2}$ $(t \in \mathbb{R})$. Irjuk fel ugyanezt az egyenlőséget H_m-re is, szorozzuk be az egyenlőségeket H_m-mel illetve H_n-nel, vonjuk ki őket egymásból, azután lássuk be, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n H_m \rho = 0 \quad \text{ha} \quad n \neq m.$$

15. Megoldási ötletek

Láttuk az előzőekben, hogy egyes differenciálegyenletek bizonyos fogásokkal más, jobban kezelhető alakra hozhatók. Most további, alkalmi ötleteket mutatunk, amelyek kiinduló pontot jelenthetnek más differenciálegyenletek megoldásához.

15.1. A magasabb rendű differenciálegyenleteket az elméletben visszavezettük elsőrendűre; a gyakorlatban viszont sokszor kényelmesebb egy elsőrendű differenciálegyenletet magasabb rendűvé alakítani; ez különsen állandó együtthatós homogén lineáris egyenleteknél előnyös.

Tekintsük az

$$((x,y):\mathbb{R}\to\mathbb{R})? \quad \begin{aligned} \dot{x} &= ay, \\ \dot{y} &= bx + cy \end{aligned}$$

differenciálegyenletet, ahol $a, b, c \in \mathbb{K}$.

Differenciálva az első egyenlőséget, majd ebben $\dot{y}$ helyébe beírva a második egyenlőség jobb oldalát, azt kapjuk, hogy

$$\ddot{x} - c\dot{x} - abx = 0.$$

A karakterisztikus polinom gyökeit és ezzel a másodrendű differenciálegyenlet egy r_1, r_2 alaprendszerét könnyűszerrel előállíthatjuk, amiből az elsőrendű differenciálegyenlet alaprendszere

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ \dot{r}_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r_2 \\ \dot{r}_2 \end{pmatrix}.$$

15.2. Keressük meg az

$$((x_1,x_2):(t)\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2)? \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2tx_2, \\ \dot{x}_2 &= 2tx_1 \end{aligned}$$

homogén lineáris differenciálegyenlet egy alaprendszerét!

Összeadva és kivonva egymásból a két egyenletet azt kapjuk, hogy

$$(x_1+x_2)^{\cdot} = 2t(x_1+x_2), \quad (x_1-x_2)^{\cdot} = -2t(x_1-x_2).$$

Ezek különálló homogén lineáris (szétválasztható) differenciálegyenletek $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényekre, azonnal meg tudjuk oldani őket: $(x_1+x_2)(t) = ae^{t^2}, \quad (x_1-x_2)(t) = be^{-t^2}$.

Tehát az eredeti egyenlet minden megoldása

$$t \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} ae^{t^2} + be^{-t^2} \\ ae^{t^2} - be^{-t^2} \end{pmatrix}$$

alakú, vagyis az alaprendszer

$$t \mapsto \begin{pmatrix} e^{t^2} \\ e^{t^2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{-t^2} \\ -e^{-t^2} \end{pmatrix}.$$

15.3. Adjuk meg az

$$((x,y) : (t)\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^2)? \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= 1 - \frac{1}{y}, \quad x(0) = 1 \\ \dot{y} &= \frac{1}{x-t}, \quad y(0) = 2 \end{aligned}$$

kezdetiérték-probléma maximális megoldását!

Tüntessük el a törtet mindkét sorban:

$$\begin{aligned} y\dot{x} = y - 1, \text{ azaz } \ y(\dot{x} - 1) &= -1, \\ (x-t)\dot{y} &= 1. \end{aligned}$$

Összeadva az egymás alatti egyenlőségeket azt kapjuk, hogy

$$\big(y(x-t)\big)^{\cdot} = 0.$$

A differenciálás alatti függvény tehát állandó; figyelembe véve a kezdeti feltételt $y(x-t) = 2$, azaz $\frac{1}{x-t} = \frac{y}{2}$. Ezt az egyenlőséget visszaírva a differenciálegyenletbe $\dot{y} = \frac{y}{2}$ adódik, amit azonnal meg tudunk oldani az adott kezdeti feltétellel: $y(t) = 2e^{t/2}$. Az olvasóra bízzuk, fejezze be a feladat megoldását.

15.4. Oldjuk meg az

$$((x,y) : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^2)? \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \qquad x(0) = 1, \\ \dot{y} &= -\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad y(0) = 3 \end{aligned}$$

kezdetiérték-problémát!

A differenciálegyenlet első egyenlőségét x-szel, a másodikat y-nal megszorozva, aztán összeadva őket azt kapjuk, hogy $x\dot{x} + y\dot{y} = 0$, tehát a kezdeti értéket is figyelembe véve, $x^2 + y^2 =$állandó$= 10$. Ezzel

$$\dot{x} = \frac{y}{\sqrt{11}}, \quad \dot{y} = -\frac{x}{\sqrt{11}},$$

ami már például a 15.1. módszerrel könnyen megoldható.

15.5. Keressük meg az

$$((x,y) : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^2)? \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= y(1+x^2), \quad x(0) = 1, \\ \dot{y} &= x(1+y^2), \quad y(0) = 1 \end{aligned}$$

kezdetiérték-probléma maximális megoldását!

Használjuk az $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ jelölést, majd osszuk el a differenciálegyenlet alsó sorát a felsővel, egyszerűsítsünk formálisan dt-vel (meg fogjuk mutatni, hogy ennek a "konyhamódszernek" mi az értelme), így kapjuk a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(1+y^2)}{y(1+x^2)}$$

differenciálegyenletet y-ra az x függvényében. Ennek megoldása a kezdeti feltétel figyelembe vételével ($x = 1$ esetén $y = 1$) $y(x) = x$. Beírva ezt az eredeti differenciálegyenlet első egyenlőségébe, az x-re kapunk ismét egy autonóm differenciálegyenletet. Az olvasóra bízzuk, oldja meg ezt a megfelelő kezdeti feltétellel.

Azt kell tehát még megmutatnunk, mi értelme van a dt-vel való egyszerűsítésnek. A kezdeti feltétel szerint $\dot{x}(0) = 1 > 0$. Mivel a keresett függvény folytonosan differenciálható, ez azt jelenti, hogy a 0 körül egy I intervallumban – amelyet tekinthetünk az x értelmezési tartományának– levő t-kre $\dot{x}(t) > 0$, azaz x szigorúan monoton nő I-n. Létezik tehát x^{-1}, az x inverze, amely szintén intervallumon van értelmezve, folytonosan differenciálható, és

$$(x^{-1})' = \frac{1}{\dot{x} \circ x^{-1}}$$

(itt jónak láttuk a differenciálást vesszővel jelölni). Tehát az

$$\hat{y} := y \circ x^{-1}$$

függvényre

$$\hat{y}' = \left(\dot{y} \circ x^{-1}\right) \frac{1}{\dot{x} \circ x^{-1}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \circ x^{-1}$$

áll fönn, azaz $\hat{y}$ olyan differenciálegyenletnek tesz eleget, amelynek jobb oldala az eredeti jobb oldal két komponensének a hányadosa. Csak el kell hagyni a kalapot y-ról, a jobb oldalt viszont úgy tekinteni, hogy az eddigi t helyett most az x "változó" függvénye, és máris megkapjuk az előbbi "konyhamódszerrel" nyert differenciálegyenletet.

15.6. Feladatok

1. Használható-e a 15.5 feladat módszere a 15.4. feladat megoldására, és viszont?

2. Adjuk meg az

$$((x, y, z) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3)? \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= y + z, \\ \dot{y} &= x + z, \\ \dot{z} &= x + y \end{aligned}$$

homogén lineáris differenciálegyenlet egy alaprendszerét!

3. Oldjuk meg az

$$((x_1, x_2) : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^2)? \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & x_1(0) &= 1, \\ \dot{x}_2 &= 2x_1^3, & x_2(0) &= 1 \end{aligned}$$

kezdetiérték-problémát!

4. Oldjuk meg az

$$((x, y) : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^2)? \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= y\sqrt{1 + x^2}, & x(0) &= 2, \\ \dot{y} &= x\sqrt{1 + y^2}, & y(0) &= 1 \end{aligned}$$

kezdetiérték-problémát!

5. Keressük meg az

$$((x, y)) : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^2)? \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= xy + y^2, & x(-1) &= 0, \\ \dot{y} &= xy + x^2, & y(-1) &= 1 \end{aligned}$$

kezdetiérték-probléma megoldását!

IV. ALKALMAZÁSOK

Ebben a részben olyan egyszerű geometriai, fizikai, kémiai, biológiai stb. problémákat tárgyalunk, amelyek differenciálegyenletre vezetnek. Mindenütt felállítjuk a megfelelő differenciálegyenletet; ezek általában heurisztikus meggondolásokon alapulnak, ne várja tehát senki, hogy a differenciálegyenletet matematikai pontossággal vezessük le (nem is lehet, hiszen a feladat többnyire nem matematikai objektumokra vonatkozik); a differenciálegyenletnek és megoldásának kell már matematikai pontosságúnak lennie. A kapott differenciálegyenletről megállapítjuk, milyen típusú, általában közöljük a megoldás végeredményét, és az olvasóra hagyjuk, végezze el a megoldás lépéseit.

16. Geometriai feladatok

A következőkben görbén mindig $\mathbb{R}^2$-beli görbét értünk; a differenciálegyenletek elméletét pedig leginkább úgy próbáljuk hasznosítani, hogy a görbét – vagy legalábbis egy részét – függvény grafikonjaként állítjuk elő. $\mathbb{R}^2$ elemeit általában (x, y)-nal jelöljük; ennek megfelelően a differenciálegyenletekben az ismeretlen függvény jele általában y, amelynek változója x.

16.1. Keressük azon görbéket, amelyekre az igaz, hogy bármely pontja és a pontban állított normálisnak az első tengellyel való metszetpontja közti távolság állandó.

Az első tengellyel párhuzamos egyenesek ilyen görbék.

Van esetleg más is: legyen egy ilyen görbe az $x \mapsto y(x)$ függvény grafikonja. Az $(x, y(x))$ ponton áthaladó normális egyenlete – feltéve, hogy $y'(x) \neq 0$ – $\xi \mapsto -\frac{1}{y'(x)}(\xi - x) + y(x)$.

Ez az egyenes az első tengelyt azon ξ_o értéknél metszi, amelyre a fenti függvény értéke nulla: $\xi_o = y(x)y'(x) + x$. A feltétel szerint tehát van olyan c nemnegatív szám, hogy

$$\bigl(x - \bigl(y(x)y'(x) + x\bigr)\bigr)^2 + y(x)^2 = c^2,$$

vagyis a görbét (egy olyan részét, amely függvénygrafikon) az

$$(y : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad ({y'}^2 + 1)y^2 = c^2$$

implicit differenciálegyenlet írja le. Vegyük észre, hogy itt elejthető már az a kikötés, hogy a függvény deriváltja ne legyen nulla. Ebből a görbének arra a részére, ahol a függvény nem nulla, és a deriváltja nemnegatív, az

$$(y : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad y' = \sqrt{\frac{c^2}{y^2} - 1}$$

explicit differenciálegyenlet vonatkozik.

Ez autonóm differenciálegyenlet. Maximális megoldásai

$$y(x) = \sqrt{c^2 - (x-a)^2} \qquad (\{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < c^2, x < a\})$$

és

$$y(x) = -\sqrt{c^2 - (x-a)^2} \qquad (\{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < c^2, x > a\}),$$

ahol a adott valós szám. Az x-re kirótt első feltétel azért kell, hogy a gyökös kifejezésnek értelme legyen, a második pedig azért, hogy a függvény deriváltja ne legyen negatív.

Átalakítva a fenti egyenlőséget azt kapjuk, hogy a függvény grafikonja

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, x < a, (x-a)^2 + y^2 = c^2\},$$

illetve

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0, x > a, (x-a)^2 + y^2 = c^2\}.$$

Ezek $(a, 0)$ középpontú, c sugarú negyedkörök. Nyilván a másik két negyedkör is ilyen görbe (ezeket akkor kapjuk, ha az implicit differenciálegyenletből azt az explicitet származtatjuk, amelyben a derivált negatív). Ha tehát nem szorítkozunk függvény grafikonjával megadott görbékre, akkor megállapíthatjuk, hogy a keresett görbék az első tengellyel párhuzamos egyenesszakaszokból és olyan körívekből tevődnek össze, amelyek középpontja rajta van az első tengelyen.

16.2. Határozzuk meg azokat a görbéket, amelyek bármely pontja felezi a ponthoz tartozó normálisának a két tengely közé eső szakaszát!

Tegyük most is fel, hogy a görbe egy függvény grafikonja. Az előző feladatból tudjuk, hol metszi az $(x, y(x))$ ponthoz tartozó normális az első tengelyt. A második tengelyt pedig a $-\frac{1}{y'(x)}(-x) + y(x)$ pontban metszi, feltéve, hogy $y'(x) \neq 0$. A feladat szerint tehát

$$x = \frac{y(x)y'(x) + x}{2}, \qquad y(x) = \frac{\frac{x}{y'(x)} + y(x)}{2}.$$

Mindkét egyenlőség ugyanarra az

$$(y : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad y' = \frac{x}{y}$$

differenciálegyenletre vezet, ahol elejthető az a kikötés, hogy a függvény deriváltja ne legyen nulla, viszont meg kell követelnünk, hogy a függvény ne vegye fel a nulla értéket. Ennek a szétválasztható differenciálegyenletnek az értelmezési tartománya szétbomlik két összefüggő halmazra: az egyikben $y > 0$, a másikban $y < 0$. Az első összefüggő komponensben haladó maximális megoldásait a, b valós számokkal lehet jellemezni, úgy, hogy

$$y(x) = \sqrt{x^2 + (b^2 - a^2)} \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R} \ \text{ ha } b^2 - a^2 > 0, \\ x > \sqrt{b^2 - a^2}, \text{ ha } b^2 - a^2 \leq 0, \ a \geq 0, \\ x < \sqrt{b^2 - a^2}, \text{ ha } b^2 - a^2 \leq 0, \ a < 0. \end{cases}$$

Hasonlóképp lehet megadni a maximális megoldásokat a másik összefüggő komponensben. Ha nem szorítkozunk függvénygrafikonokra, megállapíthatjuk, hogy a feladat feltételeinek eleget tesznek az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 = c\}$ alakú görbék, ahol c tetszőleges valós szám. Ezek a $\pm$ 45 fokos egyenesek, és olyan hiperbolák amelyek végérintői ezek az egyenesek (pontosabban ezekből a görbékből ki kell hagyni a második tengellyel való metszéspontjaikat, amelyekre nem igaz az eredeti feladat feltétele).

16.3. Melyek azok a görbék, amelyeket a következő feltétel jellemez: bármely pontjukhoz tartozó érintő, a pontot az origóval összekötő egyenesre a pontban állított merőleges és az első tengely olyan egyenlőszárú háromszöget határoznak meg, amelynek alapja az első tengelyen van?

Most is függvénygrafikonnal indítunk. Az előírt egyenlőszárúság azt jelenti, hogy az alapon levő szögek tangense egyenlő. Az egyik szög az érintőnek az első tengellyel bezárt szöge vagy annak kiegészítő szöge; ennek tangense $y'(x)$ vagy $-y'(x)$. A másik szög tangensére a következőt tudjuk mondani. Az $(x, y(x))$ ponton és az origón áthaladó egyenes iránytangense $y(x)/x$, ezért a ponton áthaladó, az előbbi egyenesre merőleges egyenes egyenlete $\xi \mapsto -\frac{x}{y(x)}(\xi - x) + y(x)$. Ez az első tengelyt a $\xi_o = x + y(x)^2/x$ pontban metszi. E pont és a szóban forgó görbepont egymástól $\sqrt{\frac{y(x)^4}{x^2} + y(x)^2}$ távolságra van. A görbepontnak az origótól való távolságát elosztjuk ezzel a távolsággal, így kapjuk meg a kérdéses tangenst:

$$\frac{\sqrt{x^2 + y(x)^2}}{\sqrt{\frac{y(x)^4 + x^2 y(x)^2}{x^2}}} = \frac{|x|}{|y(x)|}.$$

Tehát az

$$(y : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad |y'| = \frac{|x|}{|y|}$$

differenciálegyenletre jutunk, amely az $y' = \frac{x}{y}$ és $y' = -\frac{x}{y}$ explicit differenciálegyenleteket adja. Ezek megoldását – az előző feladat figyelembevételével – rábízzuk az olvasóra.

16.4. Írjuk le azokat a görbéket, amelyekre az teljesül, hogy bármely pontjuk ugyanolyan távolságra van az origótól, mint a pontbeli érintőnek a második tengellyel való metszete!

Az $(x, y(x))$ pontbeli érintő egyenlete $\xi \mapsto y'(x)(\xi - x) + y(x)$. Ez a második tengelyt a $-y'(x)x + y(x)$ pontban metszi. A feltétel tehát az

$$(y : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad |y - y'x| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

differenciálegyenletre vezet, amely szintén két explicit egyenletet foglal magában. Nézzük az egyiket:

$$y' = \frac{y}{x} - \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}.$$

A differenciálegyenlet értelmezési tartománya szétesik két összefüggő részre: az egyikben $x > 0$, a másikban $x < 0$. Szorítkozzunk az első összefüggő komponensre. A differenciálegyenlet homogén fokszámú, így az $u := \frac{y}{x}$ új ismeretlenre az

$$(u : \mathbb{R}^+ \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad u' = -\frac{\sqrt{1 + u^2}}{x}$$

szétválasztható egyenletet kapjuk. Ennek maximális megoldásai

$$u(x) = \mathrm{sh}(-\ln x + c), \qquad (x \in \mathbb{R}^+),$$

ahol c tetszőleges valós szám. Ebből már egyszerűen kapjuk a keresett görbék egyenletét.

16.5. Milyen alakú az a tükör, amely egy adott irányból érkező minden fénysugarat egy pontba (a fókuszba) gyűjt össze?

Vegyük a tükörnek egy a fókuszon átmenő síkmetszetét. Helyezzünk e síkba olyan koordinátarendszert, amelynek origója a fókusz, második tengelye pedig az adott iránnyal párhuzamos. A tükör metszete egy görbe lesz, amelyet függvény grafikonjaként állítunk elő.

A görbe $(x, y(x))$ pontjában a beesési merőleges irányvektora $(1, -\frac{1}{y'(x)})$, feltéve persze, hogy $y'(x) \neq 0$. Ez a vektor egyenlő szöget zár be a beesés irányvektorával és a visszaverődés irányvektortának negatívjával. Az előbbi $(0, -1)$, az utóbbi $(x, (y(x))$. Tehát a beesési merőlegesnek a skalárszorzata a megfelelő egységvektorokkal ugyanaz:

$$-\left(1, -\frac{1}{y'(x)}\right) \cdot (0, 1) = \left(1, -\frac{1}{y'(x)}\right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y(x)^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y(x)^2}}\right).$$

Ebből az

$$(y : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}$$

differenciálegyenletet kapjuk, amely homogén fokszámú. Értelmezési tartománya szétesik az $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$ és $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ összefüggő halmazokra. Maximális megoldásai

$$y(x) = \frac{c^2x^2 - 1}{2c} \qquad \begin{cases} & (x \in \mathbb{R}^+) \\ & (x \in \mathbb{R}^-) \end{cases}$$

alakúak, ahol c tetszőleges nem nulla valós szám.

Világos, hogy a két félsíkban futó megfelelő görbéket össze lehet illeszteni az $x = 0$ pontban (amit a differenciálegyenlet alakja kizárt). Tehát a tükör bármely keresztmetszete parabola.

17. Fizikai feladatok

A feladatoknál minden mennyiséget valamilyen alkalmas mértékegységekre vonatkoztatva adunk meg, vagyis az értékeit valós számoknak tekintjük.

17.1. Harmonikus rezgések. Egy test rugalmas erő hatása alatt mozog, azaz a testre ható erő nagysága arányos egy középpontból mért elmozdulásának nagyságával, iránya pedig ellentétes az elmozdulással. Írjuk le a test mozgását!

A mozgás terét $\mathbb{R}^3$-mal, az időt $\mathbb{R}$-rel reprezentálva a mozgást leíró Newton-egyenlet

$$(\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3)? \qquad m\ddot{\mathbf{x}} = -k\mathbf{x}$$

alakú, ahol $m > 0$ a test tömege, $k > 0$ a rugalmasságot jellemző úgynevezett direkciós erő. Ez állandó együtthatós, homogén lineáris differenciálegyenlet. Az ismeretlen függvény mindhárom komponensére ugyanilyen differenciálegyenlet áll fenn, elég tehát az

$$(x : \mathbb{R} \to \mathbb{R})? \qquad \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

differenciálegyenletet tekinteni, ahol $\omega := \sqrt{k/m}$. 10.6. alapján ennek minden megoldása

$$t \mapsto a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

formában írható, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. A fenti függvény alkalmas új konstansokkal

$$t \mapsto c\cos(\omega t - \phi)$$

alakra is hozható, ahol $c \in \mathbb{R}$, $\phi \in]-\pi/2, \pi/2]$.

Ha például úgy indítjuk a mozgást, hogy a 0-nak választott időpillanatban a testet a középpontban ($x(0) = 0$) adott sebességgel meglökjük ($\dot{x}(0) = v_o$), akkor $a = 0$, $b = v_o/\omega$, illetve $\phi = \pi/2$, $c = v_o/\omega$.

Ha viszont a mozgást úgy indítjuk, hogy kitérítjük a testet ($x(0) = A$), azután elengedjük ($\dot{x}(0) = 0$), akkor $a = A$, $b = 0$, illetve $\phi = 0$, $c = A$.

17.2. Csillapított rezgések. Tegyük most fel, hogy a rugalmas erőn kívül egy súrlódási erő is hat a testre, amely arányos a test sebességével, és azzal ellentétes irányú. A Newton-egyenletet az előbbiek mintájára

$$(x : \mathbb{R} \to \mathbb{R})? \qquad \ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

alakra hozhatjuk, ahol $\alpha > 0$. Ez is egyszerű, állandó együtthatós, homogén lineáris differenciálegyenlet. Karakterisztikus polinomjának gyökei

$$-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}, \quad -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}.$$

(i) Ha $\alpha > \omega$ (erős csillapítás), akkor a karakterisztikus polinomnak két különböző valós gyöke van, tehát a $\beta := \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$ jelöléssel az összes megoldás

$$t \mapsto e^{-\alpha t}(ae^{\beta t} \ + \ be^{-\beta t})$$

alakú, ahol $a, b \in \mathbb{R}$.

(ii) Ha $\alpha < \omega$ (gyenge csillapítás), akkor a karakterisztikus polinomnak két komplex gyöke van, amelyek egymás konjugáltjai, tehát az $\omega_c := \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$ jelöléssel az összes megoldás

$$t \mapsto e^{-\alpha t}(a \cos \omega_c t + b \sin \omega_c t)$$

alakú, ahol $a, b \in \mathbb{R}$.

(iii) Ha $\alpha = \omega$ (kritikus csillapítás), akkor a karakterisztikus polinomnak egy valós gyöke van, amelynek a multiplicitása kettő, tehát az összes megoldás

$$t \mapsto e^{-\alpha t}(a + bt)$$

alakú, ahol $a, b \in \mathbb{R}$.

Vegyük észre, hogy mindhárom esetben bármely megoldás a nullához tart, miközben t tart a végtelenhez.

17.3. Kényszerrezgések. Tegyük fel, hogy a testre, az előzőeken kívül még egy periodikus "külső erő" is hat, vagyis a Newton-egyenlet az

$$(x : \mathbb{R} \to \mathbb{R})? \qquad \ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega^2 x = f_o \cos \lambda t$$

alakot ölti, ahol $f_o > 0, \lambda > 0$. Ez állandó együtthatós, inhomogén lineáris differenciálegyenlet. Összes megoldását megkapjuk, ha egyetlen megoldásához hozzáadjuk a homogén egyenlet összes megoldását. Egy megoldásának megkereséséhez célszerű az

$$(x : \mathbb{R} \to \mathbb{C})? \qquad \ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega^2 x = f_o e^{i\lambda t}$$

komplex differenciálegyenletet tekinteni, amelynek valós része az eredeti. A megoldást $t \mapsto Ae^{i\lambda t-\varphi}$ alakban keressük, ahol $A > 0$ és $\varphi \in]-\pi/2, \pi/2]$ valós számok. Az egyenletbe helyettesítésből az adódik, hogy

$$Ae^{-i\varphi}(-\lambda^2 + 2i\alpha\lambda + \omega^2) = f_o,$$

amiből

$$A = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega^2-\lambda^2)^2 + 4\alpha^2\lambda^2}}, \qquad \varphi = \begin{cases} \pi/2 \text{ ha } \lambda = \omega, \\ \operatorname{arctg}\frac{2\alpha\lambda}{\omega^2-\lambda^2} \text{ ha } \lambda \neq \omega. \end{cases}$$

.

Megvan tehát az inhomogén egyenlet egy megoldása:

$$t \mapsto A\cos(\lambda t - \varphi).$$

Ez olyan rezgés, amelynek a frekvenciája megegyezik a kényszerítő erő frekvenciájával, de a kényszerítő erőhöz képest φ "fáziskésésben" van, azaz maximális kitérését az erő maximális értéke után φ/λ idővel éri el.

Amint azt az előző pontban megjegyeztük, a homogén egyenlet minden megoldása a nullához tart, ahogy múlik az idő, tehát megfelelő idő elteltével az inhomogén egyenlet megoldása "lényegében" a most megadott megoldás lesz, vagyis a test a fent leírt kényszerrezgést fogja végezni.

Érdekes megvizsgálni a kényszerrezgés amplitúdóját, azaz legnagyobb kitérését, amit A-val jelöltünk. Látjuk, hogy ennek maximuma van a $\lambda = \omega$ értéknél, vagyis akkor, ha a kényszerítő erő frekvenciája megegyezik a rezgő rendszer alapfrekvenciájával. Ez a rezonancia jelensége. Esetleg az amplitúdó olyan nagy is lehet, hogy az akkora kitérés már túl van a rugalmassági határon (vagyis amikor már a fenti leírás nem alkalmazható), és maradandó változás jön létre.

Megemlítjük, fizikakönyvekben gyakran olvasni, hogy ha nincs csillapítás ($\alpha = 0$), akkor rezonancia esetén az amplitúdó végtelenné válik. Ennek persze így nincs értelme; ehelyett az igaz, hogy ekkor $\lambda = \omega$ esetén az inhomogén egyenletnek egy megoldása $t \mapsto t\frac{f_o}{2\omega}\cos(\omega t - \pi/2)$; ez olyan rezgés, amelynek az amplitúdója az idővel lineárisan nő.

17.4. Mozgás súrlódásos sík lejtőn. Írjuk le egy m tömegű anyagi pont mozgását egy $0 < \alpha < \pi/2$ hajlásszögű lejtőn, ha a tömegpont és a lejtő között a súrlódási együttható $\mu > 0$.

A súrlódási erő iránya ellentétes a sebességgel, tehát alkalmas koordinátarendszerben a Newton-egyenlet a tömegpont sebességére

$$(\mathbf{v} : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^2)? \qquad m\dot{\mathbf{v}} = (m\mathbf{g})_{\|} - \mu|m\mathbf{g}_{\perp}|\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

alakú lesz, ahol $mg_{\|}$ és $mg_{\perp}$ a súlyerőnek a lejtővel párhuzamos, illetve a lejtőre merőleges komponensét jelöli. Vegyük fel úgy a koordinátarendszert a síkon, hogy az első tengely mutasson a nehézségi erőtér vetülete irányába (amelyet a lejtő irányának nevezünk). Ezzel a választással és a $\kappa := g\sin\alpha,\quad \lambda := g\cos\alpha$ jelöléssel ez a

$$((v_1, v_2) : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^2)? \qquad \begin{aligned} \dot{v}_1 &= \kappa - \mu\lambda\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, \\ \dot{v}_2 &= -\mu\lambda\frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \end{aligned}$$

alakot ölti. Jól jegyezzük meg, hogy a differenciálegyenlet értelmezési tartománya $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, tehát nulla kezdősebességű megoldásokról nincs értelme beszélnünk (legalábbis egyelőre; a 25.5.-ben szót ejtünk erről is).

Két esetet kell megkülönböztetnünk.

(i) Ha $v_2(t_0) = 0$ (a kezdősebesség párhuzamos a lejtő irányával), akkor $v_2(t) = 0$ és ezért az első sebességkomponensre a differenciálegyenlet

$$(v_1 : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad \dot{v}_1 = \kappa - \mu\lambda \mathrm{sign} v_1$$

alakúra redukálódik. Ennek maximális megoldásait már ismerjük (lásd 4.7.3.). Kérjük az olvasót, az itteni esetre alkalmazva diszkutálja a megoldások fizikai jelentését (pl. $\kappa < \mu\lambda$ így is írható: $\mathrm{tg}\alpha < \mu$). Felhívjuk a figyelmet, a megoldások mindig csak addig vannak értelmezve, míg a sebesség nullára nem csökken (a tömegpont meg nem áll).

(ii) Ha $v_2(t_o) \neq 0$, akkor az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $v_2(t_o) > 0$, és leszűkítjük vizsgálatainkat olyan intervallumra, ahol $v_2 > 0$.

Ekkor az első egyenletet v_2-vel, a másodikat v_1-gyel megszorozva, majd a két egyeneletet egymásból kivonva azt kapjuk, hogy

$$\dot{v}_1 v_2 - v_1 \dot{v}_2 = \kappa v_2.$$

Ezt elosztva v_2^2-tel és a $z := v_1/v_2$ jelölés bevezetésével a

$$\dot{z} = \frac{\kappa}{v_2}, \qquad \dot{v}_2 = -\mu\lambda\frac{1}{\sqrt{z^2+1}}$$

egyenletrendszerre jutunk. Minthogy $v_2 > 0$, alkalmazhatjuk az egyenletek egymással való elosztásának módszerét (lásd 15.5.), amivel a

$$\frac{dz}{dv_2} = -\eta\frac{\sqrt{z^2+1}}{v_2}$$

szétválasztható egyeneletet kapjuk, ahol $\eta := \frac{\kappa}{\mu\lambda} = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mu}$. Az egyenlet megoldását a kezdeti értékek figyelembevételével az

$$\mathrm{arsh} z - \mathrm{arsh} z_o = -\eta(\ln v_2 - \ln v_2(0))$$

formulából származtathatjuk, ahol $z_o := v_1(0)/v_2(0)$. Ebből

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{1}{(av_2)^\eta} - (av_2)^\eta}{2}$$

adódik, ahol a adott – $v_1(0)$-ból és $v_2(0)$-ból kiszámítható – nullánál nagyobb szám. A fenti kifejezést betéve az eredeti második egyenletbe végül is a

$$\dot{v}_2 = -\mu\lambda \frac{2}{\frac{1}{(av_2)^\eta} + (av_2)^\eta}$$

szétválasztható differenciálegyenletet nyerjük. Ennek elemzését az olvasóra bízzuk.

17.5. Jelölje R a Föld sugarát. Egy test a Föld középpontjától $2R$ távolságból nulla kezdősebességgel indulva leesik. Mikor éri el a Föld felszínét, ha nincs közegellenállás?

Legyen h a test pillanatnyi távolsága a Föld középpontjától. Ekkor a testre ható gravitációs erő $-m\frac{gR^2}{h^2}$, tehát a

$$(h : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^+)? \qquad \ddot{h} = -\frac{gR^2}{h^2}$$

differenciálegyenletet kell megoldanunk a $h(0) = 2R$, $\dot{h}(0) = 0$ kezdeti feltétellel.

Szorozzuk be az egyenletet $\dot{h}$-tal; felismerjük, hogy ekkor a

$$\left(\frac{(\dot{h})^2}{2}\right)^{\cdot} = \left(\frac{gR^2}{h}\right)^{\cdot}$$

egyenlőségre jutunk, amiből látjuk, hogy a zárójel alatti mennyiségek csak egy konstansban térnek el egymástól, tehát – a kezdeti feltétel figyelembevételével –

$$\dot{h} = -\sqrt{\frac{2gR^2}{h} - gR}.$$

Vegyük itt a $h = 2R\sin^2 u$ helyettesítést; ez megtehető, hiszen h értéke $2R$ és 0 között változik. Ekkor u-ra olyan differenciálegyenletet kapunk, amelyet ki tudunk integrálni. Kérjük az olvasót, fejezze be a számításokat.

17.6. Egy homogén közegben mozgó testre ható közegellenállási erő nagysága arányos a test közeghez viszonyított sebességnagyságának négyzetével és ellentétes irányú a sebességgel. Írjuk le a test sebességét az idő függvényében.

A közeghez viszonyított teret $\mathbb{R}^3$-mal reprezentálva itt a Newton-egyenlet nem más, mint a

$$(\mathbf{v} : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^3)? \qquad m\dot{\mathbf{v}} = -k|\mathbf{v}|\mathbf{v}$$

differenciálegyenlet, ahol $\mathbf{v}$ a keresett sebesség, m a test tömege, k az arányossági tényező. Keressük meg a $\mathbf{v}(t_o) = \mathbf{v}_o$ kezdeti értéket kielégítő megoldást.

Nyilván, ha $\mathbf{v}_o = 0$, akkor $t \mapsto \mathbf{v}(t) = 0$ a megoldás (a közegben nyugvó test nem indul el). Ha viszont $v_o \neq 0$, akkor egyszerűen belátható, hogy $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\frac{\mathbf{v}_o}{|\mathbf{v}_o|}$ alakú függvény kielégíti a differenciálegyenletet, ezért az egyértelműség miatt ilyen lesz a megoldás is (a test sebessége párhuzamos marad a kezdeti sebességgel). Így a sebesség nagyságára – amelyet a következőkben v-vel jelölünk – kapunk egy differenciálegyenletet. Tehát a

$$(v : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^+)? \qquad m\dot{v} = -kv^2 \qquad v(t_o) = v_o > 0$$

kezdetiérték-problémát nyertük, amelynek maximális megoldása

$$v(t) = \frac{v_o}{1 + \frac{k}{m}v_o(t - t_o)} \qquad (t > t_o - m/kv_o).$$

17.7. A homogén közegben mozgó testre a közegellenállási erőn kívül egy állandó erő (például gravitációs erő) is hat. Keressük meg a test sebességét az idő függvényében!

Használjuk az előző feladat jelöléseit, és legyen $m\mathbf{g} \in \mathbb{R}^3$ az állandó erő. Ekkor a sebesség időbeli változását

$$(\mathbf{v} : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^3)? \qquad m\dot{\mathbf{v}} = -k|\mathbf{v}|\mathbf{v} + m\mathbf{g}$$

írja le. Ez meglehetősen kellemetlen differenciálegyenlet, általában nem tudjuk zárt alakban megadni a megoldását. Belátható azonban (hogyan?), hogy ha a kezdeti sebesség párhuzamos az erővel, akkor a mozgás során a sebesség párhuzamos marad az erővel, tehát ekkor az erővel párhuzamos sebességkomponensre – amelyet most megint v-vel jelölünk – a

$$(v : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad m\dot{v} = -kv^2 + mg \qquad v(t_o) = v_o$$

kezdetiérték-problémát írhatjuk fel, ahol $mg \in \mathbb{R}^+$ az erő nagysága.

Ha $v_o = \sqrt{\frac{gm}{k}}$, akkor a megoldás a v_o konstans függvény.

Ha $0 \le v_o < \sqrt{\frac{mg}{k}}$, akkor a maximális megoldás

$$v(t) = \frac{v_o + \sqrt{\frac{mg}{k}}\,\mathrm{th}\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}(t - t_o)\right)}{1 + \sqrt{\frac{k}{mg}}\,v_o\,\mathrm{th}\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}(t - t_o)\right)} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Vegyük észre, hogy a sebesség nagysága a kezdeti sebesség értékétől függetlenül a $\sqrt{mg/k}$ értékhez tart, ahogy az idő múlik.

Kérjük az olvasót, keresse meg a megoldást a $v_o > \sqrt{\frac{mg}{k}}$ és a $v_o < 0$ esetben!

17.8. Egy l hosszúságú kötelet tartunk fekve egy asztalon úgy, hogy a végéből d hosszúságú rész lelóg. Az asztal és a kötél közötti súrlódási együttható μ. Írjuk le a kötél mozgását, miután elengedtük, addig, míg el nem hagyja az asztalt! Tekintsük a kötelet abszolút hajlékonynak, és éljünk azzal a közelítéssel, hogy a kötél minden pillanatban az asztal szélénél derékszögben megtörik. (Az asztalon csúszó rész pontjai nem nulla vízszintes irányú sebességgel érik el az asztal szélét, s ekkor kezdenek el függőleges irányban is mozogni. A vízszintes sebességüket megtartják, ezért a kötél, még ha abszolút hajlékony is, a mozgása során nem derékszögben törik meg az asztal szélénél.)

Legyen m a kötél tömege. Jelölje x a kötél pillanatnyilag lelógó részének a hosszát. Ekkor a kötelet gyorsító erő (a kötélrész tömege arányos a hosszával) $mg\frac{x}{l} - \mu mg\frac{l-x}{l}$. Tehát a Newton-egyenletből az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail]0, l[)? \qquad \ddot{x} = \frac{g(1+\mu)}{l}x - \mu g, \qquad x(t_o) = d, \quad \dot{x}(t_o) = 0$$

kezdetiérték-problémát kapjuk. Tegyük fel, hogy $d(1+\mu)-\mu l > 0$, ami annak felel meg, hogy a lelógó rész súlya nagyobb, mint a súrlódási erő. A differenciálegyenlet másodrendű, állandó együtthatós, inhomogén lineáris egyenlet leszűkítése (x nemnegatív és kisebb l-nél). Az $y := x - \frac{\mu l}{1+\mu}$ új ismeretlenre az egyenlet homogén lesz:

$$\ddot{y} = \alpha^2 y,$$

ahol $\alpha^2 := \frac{g(1+\mu)}{l}$. Ennek az egyenletnek alaprendszere $\exp^{\alpha}, exp^{-\alpha}$. Ebből az eredeti kezdetiérték-probléma megoldása:

$$x(t) = \left(d - \frac{\mu l}{1+\mu}\right) \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{g(1+\mu)}{l}}(t-t_o)\right) + \frac{\mu l}{1+\mu}, \qquad (t \in I),$$

ahol I az az intervallum, amelyet az határoz meg, hogy a formulában szereplő kifejezés értéke 0 és l közé essen.

17.9. Egy kötél súrlódásmentesen csúszik le egy csigáról. Írjuk le a kötél mozgását, ha a csiga sugara elhanyagolható a kötél hosszához képest!

Jelölje x a kötél lefelé mozgó részének a pillanatnyi hosszát. Ha m a kötél tömege, akkor a kötélre ható erő $mgx - mg(l-x)$. Ez ugyanaz, mint az előző feladat $\mu = 1$ esetére.

17.10. A radioaktív bomlásnál az időegység alatt elbomlott tömeg mennyisége arányos a még meglevő tömeggel. Írjuk le az anyag mennyiségét az idő függvényében, ha az arányossági tényező $\lambda > 0$ és kezdetben m_o tömeg volt.

Az "időegység alatt elbomlott tömeg" nem más, mint a tömegbomlás sebessége, az m tömegnek mint az idő függvényének a deriváltja. Ebből az

$$(m : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^+)? \qquad \dot{m} = -\lambda m, \quad m(t_o) = m_o$$

kezdetiérték-problémát kapjuk. A differenciálegyenlet autonóm, a kezdetiérték-probléma maximális megoldása

$$m(t) = m_o e^{-\lambda(t-t_o)} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

17.11. Egy kúp alakú edényben (tölcsérben) víz van, ami az edény alján levő lyukon keresztül folyik ki. Írjuk le az edénybeli vízszint h magasságát az idő függvényében, ha kezdetben h_o magasságig állt a víz. Súrlódási és viszkozitási veszteségektől tekintsünk el.

Ha h magasságnál egy kevés m tömegű víz kifolyik v sebességgel, akkor a víz szintjének csökkenése miatt közelítőleg mgh helyzeti energia átalakul $mv^2/2$ mozgási energiává (itt használtuk ki azt, hogy nincs súrlódási veszteség), vagyis a kifolyás sebessége $\sqrt{2gh}$.

A kúpalak azt jelenti, hogy adott egy $a \in \mathbb{R}^+$, és az edény aljától számított h magasságban a keresztmetszet ah sugarú kör.

Δt idő alatt a vízszint h magasságról $h + \Delta h$-ra csökken. Ekkor az edényben a víz térfogata körülbelül $(\Delta h)(ah)^2\pi$-vel csökkent. Ez egyenlő a kifolyt körülbelüli $A\sqrt{2gh}\Delta t$ térfogattal, ahol A a lyuk keresztmetszete. A két mennyiséget egyenlővé téve, elosztva Δt-vel, majd tartva vele a nullához, a

$$(h : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^+)? \qquad \dot{h} = -\frac{A\sqrt{2g}}{a^2\pi} h^{-3/2}, \quad h(t_o) = h_o$$

kezdetiérték-problémát kapjuk. A differenciálegyenlet autonóm, a kezdetiérték-probléma maximális megoldása

$$h(t) = \left(h_o^{5/2} - \frac{5A\sqrt{2g}}{2a^2\pi}(t - t_o)\right)^{2/5} \qquad \left(t < t_o + \frac{2a^2\pi}{5A\sqrt{2g}} h_o^{5/2}\right).$$

17.12. Egy szobában szárad egy szivacs. Az időegység alatt elpárolgott vízmennyiség arányos a szivacs pillanatnyi víztartalmával és azzal, mennyivel különbözik a szoba levegőjének pillanatnyi párakoncentrációja a telítettségi értéktől. Írjuk le a szivacsban levő víz mennyiségét az idő függvényében.

Mit is kell tudnunk a feladat megoldhatóságához?

– a párolgás α arányossági tényezőjét,

– a szobában levő levegő M tömegét,

– a telítettségi párakoncentráció κ értékét,

– a kezdeti párakoncentráció κ_o értékét,

– a szivacsban levő kezdeti m_o vízmennyiséget.

Tehát ha m jelöli a szivacsban levő pillanatnyi víz tömegét – vagyis $m : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ a keresett fügvény –, akkor az

$$(m : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^+)? \qquad \dot{m} = -\alpha\, m \left(\kappa - \left(\kappa_o + \frac{m_o - m}{M}\right)\right), \qquad m(t_o) = m_o$$

kezdetiérték-problémát írhatjuk fel. Célszerű a differenciálegyenletet az

$$a := -\alpha\left(\kappa - \kappa_o - \frac{m_o}{M}\right), \quad ab := \frac{\alpha}{M}$$

új konstansokkal egyszerűbb alakra hozni:

$$\dot{m} = a(1 - bm)m.$$

Ennek megoldása az adott kezdeti feltétellel
(i) ha $a = 0$, akkor

$$m(t) = \frac{m_o}{1 + \frac{\alpha m_o}{M}(t - t_o)} \qquad \left(t > t_o - \frac{M}{\alpha m_o}\right);$$

(ii) ha $a \neq 0$, akkor

$$m(t) = \frac{m_o}{bm_o - e^{-a(t-t_o)}(bm_o - 1)} \qquad \left(t > t_o - \frac{1}{a}\ln\frac{bm_o}{bm_o - 1}\right).$$

Kérjük az olvasót, adja meg a megoldások határértékét az értelmezési tartományuk alsó és felső végpontjában, és vizsgálja meg a megoldások és a határértékek fizikai jelentését (a szivacs nem csak száradhat, hanem nedvesedhet is)!

17.13. Egy tavon hízik a jég: a jégpáncél alatt folyamatosan fagy meg a víz. Feltéve, hogy víz hőmérséklete éppen a fagyásponton van, írjuk le, hogyan változik a jég vastagsága az időben!

A levegő hidegebb a víznél, a vízből a jégen keresztül hővezetéssel távozik el a fagyáskor felszabaduló belső energia.

A feladat megoldásához tehát ismernünk kell

– a víz térfogategységének q fagyáshőjét,

– a hővezetés sebességét, amelyről feltesszük, hogy (a Newton-féle törvénynek megfelelően) arányos a víz és a levegő hőmérsékletének $\mathbf{T}$ különbségével, a tó A felszínével, és fordítva arányos a jégréteg h vastagságával; az arányossági tényezőt jelölje α.

Ahhoz tehát, hogy a jégréteg Δt idő alatt Δh-val növekedjék, meg kell fagynia $A\Delta h$ térfogatú víznek, ezért Δt idő alatt $qA\Delta h$ belső energiának kell elvezetődnie. A hővezetés sebességére tett feltevésünk szerint ez egyenlő $\frac{\alpha A\mathbf{T}}{h}\Delta t$-vel.

Így a jégréteg vastagságára az $a := \frac{\alpha \mathbf{T}}{q}$ jelöléssel a

$$(h : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^+)? \qquad \dot{h} = \frac{a}{h}$$

differenciálegyenletet kapjuk. Ennek a $h(t_o) = h_o > 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása

$$h(t) = \sqrt{h_o^2 + 2a(t - t_o)} \qquad (t > t_o - h_0^2/2a).$$

17.14. Tegyünk néhány észrevételt feladatainkkal kapcsolatban.

(i) A kezdetiérték-problémák általában azt a fizikai szituációt írják le, hogy valamely időpillanatban elindítunk egy mozgást adott feltételekkel. Tehát a kezdetiérték-problémák megoldásai fizikailag csak a kezdeti t_o időpillanat **utáni** időkre érdekesek, noha matematikailag általában értelmesek a megoldások a t_o előtti időkre is. Többnyire azért ezeknek a t_o előtti részeknek is adhatunk valami fizikai értelmet. Például a közegben mozgó test esetén (17.6.feladat) a megoldás a t_o előtt egy bizonyos intervallumon is értelmezve van. Ennek azt a jelentést tulajdoníthatjuk, hogy ha a test már korábban is a közegben mozgott volna úgy, hogy a t_o pillanatban v_o a sebessége, akkor a $t_o - m/kv_o$ időpontnál hamarabb nem indulhatott.

(ii) Tapasztalati tény, hogy közegben külső erő hiányában mozgó test egy idő után megáll, a radioakatív anyag egy idő után teljesen elbomlik, stb. Hogyan kapjuk meg a fenti megoldásokból, mennyi időnek kell eltelnie, míg ez bekövetkezik? Sehogy. A 17.6., illetve 17.10. feladat megoldásában v, illetve m mindig nagyobb, mint nulla. Az igaz mindössze, hogy határértékük a végtelenben nulla; vagyis "végtelen sok" idő után a test megáll, az anyag elbomlik.

Hogyan magyarázzuk ezt az eltérést a tapasztalattól? Úgy, hogy a jelenséget leíró egyenletek maguk is csak közelítő érvényűek.

Gondoljunk arra, hogy egy közeg sohasem ideálisan homogén, picinyke mozgások, sűrűségingadozások stb. mindig jelen vannak (Brown-mozgás). Ezért a közegellenállás és a sebesség között megállapított összefüggés csak akkor igaz, ha a sebesség nagysága elegendően nagy a közegbeli ingadozásokhoz képest. Továbbá a test nem áll soha a közegben, a sebessége ingadozik a közeg ingadozásainak megfelelően. Ezek az ingadozások azonban kicsik a "szemmel látható" mozgásokhoz képest, ezért úgy vesszük, hogy áll. Tehát ha a leírás azt adja, hogy a sebesség nagysága egy idő után egy "megfelelően kis" érték alá csökken, akkor a leírást jónak fogadhatjuk el.

Hasonlóan, a radioaktív bomlásnál a tömeget "folytonos" változónak tekintettük (azaz bármilyen valós értéket felvehetett), noha tudjuk, hogy az anyag részecskékből áll, így egy anyagdarab tömege mindig pozitív számszorosa az egy atom (molekula) tömegének. A megállapított differenciálegyenlet csak akkor ad jó leírást, ha egy atom tömege sokkal kisebb az össztömegnél (az atomok száma igen nagy). A leírást tehát jónak tekinthetjük, ha azt adja, hogy egy bizonyos idő után a tömeg egy "megfelelően kis" értéknél kisebb lesz.

18. Vegyes feladatok

18.1. A hajóköteleket kikötéskor rá szokták csavarni egy hengeres bakra. Számítsuk ki, mekkora erővel kell tartani a kötél végét a rácsavart kötél hosszának függvényében, ha μ a súrlódási együttható a kötél és a henger között, és f_o erővel feszíti a hajó a kötél másik végét.

Jellemezzük a felcsavart kötél pontjait a hajóhoz kapcsolódó kötélrésznek a hengeren levő érintkezési pontjától számított forgásszöggel. Jelölje $f(\varphi)$ a φ szöggel jellemzett pontban a kötélben ébredő tartóerő nagyságát. Maga az erő érintő irányú és a pozitív forgás felé mutat.

Vegyük a kötélnek a φ és $\varphi + \Delta\varphi$ közé eső részét. Ez nyugalomban van, tehát a rá ható erők eredője nulla. Hat rá a két végén a kötélben ébredő erő, a súrlódási erő és a felület tartóereje.

A φ és $\varphi+\Delta\varphi$ pontban ható erők eredőjének sugárirányú komponense adja meg körülbelül a φ pontban a felületre nyomó erőt; ez $f(\varphi + \Delta\varphi)\sin\Delta\varphi$ nagyságú.

Ezért az érintő irányú komponensre $f(\varphi + \Delta\varphi)\cos\Delta\varphi + \mu f(\varphi + \Delta\varphi)\sin\Delta\varphi - f(\varphi) = 0$ adódik.

Ha $\Delta\varphi$ elég kicsi, akkor $\cos\Delta\varphi \approx 1$, $\sin\Delta\varphi \approx \Delta\varphi$, ezért a fenti egyenlőséget így írhatjuk:

$$f(\varphi + \Delta\varphi) - f(\varphi) \approx -\mu f(\varphi + \Delta\varphi)\Delta\varphi.$$

$\Delta\varphi$-vel leosztva és tartva nullához végül az

$$(f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad f' = -\mu f$$

differenciálegyenletre jutunk. Ennek az $f(0) = f_o$ feltétel melletti megoldása

$$f(\varphi) = f_o e^{-\mu\varphi} \qquad (\varphi > 0).$$

18.2. Egy kötelet (láncot) felfüggesztünk két végpontjánál rögzítve. Milyen alakú lesz a kötél?

Nevezzük el a kötél egyik végét kezdetnek, a másikat végnek. A kötél egy pontjában ébredő erőnek azt az erőt hívjuk, amelyet a kezdettől a pontig terjedő kötélszakaszra a kötél másik része gyakorol.

Szemeljük ki a kötél egy kis darabját. A darabkára a két végén ható erők egyensúlyt tartanak a nehézségi erővel. Ez azt jelenti, hogy a vízszintes irányú komponens a köteldarab két végén ugyanakkora. Minthogy a köteldarab tetszőleges volt, megállapíthatjuk, hogy a kötélben ébredő erő vízszintes komponense állandó a kötél mentén; jelöljük ezt h-val.

Vegyünk fel úgy egy koordinátarendszert, hogy a nehézségi erő iránya a második tengellyel párhuzamosan negatív irányba mutasson. Írjuk le a kötél alakját megadó görbét az y függvény grafikonjával úgy, hogy a görbe kezdete a végétől "balra" legyen. Jelölje γ a kötél egységnyi hosszúságára eső tömegét és f a kötélben ébredő erő függőleges komponensét, a görbe paraméterezésének függvényében (azaz $f(x)$ az $(x, y(x))$ pontban ébredő erő függőleges komponense). Az erő érintő irányú, ezért a függőleges és a vízszintes komponensének a hányadosa éppen az érintő iránytangense, azaz

$$f(x) = hy'(x).$$

A kiszemelt kötéldarab feleljen meg a Δx paraméterintervallumnak. Tudjuk, hogy a kötéldarab hossza (Analízis V.B.20.2.,B.20.8.1.) körülbelül $\sqrt{1+y'(x)^2}\Delta x$. Az egyensúly feltétele tehát az, hogy

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx\gamma\sqrt{1+y'(x)^2}\Delta x,$$

amiből – az $f'=hy''$ figyelembevételével – azt kapjuk, hogy a görbét az

$$(y:\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbb{R})? \qquad y''=\frac{\gamma}{h}\sqrt{1+(y')^2}$$

differenciálegyenlet írja le. Ez az y' függvényre elsőrendű, autonóm. Megoldása

$$y'(x)=\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma}{h}x+a\right),$$

ahol a valamely valós szám. Ez most már elsőrendű autonóm differenciálegyenlet y-ra; megoldása

$$y(x)=\frac{h}{\gamma}\operatorname{ch}\left(\frac{\gamma}{h}x+a\right)-b,$$

ahol b is valamely valós szám.

Ezért szokás a ch függvényt a láncgörbe függvényének nevezni.

A h és a,b konstansokat konkrét esetben meg lehet határozni abból, hogy milyen hosszú a kötél és hol van felfüggesztve. Például, ha a kötél hossza $2l$, és azonos magasságú, egymástól $2d$ távolságra levő pontok között van felfüggesztve, akkor (a koordinátarendszert úgy választva, hogy a felfüggesztési pontok az első tengelyen legyenek az origótól azonos távolságra), akkor $a=0$, és a másik két konstanst a

$$b=\frac{h}{\gamma}\operatorname{ch}\left(\frac{\gamma}{h}d\right), \quad l=\frac{h}{\gamma}\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma}{h}d\right)$$

egyenletrendszer határozza meg, amelynek második egyenletét az $\int_{-d}^{d}\sqrt{1+(y')^2}=2l$ összefüggésből származtatjuk.

18.3. Egy "végtelenül nyújtható", eredetileg l hosszúságú gumiszál egyik vége egy falhoz van erősítve. Másik végéről elindul egy katicabogár a fal felé a gumiszálhoz viszonyított állandó v sebességgel. Ugyanekkor a gumiszál másik végét a falhoz viszonyított állandó u sebességgel elkezdjük húzni az ellenkező irányba. Eléri-e a katica a falat?

Kezdjük az idő számítását az indulás pillanatával. Jelölje x a katica t pillanatbeli helyét a falhoz viszonyítva. Ekkor a gumiszál hossza $l+ut$. Δt idő alatt a gumiszál $u\Delta t$-vel nyúlik meg, ennek arányos részével kerül arrébb a guminak az a pontja, ahol a bogár állt; tehát a kérdéses pont $\frac{x}{l+ut}u\Delta t$-vel került távolabb a faltól. Ezalatt az idő alatt azonban a katica $-v\Delta t$ utat tett meg a fal felé a gumiszálhoz viszonyítva, tehát összes elmozdulása a falhoz képest $\Delta x = \frac{x}{l+ut}\, u\Delta t - v\Delta t$, amiből az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{u}{l+ut}\, x - v, \quad x(0) = l$$

kezdetiérték-problémát származtatjuk. A differenciálegyenletnek (a fenti formában) az értelmezési tartománya nem összefüggő. Minket nyilván az az összefüggő rész érdekel, amely a pozitív időket tartalmazza; ez $\{t \in \mathbb{R} \mid t > -l/u\} \times \mathbb{R}$. Erre leszűkítve a differenciálegyenlet inhomogén lineáris (nem állandó együtthatós). A homogén egyenlet megoldásai $t \mapsto c(l+ut)$ alakúak, ahol c valós szám. Állandók variálásával megkereshetjük az inhomogén egy megoldását, amiből végül is – a c konstans megfelelő választásával – megkapjuk a kezdetiérték-probléma megoldását:

$$x(t) = (l+ut)\left(1 - \frac{v}{u} \ln\left(\frac{l+ut}{l}\right)\right) \qquad (t > -l/u).$$

A feladat kérdésére igen a válasz, ha van olyan t, amelyre $x(t) = 0$. Ilyen t létezik: $t = (e^{u/v} - 1)l/u$.

18.4. A róka üldözi a nyulat a mezőn. A nyúl egyenes mentén fut állandó v sebességgel. A róka mindig a nyúl felé fut, állandó u nagyságú sebességgel. Milyen pályán halad a róka?

Illesszünk koordinátarendszert a mezőre úgy, hogy a nyúl fusson a második tengelyen pozitív irányban és az origó legyen az a pont, ahol a nyúl volt az üldözés kezdetén. Írjuk le a róka pályáját az $x \mapsto y(x)$ függvény grafikonjával. A róka az (x_o, y_o) pontban volt, amikor megpillantotta a nyulat; a triviális $x_o = 0$ esetet (amikor a pálya egyenes) leszámítva az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $x_o < 0$.

A t pillanatban a nyúl a $(0, vt)$ pontban van, a róka pedig az $(x, y(x))$ pontban. A róka sebességének iránya párhuzamos a két pontot összekötő szakasszal, tehát az $y'(x) = \frac{vt - y(x)}{-x}$ összefüggést írhatjuk fel. Sajnos ez még nem differenciálegyenlet, hiszen a t itt "idegen" változó. Kiküszöböléséhez azt használjuk fel, hogy a róka által megtett út egyrészt ut, másrészt a pályája addigi szakaszának a hossza, azaz $ut = \int_{x_o}^{x} \sqrt{1+(y')^2}$. Ebből t-t kifejezve és az előbbi összefüggésbe beírva azt kapjuk, hogy

$$y'x = -\frac{v}{u} \int_{x_o}^{x} \sqrt{1+(y')^2} \; + y,$$

amiből differenciálással végül is az

$$(y : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad y''x = -\frac{v}{u}\sqrt{1+(y')^2}$$

differenciálegyenletet kapjuk, amely az y' függvényre elsőrendű, szétválasztható.

Ennek megoldása az $a := \frac{y_o - \sqrt{x_o^2 + y_o^2}}{x_o}(-x_o)^{v/u}$ jelöléssel

$$y'(x) = \frac{a}{2}(-x)^{-v/u} - \frac{1}{2a}(-x)^{v/u},$$

amiből y már egyszerű integrálással adódik.

A feladat megoldásával kapcsolatban az alábbi észrevételeket tehetjük. Úgy vettük a koordinátarendszert, ami a szokásoknak megfelelő természetes választásnak látszik, hogy a róka mozgásának az első tengelyre vett vetülete pozitív irányban haladjon (ezt fejezi ki az $(x_o < 0)$ feltétel, amely miatt $x < 0$). Ha azonban fordítva fogtunk volna hozzá $(x_o > 0)$, akkor a végformula egyszerűbb lett volna, $-x$ helyett x szerepelne. Azt viszont szerencsésen tettük, hogy a nyúl a második tengely mentén fusson; kérjük az olvasót, állítson fel differenciálegyenletet – persze megint $x \mapsto y(x)$ függvényre –, ha a nyúl az első tengely mentén fut; látni fogja, mennyivel bonyolultabb feladatra jut.

18.5. Kísérleti eredmények azt mutatják, hogy ha a szaporodást semmi sem gátolja (van elegendő élelem), akkor egy adott területen élő biológiai faj időegységre eső szaporodása arányos a meglevő egyedek számával. Ha a jelöli az arányossági tényezőt, akkor az egyedek x számára az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^+)? \qquad \dot{x} = ax$$

differenciálegyenletet kapjuk az egyedek számának időbeli változására, azzal a kis csalással, hogy megengedünk akármilyen pozitív valós számot, nem csak egészet. Megjegyezzük, hogy itt $a > 0$.

Ezt a differenciálegyenletet már jól ismerjük. A (t_o, x_o) kezdeti feltételnek eleget tevő megoldása

$$x(t) = x_o e^{a(t-t_o)} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

18.6. Ha a faj nagyon elszaporodik az adott területen, akkor kevés lesz a táplálék, ez zavarokat okoz az egyedek élettevékenységében, ami visszahat a szaporodásra is. A kísérletek kimutatták, hogy meg lehet adni egy k "kritikus" egyedszámot úgy, hogy az időegységre eső szaporodás nemcsak a meglevő egyedek számával arányos, hanem azzal is, mennyivel kevesebb a meglevő egyedek száma a kritikusnál; ezt a szokásos formulákkal $\Delta x \approx \alpha(k - x)\, x\Delta t$ alakban fejezhetjük ki. Új konstansok bevezetésével tehát az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^+)? \qquad \dot{x} = a(1 - bx)x$$

differenciálegyenletet kapjuk, ahol $a, b > 0$ adott számok.

Ezt a differenciálegyenletet is ismerjük a 17.12. feladatból. A (t_o, x_o) kezdeti feltételnek eleget tevő megoldása, ha $x_o > \frac{1}{b}$,

$$x(t) = \frac{x_o}{bx_o - e^{-a(t-t_o)}(bx_o - 1)} \qquad \left(t > t_o - \frac{1}{a}\ln\frac{bx_o}{bx_o - 1}\right).$$

18.7. Az eddigiekben közelebbről meg nem határozott faj legyen most egy tóban élő hal, amelyet időről időre lehalásznak. Ezt azzal fejezzük ki, hogy időegység alatt $c > 0$ mennyiségű egyeddel csökkentjük az egyedek számát. Ekkor tehát az egyedek számának időbeli változására az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^+)? \qquad \dot{x} = a(1 - bx)x - c$$

autonóm differenciálegyenletet állíthatjuk fel. Ennek megoldásához alakítsuk át a jobb oldalt (amely másodfokú polinom):

$$a(1 - bx)x - c = -ab\left(x^2 - \frac{x}{b} + \frac{c}{ab}\right) = -ab\left(\left(x - \frac{1}{2b}\right)^2 \mp \frac{d^2}{4}\right),$$

ahol $d/2 := \sqrt{\left|\frac{a-4bc}{4b^2a}\right|}$. Az $u := x - 1/2b$ ismeretlenre ezzel az

$$\dot{u} = ab(\frac{d^2}{4} \mp u^2)$$

differenciálegyenletet kapjuk (amely lényegében ugyanaz, mint a 17.7.-beli).

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor $d \neq 0$ és a fenti egyenletben a negatív előjel szerepel, azaz amikor $a - 4bc > 0$, ami annak felel meg, hogy az eredeti jobb oldalnak két különböző valós gyöke van. Ekkor az $u(t_o) = u_o := x_o - 1/2b$ kezdeti feltételnek eleget tevő megoldás

– ha $u_o = d/2$, akkor $u(t) = d/2 \quad (t \in \mathbb{R})$;

– ha $|u_o| < d/2$, akkor

$$\frac{2}{d}\left(\operatorname{arth}\frac{u(t)}{d/2} - \operatorname{arth}\frac{u_o}{d/2}\right) = ab(t - t_o);$$

– ha $|u_o| > d/2$, akkor

$$\frac{2}{d}\left(\operatorname{arcth}\frac{u(t)}{d/2} - \operatorname{arcth}\frac{u_o}{d/2}\right) = ab(t - t_o),$$

amelyek értelmezési tartományát úgy lehet meghatározni, hogy a bal oldalon értelmes mennyiségek álljanak.

Ezekből, az arth és arcth függvények ismert logaritmikus kifejezését használva, végül is azt származtatjuk, hogy az eredeti differenciálegyenlet megoldása

– ha $x_o = 1/2b + d/2$ (azaz x_o gyöke az eredeti differenciálegyenlet jobb oldalának), akkor

$$x(t) = x_o \quad (t \in \mathbb{R});$$

– ha $x_o \neq 1/2b + d/2$, akkor

$$x(t) = \frac{1}{2b} + \frac{d}{2}\frac{(x_o - \frac{1}{2b} + \frac{d}{2})e^{dab(t-t_o)} + (x_o - \frac{1}{2b} - \frac{d}{2})}{(x_o - \frac{1}{2b} + \frac{d}{2})e^{dab(t-t_o)} - (x_o - \frac{1}{2b} - \frac{d}{2})},$$

ahol t a kezdeti értéktől függő intervallumot futhat be, a következőképpen:

– ha $x_o > 1/2b + d/2$, akkor $t > t_o + \frac{1}{dab}\ln\frac{x_o-1/2b-d/2}{x_o-1/2b+d/2}$;

– ha $0 < 1/2b - d/2 < x_o < 1/2b + d/2$, akkor $t \in \mathbb{R}$;

– ha $0 < x_o < 1/2b - d/2$, akkor $t < t_o + \frac{1}{dab}\ln\frac{x_o-1/2b-d/2}{x_o-1/2b+d/2}$; pontosabban, minthogy eredeti értelmét tekintve x csak pozitív értéket vehet fel, van egy egyértelműen meghatározott $T \in \mathbb{R}$, amely kisebb vagy egyenlő az előbbi egyenlőtlenség jobb oldalán álló mennyiségnél, és $t < T$.

Kérjük az olvasót, adja meg a feladat megoldását akkor, ha $a - 4bc = 0$ (a differenciálegyenlet jobb oldalának egy valós gyöke van) és akkor, ha $a - 4bc < 0$ (a differenciálegyenlet jobb oldalának nincs valós gyöke).

18.8. Nem érdemes mindig ugyanakkora mennyiséget lehalászni: ha kevés hal van, kevesebbet kell, nehogy nagyon megfogyatkozzon az állomány; ha több van, akkor lehet többet. Úgy módosítjuk tehát az előbbi feladatot, hogy a lehalászás mértéke legyen arányos a tóban levő hal mennyiségével (amiről például mintavétellel lehet becslést kapni). Ekkor az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^+)? \qquad \dot{x} = a(1 - bx)x - px$$

differenciálegyenletet állíthatjuk fel, ahol p adott pozitív szám, $p < a$. A jobb oldal $(a - p)(1 - abx/(a - p))x$ alakra hozható, amiből látjuk, hogy ez lényegében ugyanaz a differenciálegyenlet, mint amit 18.6.-ban tárgyaltunk.

18.9. A tóban kétféle halfajta él: az egyik növényi anyagokkal, rovarokkal stb. táplálkozik (ponty), a másik ragadozó, az előző halfajtára vadászik (csuka). A ponty szaporodását befolyásolja a csukák száma: minél több a csuka, annál kisebb a (tényleges, azaz el nem pusztuló) szaporulat. Ugyanakkor, a csukák szaporodását is befolyásolja a pontyok száma: ha nincs elég ponty, nincs elég táplálék, a (tényleges) szaporulat lecsökken. Ezért a két halfajta ”ragadozó-zsákmány” típusú együttélésére az úgynevezett Lotka–Volterra-modellt állíthatjuk fel: ha x és y jelöli a lehetséges zsákmányok, illetve ragadozók pillanatnyi számát, akkor

$$\dot{x} = \alpha(\beta - y)x, \qquad \dot{y} = \gamma(x - \delta)y,$$

amelyet a konstansok megfelelő átnevezésével

$$\dot{x} = kx - axy, \qquad \dot{y} = -ly + bxy$$

alakban írhatunk, ahol k, l, a, b pozitív valós számok.

Ezt az egyenletet nem tudjuk kiintegrálni. Később visszatérünk a vizsgálatára.

V. TOVÁBBI ISMERETEK

19. A paraméterektől való folytonos függés

19.1. Elemi fizikai ismereteink közé tartozik, hogy az ideális ("matematikai") inga lengését a függőlegestől mért szögének (kitérésének) időbeli változásával, a $\varphi : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvénnyel írjuk le, amely eleget tesz a

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \sin\varphi$$

differenciálegyenletnek, ahol $\omega := \sqrt{\frac{g}{l}}$, g a nehézségi gyorsulás értéke, l pedig az inga hossza.

Ehelyett azonban "kis kitérésekre" a

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi$$

közelítő egyenletet vesszük, hiszen φ kis értékeire φ és $\sin\varphi$ "alig különbözik" egymástól.

Azt fogjuk most megvizsgálni, mennyiben jogosak a fentihez hasonló közelítések. Közelebbről, azt keressük, mennyire térnek el egymástól az

(0) $$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \qquad \dot{x} = f_o \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{R}}, x), \qquad x(t_o) = x_o$$

és

(1) $$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \qquad \dot{x} = f_1 \circ (id_{\mathbb{R}}, x), \qquad x(t_1) = x_1$$

kezdetiérték-problémák megoldásai, ha f_o és f_1 "alig különbözik" egymástól, továbbá t_o és t_1, valamint x_o és x_1 "majdnem ugyanaz".

19.2. Állítás *Legyen P metrikus tér (a metrikát nem neveztük meg, mert nem fog szerepelni a jelölésekben) és*

$$f : P \times \mathbb{R} \times \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbf{V}, \quad (p, t, x) \mapsto f_p(t, x)$$

nyílt halmazon értelmezett folytonos függvény, amely az értelmezési tartományának minden pontja egy környezetében a $\mathbf{V}$ változója szerint univerzális Lipschitz-feltételnek tesz eleget. Legyen

$$(*) \qquad P \to \mathbb{R} \times \mathbf{V}, \quad p \mapsto (t_p, x_p)$$

folytonos leképezés, és tekintsük az

$$(**) \qquad \dot{x} = f_p \circ (id_{\mathbb{R}}, x), \qquad x(t_p) = x_p \qquad (p \in P)$$

kezdetiérték-problémát. Ekkor minden $p_o \in P$ esetén létezik a p_o-nak $K(p_o)$ környezete, valamint $I_\alpha(t_{p_o})$ és $G_\beta(x_{p_o})$ környezetek, hogy a $K(p_o)$ bármely p elemére van a fenti kezdetiérték-problémának egyetlen $r_p : \overline{I_\alpha(t_{p_o})} \to \overline{G_\beta(x_{p_o})}$ megoldása. Továbbá a

$$P \to C\left(\overline{I_\alpha(t_{p_o})}, \overline{G_\beta(x_{p_o})}\right), \qquad p \mapsto r_p$$

hozzárendelés (a sup*-normára vonatkozóan), valamint a*

$$P \times \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V}, \qquad (p, t) \mapsto r_p(t)$$

hozzárendelés folytonos.

Bizonyítás Van a p_o-nak olyan $N(p_o)$ környezete és olyan $\eta, \beta > 0$, hogy az $N(p_o) \times I_\eta(t_{p_o}) \times G_\beta(x_{p_o})$ halmazon f korlátos (jelölje M a korlátját és zárjuk ki a triviális $M = 0$ esetet) és a $\mathbf{V}$ változója szerint univerzális Lipschitz-tulajdonságú (jelölje L a Lipschitz-konstanst). Legyen

$$\alpha := \min\{\eta, \frac{\beta}{4M}, \frac{1}{4L}\},$$

és legyen $K(p_o) \subset N(p_o)$ a p_o-nak olyan környezete, hogy minden $p \in K(p_o)$ esetén

$$|t_p - t_{p_o}| < \alpha, \qquad \|x_p - x_{p_o}\| < \frac{\beta}{2}$$

teljesüljön (ilyen környezet van a $(*)$ leképezés folytonossága miatt).

Tudjuk, hogy
$$S := C\left(\overline{I_\alpha(t_{p_o})}, \overline{G_\beta(x_{p_o})}\right)$$
a sup-normával teljes metrikus tér.

Legyen $r \in S$ esetén
$$(\phi_p r)(t) := x_p + \int_{t_p}^{t} f_p(s, r(s))\, ds \qquad (t \in I_\alpha(t_{p_o})).$$

Ha $p \in K(p_o)$, akkor
$$\phi_p[S] \subset S,$$
hiszen
$$\|(\phi_p r)(t) - x_{p_o}\| \le \frac{\beta}{2} + 2\alpha M < \beta.$$

Továbbá ϕ_p kontrakció S-en, p-től független kontrakciós konstanssal:
$$|||\phi_p r_1 - \phi_p r_2||| \le 2\alpha L\|r_1 - r_2\| \le \frac{1}{2}\|r_1 - r_2\|.$$

Végül, bármely $r \in S$ esetén a $p \mapsto \phi_p r$ hozzárendelés folytonos, ugyanis
$$\begin{aligned}\|(\phi_{p'} r)(t) - (\phi_p r)(t)\| \le &\|x_{p'} - x_p\| + \\ &\left\| \int_{t_{p'}}^{t_p} f_{p'}(s, r(s))\, ds + \int_{t_p}^{t} \big(f_{p'}(s, r(s)) - f_p(s, r(s))\big)\, ds \right\|,\end{aligned}$$
tehát
$$|||\phi_{p'} r - \phi_p r||| \le \|x_{p'} - x_p\| + M|t_{p'} - t_p| + \int_{I_\alpha(t_{p_o})} \|f_{p'}(s, r(s)) - f_p(s, r(s))\|\, ds.$$

A jobb oldal nullához tart, miközben p' tart p-hez, ugyanis

– az első és a második tag nullához tart, mert a $(*)$ leképezés folytonos,

– a harmadik tag nullához tart f folytonossága és a Lebesgue-tétel miatt (2M az integrálható majoráns).

Alkalmazhatjuk tehát a paramétertől függő kontrakciók tételét (Analízis II-I.B.9.4.): minden p-re a szóban forgó környezetből létezik ϕ_p-nek r_p fixpontja, továbbá a $P \to S, p \mapsto r_p$ leképezés folytonos, ezért
$$\|r_{p'}(s) - r_p(t)\| \le \|r_{p'}(s) - r_p(s)\| + \|r_p(s) - r_p(t)\| \le |||r_{p'} - r_p||| + \|r_p(s) - r_p(t)\|$$
következtében $(p, t) \mapsto r_p(t)$ is folytonos.

Korábbi ismereteink alapján (lásd 2.3.), r_p leszűkítése az értelmezési tartományának belsejére a $(**)$ kezdetiérték-probléma megoldása.

19.3. Szokás a P halmazt "paraméterhalmaznak" nevezni és azt mondani, hogy "a megoldások folytonosan függenek a paraméterektől".

Azt is mondhatjuk, hogy ha a kezdeti értékek és a jobb oldalak csak kicsit különböznek, akkor a megoldások is csak kicsit különböznek a kezdeti "időpontok" egy környezetében. Erre úgy is szokás hivatkozni, hogy "a megoldások folytonosan függenek a kezdeti feltételtől és a jobb oldaltól".

19.4. Kiemeljük a fenti igen általános tételnek a következő két speciális alakját.

1. Adott $(t_o, x_o) \in \mathbb{R} \times \mathbf{V}$, $P := C(\overline{I_\alpha(t_o)} \times \overline{G_\beta(x_o)}, \mathbf{V})$, $f_p(t,x) := p(t,x)$ és $(t_p, x_p) := (t_o, x_o)$ (a paraméterhalmazt a differenciálegyenlet jobb oldalai alkotják, a kezdeti érték rögzített (nem függ a paramétertől)).

2. Adott egy f függvény, $P = \mathrm{Dom} f \subset \mathbb{R} \times \mathbf{V}$, $f_p = f$ minden $p \in P$ esetén, és a 19.2.-beli $(*)$ leképezés az identitás (a paraméterhalmazt egy adott differenciálegyenlet kezdeti értékei alkotják (a jobb oldal rögzített, nem függ a paramétertől)).

Érdemes újra leírni, mit is mond ez utóbbi esetben a tételünk. Tekintsük az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \qquad \dot{x} = f \circ (\mathrm{id}_\mathbb{R}, x)$$

differenciálegyenletet. Legyen $(t_o, x_o) \in \mathrm{Dom} f$, és tegyük fel, hogy f az $\overline{I_\eta(t_o)} \times \overline{G_\beta(x_o)}$ halmazon a $\mathbf{V}$-változója szerint univerzális Lipschitz-feltételnek tesz eleget az L Lipschitz-konstanssal; legyen továbbá $M \neq 0$ az f korlátja ezen a környezeten. Vezessük be az

$$\alpha := \min\{\eta, \frac{\beta}{4M}, \frac{1}{4L}\}$$

jelölést. Ekkor minden $(s,y) \in I_\alpha(t_o) \times G_{\beta/2}(x_o)$ esetén van a differenciálegyenletnek az (s,y) kezdeti feltételt kielégítő $r_{s,y} : \overline{I_\alpha(t_o)} \to \overline{G_\beta(x_o)}$ megoldása. Az

$$I_\alpha(t_o) \times G_{\beta/2}(x_o) \to C(\overline{I_\alpha(t_o)}, \overline{G_\beta(x_o)}), \quad (s,y) \mapsto r_{s,y}$$

leképezés, valamint az

$$I_\alpha(t_o) \times I_\alpha(t_o) \times G_{\beta/2}(x_o) \to \mathbf{V}, \quad (t,s,y) \to r_{s,y}(t)$$

leképezés folytonos.

19.5. Az előbbi tételt egy kissé másképp is megfogalmazhatjuk az alábbi hasznos becslés segítségével.

Állítás (***Gronwall-lemma***) *Legyen I intervallum és $\sigma : I \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. Tegyük fel, van olyan δ és L pozitív szám, hogy*

$$|\dot{\sigma}| \leq L\sigma + \delta.$$

Ekkor bármely $t_o, t \in I$ esetén

$$\sigma(t) \leq \sigma(t_o)e^{L|t-t_o|} + \frac{\delta}{L}\left(e^{L|t-t_o|} - 1\right).$$

Bizonyítás Rendezzük át a $\dot{\sigma} \leq L\sigma + \delta$ egyenlőtlenséget úgy, hogy csak δ maradjon a jobb oldalon, vegyük a függvények értékét az s helyen, majd szorozzuk be az egyenlőtlenséget $e^{-L(s-t_o)}$-val:

$$\dot{\sigma}(s)e^{-L(s-t_o)} - L\sigma(s)e^{-L(s-t_o)} \leq \delta e^{-L(s-t_o)}.$$

A bal oldal nem más, mint az $s \mapsto \sigma(s)e^{-L(s-t_o)}$ függvény differenciálhányadosa; ezért az egyenlőtlenség mindkét oldalát t_o-tól t-ig (ahol $t > t_o$) integrálva azt kapjuk, hogy

$$\sigma(t)e^{-L(t-t_o)} - \sigma(t_o) \leq \frac{\delta}{-L}\left(e^{-L(t-t_o)} - 1\right),$$

amiből egyszerű átrendezéssel megkapjuk a kívánt eredményt t_o-nál nagyobb t-re.

Ezután a $-\dot{\sigma} \leq L\sigma + \delta$ egyenlőtlenséget rendezzük át az előzőhöz hasonlóan, vegyük a függvények értékét az s helyen, majd szorozzunk be $e^{L(s-t_o)}$-val, integráljunk t-től t_0-ig (ahol $t < t_o$), és megkapjuk a kívánt eredményt t_o-nál kisebb t-re.

19.6. Állítás *Használjuk a 19.1. jelöléseit (emlékeztetünk arra, hogy f_o és f_1 folytonos függvények). Tegyük fel, hogy a (t_o, x_o) egy $\overline{I_\eta(t_o)} \times \overline{G_\beta(x_o)}$ környezetében*
– f_o értelmezve van és a **V** *változója szerint univerzális Lipschitz-feltételnek tesz eleget az L Lipschitz-konstanssal (ekkor, tudjuk, itt f_o korlátos is; jelölje M az f_o egy korlátját);*
– f_1 is értelmezve van, és létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $\|f_1(t, x) - f_o(t, x)\| \leq \delta$ minden $t \in \overline{I_\eta(t_o)}, x \in \overline{G_\beta(x_o)}$ esetén (ekkor f_1 is korlátos; egy korlátja $M + \delta$);
– r_o és r_1 a 19.1.-beli (0)*, illetve* (1) *kezdetiérték-problémának egy $I_\alpha(t_o)$ intervallumon értelmezett olyan megoldásai, amelyek grafikonja benne van az említett környezetben.*

Ekkor, ha a norma **V***-n skalárszorzatból származik, fennáll a következő egyenlőtlenség:*

$$\|r_1(t) - r_o(t)\| \leq \big((M + \delta)|t_1 - t_o| + \|x_1 - x_o\|\big)e^{L|t-t_o|} + \frac{\delta}{L}\left(e^{L|t-t_o|} - 1\right)$$

$$(t \in I_\alpha(t_o)).$$

Bizonyítás Azokra a t-kre, amelyekre $r_1(t) - r_o(t) = 0$, biztosan teljesül a kívánt egyenlőtlenség. A $t \mapsto \sigma(t) := \|r_1(t) - r_o(t)\|$ függvény – a normára tett kikötésünk folytán – differenciálható, ahol nem nulla, és

$$|\dot\sigma(t)| = \frac{|< r_1(t) - r_o(t), \dot r_1(t) - \dot r_o(t) >|}{\|r_1(t) - r_o(t)\|} \leq \|f_1(t, r_1(t)) - f_o(t, r_o(t))\| \leq$$

$$\|f_1(t, r_1(t)) - f_o(t, r_1(t))\| + \|f_o(t, r_1(t)) - f_o(t, r_o(t))\|;$$

itt, szokásosan, a skalárszorzatot $<, >$-val jelöltük, és felhasználtuk a Cauchy–Schwartz-egyenlőtlenséget. A jobb oldal tagjait a Lipschitz-feltételnek, illetve f_1 és f_2 egymáshoz való viszonyának megfelelően felülről becsülve azt találjuk, hogy $|\dot\sigma| \leq L\sigma + \delta$. Ebből a Gronwall-lemma alapján

$$\|r_1(t) - r_o(t)\| \leq \|r_1(t_o) - r_o(t_o)\|e^{L|t-t_o|} + \frac{\delta}{L}\left(e^{L|t-t_o|} - 1\right).$$

A jobb oldal első tagjában az $\|r_1(t_o) - r_o(t_o)\| \leq \|r_1(t_o) - r_1(t_1)\| + \|r_1(t_1) - r_o(t_o)\|$, majd az $\|r_1(t_o) - r_1(t_1)\| = \left\|\int_{t_o}^{t_1} f_1(s, r_1(s))\, ds\right\| \leq (M+\delta)|t_1 - t_o|$ becslést alkalmazva megkapjuk a kívánt eredményt.

19.7. Vessük össze a 19.2.-ben és a 19.6.-ban kapott eredményeinket.
A 19.2. állításban minden függvényről feltettük, hogy eleget tesz a Lipschitz-feltételnek; következményként kaptuk, hogy egy környezetben levő minden paraméterértékre a megoldás ugyanazon az intervallumon értelmezve van.

A 19.6. állításban nem szükséges, hogy f_1 is eleget tegyen a Lipschitz-feltételnek, viszont meg kell követelni, hogy a megoldások ugyanazon az intervallumon legyenek értelmezve.

A 19.2. állítás csak egy megfelelően kis α értékre biztosítja az eredményt; a 19.6. állításban α akármilyen lehet, csak az a fontos, hogy legyenek értelmezve a megoldások a megfelelő intervallumon.

Ha ismerünk például aá9.2.-ből egy intervallumot, amelyen minden megoldás értelmezve van, akkor a 19.6. konkrét becslést ad a megoldások eltérésére.

19.8. Feladatok

1. Becsüljük meg, legfeljebb mekkora a hiba egy közelítő félperiódusban (a $[0, \pi/\omega]$ időtartamban), ha az inga lengését a szokásos közelítő egyenlettel írjuk le, azzal a kezdeti feltétellel, hogy $\varphi(0) = \varphi_o \leq 3,6^o = 2\pi/100, \quad \dot{\varphi}(0) = 0$. (Útmutatás: $|\sin\varphi - \varphi| \leq \varphi^3/3!$.)

2. Tekintsük paraméternek a csillapított rezgések differenciálegyenletében az α csillapítási tényezőt, és vizsgáljuk meg, miképpen függnek tőle a megoldások.

3. Bármely $||\cdot||$ norma (véges dimenziós vektortéren) ekvivalens egy skalárszorzatból származó normával. Ennek a ténynek és a 19.6. állításnak az alapján adjunk becslést $||r_1(t) - r_o(t)||$-re.

20. Kis paraméter a bal oldalon

20.1. Tudjuk, hogy ha a differenciálegyenlet jobb oldala folytonosan függ valamely paraméterektől, akkor a megoldások is folytonosan függnek ezektől a paraméterektől. Mit tudunk modani akkor, ha a paraméterek a bal oldalon vannak? Bizonyos esetekben persze át tudjuk vinni őket a jobb oldalra, és akkor semmi gond sincs; máskor azonban ezt nem tehetjük meg, tehát új problémával állunk szemben.

Közelebbről, tekintsük a $\sigma > 0$ paraméterértékekre az

$$(*) \qquad ((x,y) : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V} \times \mathbb{R})? \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y), \quad x(0) = x_o \\ \sigma\dot{y} &= g(x,y), \quad y(0) = y_o \end{aligned}$$

kezdetiérték-problémát. Természetesen σ-val átoszthatunk, és így a jobb oldalon jelenik meg a paraméter, amelytől minden folytonosan függ. Felvethetjük azonban a kérdést, mit tudunk mondani a $\sigma \to 0$ határesetről; ez nyilván kivezet az eddigiek köréből, hiszen az átosztással nyert jobb oldalnak nincs határértéke ebben az esetben. Ha nem osztunk át σ-val, akkor a bal oldalnak formálisan nulla a határértéke, viszont ezzel a második függvénykomponens differenciálhányadosa kiesne az egyenletből, tehát nem szokásos differenciálegyenletre jutnánk.

Vegyük formálisan a $\sigma = 0$ esetet. Ekkor – jó esetben – a $g(x, y) = 0$ egyenletből y kifejezhető az x függvényeként. Jelöljük ezt a függvényt $\hat{y}$-nal, és tegyük be az első egyenletbe y helyére; így az

$$(**) \qquad (x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \qquad \dot{x} = f(x, \hat{y}(x)), \quad x(0) = x_o$$

kezdetiérték-problémát kapjuk.

Mi mondható a $(*)$ és a $(**)$ kapcsolatáról?

20.2. Tegyük fel, hogy

– $f : \mathbf{V} \times \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V}$ és $g : \mathbf{V} \times \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények,

– g-nek az $\mathbb{R}$ változója szerinti parciális deriváltja szigorúan negatív: létezik olyan $\alpha > 0$ szám, hogy $\mathrm{D}_{\mathbb{R}} g < -\alpha$.

Legyen $(x_o, y_o) \in \mathrm{Dom} g, \quad g(x_o, y_o) = 0$. Ekkor az implicitfüggvény-tétel értelmében van az x_o-nak egy környezetén értelmezett folytonosan differenciálható

$$\hat{y} : \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbb{R}, \quad \text{amellyel} \quad g(x, \hat{y}(x)) = 0 \quad \text{és} \quad y_o = \hat{y}(x_o).$$

Állítás *Használjuk az eddigi jelöléseket és éljünk az előbbi feltevésekkel. Legyen (r_σ, q_σ) és r a $(*)$, illetve a $(**)$ kezdetiérték-probléma megoldása, ahol $y(0) = \hat{y}(x_o)$. Tegyük fel továbbá, hogy minden megoldás értelmezve van valamely $[0, T]$ intervallumon. Ekkor minden $t \in [0, T]$ esetén*

$$\lim_{\sigma \to 0} r_\sigma(t) = r(t),$$
$$\lim_{\sigma \to 0} q_\sigma(t) = \hat{y}(r(t)),$$

és a konvergencia t-ben egyenletes.

Bizonyítás Vezessük be a

$$\xi_\sigma(\tau) := r_\sigma(\sigma\tau), \qquad \eta_\sigma(\tau) := q_\sigma(\sigma\tau)$$

függvényeket. Ezekre

$$\dot{\xi}_\sigma = \sigma f(\xi_\sigma, \eta_\sigma), \qquad \xi_\sigma(0) = x_o,$$
$$\dot{\eta}_\sigma = g(\xi_\sigma, \eta_\sigma), \qquad \eta_\sigma(0) = \hat{y}(x_o)$$

teljesül. Itt már a jobb oldalon "jól" szerepel a paraméter, azaz vehetjük a $\sigma = 0$ értéket; így jutunk a ξ és η függvényhez, amelyekre

$$\dot{\xi} = 0, \qquad \xi(0) = x_o,$$
$$\dot{\eta} = g(\xi, \eta), \quad \eta(0) = \hat{y}(x_o)$$

teljesül. Egyszerűen kapjuk, hogy e függvények állandók:

$$\xi = x_o, \quad \eta = \hat{y}(x_o).$$

Rögzítsünk egy tetszőleges $\epsilon > 0$ számot.

Az $\hat{y}$ folytonossága miatt van olyan $0 < \delta_\epsilon < \epsilon$, hogy

$$|\hat{y}(x) - \hat{y}(x_o)| < \epsilon \quad \text{ha} \quad \|x - x_o\| < \delta_\epsilon.$$

A megoldásoknak a paraméterektől való folytonos függése szerint van olyan $\tau_o > 0$ és $\sigma_1 > 0$, hogy minden $0 \le \tau \le \tau_o$ és $0 < \sigma < \sigma_1$ esetén $\|\xi_\sigma(\tau) - x_o(= \xi(\tau))\| < \delta_\epsilon$ és $|\eta_\sigma(\tau) - \hat{y}(x_o)\,(= \eta(\tau))| < \epsilon$, azaz

$$\|r_\sigma(t) - x_o\| < \delta_\epsilon, \quad |q_\sigma(t) - \hat{y}(x_o)| < \epsilon$$

$$(0 < \sigma < \sigma_1, \quad 0 \le t \le \sigma\tau_o).$$

$\hat{y}$ folytonossága miatt az is igaz, hogy a fenti σ és t értékekre

$$|\hat{y}(r_\sigma(t)) - \hat{y}(x_o)| < \epsilon,$$

és ezekből

$$|q_\sigma(t) - \hat{y}(r_\sigma(t))| < 2\epsilon, \qquad (0 < \sigma < \sigma_1, \quad 0 \le t \le \sigma\tau_o).$$

A függvények folytonossága miatt fennáll az egyenlőtlenség a $\sigma\tau_o$ fölötti valamely intervallumban is. Most megmutatjuk, hogy elég kis σ-kra az iménti egyenlőtlenség az egész $[0, T]$ intervallumon teljesül, azaz létezik olyan $\sigma_2 > 0$, hogy

$$|q_\sigma(t) - \hat{y}(r_\sigma(t))| < 2\epsilon \qquad (\sigma < \sigma_2,\, 0 \le t \le T).$$

Tegyük fel ugyanis ennek az ellenkezőjét, és vezessük be az egyszerűség kedvéért a

$$\phi_\sigma(t) := q_\sigma(t) - \hat{y}(r_\sigma(t))$$

jelölést. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik $\sigma_n < \frac{1}{n}$ és $t_n \in [0, T]$ úgy, hogy $|\phi_{\sigma_n}(t)| < 2\epsilon$, ha $t < t_n$, és

$$|\phi_{\sigma_n}(t_n)| = 2\epsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy a $t \mapsto \frac{1}{2}|\phi_{\sigma_n}(t)|^2$ függény deriváltja a t_n pontban nemnegatív, azaz

$$\phi_{\sigma_n}(t_n)\left(\frac{g(r_{\sigma_n}(t_n), q_{\sigma_n}(t_n))}{\sigma_n} - \hat{y}'(r_{\sigma_n}(t_n)) \cdot f(r_{\sigma_n}(t_n), q_{\sigma_n}(t_n))\right) \ge 0.$$

Minthogy $g(r_\sigma(t), \hat{y}(r_\sigma(t))) = 0$, a Lagrange-féle középértéktételből azt kapjuk, hogy $g(r_\sigma(t), q_\sigma(t)) = \mathrm{D}_\mathbb{R} g(r_\sigma(t), \theta(\sigma, t))\phi_\sigma(t)$, ahol $\theta(\sigma, t)$ valamely "közbülső" hely. Ezért az előző egyenlőtlenség szerint

$$4\epsilon^2 \frac{\mathrm{D}_\mathbb{R} g(r_{\sigma_n}(t_n), \theta(\sigma_n, t_n))}{\sigma_n} - \phi_{\sigma_n}(t_n)\hat{y}'(r_{\sigma_n}(t_n)) \cdot f(r_{\sigma_n}(t_n), q_{\sigma_n}(t_n)) \geq 0$$

minden n-re. A bal oldal második tagja korlátos, első tagja negatív és nem lehet nagyobb $-4\epsilon^2\alpha n$-nél; ha tehát n elég nagy, akkor a bal oldal negatív: ellentmondásra jutottunk.

Az r_σ függvény az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \qquad \dot{x} = f(x, \hat{y}(x) + q_\sigma(t) - \hat{y}(r_\sigma(t))), \quad x(0) = x_o$$

kezdetiérték-problémának is megoldása. Az előbbi becslésünk és f folytonos differenciálhatósága miatt ennek a kezdetiérték-problémának a megoldása és a $(**)$ kezdetiérték-problémának a megoldása nem nagyon tér el egymástól, pontosabban a 19.6. alapján, ha L az f deriváltfüggvényének a korlátja, akkor

$$\|r_\sigma(t) - r(t)\| \leq 2\epsilon\left(e^{LT} - 1\right) \qquad (\sigma < \sigma_2,\ 0 \leq t \leq T),$$

ami azt jelenti, hogy r_σ egyenletesen tart r-hez a $[0, T]$ intervallumon, miközben σ tart a nullához.

Ennek és $\hat{y}$-nak a folytonossága következtében $\hat{y} \circ r_\sigma$ egyenletesen tart $\hat{y} \circ r$-hez, miközben σ tart a nullához. Végül a $|q_\sigma - \hat{y} \circ r| \leq |q_\sigma - \hat{y} \circ r_\sigma| + |\hat{y} \circ r_\sigma - \hat{y} \circ r|$ egyenlőtlenség alapján azt is megállapíthatjuk, hogy q_σ egyenletesen tart $\hat{y} \circ r$-hez a $[0, T]$ intervallumon, miközben σ tart a nullához.

20.3. Vegyük észre azt a fontos tényt, hogy az előző tételben csak a nullától "előre" terjedő intervallumon tudjuk biztosítani a megoldások konvergenciáját. Ha $\mathrm{D}_\mathbb{R} g$ pozitív volna, akkor a nullától "hátrafelé" terjedő intervallumon teljesülne a konvergencia.

Szemléltessük eredményünket egy egyszerű példán. Tekintsük az

$$((x, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2)? \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= y, & x(0) &= x_o, \\ \sigma\dot{y} &= x + ay, & y(0) &= ax_o \end{aligned}$$

kezdetiérték-problémát, ahol $a = \pm 1$.

A differenciálegyenlet lineáris, amelyet a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{\sigma} & \frac{a}{\sigma} \end{pmatrix}$$

lineáris leképezés határoz meg. Ennek a lineáris leképezésnek a sajátértékei

$$\lambda_+(\sigma) = \frac{a + \sqrt{1+4\sigma}}{2\sigma} = \frac{a + 1 + 2\sigma + \mathrm{ordo}(\sigma)}{2\sigma},$$
$$\lambda_-(\sigma) = \frac{a - \sqrt{1+4\sigma}}{2\sigma} = \frac{a - 1 - 2\sigma - \mathrm{ordo}(\sigma)}{2\sigma}.$$

A kezdetiérték-probléma megoldásának első komponense

$$t \mapsto -\frac{\lambda_-(\sigma) - a}{\lambda_+(\sigma) - \lambda_-(\sigma)} x_o\, e^{\lambda_+(\sigma)t} + \frac{\lambda_+(\sigma) - a}{\lambda_+(\sigma) - \lambda_-(\sigma)} x_o\, e^{\lambda_-(\sigma)t}.$$

Az exponenciális függvények együtthatójának van határértéke, miközben σ tart a nullához: $\frac{-a+1}{2}$, illetve $\frac{a+1}{2}$.

Vegyük az $a = -1$ esetet. Ekkor

$$\lim_{\sigma\to 0} \lambda_+(\sigma) = 1, \qquad \lim_{\sigma\to 0} \lambda_-(\sigma) = -\infty.$$

Negatív t-kre tehát a megoldásnak nincs határértéke, miközben σ tart a nullához, pozitív t-kre viszont konvergál a $t \mapsto x_o e^t$ függvényhez, amely az eredeti kezdetiérték-probléma megoldása a $\sigma = 0$ helyettesítéssel.

Az olvasóra bízzuk, vizsgálja meg az $a = 1$ esetet.

20.4. Feladat

Elektrodinamikában ismert eredmény, hogy adott pályán mozgó ponttöltésre a saját elektromágneses sugárzása úgynevezett visszaható erőt gyakorol, amely arányos a mozgás harmadik deriváltjával. Ezért a ponttöltés mozgását úgy próbálják meghatározni, hogy a Newton-egyenletet kiegészítik a sugárzási visszaható erővel. Tekintsünk most el attól, hogy ez a gondolat logikailag hibás (adott mozgás esetén ismert a visszaható erő, azt nem használhatjuk a mozgás meghatározására), és vizsgáljuk meg a szokásos eljárást rugalmasan kötött elektron sugárzására vonatkozóan. Az elektron mozgását a feltevések szerint az

$$(*) \qquad (x : \mathbb{R} \to \mathbb{R})? \qquad -\sigma \dddot{x} + \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

differenciálegyenlet írná le. Mivel σ "kicsi", első közelítésben vehető az eredeti helyett az $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ differenciálegyenlet, amelyből $\dddot{x} = -\omega^2 \dot{x}$ adódik. Ezt beírva az eredeti egyenletbe, azt a csillapított rezgőmozgás

$$(**) \qquad (x : \mathbb{R} \to \mathbb{R})? \qquad \ddot{x} + \sigma\omega^2 \dot{x} + \omega^2 x = 0$$

differenciálegyenletével közelítik.

Ez az eljárás kétséges, ugyanis nem jó közelítés a legmagasabb rendű differenciálhányados elhagyása a "kis" együttható miatt. Ezt elsőrendű egyenletre való átfogalmazással láthatjuk. Az eredeti differenciálegyenlettel ekvivalens elsőrendű rendszer

$$((x,v,a):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3)? \qquad \dot{x}=v, \quad \dot{v}=a, \quad \sigma\dot{a}=a+\omega^2 x.$$

Az utolsó egyenlet jobb oldalának a szerinti parciális deriváltja pozitív, tehát az a közelítés, hogy σ helyébe nullát írunk, nem megfelelő. Persze, ettől még a csillapított rezgőmozgással való közelítés jó lehetne, hiszen két rossz lépés eredményezhet jót. Mutassuk meg, hogy a leírt eljárás valóban nem helyes, amit pontosan a következőképpen fogalmazhatunk meg.

Legyen r_σ a $(*)$ egyenletnek az

$$x(0)=x_o, \qquad \dot{x}(0)=v_o, \qquad \ddot{x}(0)=-\sigma\omega^2 v_o-\omega^2 x_o$$

kezdeti értéket kielégítő megoldása és h_σ a $(**)$ egyenlet megoldása az

$$x(0)=x_o, \qquad \dot{x}(0)=v_o$$

kezdeti feltétellel. Bizonyítsuk be, hogy pozitív t-kre

$$(***) \qquad \lim_{\sigma\to 0}(r_\sigma(t)-h_\sigma(t))\neq 0, \qquad \lim_{\sigma\to 0}(\dot{r}_\sigma(t)-\dot{h}_\sigma(t))\neq 0.$$

Útmutatás: (i) A differenciálegyenlet $\lambda\mapsto\sigma\lambda^3-\lambda^2-\omega^2$ karakterisztikus polinomjának az együtthatóiból kiolvasható, hogy három valós gyöke nem lehet; a valós gyöke pozitív, a komplex gyök (amelynek a konjugáltja is gyök) valós része negatív.

(ii) Írjuk fel a karakterisztikus polinomot $\sigma(\lambda-a)(\lambda+b+ic)(\lambda+b-ic)$ alakban, ahol a,b,c a σ-tól függő pozitív számok.

(iii) Az együtthatók összehasonlításából azt kapjuk, hogy

$$\sigma(a-2b)=1, \quad ,b^2+c^2-2ab=0, \quad \sigma a(b^2+c^2)=\omega^2.$$

(iv) Az első egyenlőségből $a>2b$ következik, és az, hogy a a végtelenhez tart, miközben σ tart a nullához. Az első és a harmadik egyenlőségből $(1+2\sigma b)(b^2+c^2)=\omega^2$, amely szerint b is, c is korlátos marad, miközben σ tart a nullához.

(v) A gyökök ilyen ismeretében írjuk fel az eredeti és a „közelítő" differenciálegyenletnek a megfelelő kezdeti feltételt kielégítő megoldásait, és mutassuk meg, hogy $(***)$ teljesül rájuk.

21. A paraméterektől való differenciálható függés

21.1. Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \times \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbf{V}$ az értelmezési tartományának minden pontja egy környezetében univerzális Lipschitz-feltételnek tesz eleget a $\mathbf{V}$-változója szerint, és jelölje $R(t; s, y)$ az

$$(*) \qquad (x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \qquad \dot{x} = f \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{R}}, x)$$

differenciálegyenletnek az

$$x(s) = y$$

kezdeti feltételt kielégítő maximális megoldásának a t helyen felvett értékét.

Definíció *Az* $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbf{V}, \quad (t, s, y) \mapsto R(t; s, y)$ *leképezést a* $(*)$ *differenciálegyenlet* ***karakterisztikus függvényének*** *hívjuk.*

Minden $(s, y) \in \mathrm{Dom} f$ esetén megadható egy $I_{s,y}$ intervallum, az (s, y) kezdeti értéket kielégítő maximális megoldás értelmezési tartománya. A karakterisztikus függvény értelmezési tartománya tehát

$$\bigcup_{(s,y)\in \mathrm{Dom} f} I_{s,y} \times (s, y).$$

Nyilván, ha $(s, y) \in \mathrm{Dom} f$, akkor (s, s, y) benne van R értelmezési tartományában és $R(s; s, y) = y$.

A megoldások egyértelműségéből következik a karakterisztikus függvény alapvető tulajdonsága: ha $t, t' \in I_{s,y}$, akkor

$$(**) \qquad R(t; t', R(t'; s, y)) = R(t; s, y).$$

21.2. Állítás *A differenciálegyenlet karakterisztikus függvénye nyílt halmazon van értelmezve és folytonos.*

Bizonyítás Emlékeztetünk arra, hogy $\mathbb{R} \times \mathbf{V}$-n a "végtelen" normát használjuk; ekkor a $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbf{V}$ pont ϵ sugarú környezete $K_\epsilon(t, x) = \{(s, y) \mid |s - t| < \epsilon, \|y - x\| < \epsilon\}$.

Egy $H \subset \mathbb{R} \times \mathbf{V}$ halmaz ϵ sugarú környezete az

$$\bigcup_{(t,x)\in H} K_\epsilon(t, x)$$

halmaz.

Először belátjuk, hogy Dom$R$ nyílt halmaz. Legyen $(t_+, t_o, x_o) \in \mathrm{Dom}R$, és tegyük fel, hogy $t_+ > t_o$ (a másik eset hasonlóan tárgyalható).

A $t \mapsto R(t; t_o, x_o)$ függvény a differenciálegyenlet megoldása, ezért folytonos; következésképpen $H := \{R(t; t_o, x_o) \mid t_o \leq t \leq t_+\}$ kompakt halmaz f értelmezési tartományában (a kompakt $[t_o, t_+]$ intervallum folytonos képe). Ezért van olyan $\epsilon > 0$, hogy a H halmaz ϵ sugarú környezetének a lezártja – jelölje ezt K – is benne van f értelmezési tartományában. K korlátos és zárt, tehát kompakt halmaz. Alkalmazhatjuk rá a 3.2.-beli eredményünket: van a K halmazhoz L globális Lipschitz-konstans. Ez azt jelenti, hogy H minden pontjának – a 3.3. állítás jelöléseinek megfelelő – $\eta := \epsilon, \beta := \epsilon$ számokkal jellemzett környezetében az f ugyanazzal az L Lipschitz-konstanssal Lipschitz-feltételnek tesz eleget.

Jelölje $M \neq 0$ az f korlátját a K halmazon, és legyen

$$\alpha := \min\{\epsilon, \frac{\epsilon}{4M}, \frac{1}{4L}\}.$$

Van olyan n természetes szám, hogy $t_o + n\alpha \leq t_+$, $t_o + (n+1)\alpha > t_+$. Legyen

$$t_i := t_o + i\alpha, \quad x_i := R(t_i; t_o, x_o), \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Ha $|s - t_o| < \frac{\epsilon e^{-nL\alpha}}{4M}$ és $\|y - x_o\| < \frac{\epsilon e^{-nL\alpha}}{2}$, akkor a 19.2. folytán (t_1, s, y) benne van R értelmezési tartományában, és 19.6. szerint

$$\|R(t_1; s, y) - x_1\| \leq \epsilon e^{-(n-1)L\alpha}.$$

Ez maga után vonja a 19.2. alapján, hogy a $(t_1, R(t_1; s, y))$ kezdeti feltételt kielégítő megoldás értelmezve van és egyértelmű az egész $I_\alpha(t_1)$ intervallumon; ez a megoldás az előzőnek a folytatása, ami azt jelenti, hogy (t_2, s, y) benne van R értelmezési tartományában. Továbbá ismét a 19.6. szerinti becsléssel azt kapjuk, hogy

$$\|R(t_2; s, y) - x_2\| \leq \epsilon e^{-(n-2)L\alpha}.$$

Így lépegetve tovább – ha egyáltalán lépegetni kell, mert $n > 0$ – végül is azt kapjuk, hogy (t_n, s, y) benne van R értelmezési tartományában, és a $(t_n, R(t_n; s, y))$ kezdeti feltételnek eleget tevő megoldás értelmezve van az egész $I_\alpha(t_n)$ intervallumon, amely tartalmazza t_+-ot, sőt annak egy környezetét is.

Mindezek együtt azt jelentik, hogy a (t_+, t_o, x_o) az R értelmezési tartományának belső pontja, azaz Dom$R$ nyílt halmaz.

Tudjuk, hogy ha t és s elég közel van egymáshoz, akkor a $(t, s, y) \mapsto R(t; s, y)$ hozzárendelés folytonos (lásd 19.4.; ott csak lokális megoldásokról beszéltünk, és az $r_{s,y}(t)$ jelölést alkalmaztuk). Ezért a 21.1.beli $(**)$ összefüggés alapján az előző "lépegetés" felhasználásával láthatjuk, hogy R véges sok folytonos leképezés kompozíciójaként állítható elő, így maga is folytonos.

21.3. Emlékeztetünk arra, hogy ha létezik az f-nek a $\mathbf{V}$-változója szerinti parciális deriváltja, $\mathrm{D}_{\mathbf{V}} f$, (Analízis IV.B.4.3.), akkor $\mathrm{D}_{\mathbf{V}} f(t,x) : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ folytonos lineáris leképezés.

Állítás *Ha f folytonosan differenciálható, akkor R folytonosan differenciálható.*

Bizonyítás Meglehetősen összetett és hosszadalmas igazolni ezt az állítást. Egy kicsit erősebb feltétel mellett azonban igen szép bizonyítás adható. Mi most feltesszük, hogy f *kétszer* folytonosan differenciálható. Tekintsük az

$$\big((x,z,Z) : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V}\times\mathbf{V}\times \mathrm{Lin}\mathbf{V}\big)? \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x),\\ \dot{z} &= \mathrm{D}_{\mathbf{V}} f(t,x)\cdot z,\\ \dot{Z} &= \mathrm{D}_{\mathbf{V}} f(t,x)\cdot Z \end{aligned} \tag{$*$}$$

differenciálegyenletet, ahol – és a következőkben a jobb áttekinthetőség kedvéért – a pontszorzás jelöli lineáris leképezések hatását vektorokon és lineáris leképezések kompozícióját (szorzatát) is. Feltevésünk szerint f kétszer folytonosan differenciálható, ezért ennek a differenciálegyenletnek a jobb oldala folytonosan differenciálható.

Jelölje

$$t \mapsto (R(t;s,y), \xi(t;s,y), \Theta(t;s,y))$$

a fenti differenciálegyenletnek az

$$x(s) = y, \quad z(s) = -f(s,y), \quad Z(s) = \mathrm{id}_{\mathbf{V}} \tag{$**$}$$

kezdeti értéket kielégítő (egyértelmű) maximális megoldását.

Rögzítsünk egy (t_o, x_o) értéket. A 19.4. szerint létezik valamely I intervallum a t_o körül és x_o-nak valamely G környezete úgy, hogy minden $s \in I$ és $y \in G$ esetén a megoldás értelmezve van az egész I intervallumon. Minthogy most a "paraméterek" a kezdeti értékek, a 19.3.-ban mondottak szerint a megoldást az egész $I \times I \times G$ halmazon egyenletesen konvergens fokozatos közelítés határértékeként kaphatjuk meg. A közelítő sorozatra – értelemszerű jelöléssel –

$$R_o(t;s,y) := y, \quad \xi_o(t;s,y) := 0, \quad \Theta_o(t;s,y) := \mathrm{id}_{\mathbf{V}},$$

$$R_n(t;s,y) = y + \int_s^t f(\tau, R_{n-1}(\tau;s,y))\,d\tau,$$

$$\xi_n(t;,s,y) = -f(s,y) + \int_s^t \mathrm{D}_{\mathbf{V}} f(\tau, R_{n-1}(\tau;s,y))\xi_{n-1}(\tau;s,y)\,d\tau,$$

$$\Theta_n(t;s,y) = \mathrm{id}_{\mathbf{V}} + \int_s^t \mathrm{D}_{\mathbf{V}} f(\tau, R_{n-1}(\tau;s,y))\Theta_{n-1}(\tau;s,y)\,d\tau$$

áll fenn.

Nyilvánvaló, hogy

$$\frac{\partial R_o(t;s,y)}{\partial s} = 0 = \xi_o(t;s,y), \qquad \frac{\partial R_o(t;,s,y)}{\partial y} = \mathrm{id}_{\mathbf{V}} = \Theta_o(t;s,y).$$

A paraméteres integrálok differenciálhatóságáról szóló tétel alapján (Analízis V.B.11.4. és B.11.8.4.) R_n-et differenciálva teljes indukcióval beláthatjuk, hogy minden n természetes számra

$$\frac{\partial R_n(t;s,y)}{\partial s} = \xi_n(t;s,y), \qquad \frac{\partial R_n(t;s,y)}{\partial y} = \Theta_n(t;s,y),$$

továbbá nyilvánvalóan

$$\frac{\partial R_n(t;s,y)}{\partial t} = f(t, R_{n-1}(t;s,y)).$$

Ez azt jelenti, hogy az $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat és parciális deriváltjainak a sorozata – amely szintén folytonos függvényekből áll – egyenletesen konvergens az $I \times I \times G$ halmazon. Ezért R_n határértéke, R, parciálisan differenciálható minden változója szerint (Analízis IV.A.4.1.), a parciális deriváltak is folytonos függvények, tehát maga R is folytonosan differenciálható az $I \times I \times G$ halmazon (Analízis IV.B.4.6.).

A 21.2.beli "lépegetéssel" a 21.1.beli $(**)$ összefüggés alapján R véges sok folytonosan differenciálható leképezés kompozíciójaként állítható elő, így maga is folytonosan differenciálható. ■

Bizonyításunk gondolatmenetét alkalmazva magasabb rendű deriváltakra azt is beláthatjuk, hogy ha a differenciálegyenlet jobb oldala $n+1$-szer folytonosan differenciálható, akkor a karakterisztikus függvény n-szer folytonosan differenciálható. Természetesen az is igaz, hogy elég, ha a differenciálegyenlet jobb oldala n-szer folytonos differenciálható.

21.4. Állítás *Teljesüljön az előző állítás feltétele. Ekkor a 21.1.-beli differenciálegyenlet R karakterisztikus függvényére*

$$\frac{\partial R(t;s,y)}{\partial s} + \frac{\partial R(t;s,y)}{\partial y} \cdot f(s,y) = 0$$

minden szóba jövő $(t,s,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbf{V}$ esetén.

Bizonyítás Az előző bizonyításunk azt is mutatja, hogy $\xi(t;s,y) = \frac{\partial R(t;s,y)}{\partial s}$, $\Theta(t;s,y) = \frac{\partial R(t;s,y)}{\partial y}$, azaz

$$t \mapsto \left(R(t;s,y), \frac{\partial R(t;s,y)}{\partial s}, \frac{\partial R(t;s,y)}{\partial y} \right)$$

a 21.3.-beli $(*)$ differenciálegyenletnek a $(**)$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása.

”Szorozzuk be” jobbról a 21.3.-beli differenciálegyenlet utolsó sorát $f(s,y)$-nal, aztán adjuk hozzá az előzőhöz; így az $u := z + Z \cdot f(s,y)$ jelöléssel az

$$(x,u) : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V} \times \mathbf{V})? \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x), \\ \dot{u} &= \mathrm{D}_{\mathbf{V}} f(t,x) \cdot u, \end{aligned}$$

$$x(s) = y, \qquad u(s) = 0$$

kezdetiérték-problémához jutunk, amelynek nyilvánvalóan $t \mapsto \big(R(t;s,y),0\big)$ a megoldása. z és Z helyébe az R megfelelő parciális deriváltjait téve az $u = 0$ összefüggés adja a bizonyítandó állítást.

21.5. A karakterisztikus függvény jelölésében a pontosvesszővel azt fejezzük ki, hogy az első változó jelentése a differenciálegyenlet szempontjából más, mint a másik kettőé. Most azt fogjuk vizsgálni, milyen tulajdonságú a karakterisztikus függvény a **V**-változója szerint. Ezért megváltoztatjuk a jelölést:

$$R_{t,s}(y) := R(t;s,y).$$

Rögzített t és s esetén tehát $R_{t,s} : \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbf{V}$ leképezés.

Nyilvánvaló, hogy

$$R_{t,t} \subset \mathrm{id}_{\mathbf{V}}.$$

A 21.1. $(**)$ összefüggés szerint

$$R_{t,t'} \circ R_{t',s} \subset R_{t,s}$$

minden szóba jövő t, t', s esetén (itt megengedjük, hogy a kompozíció esetleg az üres függvény legyen). Ebből adódik, hogy $R_{t,s}$ injektív (aminek az a szemléletes tartalma, hogy különböző kezdeti feltételeknek eleget tevő integrálgörbék nem metszik egymást) és

$$R_{t,s}^{-1} = R_{s,t}.$$

Mivel R értelmezési tartománya nyílt, nyilvánvaló, hogy $\mathrm{Dom} R_{t,s} = \{v \in \mathbf{V} \mid (t,s,v) \in \mathrm{Dom} R\}$ nyílt halmaz. R folytonossága (folytonos differenciálhatósága) pedig maga után vonja $R_{t,s}$ folytonosságát (folytonos differenciálhatóságát).

A modottakat érdemes összefoglalni:

Állítás *$R_{t,s}$ kis homeomorfizmus, vagyis*
– nyílt halmazon van értelmezve,
– folytonos,
– injektív,
– az inverze is folytonos.

Ha a differenciálegyenlet jobb oldala folytonosan differenciálható, akkor $R_{t,s}$ kis diffeomorfizmus, vagyis a fenti tulajdonságok teljesülnek rá a folytonosság helyett folytonos differenciálhatósággal.

21.6. Tudjuk, hogy $\mathbf{V}$-n számszorzó erejéig egyetlen eltolásinvariáns Borel-mérték van (Analízis V.B.16.3.(iv)). Fizikai alkalmazásokban merül fel a kérdés, vajon a fázistér $R_{t,s}$ transzformációja megtartja-e az invariáns mértéket.

Emlékeztetünk vektormezők divergenciájára (Analízis IV.B.18.). Tekintsük a differenciálegyenlet jobb oldalát: minden rögzített t esetén $f(t,\cdot):\mathbf{V}\rightarrowtail\mathbf{V}$ vektormező. Ha f differenciálható, a divergenciáját a $\mathbf{V}$-változó szerinti parciális deriválttal értelmezzük: $\mathrm{D}_{\mathbf{V}}\cdot f := \mathrm{Tr}\mathrm{D}_{\mathbf{V}}f$.

Állítás *Ha f kétszer folytonosan differenciálható és a divergenciája nulla, akkor minden t,s esetén $R_{t,s}$ megtartja $\mathbf{V}$ eltolásinvariáns mértékét.*

Bizonyítás Azt kell megmutatnunk, hogy $|\det \mathrm{D}R_{t,s}|=1$, amihez elég azt belátnunk, hogy

$$\frac{\partial\,(\det \mathrm{D}R_{t,s})}{\partial t}=0,$$

hiszen $\det \mathrm{D}R_{s,s}=\det \mathrm{Did}_{\mathbf{V}})=1$.

Megjegyezzük, hogy $\mathrm{D}R_{t,s}(y)=\partial R(t;s,y)/\partial y$; továbbá az f-re kirótt feltételből következően az R karakterisztikus függvény kétszer folytonosan differenciálható.

Tudjuk, hogy a $\det:\mathrm{Lin}(\mathbf{V})\to\mathbb{K}$ függvény differenciálható; deriváltjának értéke egy injektív (egyben bijektív) $A:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ lineáris leképezésben a $\mathrm{Lin}(\mathbf{V})\to\mathbb{K}$, $\quad H\mapsto(\det A)\,\mathrm{Tr}(HA^{-1})$ lineáris leképezés. Ezért

$$(*)\qquad \frac{\partial \det \mathrm{D}R_{t,s}}{\partial t}=(\det \mathrm{D}R_{t,s})\mathrm{Tr}\left(\frac{\partial \mathrm{D}R_{t,s}}{\partial t}\,(\mathrm{D}R_{t,s})^{-1}\right).$$

Vizsgáljuk meg a nyom (Tr) alatti mennyiséget egy adott $y\in\mathbf{V}$ helyen:

$$\frac{\partial \mathrm{D}R_{t,s}(y)}{\partial t}\,(\mathrm{D}R_{t,s})^{-1}(y).$$

Az előbbi megjegyzésünk alapján a két differenciálás sorrendje felcserélhető:

$$\frac{\partial \mathrm{D}R_{t,s}(y)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial R(t;s,y)}{\partial t}\right)=\frac{\partial f(t,R(t;s,y))}{\partial y}=\mathrm{D}f(t,R(t;s,y))\cdot \mathrm{D}R_{t,s}(y).$$

Végül is látjuk, hogy a $\mathrm{D}_{\mathbf{V}}f(t,R(t;s,y))$ mennyiség nyomát kell vennünk a $(*)$ egyenlőség jobb oldalán; ez éppen az f divergenciája, ami nulla, tehát beláttuk, amit akartunk.

21.7. Befejezésül azt mutatjuk meg, hogy ha a differenciálegyenlet jobb oldala elég simán függ bizonyos paraméterektől, akkor a karakterisztikus függvény is simán függ azoktól a paraméterektől.

Állítás *Tegyük fel, hogy P egy $\mathbf{U}$ véges dimenziós vektortér nyílt részhalmaza, D az $\mathbb{R}\times\mathbf{V}$ nyílt részhalmaza és $P\times D \rightarrowtail \mathbf{V}$, $\quad (p,t,x)\mapsto f_p(t,x)$ folytonosan differenciálható. Jelölje $t\mapsto R_p(t;s,y)$ az*

$$(x:\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbf{V})? \qquad \dot{x}=f_p(t,x), \qquad x(s)=y$$

kezdetiérték-probléma maximális megoldását. Ekkor a $(p,t,s,y)\mapsto R_p(t;s,y)$ függvény folytonosan differenciálható.

Bizonyítás Az

$$\big((u,x):\mathbb{R}\rightarrowtail(\mathbf{U},\mathbf{V})\big)? \qquad \begin{array}{ll} \dot{u}=0 & u(s)=p, \\ \dot{x}=f_u(t,x), & x(s)=y \end{array}$$

kezdetiérték-probléma meghatározta karakterisztikus függvény, $(t,s,p,y)\mapsto R(t;s,(p,y))$, folytonosan differenciálható az eddigi ismereteink alapján. Igen könnyű elllenőrizni, hogy $R_p(t;s,y)=R(t;s,(p,y))$.

21.8. Feladatok

1. Mi a kapcsolat egy homogén lineáris differenciálegyenlet karakterisztikus függvénye és rezolvense között?

2. Állítsuk elő a 11.5.1. feladatban szereplő differenciálegyenletek karakterisztikus függvényeit (ügyeljünk a ”kivételes” kezdeti értékekre!).

22. Differenciálegyenletek transzformációja

22.1. Egyes speciális differenciálegyenleteknél láttuk, hogy új keresett függvény vagy új változó bevezetésével a differenciálegyenletet más, jobban kezelhető alakra hozhatjuk (pl. szétválasztható változójúra visszavezethető egyenletek, Euler-féle differenciálegyenlet). Ezeket a transzformációkat a következőképpen foglalhatjuk össze az

$$(*) \qquad (x:\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbf{V})? \qquad \dot{x}=f\circ(\mathrm{id}_{\mathbb{R}},x), \quad x(t_o)=x_o$$

kezdetiérték-problémával kapcsolatban.

(i) Legyen $h:\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, sehol sem nulla, $t_o\in\mathrm{Dom}h$. A $z:=hx$ függvényre a

$$(z:\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbf{V})? \qquad \dot{z}=h\,f\left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}},\frac{z}{h}\right)+\dot{h}\frac{z}{h}, \quad z(t_o)=h(t_o)x_o$$

kezdetiérték-probléma áll fenn, amelynek megoldásából egyszerűen megkapjuk az eredetinek a megoldását.

(ii) Legyen $\tau : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ injektív és folytonosan differenciálható, $t_o \in \operatorname{Ran}\tau$. A $z := x \circ \tau$ függvényre a

$$(z : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \qquad \dot{z} = f \circ (\tau, z)\dot{\tau}, \quad z(\tau^{-1}(t_o)) = x_o$$

kezdetiérték-probléma áll fenn, amelynek a megoldásából nyilvánvaló módon kapjuk vissza az eredetinek a megoldását.

22.2. Most a differenciálegyenletnek az előzőektől eltérő, igen széles keretek között használható transzformációját értelmezzük.

Legyen $\mathbf{U}$ véges dimenziós vektortér (mint látni fogjuk, ugyanannyi dimenziós, mint $\mathbf{V}$); a következőkben feltesszük, hogy mind $\mathbf{V}$, mind $\mathbf{U}$ valós vektortér, ami nagyon fontos a függvények differenciálhatóságának értelme miatt. Legyen $F : \mathbb{R} \times \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbf{U}$ folytonosan differenciálható leképezés, amelyre az teljesül, hogy második változójában kis diffeomorfizmus, azaz minden szóba jövő valós t-re

$$F_t : \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbf{U}, \qquad x \mapsto F(t, x)$$

injektív és az inverzével együtt folytonosan differenciálható. Az F-nek $\mathbb{R}$- és $\mathbf{V}$-változója szerinti differenciálhányadosát szokásosan $\mathrm{D}_{\mathbb{R}}F$, illetve $\mathrm{D}_{\mathbf{V}}F$ jelöli.

Legyen (t_o, x_o) az F értelmezési tartományában. A differenciálegyenlet keresett x függvényével vezessük be a $z(t) := F(t, x(t)) = F_t(x(t))$ függvényt. Erre a

$$(z : (t)\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{U})? \qquad \dot{z} = \mathrm{D}_{\mathbb{R}}F(t, F_t^{-1}(z)) + \mathrm{D}_{\mathbf{V}}F(t, F_t^{-1}(z)) \cdot f(t, F_t^{-1}(z)),$$

$$(**) \qquad\qquad z(t_o) = F(t_o, x_o)$$

kezdetiérték-problémát kapjuk. Azt mondjuk, hogy a $(**)$ kezdetiérték-probléma a $(*)$ kezdetiérték-problémának az F általi transzformáltja.

Igen egyszerű, szinte magától értetődő, de fontos eredmény, hogy r akkor és csak akkor megoldása a $(*)$ kezdetiérték-problémának, ha $t \mapsto F(t, r(t))$ megoldása a $(**)$ kezdetiérték-problémának.

22.3. Érdemes azt az esetet külön is megemlíteni, amikor F nem függ az $\mathbb{R}$ változójától, azaz van olyan $G : \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbf{U}$, hogy $F_t = G$ minden valós t-re. Ekkor a transzformált kezdetiérték-probléma:

$$(z : (t)\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{U})? \qquad \dot{z} = \mathrm{D}G(G^{-1}(z)) \cdot f(t, G^{-1}(z)), \quad z(t_o) = G(x_o).$$

Különösen fontos ez a speciális eset akkor, amikor f sem függ az $\mathbb{R}$-változójától, vagyis az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \qquad \dot{x} = g(x)$$

autonóm differenciálegyenletnél, mert ekkor a transzformált egyenlet is autonóm lesz.

22.4. Ezekben a transzformációkban tulajdonképpen az a lényeg, hogy az eredeti iránymezőt más iránymezőbe tanszformáljuk, amit így foglalhatunk össze.

Vezessük be az

$$\hat{F} : \mathbb{R} \times \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbb{R} \times \mathbf{U}, \quad (t, x) \mapsto (t, F(t, x))$$

leképezést, amely szintén kis diffeomorfizmus. Az inverzére $\hat{F}^{-1}(t, z) = (t, F_t^{-1}(z))$ teljesül. Az $\mathbb{R} \times \mathbf{V}$-n adott $(1, f)$ iránymezőt ezzel a kis diffeomorfizmussal átviszszük az $\mathbb{R} \times \mathbf{U}$-n értelmezett

$$\Big(\mathrm{D}\hat{F} \cdot (1, f)\Big) \circ \hat{F}^{-1}, \qquad (t, z) \mapsto \big(1, (\mathrm{D}_{\mathbb{R}}F + \mathrm{D}_{\mathbf{V}}F \cdot f)(t, F_t^{-1}(z))\big)$$

iránymezőbe, és az ezzel meghatározott differenciálegyenletet vesszük.

Az autonóm esetben pedig a $\mathbf{V}$-n adott eredeti g vektormezőt visszük át az $\mathbf{U}$-n értelmezett

$$(\mathrm{D}G \cdot g) \circ G^{-1}$$

vektormezőbe, és az ezzel meghatározott autonóm differenciálegyenletet vesszük.

Végül megemlítjük, hogy ezek a transzformációk általában csak lokálisak, azaz nem mindenütt, csak a szóban forgó kezdeti érték egy környezetében vannak definiálva.

22.5. Az iránymező alkalmas transzformációjával az eredeti differenciálegyenletet egyszerűbb alakra hozhatjuk. Felmerül a kérdés, mi a legegyszerűbb elérhető alak? A válasz az, hogy minden elég sima iránymező *lokálisan kiegyenesíthető*, amit a következő állítás fogalmaz meg pontosan.

Állítás *Legyen* $f : \mathbb{R} \times \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbf{V}$ *folytonosan differenciálható. Ekkor* $\mathrm{Dom} f$ *minden pontjának van olyan környezete, amelyben az* $(1, f)$ *iránymezőt az* $\mathbb{R} \times \mathbf{V}$*-ben értelmezett* $(1, 0)$ *konstans iránymezőbe transzformálhatjuk alkalmas* $\hat{F}$*-pal a 22.4. szerint.*

Bizonyítás Vegyük a (t_o, x_o) pontot; ennek a környezetében levő (t, x) elemekre legyen $F(t, x) := R(t_o; t, x)$, ahol R a differenciálegyenlet karakterisztikus függvénye. A karakterisztikus függvénynek a 21. fejezetben megismert tulajdonságai következtében $F(t_o, x_o) = x_o$, F folytonosan differenciálható, F_t kis diffeomorfizmus minden t-re, továbbá $\mathrm{D}_{\mathbb{R}}F + \mathrm{D}_{\mathbf{V}}F \cdot f = 0$, és ezzel a bizonyítás véget is ért.

22.6. Az autonóm egyenlet vektormezőjének transzformációjára is mondhatunk hasonlót. A bizonyításhoz megelőlegezzük a 23. fejezet bizonyos fogalmait.

Állítás *Legyen $g : \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbf{V}$ folytonosan differenciálható, $g(x_o) \neq 0$. Ekkor van az x_o-nak olyan környezete, amelyben a g vektormezőt a $g(x_o)$ konstans vektormezőbe transzformálhatjuk alkalmas G-vel a 22.4. szerint.*

Bizonyítás Vegyük a $g(x_o) \neq 0$ vektor által kifeszített egy dimenziós alteret, és ennek egy kiegészítő alterét; jelölje P_o és P az ezekre az alterekre való egymás menti vetítést (Analízis II.8.2.(vi)). Ha $x \in \mathbf{V}$, akkor van egyetlen olyan $t(x)$ valós szám – ne feledjük, a vektortereket most valósaknak tekintjük –, hogy $P_o(x) = t(x)g(x_o)$. Nyilván a $\mathbf{V} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto t(x)$ hozzárendelés lineáris és $t(g(x_o)) = 1$.

Ezekkel és a 21.5-ben bevezetett jelöléssel a G inverzét tudjuk könnyen megadni:

$$G^{-1}(z) := R_{t(z-x_o)}(x_o + P(z - x_o)).$$

G^{-1} kis diffeomorfizmus az x_o egy környezetében, $G^{-1}(x_o) = x_o$; továbbá

$$\mathrm{D}G^{-1}(z) = \dot{R}_{t(z-x_o)}(x_o + P(z - x_o))t(\cdot) + R_{t(z-x_o)}P(\cdot).$$

Ezért G^{-1} a konstans $g(x_o)$ vektormezőt g-be transzformálja:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}G^{-1}(z) \cdot g(x_o) =& \dot{R}_{t(z-x_o)}(x_o + P(z - x_o)) = g(R_{t(z-x_o)}(x_o + P(z - x_o))) \\ =& g(G^{-1}(z)). \end{aligned}$$

22.7. A kiegyenesítésekről szóló tételek elvi és nem gyakorlati jelentőségűek. A differenciálegyenletek transzformációjának a gondolatát ugyanis úgy vezettük be, hogy a differenciálegyenletet egyszerűbb alakra hozzuk a megoldások egyszerűbb megtalálása végett. A kiegyenesítéssel a lehető legegyszerűbb alakot érjük el; csakhogy a kiegyenesítést a differenciálegyenlet karakterisztikus függvényével hoztuk létre, azaz a kiegyenesítéshez ismerni kell a differenciálegyenlet megoldásait. Azt is mondhatjuk, hogy a kiegyenesítés és a differenciálegyenlet megoldásainak megtalálása egyenértékű feladat.

22.8. Feladatok

1. Transzformáljuk át a 22.1.-beli kezdetiérték-problémát $\mathbb{K}^N$-beli kezdetiérték-problémára $G : \mathbf{V} \to \mathbb{K}^N$ lineáris koordinátázással!

2. Transzformáljuk egyszerűbb alakra a következő differenciálegyenleteket:

$$(x : \mathbb{R}^+ \rightarrowtail \mathbb{R}^+)? \qquad \frac{dx}{dt} = x\ln x\left(1 + \frac{1}{t}\right) \qquad (\text{legyen } F(t,x) := \frac{\ln x}{t}),$$

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^+)? \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1 - 2(x^2 - t)}{2x} \qquad (\text{ legyen } F(t,x) := \sqrt{x^2 - t}).$$

Vizsgáljuk meg a transzformált egyenletek értelmezési tartományát!

3. Természetesen nemcsak egyszerűsíteni lehet differenciálegyenletet, hanem bonyolulttá tanszformálni is. Alkalmazzuk az igen egyszerű $(x : \mathbb{R} \to \mathbb{R})? \quad \dot{x} = x$ autonóm differenciálegyenletre az $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}, \quad (t, x) \mapsto t\mathrm{sh}x$ transzformációt!

4. Mutassuk meg, hogy az

$$((x_1, x_2) : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^2)? \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{aligned}$$

differenciálegyenletet polárkoordinátázással

$$((r, \varphi) : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^+ \times -]\pi, \pi[)? \qquad \begin{aligned} \dot{r} &= r(1 - r^2), \\ \dot{\varphi} &= -1 \end{aligned}$$

alakúra transzformálhatjuk.

23. Autonóm differenciálegyenletek

23.1. Emlékeztetünk arra, hogy egy differenciálegyenletet autonómnak nevezünk, ha a jobb oldala nem függ a keresett függvény változójától (az "időtől"), azaz ha

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \qquad \dot{x} = g(x)$$

alakú. Az autonóm differenciálegyenleteknek sok érdekes és fontos tulajdonsága van; ezekkel fogunk most megismerkedni. Ebben a fejezetben mindig feltesszük, hogy a differenciálegyenlet jobb oldala az értelmezési tartományának minden pontjának egy környezetében eleget tesz a Lipschitz-feltételnek, tehát minden kezdetiérték-problémának van egyetlen maximális megoldása. Megoldáson mindig maximális megoldást értünk.

23.2. Az egyik egyszerűen bebizonyítható – mondhatnánk nyilvánvaló –, de szerfölött fontos tény, hogy az autonóm differenciálegyenlet megoldásainak összessége invariáns az "időeltolásra": ha r az autonóm differenciálegyenlet megoldása, akkor bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $t \mapsto r(a + t)$ szintén megoldás, amely a $-a + \mathrm{Dom}\, r$ intervallumon van értelmezve. Szokásos jelölésünkkel (Analízis I.17.4.) ezt így fogalmazhatjuk meg: ha r megoldás, akkor $r \circ L_a$ is megoldás.

23.3. Emlékeztetünk arra, hogy integrálgörbének vagy megoldásgörbének egy megoldás grafikonját nevezzük, a fázisgörbe pedig egy megoldás értékkészlete. Tudjuk, hogy ha a Lipschitz-feltétel mindenütt teljesül, akkor különböző megoldásgörbék nem metszhetik egymást, fázisgörbékre azonban ez általában nem igaz (lásd 4.6.). Viszont autonóm egyenletek fázisgörbéi nem metszhetik egymást.

Persze különböző megoldásoknak lehet ugyanaz a fázisgörbéje, de akkor ezek a megoldások egymás eltoltjai. Pontosan a következőt mondhatjuk.

Állítás *Legyen r_1 és r_2 az autonóm differenciálegyenlet megoldása. Ekkor az alábbi kijelentések egyenértékűek:*
(i) létezik olyan $a \in \mathbb{R}$, hogy $r_2 = r_1 \circ L_a$,
(ii) $\mathrm{Ran} r_1 = \mathrm{Ran} r_2$,
(iii) $\mathrm{Ran} r_1 \cap \mathrm{Ran} r_2 \neq \emptyset$.

Bizonyítás Nyilvánvalóan csak azt kell megmutatnunk, hogy (i) következik (iii)-ból.

Tegyük tehát fel, van olyan t_1 és t_2, hogy $r_1(t_1) = r_2(t_2)$. Tudjuk, hogy $r := r_1 \circ L_{t_1 - t_2}$ is megoldás. Minthogy $r(t_2) = r_1(t_1) = r_2(t_2)$, és a kezdetiérték-problémák megoldása egyértelmű, azt állíthatjuk, hogy $r = r_2$, amivel be is bizonyítottuk, amit akartunk.

23.4. Állítás *Az autonóm differenciálegyenlet r megoldása a következő tulajdonságok egyikével rendelkezik:*
(i) az egész $\mathbb{R}$-en értelmezett konstans,
(ii) az egész $\mathbb{R}$-en értelmezett periodikus, nem konstans
(iii) injektív.

Bizonyítás Tegyük fel, hogy r nem injektív, azaz van olyan t_1 és t_2, $t_2 > t_1$, hogy $r(t_1) = r(t_2)$; legyen $T := t_2 - t_1$. Tudjuk, hogy $r \circ L_T$ is megoldás, és $(r \circ L_T)(t_1) = r(t_2) = r(t_1)$, tehát $r \circ L_T = r$. Ez többek között azt is jelenti, hogy r értelmezési tartománya invariáns a T-vel való eltolásra, azaz $\mathrm{Dom} r = \mathbb{R}$.

Ha $\inf\{T > 0 \mid r \circ L_T = r\} > 0$, akkor r periodikus. Ha viszont az infimum nulla, akkor – r folytonossága következtében – r konstans.

23.5. Emlékezzünk a differenciálegyenletek karakterisztikus függvényére: $R(t; s, y)$ jelenti egy differenciálegyenlet $(s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbf{V}$ kezdeti feltételt kielégítő megoldásának a t helyen felvett értékét. Használtuk az $R_{t,s}(y) := R(t; s, y)$ jelölést is.

Állítás *Az autonóm differenciálegyenlet karakterisztikus függvényére*

$$R_{t,s} = R_{t-s,0}$$

teljesül minden szóba jövő t, s esetén.

Bizonyítás Legyen $r := R(\cdot; 0, y)$, azaz r megoldás és $r(0) = y$. Ekkor $r \circ L_{-s}$ is megoldás és $(r \circ L_{-s})(s) = y$, ami azt jelenti, hogy $r \circ L_{-s} = R(\cdot; s, y)$, azaz

$R(t-s;0,y) = R(t;s,y)$. ■

Eredményünknek egyszerű következménye, hogy autonóm differenciálegyenlet esetén

$$R_{t,0} = R_{0,-t} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

23.6. Vezessük be autonóm differenciálegyenletre az

$$R_t := R_{t,0}$$

jelölést; minden t valós szám esetén $R_t : \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbf{V}$ kis homeomorfizmus; ha a differenciálegyenlet jobb oldala folytonosan differenciálható, akkor kis diffeomorfizmus. Az

$$R_{t,0} \circ R_{s,0} = R_{t,0} \circ R_{0,-s} \subset R_{t,-s} = R_{t+s}$$

egyenlőség felhasználásával a 21.5.-beli összefüggéseket most így lehet átfogalmazni:

– $R_0 \subset \mathrm{id}_{\mathbf{V}}$,
– $R_t^{-1} = R_{-t}$,
– $R_t \circ R_s \subset R_{t+s}$

minden $t, s \in \mathbb{R}$ esetén. Itt is megengedjük, hogy a függvények kompozíciója üres legyen.

23.7. Most megadjuk egy speciális típusú autonóm differenciálegyenlet fázisgörbéinek jellemzését.

Állítás *Az*

$$(*) \qquad \big((x,y) : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^2\big)? \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= p(x,y), \\ \dot{y} &= q(x,y) \end{aligned}$$

differenciálegyenlet fázisgörbéinek az $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x,y) > 0\}$ *halmazba eső részét az*

$$(**) \qquad (y : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{q(x,y)}{p(x,y)}$$

differenciálegyenlet megoldásainak grafikonjai adják.

Bizonyítás Tekintsük a $(*)$ differenciálegyenletnek a szóban forgó halmazra vett leszűkítését. Ha (u,v) ennek a differenciálegyenletnek a megoldása, akkor $\dot{u} > 0$, tehát u szigorúan monoton nő. Az inverze is folytonosan differenciálható, és $v \circ u^{-1}$ kielégíti a $(**)$ differenciálegyenletet, amint arról könnyű meggyőződni. Mivel $(u,v) \circ u^{-1} = (\mathrm{id}_{\mathbb{R}}, v \circ u^{-1})$, nyilvánvaló, hogy $v \circ u^{-1}$ grafikonja egyenlő $\mathrm{Ran}(u,v)$-vel.

Ha viszont η a $(**)$ differenciálegyenlet megoldása, akkor vegyük az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad \dot{x} = p(x, \eta \circ x)$$

differenciálegyenlet egy u megoldását, és legyen $v := \eta \circ u$. Ekkor (u, v) a $(*)$ differenciálegyenlet megoldása, és az η grafikonja éppen az (u, v) értékkészlete. ■

Természetesen hasonló állítás mondható arra a halmazra, ahol p negatív értékeket vesz fel, és értelemszerű módosítással (x és y szerepének a felcserélésével) azokra a halmazokra is, ahol q pozitív, illetve negatív.

23.8. Feladatok

1. Az $(x : (t)\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})?$ $\dot{x} = 1 + t^2$ differenciálegyenlet segítségével mutassuk meg: ha egy differenciálegyenlet különböző fázisgörbéi nem metszik egymást, az nem jelenti azt, hogy a differenciálegyenlet autonóm.

2. Az $(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})?$ $\dot{x} = -\frac{1}{2x}$ differenciálegyenletre $R_t(y) = \sqrt{y^2 - t}$. Mutassuk meg, hogy a $t < 0$, $s > 0$ esetet kivéve $R_t \circ R_s = R_{t+s}$.

3. Az $(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})?$ $\dot{x} = \frac{1}{x^2}$ differenciálegyenletre $R_t(y) = 1/\left(t + \frac{1}{y}\right)$. Vizsgáljuk meg, milyen t, s értékekre áll fenn az $R_t \circ R_s = R_{t+s}$ egyenlőség.

4. Írjuk a Lotka–Volterra-differenciálegyenletet (lásd 18.9.) az együtthatók alkalmas átnevezésével

$$((x, y) : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^2)? \qquad \dot{x} = kx - axy, \quad \dot{y} = -ly + bxy$$

alakba. Ekkor a $\{(0, 0)\}$ és az $\{l/b, k/a\}$ egyelemű halmazok fázisgörbék. Mutassuk meg a 23.7.-beli eredményünk alapján, hogy az előbbiektől különböző fázisgörbéket $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid bx - l\ln x + ay - k\ln y = const.\}$ alakban lehet megadni.

5. Legyen r a 23.1.-beli autonóm differenciálegyenlet olyan megoldása, hogy $\mathrm{Ran}\, r$ korlátos és $\overline{\mathrm{Ran}\, r} \subset \mathrm{Dom}\, g$. Ekkor $\mathrm{Dom}\, r = \mathbb{R}$.

Bizonyítsuk be, hogy hasonló állítás érvényes akkor is, ha $\mathbb{R}$ helyett $\mathbb{R}^+$-t és r helyett r-nek az $\mathbb{R}^+$-ra való leszűkítését vesszük.

6. Vizsgáljuk meg az $(x, y) : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^2$ függvényre felírt következő differenciálegyenletek fázisgörbéit:

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} && \dot{x} = y, \quad \dot{y} = x,\\
&\text{(ii)} && \dot{x} = y(x^2 + y^2 - 1), \quad \dot{y} = x(x^2 + y^2 - 1),\\
&\text{(iii)} && \dot{x} = x^2 + y^2 - 1, \quad \dot{y} = x^2 + y^2 - 1.
\end{aligned}$$

(Ügyeljünk azokra a helyekre, ahol a jobb oldal nullává válik!)

24. Invariáns részhalmazok

24.1. Tekintsük az

$$(*)\qquad (x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \qquad \dot{x} = g(x)$$

autonóm differenciálegyenletet és tegyük fel, hogy g mindenütt eleget tesz a megfelelő Lipschitz-feltételnek. Ekkor, mint tudjuk, minden kezdetiérték-problémának létezik egyetlen maximális megoldása.

Definíció *Azt mondjuk, hogy a fázistér – azaz* $\mathbf{V}$ *–* F *részhalmaza* ***invariáns*** *a differenciálegyenletre, ha bármely* $x_o \in F$ *esetén a* $(0, x_o)$*-on áthaladó* r *maximális megoldásra* $\mathrm{Ran}r \subset F$ *teljesül.*

F lokálisan invariáns, ha minden pontjának van olyan U környezete $\mathbf{V}$-ben, hogy a környezetre leszűkített differenciálegyenletre nézve $F \cap U$ invariáns.

Nyilvánvaló, hogy $F \subset \mathbf{V}$ akkor és csak akkor invariáns részhalmaz, ha bármely r maximális megoldásra $\mathrm{Ran}r \cap F$ vagy üres, vagy $\mathrm{Ran}r$-rel egyenlő.

24.2. Különösen fontos az az eset, amikor az invariáns részhalmaz részsokaság (Analízis IV.B.13–14.). Durván azt lehet mondani, hogy a fázistér részsokasága akkor és csak akkor (lokálisan) invariáns a differenciálegyenletre, ha a g vektormezőnek a részsokaságon felvett értékei az érintőtérben vannak.

1. Állítás *Ha az $F \subset \mathbf{V}$ részsokaság invariáns a differenciálegyenletre, akkor minden $x \in F$ esetén $g(x) \in T_x(F)$.*

Bizonyítás Legyen r olyan megoldás, amelynek értékkészlete benne van F-ben. Ekkor az r deriváltjának az értékei érintővektorok, tehát $g(r(t)) = \dot{r}(t) \in T_{r(t)}(F)$. Mivel az F minden x pontjához van olyan fázisgörbe, amely rajta áthalad, készen is vagyunk a bizonyítással.

2. Állítás *Ha az F részsokaság minden x pontjára $g(x) \in T_x(F)$ teljesül, akkor F lokálisan invariáns a differenciálegyenletre.*

Bizonyítás Vegyük az F egy x_o pontját. Ennek van olyan $U \subset \mathbf{V}$ környezete, amelyben megadhatók $K : U \to \mathbb{R}^M$ és $S : U \to \mathbb{R}^{N-M}$ folytonosan differenciálható függvények úgy, hogy $G := (K, S) : \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbb{R}^N$ koordinátázás (azaz kis diffeomorfizmus) és $F \cap U = \overset{-1}{S}(\{0\})$ (itt N a $\mathbf{V}$ valós dimenziója, M az F dimenziója); továbbá $T_x(F) = \mathrm{Ker}\, \mathrm{D}S(x)$, ha $x \in F \cap U$. Lévén $\mathrm{D}G = (\mathrm{D}K\ \mathrm{D}S)$, az adódik, hogy $\mathrm{D}G \cdot g = (\mathrm{D}K \cdot g, 0)$.

Transzformáljuk G-vel a differenciálegyenletet! Vezessük be a $\gamma(\xi,\eta) := (\mathrm{D}K \cdot g)(G^{-1}(\xi,\eta))$ és a $\xi_o := K(x_o)$ jelölést, és vegyük figyelembe, hogy $S(x_o) = 0$. Ekkor az eredeti differenciálegyenlet a $(0, x_o)$ kezdeti feltétellel a

$$((\xi,\eta) : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{N-M})? \qquad \begin{array}{ll} \dot{\xi} = \gamma(\xi,\eta), & \xi(0) = \xi_o, \\ \dot{\eta} = 0, & \eta(0) = 0 \end{array}$$

kezdetiérték-problémába transzformálódik. Ennek maximális megoldása $(\rho, 0)$ alakú; az eredeti kezdetiérték-probléma $r = G^{-1}(\rho, 0)$ megoldása maximális U-ban, és $S \circ r = 0$ teljesül, azaz $\mathrm{Ran}r \subset F \cap U$.

24.3. Definíció *Legyen* $\mathbf{U}$ *véges dimenziós vektortér. Az* $S : \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbf{U}$ *folytonosan differenciálható függvényt az autonóm differenciálegyenlet első integráljának nevezzük, ha* $\mathrm{Dom}g \subset \mathrm{Dom}S$ *és* $\mathrm{D}S \cdot g = 0$.

Mechanikában az első integrál elnevezés helyett a megmaradó mennyiség használatos.

Állítás *Ha* S *az autonóm differenciálegyenlet első integrálja és* $c \in \mathrm{Ran}S$, *akkor* $F := \overset{-1}{S}(\{c\})$ *invariáns részhalmaz.*

Bizonyítás Legyen r maximális megoldás, amelyre $r(0) \in F$. Ekkor $\mathrm{Dom}(S \circ r) = \mathrm{Dom}r$ és $(S \circ r)^{\cdot} = ((\mathrm{D}S) \circ r) \cdot \dot{r} = (\mathrm{D}S \cdot g) \circ r = 0$. Mivel $S(r(0)) = c$, megállapíthatjuk, hogy $S(r(t)) = c$ minden $t \in \mathrm{Dom}r$ esetén, azaz $\mathrm{Ran}r \subset F$. ■

Érdemes megjegyezni, hogy ha $\dim\mathbf{U} < \dim\mathbf{V}$ és $\mathrm{D}S(x)$ ráképezés minden $x \in \overset{-1}{S}(\{c\})$ esetén, akkor ez a halmaz részsokaság.

24.4. A gyakorlatban legtöbbször egy kezdetiérték-probléma megoldásának csak a kezdeti "idő" utáni ("jövőbeli") értékei az érdekesek. Legyen r az autonóm differenciálegyenlet olyan maximális megoldása, amely értelmezve van a nullában; erre bevezetjük az

$$\mathrm{Ran}_+ r := \mathrm{Ran}\left(r|_{[0,\infty[}\right)$$

jelölést.

Definíció *A fázistér* F *részhalmaza* $(+)$*-invariáns a differenciálegyenletre, ha bármely* $x_o \in F$ *esetén a* $(0, x_o)$*-on áthaladó* r *maximális megoldásra* $\mathrm{Ran}_+ r \subset F$ *teljesül.*

24.5. Állítás *Legyen* $S : \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbf{U}$ *folytonosan differenciálható,* $\mathrm{Dom}g \subset \mathrm{Dom}S$ *és* $\mathrm{D}S \cdot g \leq 0$. *Ha* $c \in \mathrm{Ran}S$, *akkor* $F := \{x \in \mathrm{Dom}S \mid S(x) < c\}$ $(+)$*-invariáns halmaz.*

Bizonyítás Vegyük először is észre, hogy bármely r megoldásra $\mathrm{Dom}(S \circ r) = \mathrm{Dom} r$, továbbá $S \circ r$ monoton fogyó, mert interallumon van értelmezve, és

$$(S \circ r)^{\cdot} = ((\mathrm{D}S) \circ r) \cdot \dot{r} = (\mathrm{D}S \cdot g) \circ r \leq 0.$$

Ha tehát r maximális megoldás, akkor minden $t \in \mathrm{Dom} r$, $t > 0$ esetén $S(r(t)) \leq S(r(0)) < c$, azaz $r(t) \in F$.

24.6. Fizikai alkalmazásokban gyakorta felmerül olyan differenciálegyenlet, amely eleve részsokaságon van csak értelmezve. Gondoljunk például arra, hogy a Newton-egyenletet olyan tömegpontra írjuk fel, amely egy gömb felszínén mozoghat. Az invariáns részsokaságokról szerzett tudásunk alapján kezelhetjük az ilyen differenciálegyenleteket is.

(i) Legyen F részsokaság $\mathbf{V}$-ben, $M := \dim F$; tegyük fel, hogy g az F-en adott folytonosan differenciálható vektormező, azaz

– $\mathrm{Dom} g \subset F$ és $g(x) \in T_x(F)$ minden $x \in \mathrm{Dom} g$ esetén,

– az F bármely p paraméterezésére $\mathbb{R}^M \rightarrowtail \mathbb{R}^M$, $\xi \mapsto \big(\mathrm{D}p^{-1} \cdot g\big)(p(\xi))$ folytonosan differenciálható. (Ha p és q két paraméterezés, $\mathrm{Ran} q \subset \mathrm{Ran} p$ és p-re folytonosan differenciálható a fenti leképezés, akkor q-ra is.)

Az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail F)? \qquad \dot{x} = g(x), \quad x(t_o) = x_o \in \mathrm{Dom} g$$

kezdetiérték-probléma megoldása olyan $r : \mathbb{R} \rightarrowtail F \subset \mathbf{V}$ differenciálható függvény, amelyre

– $\mathrm{Ran} r \subset \mathrm{Dom} g$,

– $\dot{r}(t) = g(r(t))$ minden $t \in \mathrm{Dom} g$ esetén,

– $t_o \in \mathrm{Dom} r$, $r(t_o) = x_o$.

(ii) A g folytonos differenciálhatósága alapján megállapíthatjuk, hogy a részsokaságon adott differenciálegyenlettel meghatározott bármely kezdetiérték-problémának létezik egyetlen maximális megoldása.

Legyen ugyanis p az F olyan paraméterezése, hogy $x_o \in \mathrm{Ran} p$. A

$$(\xi : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^M)? \qquad \dot{\xi} = \big(\mathrm{D}p^{-1} \cdot g\big)(p(\xi)), \quad \xi(t_o) = p^{-1}(x_o)$$

kezdetiérték-problémának létezik lokálisan egyértelmű $\rho : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^M$ megoldása. Nyilvánvaló, hogy $r := p \circ \rho$ az eredeti kezdetiérték-probléma lokálisan egyértelmű megoldása.

24.7. Feladatok

1. Ha r az autonóm differenciálegyenlet maximális megoldása, akkor $\mathrm{Ran} r$ invariáns halmaz.
2. Ha $g(x_o) = 0$, akkor $\{x_o\}$ invariáns halmaz.
3. Az autonóm (állandó együtthatós) homogén lineáris differenciálegyenletet meghatározó lineáris leképezés sajátalterei invariáns halmazok.
4. Invariáns-e két invariáns halmaz uniója és metszete?

5. Szokás azt mondani, hogy ha a fázistér N dimenziós, akkor $N-1$ független megmaradó mennyiség van. Ezt a következőképpen tudjuk pontosan megfogalmazni: ha g folytonosan differenciálható, $g(a) \neq 0$, akkor van az a-nak egy U környezete, egy $N-1$ dimenziós $\mathbf{U}$ vektortér, $S : U \to \mathbf{U}$ folytonosan differenciálható leképezés, amelynek deriváltja minden pontban ráképezés, és ha E az U-n értelmezett akármilyen értékű megmaradó mennyiség, akkor létezik az $\mathbf{U}$-ban értelmezett F függvény, amellyel $E = F \circ S$. Bizonyítsuk be ezt az állítást az alábbi útmutatás alapján:

(i) Létezik olyan $N-1$ dimenziós $\mathbf{U}$ lineáris altér $\mathbf{V}$-ben, hogy $\mathbf{V} = \mathbb{R}g(a)+\mathbf{U}$; van egyértelműen meghatározott $\alpha \in \mathbb{R}$ és $b \in \mathbf{U}$, amelyekkel $a = \alpha g(a) + b$,

(ii) $\phi : \mathbb{R} \times \mathbf{U} \rightarrowtail \mathbf{V}$, $\quad (t, u) \mapsto R_t(u)$ kis diffeomorfizmus a $(0, b)$ egy környezetében (inverzfüggvény-tétel),

(iii) $S := \mathrm{pr}_{\mathbf{U}} \circ \phi^{-1}$,

(iv) $S(x) = S(y)$ pontosan akkor, ha x és y ugyanazon a fázisgörbén van.

25. Kezdeti érték a határon

25.1. Mindeddig a differenciálegyenlet jobb oldala nyílt halmazon volt értelmezve, és a kezdeti pont ennek a nyílt halmaznak az eleme. Azonban gyakorlati alkalmazásokban időnként felmerül annak szükségessége, hogy a differenciálegyenletet ne nyílt halmazon értelmezzük, vagy hogy a kezdeti feltétel az értelmezési tartomány határára essék. E két általánosítás bizonyos mértékig fedi egymást; mi most csak az utóbbival fogunk foglalkozni.

Érdemes példával megvilágítani, milyen lényeges olykor, hogy a kezdeti feltétel a differenciálegyenlet értelmezési tartományának a határán van.

Vegyük a jég vastagodását a tavon, amint azt 17.13.-ban tárgyaltuk. A differenciálegyenlet értelmezési tartományából hiányzik a nulla vastagság, vagyis az eddigiek szerint nem tudjuk kezelni azt az esetet, amikor elkezd kialakulni a jégpáncél. Ugyanakkor a megoldás formailag értelmes azzal a kezdeti feltétellel is, hogy $h(t_o) = 0$, legalábbis a t_o utáni időre, de fizikailag amúgy is csak ez utóbbinak van értelme.

Másik példánk a tömegpont mozgása a súrlódásos sík lejtőn. Itt a differenciálegyenlet értelmezési tartományából hiányzik a nulla sebesség, tehát az eddigiek szerint nem tudjuk kezelni azt a fizikailag fontos esetet, amikor a tömegpont kezdősebesség nélkül indul el a lejtőn. Ha feltesszük, hogy ilyenkor a lejtő irányában kezdődik el a mozgás ($v_2(0) = 0$), a megoldás ismét formailag értelmes lesz akkor is, amikor $v_1(0) = 0$, legalábbis a t_o utáni időkre, és megint csak ennek van fizikai értelme.

A példák – a feladat fontosságának illusztrálásán kívül – azt is körvonalazzák: ha meg akarjuk engedni valamiképp, hogy a kezdeti feltétel a határra essék, akkor le kell mondanunk arról, hogy a megoldást a kezdeti "pillanat" egy egész környezetében értelmezzük; csak egy "féloldali környezetről" lehet szó.

25.2. Definíció *Legyen f olyan függvény, mint korábban, azaz $\mathbb{R} \times \mathbf{V}$ nyílt részhalmazán értelemzett $\mathbf{V}$ értékű folytonos függvény, és legyen (t_o, x_o) a* $\mathrm{Dom} f$ *határpontja. Az*

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \qquad \dot{x} = f \circ (id_{\mathbb{R}}, x),$$

$$(*) \qquad\qquad x(t_o) = x_o$$

kezdetiérték-probléma előre haladó megoldása olyan $r : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V}$ függvény, hogy
(i) r megoldása a differenciálegyenletnek,
(ii) t_o a $\mathrm{Dom} r$ intervallum alsó végpontja és $\lim_{t \to t_o} r(t) = x_o$.

A hátra haladó megoldást úgy definiáljuk, hogy az (ii)-beli első feltételt kicseréljük a következőre: t_o a $\mathrm{Dom} r$ intervallum felső végpontja.

A fizikai alkalmazások szempontjából a továbbiakban mindig csak előre haladó megoldásokat tekintünk, ezért az egyszerűség kedvéért elhagyjuk az "előre haladó" jelzőt; természetesen minden átfogalmazható hátra haladó megoldásokra is.

Azt fogjuk vizsgálni, milyen feltételek mellett van a fenti kezdetiérték-problémának megoldása, és ha van, mikor egyértelmű. Különféle feltevések mellett nagyon sok megállapítás tehető. Mi csak két fontos típust tárgyalunk (továbbá egy különleges speciális esetet).

25.3. Legelső gondolatunk az lehet, hogy minden bizonnyal az a legjobb eset, amikor a differenciálegyenlet jobb oldala folytonosan kiterjeszthető a határra. Ez valóban így is van, ekkor lényegében érvényben marad a Picard–Lindelöf-tétel; bizonyos dolgokra azonban ügyelnünk kell.

Tegyük fel, hogy a differenciálegyenlet jobb oldalának van határértéke az értelmezési tartományának határán levő (t_o, x_o) pontban; jelölje ezt a határértéket $f(t_o, x_o)$.

Minthogy a megoldás grafikonja az $(1, f(t_o, x_o))$ vektor irányában indul és benne van a differenciálegyenlet értelmezési tartományában, az első és legfontosabb feltétel az, hogy ez a vektor a differenciálegyenlet értelmezési tartománya felé mutasson, azaz legyen olyan $\delta > 0$, hogy minden $0 < s < \delta$ esetén $(t_o, x_o) + s(1, f(t_o, x_o)) \in \mathrm{Dom} f$.

Aztán észrevehetjük, hogy ha követni akarjuk a Picard–Lindelöf-tétel bizonyításának gondolatmenetét, általában nem vehetjük az x_o konstans függvényt a szukcesszív approximáció induló ("nulladik") lépésének, hiszen lehet, hogy a t_o-nál nagyobb t-kre (t, x_o) nincs benne f értelmezési tartományában. Viszont azt is láthatjuk, hogy ez az induló lépés nagyon durva, mert erősen különbözik a keresett megoldástól. Sokkal jobb azzal a lineáris függvénnyel (egyenessel) kezdeni, amelynek iránya megegyezik a keresett megoldás irányával, azaz $(1, f(t_o, x_o))$-szal (ez az eredeti sorozatos közelítés "első" lépése). Ekkor azt is látjuk, hogy a közelítés további lépései ennek az egyenesnek a közelében maradnak, tehát a Lipschitz-feltételt csak itt használjuk ki, nem a kezdeti feltétel egy egész környezetében.

Ezek a megjegyzések megvilágítják, miként okoskodjunk abban az esetben, amikor a differenciálegyenlet jobb oldala folytonosan kiterjeszthető (t_o, x_o)-ra.

Állítás *Tekintsük a 25.2.-ben meghatározott kezdetiérték-problémát. Tegyük fel a következőket:*
(i) létezik f-nek határértéke (t_o, x_o)-ban, jelölje ezt $f(t_o, x_o)$;
(ii) létezik egy kúp (t_o, x_o)-tól jobbra az $(1, f(t_o, x_o))$ körül az f értelmezési tartományában, azaz létezik $\eta, \beta > 0$ úgy, hogy

$$\begin{aligned} K :=&\{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbf{V} \mid \\ &t_o \le t \le t_o + \eta, \|x - \big(x_o + f(t_o,x_o)(t - t_o)\big)\| \le \beta(t - t_o)\} \\ &\subset \mathrm{Dom} f \cup \{(t_o, x_o)\}; \end{aligned}$$

(iii) f a második változójában univerzális Lipschitz-feltételnek tesz eleget K-n, azaz van olyan $L > 0$, hogy

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \le L\|x - y\| \qquad \big((t,x),(t,y) \in K\big).$$

Ekkor van olyan $\alpha > 0$, hogy a 25.2.-ben értelmezett kezdetiérték-problémának létezik egyértelmű megoldása a $]t_o, t_o + \alpha[$ intervallumon.

Bizonyítás Most is megmutathatjuk, hogy f korlátos K-n, de ez itt nem lesz elég: vizsgálatainkat le kell szűkíteni K egy olyan részhalmazára, amelyen f nem nagyon különbözik $f(t_o, x_o)$-tól. Minthogy f folytonos K-n, van olyan $0 < \eta' \le \eta$, hogy

$$\sup\{\|f(t,x) - f(t_o,x_o)\| \mid (t,x) \in K, t_o \le t \le t_o + \eta'\} \le \beta.$$

Legyen

$$0 < \alpha \le \min\left\{\eta', \frac{1}{2L}\right\}.$$

Minthogy K zárt halmaz $\mathbb{R} \times \mathbf{V}$-ben,

$$S := \{r \in C([t_o, t_o + \alpha], \mathbf{V}) \mid \mathrm{Graph} r \subset K\}$$

zárt részhalmaz a $C([t_o, t_o+\alpha], \mathbf{V})$ Banach-térben (mert S-beli konvergens sorozat határértéke is S-ben van), tehát S teljes metrikus tér. Vegyük észre, $\mathrm{Graph} r \subset K$

azt jelenti, hogy $\|r(t)-(x_o+f(t_o,x_o)(t-t_o))\|\le\beta(t-t_o)$ minden szóba jövő t-re.

Megmutatjuk, hogy a 2.3.-ban értelmezett ϕ leképezés S-et önmagába képezi. Ha ugyanis $r\in S$, akkor

$$\|\phi(r)(t)-(x_o+f(t_o,x_o)(t-t_o))\|\le\int_{t_o}^{t}\|f(s,r(s))-f(t_o,x_o)\|ds\le\beta(t-t_o)$$

minden $t\in[t_o,t_o+\alpha]$ esetén.

Azt, hogy ϕ leszűkítése S-re kontrakció, szóról szóra úgy bizonyíthatjuk, mint 3.3.-ban.

Tehát ϕ-nek S-en létezik egyetlen fixpontja; ez adja a kezdetiérték-problémának egyetlen megoldását a $]t_o,t_o+\alpha[$ intervallumon. ■

Megjegyezzük, ha $(1,f(t_o,x_o))$ nem mutat Dom$f$ felé, azaz minden $\delta>0$ esetén van olyan $0<s_\delta<\delta$, hogy $(t_o,x_o)+s_\delta(1,f(t_o,x_o))\notin$ Dom$f$, akkor nincs a kezdetiérték-problémának megoldása.

25.4. Sajnos, a 25.1.-ben felhozott fontos példák egyike sem tartozik az előző esetbe: ott a differenciálegyenlet jobb oldala nem terjeszthető ki folytonosan a határra. Viszont ekkor is tudunk mondani valamit, mert a differenciálegyenlet speciális alakú.

Állítás *Legyen $t_o,x_o\in\mathbb{R}$, $\eta>0,\beta>0$ és $h:[t_o,t_o+\eta[\to\mathbb{R}$, $p:[x_o,x_o+\beta[\to\mathbb{R}$ folytonos függvény, $p(x_o)=0$. Ha minden $t\in]t_o,t_o+\eta[$ és $x\in]x_o,x_o+\beta[$ esetén $\frac{h(t)}{p(x)}>0$, akkor az*

$$(x:(t)\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbb{R})?\qquad \dot{x}=\frac{h(t)}{p(x)}$$
$$x(t_o)=x_o$$

kezdetiérték-problémának létezik egyértelmű megoldása egy $]t_o,t_o+\alpha[$ intervallumon, ahol α valamely 0 és η közé eső szám.

Bizonyítás Lássuk először formálisan a teendőinket. A változók szokásos szétválasztásával az r megoldásra az

$$\int_{x_o}^{r(t)}p=\int_{t_o}^{t}h$$

formulát kapjuk. Ha tehát P és H a p, illetve a h primitív függvénye, akkor $P(r(t))-P(x_o)=H(t)-H(t_o)$, amiből

$$(*)\qquad r(t)=P^{-1}\big(H(t)-H(t_o)+P(x_o)\big).$$

Nézzük meg, mikor értelmesek a fenti formulák.

p folytonos és sehol sem nulla az értelmezési tartományának a belsején, ezért határozott előjelű; vegyük azt az esetet, amikor $p(x) > 0 \quad x \in]x_o, x_o + \beta[$. Ekkor tehát P intervallumon értelmezett olyan folytonos függvény, amely differenciálható az értelmezési tartományának a belsején és differenciálhányadosa pozitív. Ezért P szigorúan monoton növő, így létezik $P^{-1} : [P(x_o), P(x_o + \beta)[\to [x_o, x_o + \beta[$, amely folytonos és értelmezési tartományának a belsején differenciálható (Analízis IV.A.2.3. és A.1.8.).

Feltételünk szerint h is pozitív a $]t_o, t_o + \eta[$ intervallumon, ezért $H(t) - H(t_o) > 0$, ha $t \in]t_o, t_o + \eta[$. Lévén H is folytonos, van olyan $\alpha > 0$, hogy minden $t_o \le t \le t_o + \alpha$ esetén $P(x_o) + H(t) - H(t_o) \in [P(x_o), P(x_o + \beta)[$. Ezekre a t-kre értelmes a $(*)$ formula.

Látjuk tehát, hogy a kezdetiérték-problémának van megoldása. Tegyük fel, hogy van egy másik r_1 megoldás is ugyanazon az intervallumon. Ez – mint a szétválasztható differenciálegyenlet megoldása – biztosan $r_1(t) = P^{-1}\big(H(t) - H(t_1) + P(x_1)\big)$ alakú, ahol (t_1, x_1) a $\mathrm{Dom} f$ eleme. Alkalmazzuk a P folytonos függvényt a

$$\lim_{t \to t_o} P^{-1}\big(H(t) - H(t_o) + P(x_o)\big) = \lim_{t \to t_o} P^{-1}\big(H(t) - H(t_1) + P(x_1)\big)$$

egyenlőség mindkét oldalára; azt kapjuk, hogy $-H(t_1) + P(x_1) = -H(t_o) + P(x_o)$, amiből viszont már $r_1 = r$ következik. ■

Megjegyezzük, hogy az állításban szereplő $h(t)/p(x) > 0$ feltétel szemléletesen azt jelenti, hogy az indulás iránya a határról most is az értelmezési tartomány felé mutat (bár a határon most nem értelmes az indulás iránya, de a határ közelében az irány az értelmezési tartomány "felé mutat"). Ha ez a feltétel nem teljesül, nincs megoldás.

25.5. Most egy olyan speciális, az eddigiektől eltérő, de a mechanikában fontos esetet tárgyalunk, amelyben a kezdeti feltétel a határra esik: súrlódásos felületen levő test indulása nyugvó helyzetéből. Csak sík felületet veszünk; más felületekre a 24.6. alapján nem nehéz az általánosítás.

A feladatot matematikailag a következőképp fogalmazhatjuk meg: a síkot $\mathbb{R}^2$-vel reprezentáljuk és adott

- a síkra merőleges nyomóerő nagysága, $f_\perp : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$,
- a síkkal párhuzamos tolóerő (húzóerő), $f_\parallel : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
- a $\mu > 0$ súrlódási tényező.

A mozgást leíró Newton-egyenlet:

$$(*) \qquad (x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^2)? \qquad m\ddot{x} = f_\parallel(t, x, \dot{x}) - \mu f_\perp(t, x, \dot{x}) \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}.$$

A differenciálegyenlet nincs értelmezve nulla sebességre; a nulla sebességű helyzetek, azaz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ elemei a differenciálegyenlet értelmezési tartományának a határán vannak. A jobb oldali függvénynek nincs határértéke ezekben a pontokban, és a differenciálegyenlet nem is szétválasztható, tehát előző eredményeink nem használhatók az

$$(**) \qquad x(t_o) = x_o, \quad \dot{x}(t_o) = 0$$

kezdeti feltételre. Ha egy kicsit utánagondolunk, azt is láthatjuk, hogy a határon levő kezdeti feltételt kielégítő megoldásnak a 25.2.-ben adott eredeti meghatározása itt nem elég. Tudjuk ugyanis, hogy ha a tolóerő kisebb a súrlódási erőnél, akkor a test nem indul el. Ha pedig nagyobb, akkor elindul, és kezdeti mozgásának iránya egybeesik a tolóerő irányával. Ezért a $(*)$ differenciálegyenletnek a $(**)$ kezdeti feltételt kielégítő r megoldását csak akkor értelmezzük, ha

$$|f_{\|}(t_o, x_o, 0)| > \mu f_{\perp}(t_o, x_o, 0),$$

és ekkor azt is megköveteljük az eddigi

$$\lim_{t \to t_o + 0} r(t) = x_o, \qquad \lim_{t \to t_o + 0} \dot{r}(t) = 0$$

feltételeken túl, hogy

$$\lim_{t \to t_o + 0} \frac{\dot{r}(t)}{|\dot{r}(t)|} = \frac{f_{\|}(t_o, x_o, 0)}{|f_{\|}(t_o, x_o, 0)|}.$$

Vizsgáljuk meg a súrlódásos sík lejtőn nyugalomból induló tömegpontot. A megfelelő differenciálegyenletet a 17.4.-ben találjuk meg. Az ottani jelölésekkel $\kappa > \mu\lambda$, azaz $\mathrm{tg}\alpha > \mu$ jelenti azt, hogy a húzóerő nagyobb a súrlódási erőnél. Ekkor a $v_1(t_o) = 0, \quad v_2(t_o) = 0$ kezdeti feltétel esetében létezik az előbbiekben értelmezett megoldás:

$$v_1(t) = (\kappa - \mu\lambda)(t - t_o), \quad v_2(t) = 0 \qquad (t > t_o).$$

25.6. Feladatok

1. Legyen a adott valós szám, és tekintsük az

$$(x : (t)\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad \dot{x} = a + (t^2 - x^2)^{3/2}$$

differenciálegyenletet. Ennek értelmezési tartománya $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t^2 - x^2 > 0\}$, amelynek a határa $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t^2 - x^2 = 0\}$. A differenciálegyenlet jobb oldala folytonosan kiterjeszthető az egész határra, ott az értéke a lesz.

Teljesíti-e a Lipschitz-feltételt a kiterjesztett függvény? Mely pontokból indul előre haladó és mely pontokból indul hátra haladó megoldás?

2. Bizonyítsuk be a 25.4. állítás megfelelőjét arra az esetre, amikor a p értelmezési tartománya $[x_1, x_0]$, $p(x_o) = 0$ és $p(x) \neq 0$ minden $x \in]x_1, x_o[$ esetén (ekkor a $h(t)/p(x) < 0$ feltételt kell előírni).

3. Legyen $k : \mathbb{R} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Hogyan értelmezzük az

$$(x : (t)\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \qquad \dot{x} = k(t,x)\frac{x}{||x||}, \quad x(t_o) = 0$$

kezdetiérték-probléma megoldását, és mit tudunk állítani róla? (Útmutatás: vizsgáljuk külön azt az esetet, amikor létezik $\lim\limits_{x\to 0} k(t,x)/||x||$ és azt, amikor nem létezik.)

VI. STABILITÁSELMÉLET

26. Alapvető fogalmak

26.1. Láttuk, hogy egy differenciálegyenlet megoldásai folytonosan függnek a kezdeti feltételektől; ez magában foglalja azt, hogy két megoldás a kezdeti "időpont" egy környezetében kevéssé tér el egymástól, ha a kezdeti értékeik közel vannak egymáshoz. Ez persze megengedi azt, hogy "később" nagyon is eltérjenek. Példa erre az $(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})?\quad \dot{x} = x$ differenciálegyenlet. Ennek az $x(0) = 0$ kezdeti feltételű megoldása az azonosan nulla függvény, az $x(0) = x_o \neq 0$ kezdeti feltételű megoldása pedig $t \mapsto e^t x_o$. Bármilyen közel legyen is x_o a nullához, ez a megoldás elég nagy t-kre a nullától igen távol van.

Gyakorlati szempontból fontos tudni, mikor teljesül az, hogy két megoldás egymás közelében marad, ha egymás közeléből indul. Ugyanis a gyakorlati problémákra felírt differenciálegyenletek általában a valóság idealizált modelljei, amelyek a lényeges vonásokat tükrözik, bizonyos "apróságokat" viszont figyelmen kívül hagynak. Ha ezek az apróságok egy megoldásban lényeges zavart okoznak, akkor az a megoldás nem jól tükrözi vissza a valóságos folyamatot. Gondoljunk például arra, hogy levegőben mozgó testet írunk le a 17.7.-ben tárgyalt differenciálegyenlettel. A levegő sohasem teljesen "nyugodt", mindig vannak benne piciny áramlások. Egy ilyen áramlat (piciny széllökés) eltéríti a testet. Ha ez a kis eltérítés a további mozgásban nagy eltéréshez vezetne, akkor a differenciálegyenlet eredeti megoldása (amely nem veszi figyelembe a kis eltérítést) nem tükrözi jól a valóságot. Általában a kis zavar nem okoz nagy eltérést, de egyes esetekben igen. Vegyük azt, amikor a test egy függőlegesen álló autógumi belső gerincén csúszik le. A Newton-egyenlet szerint a test rajta marad a gerincen. Mindennapos tapasztalatunk azonban, hogy – piciny széllökések, az autógumi rázkódása stb. miatt – a valóságban a test messze elhagyja a gerincet.

Stabil az a mozgás, amelyre az teljesül, hogy az olyan mozgások, amelyek valamikor a közelében voltak, azok a közelében is maradnak. Ennek az intuitív fogalomnak a pontos matematikai megfelelőjét fogjuk tárgyalni ebben a fejezetben.

26.2. Definíció *Az*

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \qquad \dot{x} = f \circ (id_{\mathbb{R}}, x)$$

differenciálegyenlet r_o megoldását ***stabilnak*** *nevezzük, ha*
(i) értelmezve van egy $[t_o, \infty[$ intervallumon;
(ii) minden $\epsilon > 0$ esetén létezik $\delta_\epsilon > 0$ úgy, hogy
– ha r a differenciálegyenlet megoldása és létezik $t_1 \in \mathrm{Dom} r_o \cap \mathrm{Dom} r$, amelyre $\|r(t_1) - r_o(t_1)\| < \delta_\epsilon$,
– akkor r értelmezve van a $[t_1, \infty[$ intervallumon, és minden $t > t_1$ esetén $\|r(t) - r_o(t)\| < \epsilon$.

Instabilnak *mondunk egy megoldást, ha nem stabil.*

26.3. Egy differenciálegyenlet konstans megoldását a differenciálegyenlet **egyensúlyának** nevezzük. Bármilyen megoldás stabilitását vissza tudjuk vezetni egy másik differenciálegyenlet egyensúlyának stabilitására. Valóban, legyen r_o az f jobb oldalú differenciálegyenlet megoldása, és vezessük be a $\phi(t, x) := f(t, r_o(t) - x) - \dot{r}_o(t)$ függvényt. A konstans 0 megoldása – azaz egyensúlya – a ϕ jobb oldalú differenciálegyenletnek, és ennek a stabilitása egyenértékű az eredeti egyenlet r_o megoldásának stabilitásával.

A mondottakból nyilvánvaló, hogy egy autonóm differenciálegyenlet nem egyensúlyi megoldásának stabilitása egyenértékű egy nem autonóm differenciálegyenlet egyensúlyának stabilitásával. Az autonóm differenciálegyenletek egyensúlyának stabilitása tehát szűkebb körű, mint az autonóm egyenletek akármilyen megoldásainak stabilitása. Ezt azért jó látni, mert a továbbiakban csak az autonóm differenciálegyenletek egyensúlyának stabilitásával foglalkozunk, vagyis a stabilitáselmélet egy szűkebb területével.

26.4. Tekintsük tehát most az

$$(*) \qquad (x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \qquad \dot{x} = g(x)$$

autonóm differenciálegyenletet. Az x_o konstans függvény akkor és csak akkor egyensúlya a differenciálegyenletnek, ha $x_o \in \mathrm{Dom} g$ és $g(x_o) = 0$.

Autonóm differenciálegyenlet egyensúlya mindig az egész számegyenesen van értelmezve. Egy megoldás stabilitása szempontjából mindig valamely t_o-nál nagyobb t-k játszanak szerepet. Most vehetjük azt, hogy $t_o = 0$. Továbbá a stabilitás definíciójában szereplő t_1 helyett is mindig vehetjük a $t_1 = 0$ értéket. Ugyanis, ha r olyan megoldás, hogy $\|r(t_1) - x_o\| < \delta_\epsilon$, akkor $r \circ L_{t_1}$ olyan megoldás, amelyre $\|(r \circ L_{t_1})(0) - x_o\| < \delta_\epsilon$. Érdemes tehát erre a speciális esetre külön is megismételni a stabilitás definícióját.

Az autonóm differenciálegyenlet x_o egyensúlya akkor stabil, ha minden $\epsilon > 0$ esetén létezik $\delta_\epsilon > 0$ úgy, hogy

– ha r az autonóm differenciálegyenlet megoldása, $0 \in \mathrm{Dom} r$ és $\|r(0) - x_o\| < \delta_\epsilon$,

– akkor r értelmezve van a $[0, \infty[$ intervallumon, és minden $t > 0$ esetén $\|r(t) - x_o\| < \epsilon$.

Az autonóm differenciálegyenlet egyensúlyának stabilitásával kapcsolatban mindig olyan megoldásokat vizsgálunk, amelyek értelmezve vannak a nullában, továbbá a megoldásoknak csak a nullánál nagyobb helyeken felvett értékei jönnek számításba. Ezért a stabilitási vizsgálatoknál a továbbiakban külön említés nélkül mindig

– úgy vesszük, hogy bármely szóban forgó megoldás értelmezve van a nullában,

– megoldásokon a megoldásoknak a $[0, \infty[$ intervallumra való leszűkítését értjük.

Célszerű továbbá a következő elnevezéseket bevezetni: azt mondjuk, hogy egy r megoldás

– az A halmazból **indul**, ha $r(0) \in A$,

– a B halmazban **halad**, ha $r(t) \in B$, $(t \in [0, \infty[)$.

Ezekkel a stabilitás definíciója így fogalmazható át: az x_o egyensúly stabil, ha az x_o minden G környezetéhez létezik olyan N környezete, hogy az N-ből induló minden megoldás a G-ben halad.

Végül az y pontból induló megoldást az r_y szimbólummal jelöljük; tehát r_y valamely maximális $[0, T[$ intervallumon értelmezett megoldás ($T = \infty$ lehetséges), amelyre $r_y(0) = y$.

26.5. Definíció *Az autonóm differenciálegyenlet x_o egyensúlyát **aszimptotikusan stabilnak** nevezzük, ha stabil és van olyan $\beta > 0$, hogy minden r megoldásra, amelyre $\|r(0) - x_o\| < \beta$ teljesül,*

$$\lim_{t \to \infty} r(t) = x_o.$$

Másképp ugyanez: az x_o egyensúly aszimptotikusan stabil, ha stabil és van az x_o-nak olyan környezete, hogy az abból induló minden megoldás a végtelenben x_o-hoz tart.

Az x_o **vonzási tartománya** az a legbővebb halmaz, amelyből induló megoldások a végtelenben x_o-hoz tartanak.

26.6. Érdemes megjegyezni, hogy az aszimptotikus stabilitás definíciójából nem hagyható el a stabilitás követelménye: van olyan instabil egyensúly, amelynek viszont egy környezetéből induló megoldások az egyensúlyhoz tartanak a végtelenben.

26.7. Egy aszimptotikusan stabil egyensúly izolált egyensúly, vagyis egy környezetében rajta kívül más egyensúly nem lehet (ugyanis más egyensúlyból induló megoldás abban az egyensúlyban marad, és nem tarthat a szóban forgó egyensúlyhoz).

Az viszont előfordulhat – sőt gyakran elő is fordul –, hogy egy differenciálegyenletnek sok, egymástól nem izolált egyensúlya van: az egyensúlyok $\overset{-1}{g}(\{0\})$ halmaza nem túlságosan erős feltételek mellett részsokaság **V**-ben.

Definíció *Legyen az E nem üres halmaz minden eleme az autonóm differenciálegyenlet egyensúlya. Azt mondjuk, hogy E* ***szigorúan aszimptotikusan stabil****, ha*
– E minden eleme stabil egyensúly,
– E minden elemének van olyan U környezete, hogy az U-ból induló minden r megoldásra $\lim_{t\to\infty} r(t) \in \overline{E}$.

Vegyük észre, nincs kizárva, hogy E-nek csak egy eleme legyen; ekkor persze visszakapjuk az aszimptotikus stabilitás fogalmát.

26.8. Jól szemlélteti a következő kép az eddigi fogalmakat.

Egy tömegpont, amely egy gömb belső felületén mozoghat, a gömb alsó pontjában stabil egyensúlyban van. Ha van súrlódás, akkor az egyensúly aszimptotikusan stabil: a test, egy kis lökés után, végül is újra a gömb alján állapodik meg. Ha nincs súrlódás, akkor az egyensúly stabil, de nem aszimptotikusan stabil: a test, egy kis lökés után, ide-ode fog mozogni a gömb aljának a közelében, de nem áll meg.

Mozoghasson most a tömegpont egy vízszintes vályúban. A vályú alján mindenütt egyensúlyban van. Ha nincs súrlódás, akkor egyik egyensúly sem stabil: a test, egy kicsit meglökve a vályú irányában, messzire elmegy az eredeti egyensúlyi helyétől. Ha van súrlódás, akkor az egyensúlyok összessége szigorúan aszimptotikusan stabil: a test, egy kis lökés után, újra megáll a vályú alján, nem messze az eredeti helyétől.

26.9. A stabilitáselméletben – és a differenciálegyenletek elméletében máshol is – fontos szerepet játszanak az ω-határpontok, amelyek a sorozatok sűrűsödési pontjainak megfelelő objektumok.

Definíció *Az $r : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbf{V}$ függvénynek az $x \in \mathbf{V}$ az ω-**határpontja**, ha minden $T > 0$ és $\rho > 0$ esetén a*

$$\{t \in [T, \infty[\quad | \; r(t) \in G_\rho(x)\}$$

halmaz végtelen.

Világos, hogy x akkor és csak akkor ω-határpontja az r függvénynek, ha minden $T > 0$ és $\rho > 0$ esetén $\{r(t) \mid t \geq T\} \cap G_\rho(x) \neq \emptyset$, ami azzal egyenértékű, hogy minden $T > 0$ esetén x benne van az $\{r(t) \mid t \geq T\}$ halmaz lezártjában, azaz

$$x \in \bigcap_{T>0} \overline{\{r(t) \mid t \geq T\}};$$

ebből az is következik, hogy az r ω-határpontjainak halmaza zárt.

26.10. Állítás *(i) x az r-nek akkor és csak akkor ω-határpontja, ha létezik olyan $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, $n \mapsto t_n$ sorozat, amelyre $\lim_n t_n = \infty$ és $x = \lim_n r(t_n)$.*

(ii) Ha létezik r-nek határértéke a végtelenben, akkor ez a határérték az r egyetlen ω-határpontja.

(iii) Ha r korlátos, akkor létezik ω-határpontja.

Bizonyítás (i) és (ii) nyilvánvaló az ω-határpont definíciójából. Ha r korlátos, akkor bármely végtelenhez tartó $t_n\,(n \in \mathbb{N})$ sorozat esetén $r(t_n)\,(n \in \mathbb{N})$ korlátos sorozat, ezért van konvergens részsorozata; e részsorozat határértéke az r-nek ω-határpontja.

26.11 Vegyük most a 26.4.-beli autonóm differenciálegyenletet, és legyen $y \in \mathrm{Dom}g$. Azt mondjuk, hogy $x \in \mathbf{V}$ az y-nak ω-határpontja (a differenciálegyenletre vonatkozóan), ha a differenciálegyenlet r_y megoldása értelmezve van a teljes $[0, \infty[$ intervallumon és x az r_y-nak ω-határpontja.

Az y ω-határpontjainak összességét az Ω_y szimbólummal jelöljük.

Állítás *Ha $z \in \Omega_y \cap \mathrm{Dom}g$, akkor $\mathrm{Ran}r_z \subset \Omega_y$.*

Bizonyítás Tudjuk, van olyan végtelenhez tartó $t_n\,(n \in \mathbb{N})$ sorozat, hogy $z = \lim_n r_y(t_n)$. Legyen t az r_z értelmezési tartományában. Ekkor (a 23.6-beli tulajdonságok következtében)

$$r_z(t) = R_t(z) = R_t(\lim_n r_y(t_n)) = \lim_n R_t(r_y(t_n)) = \lim_n R_t(R_{t_n}(y)) =$$
$$= \lim_n R_{t+t_n}(y) = \lim_n r_y(t + t_n) \in \Omega_y.$$

26.12. Feladatok

1. Stabil egyensúly egy környezetéből induló minden megoldás korlátos. Visszafelé ez nem igaz: van olyan instabil egyensúly, amelynek egy környezetéből induló minden megoldás korlátos. Ennek igazolására vizsgáljuk meg az $(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})?\ \ \dot{x} = x - x^3$ Bernoulli-féle egyenlet 0 egyensúlyát. (A differenciálegyenlet megoldásai a 14.7.3.-ban találhatók meg.)

2. Vizsgáljuk meg az előbbi feladatban szereplő differenciálegyenlet 1 és -1 egyensúlyát, stabil-e, aszimptotikusan stabil-e. Ha aszimptotikusan stabil, adjuk meg a vonzási tartományát.

3. Végezzük el az előző feladatban előírt vizsgálatot az $(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})?\ \ \dot{x} = x + x^2$ ugyancsak Bernoulli-féle egyenlet egyensúlyaira.

4. Magasabb rendű differenciálegyenlet egyensúlyát a megfelelő elsőrendű differenciálegyenlet-rendszer egyensúlyával értelmezzük. Nyilvánvaló, hogy az egyensúly itt is konstans megoldás (a deriváltjai, az elsőrendű rendszer további komponensei, nullák).

Mutassuk meg a megoldások ismeretében, hogy
– a rezgőmozgás 0 egyensúlya stabil, de nem aszimptotikusan stabil,
– a csillapított rezgőmozgás 0 egyensúlya aszimptotikusan stabil.

5. Tegyük fel, hogy az E halmaz elemei a differenciálegyenlet izolált egyensúlyaiból áll. Ekkor E szigorú aszimptotikus stabilitása egyenértékű azzal, hogy minden eleme aszimptotikusan stabil.

6. Egy autonóm differenciálegyenlet értelmezési tartományában levő H halmazt stabilnak szokás nevezni, ha minden, a H-t tartalmazó G nyílt halmazhoz létezik a H-t tartalmazó N nyílt halmaz úgy, hogy az N-ből induló megoldások G-ben haladnak. Továbbá a H halmaz aszimptotikusan stabil, ha stabil és valamely, a H-t tartalmazó U nyílt halmazból induló megoldásoknak a H-tól való távolsága a nullához tart a végtelenben.

Ezzel kapcsolatban érdemes megemlíteni, előfordulhat, hogy
(i) a stabil H halmaz minden eleme egyensúly, de egyik sem stabil,
(ii) a stabil H halmaz egyetlen eleme sem egyensúly,
(iii) az aszimptotikusan stabil H halmazhoz közeledő megoldások egyike sem éri el a H halmazt (azaz nincs határértékük a végtelenben).

A mondottak illusztrálása végett tanulmányozzuk az $((x, y) : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^2)$ függvényekre felírt

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = 0$$

és

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = -y$$

differenciálegyenleteket. (Az (i)-(iii) esetek közül melyik felel meg a vályúban súrlódás nélkül mozgó tömegpontnak?)

7. Egy x_o stabil egyensúly akkor és csak akkor aszimptotikusan stabil, ha van olyan $\beta > 0$, hogy minden $x \in G_\beta(x_o)$ esetén $\Omega_x = \{x_o\}$.

27. Lineáris egyenletek stabilitása

27.1. Tekintsük az állandó együtthatós

$$(*) \qquad (x : \mathbb{R} \to \mathbf{V})? \qquad \dot{x} = Ax$$

homogén lineáris differenciálegyenletet, ahol $A \neq 0$. A differenciálegyenlet egyensúlyainak összessége Ker$A$, amely valódi lineáris altér $\mathbf{V}$-ben, tehát nem üres; legalább az azonosan 0 megoldás egyensúly, amelyet szokás **triviális egyensúlynak** is nevezni.

Aszimptotikusan stabil egyensúly izolált egyensúly, ezért csak akkor lehetséges, ha A magja egy elemű (csak a 0 egyensúly), azaz A injektív (és egyben bijektív is, hiszen $\mathbf{V}$ véges dimenziós).

Az állandó együtthatós, homogén lineáris differenciálegyenlet jó tulajdonsága, hogy bármely megoldásának stabilitási tulajdonságai egyenértékűek a triviális egyensúlyának stabilitási tulajdonságaival.

Állítás *Az állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet bármely megoldásának (aszimptotikus) stabilitása, illetve instabilitása egyenértékű a 0 megoldás (aszimptotikus) stabilitásával, illetve instabilitásával.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy a $t \mapsto e^{tA}x_o$ megoldás stabil. Ekkor minden $\epsilon > 0$ számhoz létezik $\delta_\epsilon > 0$ úgy, hogy ha $\|x - x_o\| < \delta_\epsilon$, akkor $\|e^{tA}x - e^{tA}x_o\| < \epsilon$ minden $t \geq 0$ esetén.

Mivel $e^{tA}x - e^{tA}x_o = e^{tA}(x - x_o)$, ebből nyilvánvaló a 0 egyensúly stabilitása: ha y olyan, hogy $\|y\| < \delta_\epsilon$, akkor $\|e^{tA}y\| < \epsilon$.

Érvelésünket megfordíthatjuk, és a nulla stabilitásából következtethetünk bármely megoldás stabilitására.

Ugyanilyen egyszerű az aszimptotikus stabilitás és az instabilitás kérdése is. ■

Ennek az eredménynek az alapján szokás magát a differenciálegyenletet (aszimptotikusan) stabilnak, illetve instabilnak nevezni, és elég a triviális egyensúly stabilitási tulajdonságait vizsgálni.

27.2. A homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásait le tudjuk írni az A sajátértékeivel, sajátvektoraival és esetleges "háttérvektoraival" (lásd a 8. fejezetet). Minden megoldás $t \mapsto e^{\lambda t}t^k$ alakú függvények és vektorok szorzatának összegeként áll elő, ahol λ az A sajátértéke, k pedig 0 és $m - s$ közötti egész szám (m és s a λ sajátérték algebrai, illetve geometriai multiplicitása).

Ennek alapján viszonylag egyszerűen jellemezhetjük a differenciálegyenlet stabilitási tulajdonságait.

A $\mathbf{V}$ minden eleme $x^- + x^0 + x^+$ alakban írható fel, ahol x^-, x^0, x^+ olyan sajátvektorok, illetve "háttérvektorok" lineáris kombinációja, amelyek negatív, nulla, pozitív valós részű sajátértékekhez tartoznak. Az ilyen kezdeti értékű megoldást úgy kapjuk, hogy alkalmazzuk rá e^{At}-t. A $t \mapsto e^{At}x^-, e^{At}x^0, e^{At}x^+$ függvények tulajdonságait könnyű meghatározni.

Állítás *(i) Ha az A lineáris leképezés minden sajátértékének a valós része negatív, akkor a $(*)$ differenciálegyenlet aszimptotikusan stabil.*

(ii) Ha az A lineáris leképezésnek van olyan sajátértéke, amelynek a valós része pozitív, akkor a differenciálegyenlet instabil.

(iii) Ha az A lineáris leképezésnek nincs pozitív valós részű sajátértéke, továbbá

– minden nulla valós részű sajátértékének algebrai és geometriai multiplicitása megegyezik, akkor a differenciálegyenlet stabil,

– van olyan nulla valós részű sajátértéke, amelynek algebrai és geometriai multiplicitása különbözik, akkor a differenciálegyenlet instabil.

Bizonyítás (i) Ha minden λ valós része negatív, akkor A magja nulla, azaz csak az $x_o = 0$ egyensúly, továbbá a vektorok fent említett előállításában $x^0 = x^+ = 0$; tudjuk, hogy

– van olyan $K > 0$ szám, hogy $|e^{\lambda t}t^k| \leq K$ minden λ sajátérték, minden $k = 0, \ldots, m-s$ és $t > 0$ esetén, ezért $\|e^{At}x^-\| \leq K\|x^-\|$, ami maga után vonja, hogy a 0 stabil egyensúly;

– $\lim_{t\to\infty} e^{\lambda t}t^k = 0$ minden λ-ra és k-ra, ezért $\lim_{t\to\infty} e^{At}x^- = 0$, ami azt jelenti, hogy a 0 aszimptotikusan stabil egyensúly.

(ii) Ha van pozitív valós részű sajátérték, akkor a 0 minden környezetéből indul $t \mapsto e^{At}x^+$ nem korlátos megoldás, tehát a 0 instabil egyensúly.

(iii) Itt mindenképpen $x^+ = 0$.

– Ha a nulla valós részű sajátértékek geometriai és algebrai multiplicitásai megegyeznek, akkor az x^0-ból származó megoldásokban csak konstans függvények és tiszta képzetes kitevőjű exponenciálisok jelennek meg, tehát van olyan $K > 0$, hogy minden $t > 0$ esetén $\|e^{At}x^0\| \leq K\|x^0\|$; természetesen hasonló igaz $e^{At}x^-$-re is. Következésképpen a 0 egyensúly stabil.

– Ha van olyan nulla valós részű sajátérték, amelynek az algebrai multiplicitása nagyobb, mint a geometriai multiplicitása, akkor a megoldásokban a konstans függvények és képzetes kitevőjű exponenciálisok mellett hatványfüggvények is megjelennek, tehát a 0 minden környezetében van olyan x^0, hogy $t \mapsto e^{At}x^0$ nem korlátos, így az egyensúly nem lehet stabil.

27.3. A szigorú aszimptotikus stabilitás az egyensúlyok halmazára vonatkozó tulajdonság. Ezért, ellentétben az előzőekkel, ezt nem lehet visszavezetni egyetlen egyensúly tulajdonságaira.

Állítás *Tegyük fel, hogy* $\mathrm{Ker}A \neq \{0\}$. *Ebben az esetben* $\mathrm{Ker}A$ *akkor és csak akkor szigorúan aszimptotikusan stabil, ha az A nulla sajátértékének algebrai és geometria multiplicitása megegyezik, minden más sajátértékének a valós része negatív.*

BIZONYÍTÁS Ha a sajátértékekre kirótt feltételek teljesülnek, akkor minden egyensúly stabil az előző pont szerint, és az ottani jelöléssel most $x^+ = 0$, továbbá x^0 nulla sajátértékű sajátvektor, tehát $e^{At}x^0 = x^0$. Mivel $\lim_{t\to\infty} e^{At}x^- = 0$, az $x^0 + x^-$ pontból induló megoldás az x^0 egyensúlyhoz tart a végtelenben.

Tegyük most fel, hogy a sajátértékekre kirótt feltételek nem teljesülnek.

Ha a nulla sajátérték algebrai multiplicitása nagyobb, mint a geometriai multiplicitása, vagy van pozitív valós részű sajátérték, akkor az egyensúlyok instabilok az előző állítás szerint.

Ha a nulla sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása egyenlő, nincs pozitív valós részű sajátérték, de van nulla valós részű $\lambda \neq 0$ sajátérték, akkor két eset lehetséges:

– λ algebrai multiplicitása nagyobb, mint a geometriai multiplicitása; ekkor az egyensúlyok instabilak;

– λ algebrai és geometriai multiplicitása megegyezik, akkor az egyensúlyok stabilak, viszont ha x_0 a λ-hoz tartozó sajátvektor, akkor nem létezik $\lim_{t\to\infty} e^{At}x^0$, tehát nem egyensúlyból induló megoldás nem tart egyensúlyhoz.

27.4. Egy lineáris leképezés sajátértékeit egy N-ed fokú polinom – a lineáris leképezés karakterisztikus polinomjának – gyökeiként kaphatjuk meg ($N := \dim\mathbf{V}$). Viszont a gyökök pontos meghatározása nélkül is kaphatunk felvilágosítást a gyökök jellegére a polinom együtthatóiból. Bizonyítás nélkül közöljük az úgynevezett Routh–Hurwitz-kritériumot: a

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \mathrm{id}_{\mathbb{K}}^k$$

polinom minden gyökének valós része akkor és csak akkor negatív az $a_N > 0$ esetben, ha a

$$\begin{pmatrix} a_{N-1} & a_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{N-3} & a_{N-2} & a_{N-1} & a_N & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{N-5} & a_{N-4} & a_{N-3} & a_{N-2} & a_{N-1} & a_N & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix}$$

$N \times N$-es mátrix minden sarokaldeterminánsa pozitív.

Ez a kritérium $N = 2$ esetére azt adja, hogy

$$a_2 > 0,\ a_1 > 0,\ a_0 > 0,$$

$N = 3$ esetére pedig azt, hogy

$$a_3 > 0,\ a_2 > 0,\ a_1 > 0,\ a_0 > 0 \quad \text{és} \quad a_2 a_1 > a_0 a_3.$$

27.5. Feladatok

1. Vizsgáljuk meg a kizárt $A = 0$ triviális esetet stabilitás szempontjából.
2. Mit tudunk mondani a szigorú aszimptotikus stabilitásról, ha $\mathrm{Ker}A = \{0\}$?
3. Tekintsük az

$$(x : \mathbb{R} \to \mathbf{V})? \qquad \dot{x} = Ax + b$$

állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenletet. Ennek x_o akkor és csak akkor egyensúlya, ha $Ax_o = -b$. Mutassuk meg, hogy az inhomogén egyenlet bármely megoldásának stabilitási tulajdonságai megegyeznek a megfelelő homogén egyenlet triviális egyensúlyának stabilitási tulajdonságaival.

4. Mutassuk meg, hogy az

$$((x_1, x_2, x_3) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3)? \qquad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = -x_1 - 1$$

differenciálegyenlet instabil.

5. Magasabb rendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet egyensúlyainak stabilitása az eddigiek szerint tárgyalható az elsőrendű differenciálegyenletre való visszavezetéssel. Vizsgáljuk meg az

$$(x : \mathbb{R} \to \mathbb{R})? \qquad \dddot{x} + \ddot{x} + \dot{x} + 2x = 0$$

differenciálegyenletet stabilitás szempontjából.

6. Milyen α valós szám esetén aszimptotikusan stabil az

$$(x : \mathbb{R} \to \mathbb{R})? \qquad x^{(4)} + \alpha\dddot{x} + 2\ddot{x} + \dot{x} + 3x = 0$$

differenciálegyenlet?

28. Ljapunov módszere

28.1. Továbbra is az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \qquad \dot{x} = g(x)$$

autonóm differenciálegyenlet egyensúlyainak a vizsgálata a célunk.

Ljapunov módszerének a lényege az, hogy bizonyos függvények – amelyeket Ljapunov-függvényeknek szoktunk hívni – segítségével következtetni tudunk az (aszimptotikus) stabilitásra, illetve instabilitásra.

Az $L : \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvényre vezessük be az

$$\overset{\bullet}{L} := \mathrm{D}L \cdot g : \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbb{R}$$

jelölést (ez a függvény az L-nek a g vektormező szerinti deriváltja), amelyet szokás az L differenciálegyenlet menti deriváltjának is hívni.

Ha r a differenciálegyenlet megoldása, akkor

$$(L \circ r)^{\cdot} = \overset{\bullet}{L} \circ r.$$

Ha x_o a differenciálegyenlet egyensúlya, akkor $\overset{\bullet}{L}(x_o) = 0$.

28.2. Állítás *Legyen x_o az autonóm differenciálegyenlet egyensúlya. Ha létezik az x_o egy környezetében értelmezett folytonosan differenciálható L függvény úgy, hogy*
– L-nek szigorú minimuma van x_o-ban,
– $\overset{\bullet}{L}$-nak maximuma van x_o-ban,
akkor x_o stabil egyensúly.

Bizonyítás Mivel $\overset{\bullet}{L}$ az x_o-ban nulla, és ez a maximális értéke, $\overset{\bullet}{L} \le 0$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $L(x_o) = 0$ (L-hez egy konstanst hozzáadva ez mindig elérhető); ekkor tehát $L(x) > 0$, ha $x \neq x_o$. Legyen $\epsilon > 0$ olyan, hogy $\{x \in \mathbf{V} \mid \|x - x_o\| \le \epsilon\}$ is benne van L értelmezési tartományában. Az $\{x \in \mathbf{V} \mid \|x - x_o\| = \epsilon\}$ halmaz kompakt, ezért L felveszi rajta a minimumát, amely nagyobb, mint nulla (amely a függvény szigorú minimuma). Választhatunk tehát egy olyan m számot, hogy

$$0 < m < L(x) \qquad (\|x - x_o\| = \epsilon).$$

L folytonossága miatt viszont létezik olyan $\delta_\epsilon < \epsilon$, hogy

$$L(x) < m \qquad (\|x - x_o\| < \delta_\epsilon).$$

Most megmutatjuk, hogy ha $\|x - x_o\| < \delta_\epsilon$, akkor r_x (az x-ből induló megoldás) értelmezve van az egész $[0, \infty[$ intervallumon és $\|r_x(t) - x_o\| < \epsilon$, vagyis az x_o egyensúly stabil.

Minthogy $\|r_x(0) - x_o\| < \delta_\epsilon < \epsilon$, az r_x folytonossága miatt van olyan legnagyobb $T > 0$ (esetleg $T = \infty$), hogy $\|r_x(t) - x_o\| < \epsilon$ minden $0 < t < T$ esetén.

Ha $\|r_x(t) - x_o\| < \epsilon$ minden $t \in \mathrm{Dom} r_x$ esetén, akkor a 23.8.5. szerint $T = \infty$, és készen vagyunk.

Az ellenkező esetben $T \in \mathrm{Dom} r_x$ és $\|r_x(T) - x_o\| = \epsilon$, így $L(r_x(T)) > m$. Viszont

$$(L \circ r_x)^{\cdot} = \overset{\bullet}{L} \circ r_x \le 0,$$

tehát a bal oldali függvény monoton csökken, ezért $(L \circ r_x)(T) \le (L \circ r_x)(0) < m$. Ez az ellentmondás azt mutatja, hogy az utóbbi eset nem lehetséges.

28.3. Állítás *Legyen x_o az autonóm differenciálegyenlet egyensúlya. Ha létezik az x_o egy környezetében értelmezett folytonosan differenciálható L függvény úgy, hogy*
– L-nek szigorú minimuma van x_o-ban,
– $\overset{\bullet}{L}$-nek szigorú maximuma van x_o-ban,
akkor x_o aszimptotikusan stabil egyensúly.

Bizonyítás Az előző tétel értelmében x_o stabil egyensúly. Ezért minden $\epsilon > 0$ esetén létezik $\delta_\epsilon > 0$ úgy, hogy az x_o-nak a δ_ϵ sugarú környezetéből induló megoldás az ϵ sugarú környezetében marad.

Tegyük fel, hogy x_o nem aszimptotikusan stabil. Ekkor létezik olyan x, $\|x - x_o\| < \delta_\epsilon$, hogy $\lim_{t\to\infty} r_x(t) = x_o$ nem teljesül. Ez utóbbit így is megfogalmazhatjuk: van olyan $0 < \eta < \epsilon$, hogy minden n természetes számhoz létezik $t_n > n$, amelyre $\|r_x(t_n) - x_o\| > \eta$. Viszont ismét csak a stabilitás miatt létezik $\delta_\eta > 0$ úgy, hogy az x_o-nak a δ_η sugarú környezetéből induló megoldás az η sugarú környezetében marad.

Ezért $\delta_\eta \leq \|r_x - x_o\|$; ha ugyanis volna olyan t_o, hogy $\|r_x(t_o) - x_o\| < \delta_\eta$, akkor $\|r_x(t) - x_o\| < \eta$ teljesülne minden $t > t_o$ esetén, ami lehetetlen a feltételezésünk alapján. Viszont x választása és x_o stabilitása folytán az is igaz, hogy $\|r_x - x_o\| \leq \epsilon$. Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{Ran}\, r_x$ benne van az L értelmezési tartományának $\{y \mid \delta_\eta \leq \|y - x_o\| \leq \epsilon\}$ kompakt részhalmazában. Következésképpen (lévén L folytonos) $L \circ r_x$ korlátos függvény.

Az állításunk feltétele szerint $\overset{\bullet}{L}$-nek szigorú maximuma van x_o-ban (ahol a nulla értéket veszi fel), ezért

$$-M := \sup\{\overset{\bullet}{L}(y) \mid \delta_\eta \leq \|y - x_o\| \leq \epsilon\} < 0.$$

Integráljuk az $(L \circ r_x)^{\cdot} = \overset{\bullet}{L} \circ r_x$ függvényt 0 és t között:

$$L(r_x(t)) - L(x) = \int_0^t \overset{\bullet}{L}(r_x(s))\, ds \leq -Mt \qquad (t > 0).$$

A bal oldal mint t függvénye korlátos, a jobb oldal viszont nem korlátos; az eredeti feltételezésünk ellentmondásra vezetett, ezért tarthatatlan.

28.4. Állítás *Legyen x_o az autonóm differenciálegyenlet egyensúlya. Ha létezik az x_o egy környezetében értelmezett folytonosan differenciálható L függvény úgy, hogy*
– L-nek nincs lokális minimuma x_o-ban,
– $\overset{\bullet}{L}$-nek szigorú maximuma van x_o-ban,
akkor x_o instabil egyensúly.

BIZONYÍTÁS Fogalmazzuk meg a stabilitás tagadását, amit bizonyítani akarunk: van olyan $\epsilon > 0$, hogy minden $\delta > 0$ esetén létezik x_δ, amelyre $\|x_\delta - x_o\| < \delta$ és $\|r_{x_\delta} - x_o\| \not< \epsilon$ teljesül.

Legyen $\epsilon > 0$ olyan, hogy az x_o-nak a 2ϵ sugarú környezete is benne van L értelmezési tartományában.

Feltehetjük az általánosság megszorítása nélkül, hogy $L(x_o) = 0$. Minthogy L-nek nincs lokális minimuma x_o-ban, minden $\delta > 0$ esetén van olyan x_δ, hogy $\|x_\delta - x_o\| < \delta$ és $L(x_\delta) < 0$. Viszont L folytonos x_o-ban, ezért létezik olyan λ_δ, hogy $\|x - x_o\| < \lambda_\delta$ esetén $L(x) > L(x_\delta)/2$.

Az állításunk feltétele szerint az $\overset{\bullet}{L}$ függvény az x_o-t kivéve mindenütt negatív; minthogy $\overset{\bullet}{L} \circ r_{x_\delta}$ az $L \circ r_{x_\delta}$ dertiváltja, ez utóbbi függvény szigorúan monoton csökken: $L(r_{x_\delta}(t)) < L(r_{x_\delta}(0)) = L(x_\delta)$ minden $t > t_o$ esetén. Ez viszont az előbbi megállapításunk szerint csak úgy lehet, hogy $\|r_{x_\delta} - x_o\| \geq \lambda_\delta$.

Tegyük fel, hogy $\|r_{x_\delta} - x_o\| < \epsilon$. Elismételve az előző bizonyítás utolsó három bekezdését úgy, hogy δ_η-t kicseréljük λ_δ-val, ellentmondásra jutunk, tehát valóban $\|r_{x_\delta} - x_o\| \not< \epsilon$, és ezzel bebizonyítottuk, amit akartunk.

28.5. Az imént tárgyalt három alapvető tételnek sokféle módosítása ismeretes. A továbbiakban megismerkedünk három fontos változattal.

Az alábbi eredmény formálisan a 28.4.-et adja vissza az $\alpha = 0$, $K = \overset{\bullet}{L}$ és a szigorú maximum esetére.

Állítás *Legyen x_o az autonóm differenciálegyenlet egyensúlya. Ha létezik*
– az x_o egy környezetében értelmezett folytonosan differenciálható L függvény, amelynek nincs lokális minimuma x_o-ban,
– az x_o egy környezetében értelmezett K folytonos függvény, amelynek maximuma van az x_0-ban,
– $\alpha > 0$,
úgy, hogy

$$\overset{\bullet}{L} = \alpha(L - L(x_o)) + K - K(x_o),$$

akkor x_o instabil egyensúly.

BIZONYÍTÁS Az általánosság csorbítása nélkül feltehető, hogy $L(x_o) = K(x_o) = 0$. Legyen $\epsilon > 0$ olyan, hogy az x_o körüli ϵ sugarú zárt gömb benne van L és K értelmezési tartományában. Ekkor $K(x) \leq 0$, ha $\|x - x_o\| \leq \epsilon$.

Tegyük fel, hogy az egyensúly stabil. Ekkor van olyan $\delta_\epsilon > 0$, hogy minden $\|x - x_0\| < \delta_\epsilon$ esetén $\|r_x(t) - x_o\| < \epsilon \quad (t \geq 0)$. Következésképpen $K \circ r_x \leq 0$.

Mivel L-nek nincs lokális maximuma x_o-ban, van olyan x, amelyre $\|x - x_o\| < \delta_\epsilon$ és $L(x) < L(x_o) = 0$.

A feltétel szerint

$$(L \circ r_x)^{\cdot} = \alpha(L \circ r_x) + K \circ r_x.$$

Ez inhomogén lineáris differenciálegyenlet $L \circ r_x$-re; minthogy $(L \circ r_x)(0) = L(x)$, a 8.1. és a 9.2 alapján

$$(L \circ r_x)(t) = e^{\alpha t} \left(L(x) + \int_0^t e^{-\alpha s}(K \circ r_x)(s)\, ds \right).$$

Ebből látszik, hogy $\lim_{t\to\infty}(L \circ r_x)(t) = -\infty$, ami viszont lehetetlen, mert r_x értékkészlete benne van az x_o körüli ϵ sugarú zárt gömbben, amelyen L folytonos, ezért $L \circ r_x$ korlátos. Tehát az a feltételezésünk, hogy x_o stabil, ellentmondásra vezetett.

28.6. Állítás *Legyen x_o az autonóm differenciálegyenlet egyensúlya. Ha létezik az x_o egy környezetében értelmezett folytonosan differenciálható L függvény úgy, hogy*
– L-nek szigorú minimuma van x_o-ban,
– $\overset{\bullet}{L}$-nek maximuma van x_o-ban,
továbbá
– létezik $\beta > 0$ úgy, hogy minden, az x_o-tól különböző r megoldásra, amelyre $\|r(0) - x_o\| < \beta$ teljesül, $\overset{\bullet}{L} \circ r \neq 0$,
akkor x_o aszimptotikusan stabil.

Bizonyítás A feltételek szerint x_o stabil, tehát minden $\epsilon > 0$ esetén létezik $\delta_\epsilon > 0$ úgy, hogy ha $\|x - x_o\| < \delta_\epsilon$, akkor $\|r_x(t) - x_o\| < \epsilon$ minden t-re.

Az r_x értékkészlete benne van az x_o körüli ϵ sugarú zárt gömbben, amelyen L folytonos, ezért $L \circ r_x$ korlátos; továbbá monoton csökken is, mert $(L \circ r_x)^\cdot = \overset{\bullet}{L} \circ r_x \leq 0$. Ezért létezik

$$c_x := \lim_{t\to\infty}(L \circ r_x)(t).$$

Megmutatjuk, hogy ha z az x-nek ω-határpontja, akkor $L(z) = c_x$. Valóban, ekkor van olyan végtelenhez tartó t_n $(n \in \mathbb{N})$ sorozat, hogy $z = \lim_n r_x(t_n)$, ezért $L(z) = L(\lim_n r_x(t_n)) = \lim_n L(r_x(t_n)) = c_x$.

Tegyük fel, hogy az egyensúly nem aszimptotikusan stabil. Ekkor (lásd a 26.12.7. feladatot) van olyan x, hogy $\|x - x_o\| < \delta_\epsilon$ és $\Omega_x \neq \{x_o\}$. Minthogy Ω_x nem üres (lásd 26.10.(iii)), ez azt jelenti, hogy van az x-nek az x_o-tól különböző z ω-határpontja. Viszont tudjuk, hogy $\mathrm{Ran}\, r_z \subset \Omega_x$ (lásd 26.11.), vagyis $L(r_z(t)) = c_x$ minden t-re, amiből $\overset{\bullet}{L} \circ r_z = (L \circ r_z)^\cdot = 0$, ami viszont ellentmond a feltételünknek.

28.7. Hasonlóan bizonyítható be a következő eredmény is.

Állítás *Legyen x_o az autonóm differenciálegyenlet egyensúlya. Ha létezik az x_o egy környezetében értelmezett folytonosan differenciálható L függvény úgy, hogy*
– L-nek nincs lokális minimuma x_o-ban,
– $\overset{\bullet}{L}$-nek maximuma van x_o-ban,
továbbá
– létezik $\beta > 0$ úgy, hogy minden, az x_0-tól különböző r megoldásra, amelyre $\|r(0) - x_o\| < \beta$ teljesül, $\overset{\bullet}{L} \circ r \neq 0$,
akkor x_o instabil.

28.8. A tárgyalt tételekben szereplő, stabilitási tulajdonságokat leíró függvényeket Ljapunov-függvényeknek szokás nevezni.

Érdemes megjegyezni, hogy a Ljapunov-függvényeknek csak az egyensúly egy környezetében kell értelmezve lennie, tehát tulajdonképpen mindig lokális szélső értékekről van szó. A tételek érvényben maradnak, ha a maximum és minimum szavakat felcseréljük, hiszen ha egy függvénynek maximuma (minimuma) van, akkor a negatívjának minimuma (maximuma).

Ljapunov módszere a stabilitásvizsgálatokhoz nagyon hatékony; csak az a kérdés, hogyan találunk megfelelő Ljapunov-függvényeket. Általános eljárás nincs rá; próbálkozni kell, találgatni. Bizonyos típusú fizikai feladatokban azonban a feladat maga kínálja a Ljapunov-függvényt.

Vegyük észre: a stabilitás kritériumában az a feltétel, hogy $\overset{\bullet}{L}$-nek maximuma legyen x_o-ban, megengedi azt, hogy $\overset{\bullet}{L}$ a konstans nulla függvény legyen. Ha tehát L a differenciálegyenlet első integrálja (megmaradó mennyiség), és L-nek szigorú minimuma van x_o-ban, akkor x_o stabil egyensúly.

28.9. Reprezentáljuk fizikai terünket $\mathbb{R}^3$-mal, az időt $\mathbb{R}$-rel. Az $U : \mathbb{R}^3 \rightarrowtail \mathbb{R}$ nem azonosan nulla kétszer folytonosan differenciálható potenciállal leírható erőmezőben mozog az m tömegű test, amelyre a sebességével ellentétes irányú súrlódási erő hat (ennek nagysága függhet a test helyzetétől és sebességétől). Ezt a súrlódási erőt egy $\alpha : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrowtail \mathbb{R}_o^+$ függvénnyel jellemezzük úgy, hogy a test Newton-egyenlete

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^3)? \qquad m\ddot{x} = -\mathrm{D}U(x) - \alpha(x, \dot{x})\dot{x},$$

amelynek elsőrendű alakja

$$((x, v) : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)? \qquad \dot{x} = v, \quad m\dot{v} = -\mathrm{D}U(x) - \alpha(x, v)v.$$

Tegyük fel, hogy $\mathrm{D}U(x_o) = 0$; ekkor $(x_o, 0)$ egyensúly.

(i) Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor U-nak szigorú lokális minimuma van, és tekintsük az

$$L : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrowtail \mathbb{R}, \quad (x, v) \mapsto \frac{m|v|^2}{2} + U(x)$$

függvényt (az energiát). Erre

$$\overset{\bullet}{L}(x, v) = -\alpha(x, v)|v|^2.$$

Könnyű látni, hogy L-nek szigorú lokális minimuma, $\overset{\bullet}{L}$-nak pedig lokális maximuma van $(x_o, 0)$-ban, tehát az egyensúly stabil, akár van súrlódás, akár nincs. Ha nincs súrlódás, akkor $\overset{\bullet}{L} = 0$, tehát az egyensúly biztosan nem aszimptotikusan stabil. Ha van súrlódás, akkor sincs $\overset{\bullet}{L}$-nak szigorú lokális maximuma az egyensúlyban, tehát a 28.3. állítás nem alkalmazható az egyensúly aszimptotikus stabilitásának megállapítására. Viszont bármely nem egyensúlyi $t \mapsto (x(t), v(t))$ megoldásra $t \mapsto v(t)$ nem a nulla függvény, ezért ha a súrlódás olyan, hogy $\alpha(x, v) > 0$ $v \neq 0$ esetén, akkor a 28.6. állítás alapján megállapíthatjuk, hogy az egyensúly aszimptotikusan stabilitás.

(ii) Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor U-nak x_o-ban szigorú lokális maximuma van.

Ha a súrlódás olyan, mint az előző esetben, akkor az energia ismét Ljapunov-függvény az egyensúly instasbilitására a 28.7. állítás szerint.

Ha viszont nincs súrlódás, akkor

$$L : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrowtail \mathbb{R}, \quad (x, v) \mapsto \mathrm{D}U(x) \cdot v$$

(az erő teljesítménye) Ljapunov-függvény az egyensúly instabilitására. Valóban, L-nek nincs minimuma $(x_o, 0)$-ban: $L(x_o, 0) = 0$ és L az $(x_o, 0)$ akármilyen környezetében pozitív és negatív értéket is felvehet. Viszont

$$\overset{\bullet}{L}(x, v) = \mathrm{D}^2U(x)(v, v) - \frac{1}{m}|\mathrm{D}U(x)|^2,$$

amely az $(x_o, 0)$ pont egy környezetében a pontot kivéve mindenütt negatív.

28.10. Ljapunov módszerével meg tudjuk mutatni, hogy egy merev testnek a legnagyobb és legkisebb tehetetlenségi nyomatékú főtengelye körüli szabad forgása stabil.

Legyenek a merev test fő tehetetlenségi nyomatékai $A > B > C > 0$. Legyenek p, q és r a szögsebesség komponensei ezen irányokban. A merev test szabad forgását ezekkel a jelölésekkel az úgynevezett Euler-egyenletek írják le:

$$\dot{p} = \frac{B - C}{A} qr, \quad \dot{q} = \frac{C - A}{B} rp, \quad \dot{r} = \frac{A - B}{C} pq.$$

Az első tengely körüli szabad forgást a differenciálegyenlet egy $(p_o, 0, 0)$ megoldása – egyensúlya – adja, ahol $p_o \neq 0$. Tudjuk, hogy az energia kétszerese és az impulzusmomentum négyzete megmaradó mennyiségek, vagyis az

$$E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (p,q,r) \mapsto Ap^2 + Bq^2 + Cr^2,$$
$$J : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (p,q,r) \mapsto A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2$$

függvények a fenti differenciálegyenlet első integráljai, amint erről könnyű közvetlenül is meggyőződni. Legyen $E_o := E(p_o, 0, 0) = Ap_o^2, \quad J_o := J(p_o, 0, 0) = A^2p_o^2$. Válasszunk egy α pozitív számot, és legyen

$$L := \alpha(E - E_o)^2 + (J - J_o)^2.$$

(Itt α egy "dimenzionális konstanst" jelképez, amely azért kell, hogy a "fizikai dimenziók" rendben legyenek: az energia és az impulzusmomentum négyzete valójában nem valós értékű függvények, más a mértékegységük). Nyilván L is megmaradó mennyiség. Továbbá $L \geq 0$ és $L(p_o, 0, 0) = 0$, azaz L-nek a szóban forgó egyensúlyban minimuma van. Megmutatjuk, hogy ez a minimum szigorú (vagyis a függvény csak itt veszi fel a nulla értéket), ami maga után vonja, hogy az egyensúly (a szabad forgás) stabil. Tegyük fel, hogy $L(p, q, r) = 0$. Ekkor

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = Ap_o^2, \quad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = A^2p_o^2.$$

Szorozzuk be az első egyenletet A-val, és vonjuk ki belőle a másodikat; azt kapjuk, hogy

$$B(A - B)q^2 + C(A - C)r^2 = 0.$$

Minthogy az együtthatók pozitívak, ez csak úgy lehet, hogy $q = r = 0$, amiből pedig már $p = p_o$ következik.

Hasonlóan igazolható, hogy a legkisebb tehetetlenségi tengely körüli szabad forgás is stabil.

Ezzel szemben a középső tehetetlenségi tengely körüli szabad forgás instabil. Ezt a következőkben sorra kerülő linearizálás módszerével bizonyíthatjuk be (lásd a 29.12.2. feladatot).

28.11. Feladatok

1. Tekintsük az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad \dot{x} = g(x)$$

differenciálegyenletet. Legyen $g(x_o) = 0$, és tegyük fel, hogy

(i) g szigorúan monoton fogyó az x_o egy környezetében;
(ii) g szigorúan monoton növő az x_o egy környezetében;
(iii) g-nek x_o-ban szigorú minimuma van;
(iv) g-nek x_o-ban szigorú maximuma van.

Mutassuk meg egyszerű okoskodással, hogy az (i) esetben az egyensúly aszimptotikusan stabil, az összes többi esetben instabil. Keressünk Ljapunov-függvényeket is állításunk bizonyítására (vegyük az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} - x_o$ függvény alkalmas hatványait).

2. Győződjünk meg arról, hogy potenciális erőmezőben lehet egy test stabil egyensúlyban anélkül, hogy a potenciálnak minimuma volna. (Útmutatás: tekintsük az egy dimenziós esetben az

$$U(x) := \begin{cases} \exp(-1/x^2)\cos(1/x) & \text{ha} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

potenciált.)

3. Alkalmas hatványfüggvényeket véve Ljapunov-függvénynek mutassuk meg, hogy az $(x, y) : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^2$ függvényekre felírt alábbi differenciálegyenletek $(0, 0)$ egyensúlya rendre aszimptotikusan stabil, aszimptotikusan stabil, stabil, instabil:

(i) $\dot{x} = y - x^3, \qquad \dot{y} = -x - y^3,$

(ii) $\dot{x} = y - x^3, \qquad \dot{y} = -y^3 - x^3,$

(iii) $\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -x^{5/3},$

(iv) $\dot{x} = y + x^3, \qquad \dot{y} = -x + y^3.$

(Például a (iii) differenciálegyenlet Ljapunov-függvénye $(x, y) \mapsto (3/8)x^{8/3} + (1/2)y^2$.)

4. Vizsgáljuk meg az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad \ddot{x} + a\dot{x}^2 + b\sin x = 0$$

egyensúlyának stabilitását, ahol a, b adott nem nulla valós számok.

5. Vizsgáljuk meg az

$$((x, y) : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^2)? \qquad \dot{x} = ax^3 + by, \quad \dot{y} = -cx + dy^3$$

differenciálegyenlet $(0, 0)$ egyensúlyának stabilitását az a, b, c, d valós számok függvényében. Mit mondhatunk, ha $\mathbb{R}^2$ helyett $\mathbb{C}^2$-t vesszük?

6. Mit tudunk mondani az

$$((x, y) : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^2)? \qquad \dot{x} = -x - y + (x - y)^3, \quad \dot{y} = -x - y - (x - y)^3$$

differenciálegyenlet $(0, 0)$ egyensúlyának stabilitásáról? (Transzformáljuk az egyenletet egyszerűbb alakra!)

7. Mutassuk meg, hogy a merev test minden tehetetlenségi tengelye körüli szabad forgása stabil, ha két fő tehetetlenségi nyomaték megegyezik (A=B a 28.10.-beli differenciálegyenletben).

29. A linearizálás módszere

29.1. Legyen x_o az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \qquad \dot{x} = g(x)$$

autonóm differenciálegyenlet egyensúlya, és tegyük fel, hogy g folytonosan differenciálható. Ekkor $g(x) = \mathrm{D}g(x_o) \cdot (x - x_o) + \mathrm{ordo}(x - x_o)$, tehát a 19.6. szerint a fenti differenciálegyenletnek az x_o egy környezetében jó közelítése az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \qquad \dot{x} = \mathrm{D}g(x_o) \cdot (x - x_o)$$

állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet, amelyet az eredeti egyenlet **linearizálásának** hívunk.

Az állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek stabilitásának vizsgálata elvileg igen egyszerű. Felmerül a kérdés, vajon a linearizált egyenlet (aszimptotikus) stabilitásából, illetve instabilitásából tudunk-e következtetni az eredeti egyenlet egyensúlyának (aszimptotikus) stabilitására,illetve instabilitására. Bizonyos esetekben a válasz igenlő. Ehhez azonban szükségünk lesz a lineáris leképezések néhány algebrai tulajdonságára, amelyeket a következőkben tárgyalunk.

29.2. Állítás *Tegyük fel, hogy* $\mathbf{V}$ *komplex vektortér, legyen* $B \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{V}^*)$ *és* $A \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$. *Az*

$$(*) \qquad (X \in Lin(\mathbf{V}, \mathbf{V}^*))? \qquad A^*X + XA = B$$

egyenletnek létezik egyértelmű megoldása, ha az A bármely két sajátértékének összege nem nulla.

Bizonyítás Világos, hogy a $\mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{V}^*) \to \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{V}^*)$, $\quad X \mapsto A^*X + XA$ leképezés lineáris, tehát a fenti egyenlet pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha ennek a lineáris leképezésnek a magja nulla, azaz a nulla nem a sajátértéke. Legyen α a szóban forgó lineáris leképezés sajátértéke; ekkor van olyan $X \neq 0$, hogy $A^*X + XA = \alpha X$, amit a következőképpen írunk át:

$$(A^* - \alpha I^*)X = X(-A),$$

ahol $I := \mathrm{id}_{\mathbf{V}}$, tehát $I^* = \mathrm{id}_{\mathbf{V}^*}$. Ebből bármely n természetes számra $(A^* - \alpha I^*)^n X = X(-A)^n$ adódik, ezért bármely r polinomra fennáll az

$$(**) \qquad r(A^* - \alpha I^*)X = Xr(-A)$$

összefüggés.

Most megmutatjuk, hogy az $A-\alpha I$ és a $(-A)$ lineáris leképezéseknek van megegyező sajátértékük. Tegyük fel ugyanis ennek az ellenkezőjét, vagyis hogy a

$$\lambda \mapsto \det(A-\alpha I-\lambda I)=\det(A^*-\alpha I^*-\lambda I^*):=p_1(\lambda)$$

és

$$\lambda \mapsto \det(-A-\lambda I):=p_2(\lambda)$$

polinomoknak nincs közös gyökük. Ekkor a parciális törtekre bontás ismert formulája alapján (Analízis I.28.9.) van olyan q_1 és q_2 polinom, hogy

$$\frac{1}{p_1p_2}=\frac{q_1}{p_1}+\frac{q_2}{p_2}, \quad \text{azaz} \quad p_1q_2+p_2q_1=1.$$

Bármely $\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ lineáris leképezést behelyettesítve a karakterisztikus polinomjába nullát kapunk. Ezért $p_1(A^*-\alpha I^*)=0$, amiből $(p_1q_2)(A^*-\alpha I^*)=0$; hasonlóan, $(p_2q_1)(-A)=0$, ami viszont azt adja a szóban forgó polinomokra vonatkozó összefüggés szerint, hogy $(p_1q_2)(-A)=I$. A $(**)$ egyenlőséget a p_1q_2 polinomra alkalmazva tehát azt kapjuk, hogy $X=0$, ami nem lehet. Tehát az $A-\alpha I$ és a $(-A)$ lineáris leképezések karakterisztikus polinomjának van közös gyöke, azaz van olyan λ komplex szám, hogy $\alpha+\lambda$ és $-\lambda$ az A lineáris leképezés sajátértéke. Feltevésünk szerint viszont e két sajátérték összege, azaz α nem nulla, és ezt akartuk bizonyítani. ■

Ugyanilyen állítás igaz, ha $\mathbf{V}$ valós vektortér, csak akkor a lineáris leképezések sajátértékei helyett a komplexifikált lineáris leképezések sajátértékeit kell venni. A továbbiakban is mindig így értjük a sajátértékeket.

29.3. Emlékeztetünk arra, hogy az $L:\mathbf{V}\to\mathbf{V}^*$ lineáris leképezés szimmetrikus, ha $L^*=L$, és antiszimmetrikus, ha $L^*=-L$ (Analízis II.14.5.). Egyszerű tény – kérjük az olvasót, mutassa meg –, hogy ha B szimmetrikus, illetve antiszimmetrikus a 29.2. állításban, akkor az egyenlet megoldása is szimmetrikus, illetve antiszimmetrikus.

Az $L:\mathbf{V}\to\mathbf{V}^*$ szimmetrikus lineáris leképezés pozitív definit, illetve negatív definit, ha $(Lx|x)>0$, illetve $(Lx|x)<0$ minden $0\neq x\in\mathbf{V}$ esetén. Pozitív szemidefinit, illetve negatív szemidefinit, ha $(Lx|x)\geq 0$, illetve $(Lx|x)\leq 0$ minden $x\in\mathbf{V}$ esetén.

A $Q_L:\mathbf{V}\to\mathbb{K}$, $\quad x\mapsto(Lx|x)$ leképezés ("kvadratikus forma") folytonos. Ezért az $\{x\in\mathbf{V}\mid \|x\|=1\}$ kompakt halmazon korlátos: van olyan $\lambda_a,\lambda_f\in\mathbb{R}$, hogy $\lambda_a\leq Q_L(x)\leq\lambda_f$, ha $\|x\|=1$. Tehát ha B negatív definit szimmetrikus lineáris leképezés, akkor van olyan $0<\beta_a<\beta_f$, hogy

$$-\beta_f\|x\|^2\leq(Bx\mid x)\leq-\beta_a\|x\|^2 \qquad (x\in\mathbf{V}).$$

Értelemszerűen hasonló igaz C pozitív definit lineáris leképezésre alkalmas pozitív számokkal:

$$\gamma_a\|x\|^2\leq(Cx\mid x)\leq\gamma_f\|x\|^2 \qquad (x\in\mathbf{V}).$$

Pozitív (negatív) definit leképezések összege pozitív (negatív) definit. Ha B negatív definit, C pozitív definit, akkor $B + C$ az előző jelölésekkel

– negatív definit, ha $\gamma_a - \beta_f < 0$;

– pozitív definit, ha $\gamma_f - \beta_a > 0$.

A Q_L kvadratikus forma differenciálható is, és $\mathrm{D}Q_L(x) = (Lx|\cdot) + (L(\cdot)|x)$.

29.4. Az eddig mondottak és az autonóm differenciálegyenletek egyensúlyának stabilitási tulajdonságai az alábbi tényeken keresztül kapcsolódnak össze.

Tekintsük a

$$(x : \mathbb{R} \to \mathbf{V})? \qquad \dot{x} = Ax$$

állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletet. Legyen $M : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$ szimmetrikus lineáris leképezés. Ekkor

$$\overset{\bullet}{Q}_M(x) := \mathrm{D}Q_M(x) \cdot Ax = (Mx|Ax) + (MAx|x) = ((A^*M + MA)x|x) \qquad (x \in \mathbf{V}),$$

azaz

$$\overset{\bullet}{Q}_M = Q_{A^*M+MA}.$$

Tegyük fel, hogy $A^*M + MA$ negatív definit. Ha van olyan $0 \neq x \in \mathbf{V}$, hogy $0 = Q_M(x)$, akkor van olyan $y \in \mathbf{V}$, hogy $0 > Q_M(y)$. Ugyanis a differenciálegyenlet r_x megoldására $Q_M \circ r_x$ szigorúan monoton fogy, hiszen $(Q_M \circ r_x)^{\cdot} = \overset{\bullet}{Q}_M \circ r_x < 0$.

A továbbiakban M mindig a 29.2.-beli $(*)$ egyenlet egyértelmű megoldását jelöli adott (megfelelő tulajdonságú) B mellett, azaz

$$A^*M + MA = B.$$

29.5. Állítás *Ha az $A \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ minden sajátértékének a valós része negatív és $B \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{V}^*)$ szimmetrikus, negatív definit, akkor a 29.2.-beli $(*)$ egyenlet egyértelmű megoldása szimmetrikus, pozitív definit.*

Bizonyítás A feltételek szerint A semelyik két sajátértékének az összege sem nulla, tehát a szóban forgó egyenletnek van egyértelmű és szimmetrikus megoldása; jelölje ezt M.

Tudjuk, hogy most a 29.4.-beli állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet aszimptotikusan stabil.

Tekintsük a Q_M kvadratikus formát. Erre $\overset{\bullet}{Q}_M = Q_B$, tehát $\overset{\bullet}{Q}_M$-nak szigorú maximuma van a nullában. Ha M nem volna pozitív definit, akkor volna olyan $0 \neq x \in \mathbf{V}$, hogy $0 \geq Q_M(x)$, ezért az előző pont alapján volna olyan $y \in \mathbf{V}$ is, hogy $0 > Q_M(y)$. Nyilván ugyanilyen egyenlőtlenség igaz az y minden valós számszorosára is, tehát Q_M-nek a nullában nincs minimuma. Ezért a 28.4. állítás szerint a 29.4.-beli differenciálegyenlet instasbil, ami ellentmondás. Következésképpen M pozitív definit.

29.6. Állítás *Ha az $A \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ valamely sajátértékének a valós része nemnegatív és bármely két sajátértékének az összege nem nulla, továbbá $B \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{V}^*)$ szimmetrikus, negatív definit, akkor a 29.2. egyenlet egyértelmű megoldása szimmetrikus és nem pozitív szemidefinit.*

Bizonyítás A feltételek szerint létezik az egyenletnek egyetlen megoldása, amely szimmetrikus; jelölje ezt M. Csak azt kell belátnunk, hogy M nem pozitív szemidefinit.

Most a 29.4.-beli állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet nem aszimptotikusan stabil. A Q_M függvényre most is azt kapjuk, hogy $\overset{\bullet}{Q}_M = Q_B$ -nek szigorú maximuma van a nullában. M nem lehet pozitív definit, mert akkor Q_M-nek szigorú minimuma volna a nullában, ami azt jelentené a 28.3. szerint, hogy a lineáris differenciálegyenlet aszimptotikusan stabil. Viszont M nem lehet pozitív szemidefinit sem, mert a 29.4.-beli gondolat alapján van olyan y, hogy $Q_M(y) = (My|y)$ negatív.

29.7. Állítás *Tegyük fel, hogy az $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezésnek van olyan sajátértéke, amelynek a valós része pozitív. Ekkor található olyan $\eta > 0$, hogy minden $0 < \alpha < \eta$ szám és minden $B : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$ szimmetrikus, negatív definit lineáris leképezés esetén az A helyett az $A_\alpha := A-(\alpha/2)I$-vel felírt 29.2.-beli $(*)$ egyenletnek létezik egyetlen szimmetrikus megoldása és az nem pozitív szemidefinit.*

Bizonyítás Legyen λ_o az a sajátértéke A-nak, amelyre $\mu_o := \mathrm{Re}\lambda_o > 0$, és vezessük be a

$$\gamma := \min\{|\lambda + \lambda'| \mid |\lambda + \lambda'| \neq 0 \ \lambda, \lambda' \quad \text{az } A \text{ sajátértéke}\}$$

jelölést. Minthogy van A-nak nullától különböző sajátértéke, a jobb oldalon álló halmaz nem üres (hiszen $\lambda' = \lambda$ nincs kizárva a fenti képletben). Válasszunk ezután egy olyan η pozitív számot, amely egyaránt kisebb μ_o-nál is, γ-nál is.

Legyen $0 < \alpha < \eta$; az A_α lineáris leképezés sajátértékei $\lambda - \alpha/2$ alakúak, ahol λ az A sajátértéke. Bármely két ilyen sajátérték összegére

$$\lambda - \alpha/2 + \lambda' - \alpha/2 = \lambda + \lambda' - \alpha \neq 0,$$

tehát az A_α-val és a szimmetrikus, negatív definit B-vel felírt 29.2.-beli $(*)$ egyenletnek létezik egyetlen megoldása, jelölje ezt M_α. Még azt is tudjuk, hogy M_α is szimmetrikus.

Továbbá $\mathrm{Re}(\lambda_o - \alpha/2) = \mu_o - \alpha/2 > 0$, tehát az

$$(x : \mathbb{R} \to \mathbf{V})? \qquad \dot{x} = A_\alpha x$$

differenciálegyenlet a 27.2. állítás szerint instabil. $\overset{\bullet}{Q}_{M_\alpha} = Q_B$, ennek szigorú maximuma van a nullában, ezért a 28.2. állítás folytán Q_{M_α}-nak nem lehet minimuma a nullában, azaz M_α nem pozitív szemidefinit.

29.8. Az eddigi előkészületek után most már megfogalmazhatjuk, milyen információkat nyerhetünk a differenciálegyenletek linearizálásával a stabilitásról.

Állítás *(i) Ha a* $\mathrm{D}g(x_o)$ *lineáris leképezés minden sajátértékének a valós része negatív, akkor a 29.1.-beli differenciálegyenlet* x_o *egyensúlya aszimptotikusan stabil.*

(ii) Ha a $\mathrm{D}g(x_o)$ *lineáris leképezésnek van pozitív valós részű sajátértéke, akkor a 29.1.-beli differenciálegyenlet* x_o *egyensúlya instabil.*

Bizonyítás Az általánosság megszorítása nélkül vehetjük úgy, hogy $x_o = 0$, hiszen egy egyszerű eltolással – a $z := x - x_o$ helyettesítéssel – transzformálhatjuk a differenciálegyenletet anélkül, hogy bármit is változtatnánk a jobb oldal deriváltján. Vezessük be az $A := \mathrm{D}g(0)$ jelölést, és legyen $B : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$ tetszőleges szimmetrikus, negatív definit lineáris leképezés.

(i) A 29.5. állítás alapján egyetlen olyan $M : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$ szimmetrikus, pozitív definit lineáris leképezés van, amelyre $A^*M + MA = B$. Megmutatjuk, hogy Q_M az eredeti differenciálegyenlet Ljapunov-függvénye, amely biztosítja az aszimptotikus stabilitást.

Felhívjuk a figyelmet, hogy az előző néhány állításban a lineáris differenciálegyenletre vonatkozó $\overset{\bullet}{Q}_M := \mathrm{D}Q_M \cdot A$ játszott fontos szerepet. Most viszont az eredeti nemlineáris differenciálegyenlet áll vizsgálataink középpontjában, ezért itt $\mathrm{D}Q_M \cdot g$ az alapvető; az általános elmélet szerint most ezt kellene $\overset{\bullet}{Q}_M$-tal jelölnünk. A tévedések elkerülése végett azonban kerüljük ezt a jelölést.

Tehát

$$\mathrm{D}Q_M(x) \cdot g(x) = \mathrm{D}Q_M(x) \cdot Ax + \mathrm{D}Q_M(x) \cdot \mathrm{ordo}(x) = (Bx|x) + 2(Mx|\mathrm{ordo}(x)).$$

A 29.3.-ban mondottak szerint ($\beta := \beta_f$) $|(Bx|x)| \geq \beta$, ha $\|x\| = 1$, amiből

$$(*) \qquad |(Bx|x)| \geq \beta\|x\|^2 \qquad (x \in \mathbf{V}).$$

Az ordo függvény tulajdonsága következtében van olyan $\delta > 0$, hogy $\frac{|\mathrm{ordo}(x)|}{\|x\|} < \frac{\beta}{2\|M\|}$, ha $\|x\| < \delta$, tehát

$$2|(Mx|\mathrm{ordo}(x))| \leq 2\|M\|\,\|x\|^2 \frac{|\mathrm{ordo}(x)|}{\|x\|} < |(Bx|x)| \qquad (\|x\| < \delta).$$

Ezek szerint tehát

$$\mathrm{D}Q_M(x) \cdot g(x) < 0 \qquad (\|x\| < \delta).$$

Összefoglalva tehát: M pozitív definit, azaz Q_M-nek szigorú minimuma, $\mathrm{D}Q_M \cdot g$-nek pedig szigorú maximuma van a nullában, ezért a 29.1.-beli differenciálegyenlet egyensúlya aszimptotikusan stabil.

(ii) A 29.7. állítás alapján van olyan $\eta > 0$, hogy tetszőleges $0 < \alpha < \eta$ számhoz létezik egyetlen olyan $M_\alpha : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$ szimmetrikus, nem pozitív szemidefinit lineáris leképezés, amelyre $A_\alpha^* M + M A_\alpha = B$, azaz $A^* M + MA = \alpha M_\alpha + B$.

A következő összefüggések érvényesek:

$$\begin{aligned}\mathrm{D}Q_{M_\alpha}(x) \cdot g(x) &= \mathrm{D}Q_{M_\alpha}(x) \cdot Ax + \mathrm{D}Q_{M_\alpha}(x) \cdot \mathrm{ordo}(x) = \\ &= \alpha(M_\alpha x|x) + (Bx|x) + 2(M_\alpha x|\mathrm{ordo}(x)).\end{aligned}$$

Rögzített α esetén most olyan $\delta > 0$ számot kell választanunk, hogy $\frac{|\mathrm{ordo}(x)|}{\|x\|} < \frac{\beta}{2\|M_\alpha\|}$ teljesüljön, ha $\|x\| < \delta$; ekkor

$$K(x) := (Bx|x) + 2(M_\alpha x|\mathrm{ordo}(x)) < 0 \qquad (\|x\| < \delta),$$

és az $L := Q_{M\alpha}$ függvénynek nincs minimuma a nullában; a 28.5. állítás alapján tehát a 29.1.-beli differenciálegyenlet egyensúlya instabil.

29.9. Foglaljuk össze eredményeinket, hogy pontosan lássuk, mit is tudunk.

Az előző állítás (i) része úgy is megfogalmazható, hogy az eredeti egyenlet x_o egyensúlya aszimptotikusan stabil, ha az x_o-ban linearizált egyenlet aszimptotikusan stabil.

Az állítás (ii) része nem ugyanilyen az instabilitást illetően. Tudjuk ugyanis, hogy a lineáris egyenlet lehet instabil akkor is, ha egyetlen sajátérték valós része sem pozitív: ha valamely nulla valós részű sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása nem egyezik meg. Tehát, ha a linearizált egyenlet instabil, abból nem következik az eredeti egyensúly instabilitása.

Jegyezzük meg jól, hogy a nem aszimptotikus stabilitásról a linearizálás módszere nem ad felvilágosítást: lehet a linearizált rendszer stabil anélkül, hogy az eredeti egyenlet egyensúlya stabil volna.

A 28.11.3. feladat példái kitűnően megvilágítják a helyzetet. Az eredeti egyenletek $(0,0)$ egyensúlya körül linearizált egyenletek

(i) és (iv): $\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -x,$

(ii) és (iii): $\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = 0.$

Megállapíthatjuk, hogy az eredeti egyenlet egyensúlya

(i) aszimptotikusan stabil, a linearizált egyenlet stabil;

(ii) aszimptotikusan stabil, a linearizált egyenlet instabil;

(iii) stabil, a linearizált egyenlet instabil;

(iv) instabil, a linearizált egyenlet stabil.

29.10. A stabilitáselmélet igen tanulságos alkalmazása a centrifugálregulátor működésének vizsgálata.

A gőzgépek működését úgy szabályozták, hogy a csőben, amelyben a gőz áramlik a kazántól a munkatér felé, egy forgatható lapátot helyeztek el, amely állásától függően különböző mértékben akadályozza a gőz áramlását. Ez a lapát egy köringához (forgatható rúdra függesztett nehezék) van csatolva oly módon, hogy minél jobban kilendül a köringa, annál jobban leszűkíti a lapát a cső keresztmetszetét; a köringa pedig a gép munkakerekéhez (a forgó részhez) van csatolva.

Ha a gőzgép működése közben valami miatt több gőz kezd áramlani, vagy csökken a munkaterhelés, akkor gyorsabban forog a munkakerék; emiatt jobban kilendül a köringa; következésképpen a lapát jobban útját állja a gőznek, ami azt eredményezi, hogy csökken az áramló gőz mennyisége: visszaáll a normális működés.

Egyszerűen el lehet mondani, és úgy tűnik, remekül működik ez a visszacsatolás. A matematikai vizsgálatok azonban rámutatnak, hogy nem minden további nélkül jó ez a rendszer.

Jelölje

– φ a köringa kilendülésének a szögét, l a köringa rúdjának a hosszát, m a végén levő tömeget,

– ω a munkakerék szögsebességét, Θ a munkakerék tehetetlenségi nyomatékát, F (a munkavégzés miatt) a rá ható forgatónyomatékot,

– n a munkakerék és a köringa közti áttételt (azaz a munkakerék egy fordulatára a köringa n fordulata jut).

A köringára a felfüggesztésénél súrlódási erő hat, amelyet a köringa szögsebességével arányosnak tételezünk fel; legyen b az arányossági tényező.

A munkakerékre a gőz az átáramlott mennyiségével arányos forgatónyomatékot gyakorol; az átáramlott mennyiség pedig a keresztmetszettel arányos; a lapát φ szögű állásánál a szabad keresztmetszet $\cos\varphi$-vel arányos. Végül is a gőz forgatónyomatékát $k\cos\varphi$ alakban írhatjuk fel.

A munkakerék-köringa rendszerének mozgásegyenlete

$$\begin{aligned} ml\ddot{\varphi} &= mn^2\omega^2 l\sin\varphi\cos\varphi - mg\sin\varphi - b\dot{\varphi},\\ \Theta\dot{\omega} &= k\cos\varphi - F. \end{aligned}$$

Ez némi átrendezés után elsőrendű differenciálegyenlet formájában így írható:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \psi,\\ \dot{\psi} &= n^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi - \frac{g}{l}\sin\varphi - \frac{b}{ml}\psi,\\ \dot{\omega} &= \frac{k}{\Theta}\cos\varphi - \frac{F}{\Theta}. \end{aligned}$$

Ennek a differenciálegyenletnek keressük $(\varphi_o, 0, \omega_o)$ alakú egyensúlyát. Azt kapjuk, hogy

$$\cos\varphi_o = \frac{F}{k} = \frac{g}{n^2 l\omega_o^2},$$

amiből

$$\varphi_o = \arccos\frac{F}{k}, \qquad \omega_o = \sqrt{\frac{gk}{n^2 lF}}.$$

Az elsőrendű differenciálegyenlet jobb oldalának – a (φ, ψ, ω) függvényében megadott $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezésnek – a deriváltja a $(\varphi_o, 0, \omega_o)$ helyen, figyelembe véve a fenti összefüggéseket, a következő:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{gk\sin^2\varphi_o}{lF} & -\frac{b}{lm} & \frac{2g\sin\varphi_o}{l\omega_o} \\ -\frac{k\sin\varphi_o}{\Theta} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ennek λ sajátértékeire a

$$\lambda^3 + \frac{b}{lm}\lambda^2 + \frac{gk\sin^2\varphi_o}{lF}\lambda + \frac{2gk\sin^2\varphi_o}{\Theta l\omega_o} = 0$$

összefüggést kapjuk. A Routh–Hurwitz-kritérium szerint a gyökök valós része akkor és csak akkor negatív (ami biztosítja az egyensúly aszimptotikus stabilitását), ha

$$\frac{b}{lmF} > \frac{2}{\Theta\omega_o},$$

amit át szoktak írni

$$\frac{\omega_o}{2F} > \frac{lm}{b\Theta}$$

alakba, mert itt a bal oldalon az $F \mapsto \omega_o(F) := \sqrt{\frac{gk}{n^2 lF}}$ függvény deriváltjának abszolút értéke áll. Jobb azonban, ha beírjuk ω_o helyébe a megfelelő kifejezést, így közvetlenül a gép adatai között kapunk összefüggést:

$$\frac{b}{l^{3/2}m} > \frac{2nF^{3/2}}{\Theta\sqrt{gk}}.$$

Ez az egyenlőtlenség tehát elégséges (de nem szükséges) feltétele a jó szabályozásnak. Láthatjuk, hogy ha a köringa túl hosszú, a nehezék túl nagy tömegű, vagy kicsi a súrlódás, akkor veszélybe kerülhet a gőzgép megfelelő működése.

29.11. A linearizálás módszere bizonyos esetekben jól használható a 29.1.-beli differenciálegyenlet egyensúlyaiból álló halmaz szigorú aszimptotikus stabilitásának kimutatására is. Ebből a legegyszerűbb – fizikai alkalmazásokban mégis alapvetően fontos – eredményt tárgyaljuk.

Állítás *Legyen $H := \{x_o \in \mathrm{Dom}g \mid g(x_o) = 0\}$, és tegyük fel, hogy*
(i) létezik olyan nem nulla dimenziós $\mathbf{Z}$ valódi lineáris altér $\mathbf{V}$-ben és $a \in \mathbf{V}$, hogy $H = (a + \mathbf{Z}) \cap \mathrm{Dom}g$,
(ii) minden $x \in H$ esetén $\mathrm{D}g(x)$-nek
– a magja (a nulla sajátértékű sajátaltere) $\mathbf{Z}$,
– a nulla sajátértékének algebrai és geometriai multiplicitása egyenlő,
– minden nem nulla sajátértékének valós része negatív.
Ekkor H szigorúan aszimptotikusan stabil.

Bizonyítás Legyen x_o a H tetszőleges eleme. Meg kell mutatnuk, hogy x_o stabil egyensúly és van olyan környezete, hogy az abból induló megoldások végtelenbeli határértéke a $\overline{H}$ eleme. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $x_o = 0$.

A feltétel szerint $\mathrm{Ker}(Dg(0)) = \mathbf{Z}$. Jelölje $\mathbf{U}$ a $\mathrm{D}g(0)$ nem nulla sajátértékeinek megfelelő sajátalterek és esetleges hátteraltereik kifeszítette alteret. Minthogy a nulla sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása egyenlő, $\mathbf{U}$ és $\mathbf{Z}$ kiegészítő alterek. Legyen $G : \mathbf{V} \to \mathbf{U} \times \mathbf{Z}$ az a lineáris bijekció, amely a vektorokhoz a megfelelő vetületeket rendeli.

Transzformáljuk a differenciálegyenletet G-vel. Az $(a, b) := G \circ g \circ G^{-1}$ jelöléssel az alábbi differenciálegyenletet kapjuk:

$$((u, z) : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{U} \times \mathbf{Z})? \qquad \dot{u} = a(u, z), \quad \dot{z} = b(u, z).$$

Azt tudjuk, hogy ezen differenciálegyenlet egyensúlyainak halmaza $(\{0\} \times \mathbf{Z}) \cap \mathrm{Dom}(a, b)$, azaz $a(0, z) = 0$, $b(0, z) = 0$ minden szóba jövő z esetén, és most a $(0, 0)$ egyesúlyt vizsgáljuk.

Az $\mathbf{U}$ altér választása szerint

$$\begin{pmatrix} \mathrm{D}_{\mathbf{U}}a(0,0) & \mathrm{D}_{\mathbf{Z}}a(0,0) \\ \mathrm{D}_{\mathbf{U}}b(0,0) & \mathrm{D}_{\mathbf{Z}}b(0,0) \end{pmatrix} = G\mathrm{D}g(0)G^{-1} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ahol $A : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ olyan lineáris leképezés, amelynek minden sajátértéke negatív valós részű.

Következésképpen – a differenciálhatóság definíciója alapján –

$$a(u, z) = a(0, 0) + \mathrm{D}_{\mathbf{U}}a(0, 0)u + \mathrm{D}_{\mathbf{Z}}a(0, 0)z + \mathrm{ordo}(u, z) = Au + \mathrm{ordo}(u, z).$$

A továbbiak szempontjából célszerű lesz az $\mathrm{ordo}(u, z) = \|u\|\alpha(u, z)$ formát használnunk, ahol $\lim_{(u,z)\to 0} \alpha(u, z) = 0$.

Hasonlóan láthatjuk, hogy b maga "kisordó" függvény, amelyet az előzővel összhangban $b(u, z) = \|u\|\beta(u, z)$ alakban írunk.

Ezekkel a jelölésekkel tehát a differenciálegyenletünk az

$$(*) \qquad ((u,z)\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{U}\times\mathbf{Z})? \qquad \begin{aligned}\dot u &= Au + \|u\|\alpha(u,z),\\ \dot z &= \|u\|\beta(u,z)\end{aligned}$$

alakot ölti.

Vegyünk egy tetszőleges $B : \mathbf{U} \to \mathbf{U}^*$ szimmetrikus, negatív definit lineáris leképezést. Ekkor a 29.5. szerint van egyetlen olyan $M : \mathbf{U} \to \mathbf{U}^*$ szimmetrikus, pozitív definit lineáris leképezés, hogy $A^*M + MA = B$. A 29.3. alapján $B+2\sigma M$ negatív definit, ha $\sigma > 0$ elég kicsi. Vegyünk egy ilyen σ-t, és legyen $\rho > 0$ olyan, hogy

$$Q_{B+2\sigma M}(u) := \big((B+2\sigma M)u \mid u\big) \le -\rho\|u\|^2$$

minden $u \in \mathbf{U}$ esetén.

Mivel α határértéke a nullában nulla, van olyan $\eta > 0$, hogy

$$\|\alpha(u,z)\| < \frac{\rho}{4\|M\|}, \qquad \text{ha} \qquad (\|u\| < \eta,\ \|z\| < \eta),$$

továbbá létezik $K > 0$ úgy, hogy

$$\|\beta(u,z)\| \le K, \qquad \text{ha} \qquad (\|u\| < \eta,\ \|z\| < \eta).$$

Vegyünk egy az η-nál kisebb δ pozitív számot. Legyen (p,q) a $(*)$ differenciálegyenlet olyan maximális megoldása, amelyre

$$\|p(0)\| < \delta(<\eta), \quad \|q(0)\| < \delta(<\eta).$$

Vezessük be a

$$\hat p(t) := e^{\sigma t}p(t) \qquad (t \in \operatorname{Dom} p)$$

függvényt. Erre

$$\dot{\hat p}(t) = \sigma\hat p(t) + A\hat p(t) + \|\hat p(t)\|\alpha(p(t),q(t))$$

teljesül, továbbá $\hat p(0) = p(0)$; a megoldás folytonossága miatt pedig van olyan $[0,T]$ intervallum, hogy

$$\|\hat p(t)\| \le \eta, \quad \|q(t)\| \le \eta \qquad (t \in [0,T]).$$

Ekkor persze az is igaz, hogy ilyen t-kre $\|p(t)\| \le \eta$.

Egyszerű számolás adja, hogy

$$(Q_M \circ \hat p)\dot{}(t) = Q_{B+2\sigma M}(\hat p(t)) + 2\big(\hat p(t) \mid M\,\|\hat p(t)\|\alpha(p(t),q(t))\big).$$

A jobb oldal első tagja kisebb vagy egyenlő mint $-\rho\|\hat{p}(t)\|^2$, a második tag abszolút értéke pedig kisebb, mint $2\|M\|\,\|\hat{p}(t)\|^2\rho/(4\|M\|) = (\rho/2)\|\hat{p}(t)\|^2$. Ezért az összeg biztosan negatív, azaz

$$(Q_M \circ \hat{p})^{\cdot}(t) < 0 \qquad (t \in [0,T]),$$

vagyis $Q_M \circ \hat{p}$ szigorúan monoton csökken a $[0,T]$ intervallumon.

M pozitív definit, ezért van olyan $\mu > 0$, hogy $\mu\|u\|^2 \le Q_M(u)$ minden $u \in \mathbf{U}$ esetén. Ezt és az előző eredményünket a

$$\mu\|\hat{p}(t)\|^2 \le Q_M(\hat{p}(t)) < Q_M(p(0)) \le \|M\|\delta^2$$

egyenlőtlenségben foglalhatjuk össze, amiből a $\kappa := \sqrt{\|M\|/\mu}\,(\ge 1)$ jelöléssel

$$\|\hat{p}(t)\| \le \kappa\delta \qquad (t \in [0,T])$$

adódik. Még inkább igaz, hogy

$$\|p(t)\| \le \kappa\delta \qquad (t \in [0,T]).$$

Továbbá a

$$q(t) = q(0) + \int_0^t e^{-\sigma s}\|\hat{p}(s)\|\beta(p(s), q(s))\,ds$$

összefüggésből, lévén az integrandus normája kisebb, mint $e^{-\sigma s}K\kappa\delta$, a

$$\|q(t)\| \le \left(1 + \frac{K\kappa}{\sigma}\right)\delta \qquad (t \in [0,T])$$

egyenlőtlenség adódik.

Legyen ϵ az η-nál kisebb tetszőleges pozitív szám, és válasszuk a $\delta_\epsilon > 0$ számot úgy, hogy

$$\left(1 + \frac{K\kappa}{\sigma}\right)\delta_\epsilon < \epsilon, \quad \text{és} \quad \kappa\delta_\epsilon < \epsilon$$

teljesüljön. Minthogy κ nem kisebb 1-nél, az is igaz, hogy $\delta_\epsilon < \epsilon < \eta$.

Ha $\|p(0)\| < \delta_\epsilon$, $\|q(0)\| < \delta_\epsilon$, akkor az előzőek szerint

$$\|\hat{p}(t)\| < \epsilon, \quad \|p(t)\| < \epsilon,\ \|q(t)\| < \epsilon \qquad (t \in [0,T]).$$

Ebből az következik, hogy a megoldás értelmezési tartományában levő minden t-re fennállnak ezek az egyenlőtlenségek; ugyanis ha valamely t'-re valahol egyenlőség állna, a megoldások normája akkor sem lenne nagyobb η-nál, amiből viszont a becsléseink alapján ismét megkapnánk, hogy a normák kisebbek ϵ-nál. Ebből a maximális megoldások határtól határig terjedése miatt megállapíthatjuk, hogy a megoldások az egész $[0,\infty[$ intervallumon értelmezve vannak, és a fenti egyenlőtlenségek alapján a $(0,0)$ egyensúly stabil.

Azt is látjuk, hogy ha p a nullának egy környezetéből indul, akkor $\hat{p}$ korlátos, és $p(t)=e^{-\alpha t}\hat{p}(t)$ folytán

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = 0.$$

Továbbá a q normájára vonatkozó korábbi becslésünk alapján látjuk, hogy létezik

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = q(0) + \int_0^\infty e^{-\sigma s}\|\hat{p}(s)\|\beta(p(s),q(s))\,ds.$$

Ezek azt jelentik, hogy a $(0,0)$ egy környezetéből induló megoldásoknak létezik a határértéke a végtelenben, és ez benne van a $(\{0\}\times \mathbf{Z})\cap\overline{\mathrm{Dom}(a,b)}$ halmazban. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

29.12. Feladatok

1. Keressük meg az alábbi $(x,y):\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbb{R}^2$ függvényekre felírt differenciálegyenletek egyensúlyait és vizsgáljuk meg stabilitásukat:

(i) $\dot{x}=e^{x+y}-1, \quad \dot{y}=\sin(x+y);$

(ii) $\dot{x}=e^{x}-1, \quad \dot{y}=\sin(x+y);$

(iii) $\dot{x}=2x-y^2-xy, \quad \dot{y}=-x+xy;$

(iv) $\dot{x}=y-p(x^3/3-x), \quad \dot{y}=-x$, ahol p valós szám.

2. Mutassuk meg a linearizálás módszerével, hogy egy merev testnek a középső tehetetlenségi tengelye körüli szabad forgása instabil.

3. Szigorúan aszimptotikusan stabil-e a következő differenciálegyenletk egyensúlyainak halmaza:

$$((x,y):\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbb{R}^2)? \qquad \dot{x}=(1-x)^3, \quad \dot{y}=(1-x)^2,$$

$$((x,y):\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbb{R}^+\times\mathbb{R})? \qquad \dot{x}=xy^2, \quad \dot{y}=-\frac{y}{x}.$$

30. Bifurkáció

30.1. Tudjuk, hogy a megoldások folytonosan, sőt alkalmas feltételek mellett differenciálhatóan függnek a paraméterektől; vajon hogyan függ tőlük az egyensúlyok stabilitása?

Először nézzünk néhány érdekes és tanulságos példát $x:\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbb{R}$ függvényekre felírt differenciálegyenletekre.

30.2. Az

$$\dot{x}=x^2-p$$

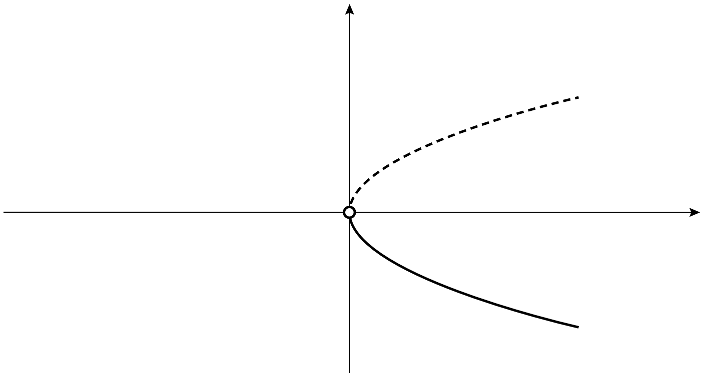
differenciálegyenletnek

– nincs egyensúlya, ha $p < 0$;

– egy instabil egyensúlya van, a 0, ha $p = 0$;

– két egyensúlya van, $\sqrt{p}$ és $-\sqrt{p}$, ha $p > 0$. Ezek közül az első instabil, a második aszimptotikusan stabil.

Az 1. ábra – az úgynevezett bifurkációs diagram – mutatja az egyensúlyokat a p függvényében; a folytonos vonal az aszimptotikusan stabil egyensúlyokat jelzi, a szaggatott vonal pedig az instabil egyensúlyokat. Találkozásuknál az üres köröcske azt jelenti, hogy az a pont instabil. Tele köröcskével stabil pontokat jelölünk majd.



1. ábra

30.3. Az

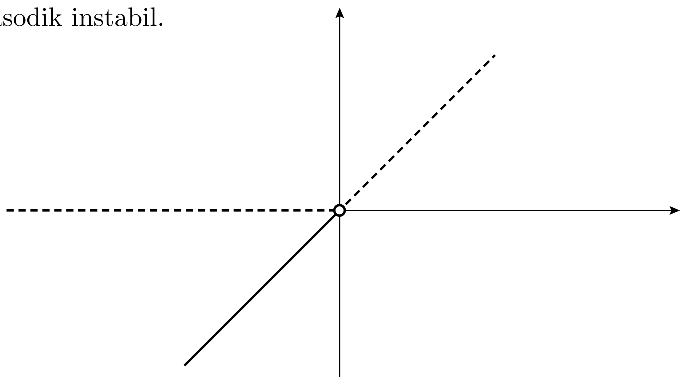
$$\dot{x} = x^2 - px$$

differenciálegyenletnek

– két egyensúlya van, a 0 és p, ha $p < 0$, ezek közül az első instabil, a második aszimptotikusan stabil;

– egy instabil egyensúlya van, a 0, ha $p = 0$;

– két egyensúlya van, a 0 és p, ha $p > 0$, ezek közül az első aszimptotikusan stabil, a második instabil.



2. ábra

30.4. Vizsgáljuk az

$$\dot{x} = -x^3 + x + p$$

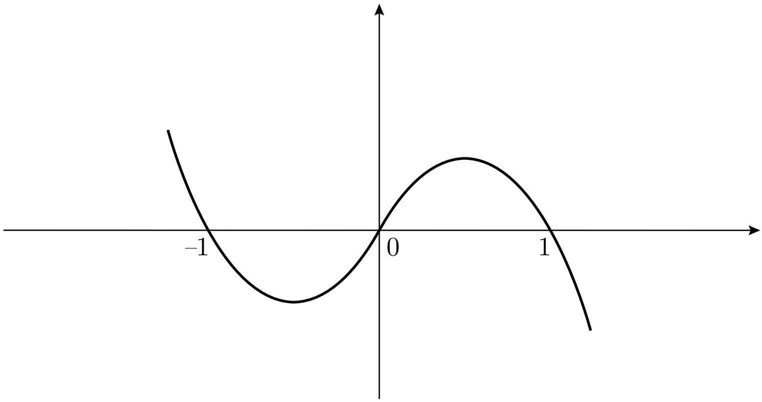
differenciálegyenlet egyensúlyait, vagyis a jobb oldali polinomnak a gyökeit. A Cardano-képlet alapján ismert, hogy

– ha $|p| > 2/(3\sqrt{3})$, akkor egy valós gyök van;

– ha $|p| = 2/(3\sqrt{3})$, akkor három valós gyök van, amelyek közül kettő megegyezik;

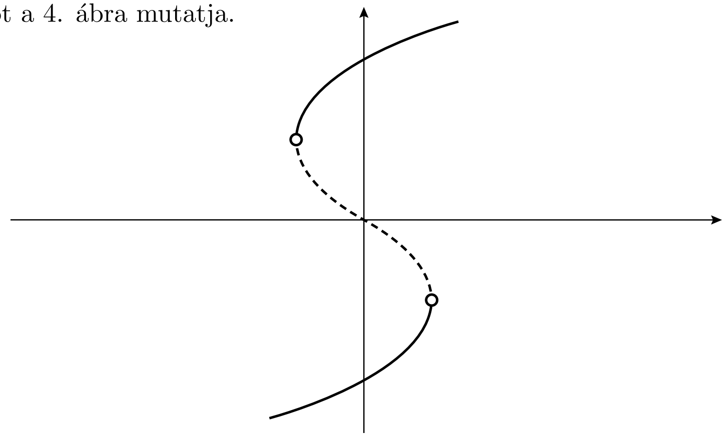
– ha $|p| < 2/(3\sqrt{3})$, akkor három különböző valós gyök van.

A polinom grafikonja a 3. ábrán látható grafikonnak ($p = 0$ eset) az eltoltja.



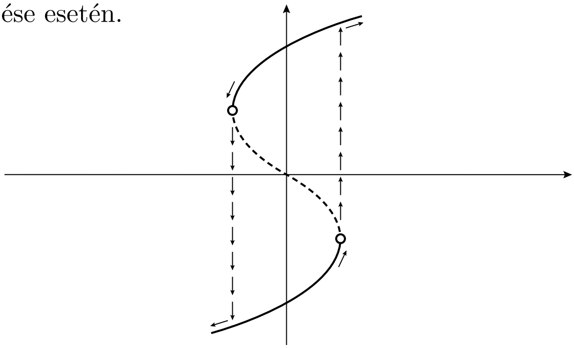
3. ábra

A 28.11.1. feladat eredménye alapján megállapíthatjuk, hogy ha egy gyök van, az aszimptotikusan stabil; ha három gyök közül kettő egybeesik, akkor az egybeeső gyökök instabilak, a harmadik aszimptotikusan stabil; ha három különböző gyök van, akkor a két szélső aszimptotikusan stabil, a középső instabil. A bifurkációs diagramot a 4. ábra mutatja.



4. ábra

Ez a hiszterézis jelenségének felel meg. Gondoljuk meg, hogy valamely x mennyiség változását a fenti differenciálegyenlet írja le egy p "külső" paraméter függvényében. Adott p értéknél a szóban forgó mennyiség az x_p egyensúlyi értékét veszi fel. Megváltoztatjuk egy kicsit a paraméter értékét p'-re. Ezen új viszonyok között x_p mint kezdeti állapot nem egyensúlyi, azaz x változni fog. Ha p és p' elég közel vannak egymáshoz, akkor az x mennyiség értéke az idő múlásával be fog állni az x_p-hez közeli $x_{p'}$ egyensúlyba. Ha azonban p "nagyon közel van" a kritikus $2/(3\sqrt{3})$ értékhez, akkor a paraméterben egy kis változtatás is azt eredményezheti, hogy p és p' közrefogja a kritikus értéket. Ekkor az x mennyiség az x_p-től távoli egyensúlyhoz fog törekedni. Az 5. ábrán vékony, nyilazott vonal szemlélteti az egyensúlyok egymásutánját a paraméterérték folyamatos növelése, illetve csökkentése esetén.



5. ábra

30.5. (i) Az

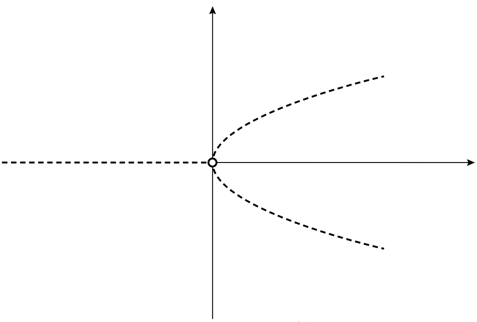
$$\dot{x} = x^3 - px$$

differenciálegyenletnek

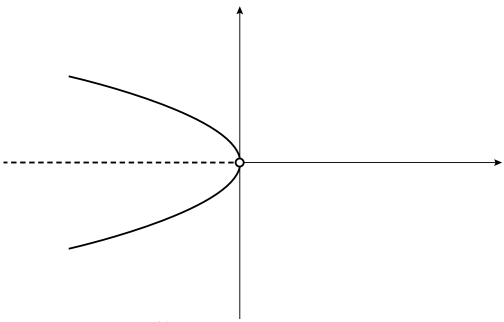
– egy instabil egyensúlya van, a 0, ha $p \leq 0$;

– három egyensúlya van, a 0, a $\sqrt{p}$ és a $-\sqrt{p}$, ha $p > 0$; ezek közül a 0 aszimptotikusan stabil, a másik kettő instabil (lásd a 6. ábrát).

Ez a **vasvilla-bifurkáció** világítja meg a bifurkáció elnevezés eredetét: bifurkáció elágazást jelent.



6. ábra



7. ábra

(ii) A fordított vasvilla-bifurkáció az

$$\dot{x} = -x^3 - px$$

differenciálegyenletnek felel meg (lásd a 7. ábrát); ennek

– három egyensúlya van, a 0, a $\sqrt{-p}$ és a $-\sqrt{-p}$, ha $p < 0$, ezek közül a 0 instabil, a másik kettő aszimptotikusan stabil;

– egy aszimptotikusan stabil egyensúlya van, a 0, ha $p \geq 0$.

Azt szokás mondani, hogy az (i) esetben **szubkritikus** bifurkáció van: szétágazik egy instabil egyensúly, miközben stabillá válik; az (ii) esetben a bifurkáció **szuperkritikus**: egy stabil egyensúly szétágazik, miközben instabillá válik.

30.6. Utolsó példánk az Andronov–Hopf bifurkáció, amely az

$$((x, y) : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^2)? \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= -y + x\big(-p + \eta(x^2 + y^2)\big), \\ \dot{y} &= x + y\big(-p + \eta(x^2 + y^2)\big) \end{aligned}$$

differenciálegyenlet egyensúlyaira vonatkozik, ahol $\eta = \pm 1$.

Polárkoordinátákra áttérve a differenciálegyenletet

$$((r, \varphi) : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^2)? \qquad \begin{aligned} \dot{r} &= r(-p + \eta r^2), \\ \dot{\varphi} &= 1 \end{aligned}$$

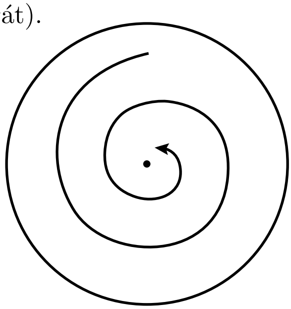
alakúra transzformálhatjuk. (Pontosabban, eredeti értelmét tekintve (r, φ) értékkészlete csak az $\mathbb{R}^+ \times] - \pi, \pi[$ halmazba eshet; így a fenti differenciálegyenlet a transzformált differenciálegyenlet kiterjesztése, általa megszabadulunk a feladat lényegét nem érintő korlátozásoktól.)

Az r-re vonatkozó egyenlet η két értékére éppen a kétféle vasvilla-bifurkációnak felel meg. A φ-re vonatkozó egyenlet pedig azt mutatja, hogy a polárszög "egyenletesen forog az időben".

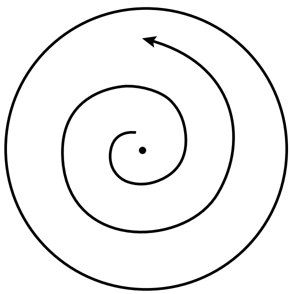
Vegyük közelebbről szemügyre az $\eta = 1$ esetet, és "fordítsuk vissza" a polárkoordinátás alakból látszó eredményeket az eredeti koordinátákra:

– ha $p \leq 0$, akkor az origó az egyetlen egyensúly, ez instabil;

– ha $p > 0$, akkor az origó aszimptotikusan stabil egyensúly, és a $\sqrt{p}$ sugarú kör instabil "határciklus", azaz olyan halmaz, amely egy periodikus megoldás fázisgörbéje, és mint halmaz instabil (lásd 26.9.6.); a megoldások "letekerednek" róla (lásd a 8. ábrát).



8. ábra



9.ábra

Az $\eta = -1$ esetben

– ha $p < 0$, akkor az origó instabil egyensúly, és a $\sqrt{p}$ sugarú kör aszimptotikusan stabil "határciklus", azaz olyan halmaz, amely egy periodikus megoldás fázisgörbéje és mint halmaz aszimptotikusan stabil (lásd 26.12.6.); a megoldások "rátekerednek" (lásd a 9. ábrát);

– ha $p \geq 0$, akkor az origó az egyetlen egyensúly, ez aszimptotikusan stabil.

30.7. Térjünk most rá a bifurkációk egy általános jellemzésére.

Tegyük fel, hogy P egy $\mathbf{U}$ véges dimenziós vektortér nyílt részhalmaza, D a $\mathbf{V}$ nyílt részhalmaza és $P \times D \rightarrowtail \mathbf{V}, (p,x) \mapsto g_p(x)$ kétszer folytonosan differenciálható. Tekintsük az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \qquad \dot{x} = g_p(x)$$

differenciálegyenletet. Tegyük fel, hogy a P valamely eleme – amelyet a továbbiakban az általánosság megszorítása nélkül 0-nak veszünk – esetén van olyan x_0, hogy $g_0(x_0) = 0$. Igaz-e, hogy a 0 egy környezetében levő p-kre létezik x_p úgy, hogy $g_p(x_p) = 0$, és ha igen, hogyan viszonylanak az x_p egyensúly stabilitási tulajdonságai az x_0 stabilitási tulajdonságaihoz?

Állítás *Ha $\mathrm{D}g_0(x_0)$ injektív, akkor van olyan, az $\mathbf{U}$ nullájának egy környezetében egyértelműen meghatározott folytonosan differenciálható $p \mapsto x_p \in \mathbf{V}$ leképezés, hogy $g_p(x_p) = 0$.*

Továbbá, ha $\mathrm{D}g_0(x_0)$ minden sajátértékének a valós része nem nulla, akkor van olyan környezet is, hogy az abban levő p-kre az x_p egyensúly stabilitási tulajdonságai megegyeznek az x_0 stabilitási tulajdonságaival.

Bizonyítás Mivel $\mathbf{V}$ véges dimenziós, a $\mathrm{D}g_0(x_0) : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezés bijektív is és természetesen az inverzével együtt folytonos. Ez pedig azt jelenti, hogy az $\mathbf{U} \times \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbf{V}, \quad (p,x) \mapsto g_p(x)$ függvénynek a második változója szerinti parciális deriváltja $(0,x_0)$-ban eleget tesz az implicitfüggvény-tétel követelményeinek (Analízis IV.B.7.2.); létezik tehát az $\mathbf{U}$ nullájának egy környezetén értelmezett $p \mapsto x_p$ folytonosan differenciálható leképezés úgy, hogy $g_p(x_p) = 0$.

Minthogy a sajátértékek folytonosan függnek a lineáris leképezésektől, ha p elég közel van 0-hoz, akkor $\mathrm{D}g_p(x_p)$ sajátértékei elég közel vannak $\mathrm{D}g_0(x_0)$ sajátértékeihez, ami azt jelenti az adott feltétel mellett, hogy a megfelelő sajtátértékek valós részeinek előlejele megegyezik. Azt pedig tudjuk, hogy a differenciálegyenlet jobb oldalának deriváltja egyértelműen jellemzi a stabilitási tulajdonságot, ha nincs nulla valós részű sajátértéke (29.8.állítás). ■

Bifurkáció – elágazás vagy stabilitási tulajdonság változása – tehát csak olyan egyensúlyban lehet, ahol a differenciálegyenlet jobb oldalának deriváltja nulla valós részű sajátértékkel is rendelkezik.

30.8. Feladatok

1. Vizsgáljuk meg az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad \dot{x} = -x^3 + (mp+1)x + p$$

differenciálegyenlet egyensúlyait a $p \in \mathbb{R}$ függvényében, ahol m rögzített valós szám. Tárgyaljuk külön az $m > 1$, $m = 1$, $m < 1$ eseteket. Rajzoljuk fel a bifurkációs diagramokat (vagyis szemléltessük a $p \mapsto X_p$ függvényt, ahol X_p a p értéknek megfelelő egyensúlyok halmaza).

2. Vizsgáljuk meg az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad \dot{x} = -x^3 + ax + b$$

differenciálegyenlet egyensúlyait az $a, b \in \mathbb{R}$ függvényében. Rajzoljuk fel a bifurkációs diagramot (amit most három dimenzióban tudunk szemléltetni).

3. Vázoljuk fel az $(x_1, x_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ függvényekre felírt alábbi differenciálegyenletek bifurkációs diagramját $p \in \mathbb{R}$ függvényében:

(i) $\dot{x}_1 = px_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + px_2;$

(ii) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + x_1^2 - p;$

(iii) $\dot{x}_1 = 3px_1 - 3px_2 - x_1^2 - x_2^2, \quad \dot{x}_2 = px_1 - x_2.$

VII. ELSŐRENDŰ PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

31. Kvázilineáris egyenletek

31.1 Legyen továbbra is $\mathbf{V}$ véges dimenziós vektortér. Emlékeztetünk, hogy ha $u : \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbb{R}$ differenciálható függvény, akkor $\mathrm{D}u(x) : \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, azaz $\mathrm{D}u(x) \in \mathbf{V}^*$.

Definíció *Legyen $f : \mathbf{V} \times \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V}$ és $h : \mathbf{V} \times \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ folytonos függvény. Az*

$$(u : \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad \mathrm{D}u \cdot (f \circ (\mathrm{id}_{\mathbf{V}}, u)) = h \circ (\mathrm{id}_{\mathbf{V}}, u)$$

elsőrendű kvázilineáris parciális differenciálegyenlet értelmezési tartománya *a* $\mathrm{Dom}f \cap \mathrm{Dom}h$ *halmaz. A differenciálegyenlet* ***megoldásán*** *olyan – nyílt halmazon értelmezett – $\phi : \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvényt értünk, amelynek grafikonja benne van a differenciálegyenlet értelmezési tartományában és*

$$\mathrm{D}\phi(x) \cdot f(x, \phi(x)) = h(x, \phi(x)) \qquad (x \in \mathrm{Dom}\ \phi).$$

A parciális elnevezés onnan ered, hogy a $\mathbf{V} = \mathbb{R}^N$ esetben a bal oldalon

$$\sum_{i=1}^{N} (\partial_i u)\, f_i(\cdot, u)$$

jelenik meg. A kvázilineáris jelző pedig arra utal, hogy a differenciálegyenlet az ismeretlen függvény deriváltjában lineáris.

A közönséges differenciálegyenleteknél megszokott módon konkrétan megadott függvények esetén szokás a változót is feltüntetni a differenciálegyenletben, vagyis azt írni, hogy $\mathrm{D}u \cdot f(x, u) = h(x, u)$.

31.2. Definíció *A fenti kvázilineáris parciális differenciálegyenlet* ***karakterisztikus differenciálegyenletén*** *az*

$$((x,u) : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V} \times \mathbb{R})? \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u), \\ \dot{u} &= h(x,u) \end{aligned}$$

közönséges differenciálegyenletet értjük. A karakterisztikus differenciálegyenlet megoldásának fázisgörbéjét ***karakterisztikus görbének*** *nevezzük.*

A karakterisztikus differenciálegyenlet autonóm differenciálegyenlet $\mathbf{V}\times\mathbb{R}$-ben, azaz fázistere $\mathbf{V}\times\mathbb{R}$. Egy (r,γ) karakterisztikus görbe tehát $\mathbf{V}\times\mathbb{R}$-nek, még közelebbről, a kvázilineáris parciális differenciálegyenlet értelmezési tartományának a részhalmaza.

31.3. A kvázilineáris parciális differenciálegyenlet ϕ megoldásának grafikonja a $\mathbf{V}\times\mathbb{R}$ részhalmaza. Megmutatjuk, hogy a megoldás-grafikont a karakterisztikus görbék mintegy "behálózzák": egy felület akkor és csak akkor megoldás grafikonja, ha minden pontján áthalad a felületben fekvő karakterisztikus görbe.

Állítás *A $\phi : \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény akkor és csak akkor megoldása a kvázilineáris parciális differenciálegyenletnek, ha minden $x_o \in \mathrm{Dom}\phi$ esetén van olyan (r,γ) karakterisztikus görbe, hogy $r(0) = x_o$ és $\gamma = \phi \circ r$.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy ϕ a kvázilineáris parciális differenciálegyenlet megoldása, $x_o \in \mathrm{Dom}\phi$. Legyen r az

$$(x : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbf{V})? \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \phi\circ x), \\ x(0) &= x_o \end{aligned}$$

kezdetiérték-probléma megoldása és $\gamma := \phi \circ r$. Egyszerű számolással meggyőződhetünk arról, hogy (r,γ) kielégíti a karakterisztikus differenciálegyenletet, azaz karakterisztikus görbe; tehát ϕ teljesíti a szükséges feltételt.

Tegyük most fel, hogy ϕ teljesíti a szükséges feltételt. Ekkor ϕ grafikonja nyilvánvalóan benne van a differenciálegyenlet értelmezési tartományában. Továbbá egyrészt

$$\dot{\gamma}(0) = (\phi\circ r)^{\cdot}(0) = \mathrm{D}\phi(r(0))\cdot\dot{r}(0) = \mathrm{D}\phi(x_o)\cdot f(x_o,\phi(x_o)),$$

másrészt

$$\dot{\gamma}(0) = h(r(0),\gamma(0)) = h(x_o,\phi(x_o)),$$

következésképpen

$$\mathrm{D}\phi(x_o)\cdot f(x_o,\phi(x_o)) = h(x_o,\phi(x_o)).$$

Ez bármely $x_o \in \mathrm{Dom}\phi$ esetén fennáll, tehát ϕ megoldás.

31.4. Most megfogalmazzuk a kezdetiérték-probléma megfelelőjét, amelyet itt Cauchy-feladatnak szokás nevezni. Közönséges differenciálegyenlet megoldása "egyváltozós" függvény, azaz egydimenziós vektortéren (affin téren) van értelmezve; kezdeti értékét egy pontban, vagyis egy nulla dimenziós részsokaságon írjuk elő. A parciális differenciálegyenlet megoldása N-dimenziós vektortéren értelmezett függvény; kezdeti értékét egy $(N-1)$-dimenziós részsokaságon írjuk elő.

Definíció *Legyen H a $\mathbf{V}$-nek $(N-1)$ dimenziós részsokasága ($N := \dim\mathbf{V}$), és $u_o : H \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Az*

$$(u : \mathbf{V} \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad \mathrm{D}u \cdot f \circ (\mathrm{id}_{\mathbf{V}}, u) = h(\mathrm{id}_{\mathbf{V}}, u),$$
$$u|_H = u_o$$

Cauchy-feladat megoldásán a kvázilineáris parciális differenciálegyenlet olyan ϕ megoldását értjük, amelyre $\phi(z) = u_o(z)$ teljesül minden $z \in H$ esetén.

31.5. A 31.3. állítás sugallja, hogyan állítsuk elő a Cauchy-feladat megoldását: minden $z \in H$ esetén a $(z, u_o(z))$ ponton keresztülfektetünk egy karakterisztikus görbét, és ezeknek a görbéknek az összessége megadja a megoldás grafikonját. Ennek alapján bizonyos feltételek mellett megmutatjuk, hogy a Cauchy-feladatnak létezik egyetlen megoldása a H egy környezetében.

Állítás *Tegyük fel, hogy f, h és u_o folytonosan differenciálhatók, továbbá minden $z \in H$ esetén $f(z, u_o(z)) \notin T_z(H)$ (ez utóbbi szimbólum a H-nak z feletti érintőterét jelöli). Ekkor van a Cauchy-feladatnak egy, a H-t tartalmazó nyílt halmazon értelmezett egyértelmű megoldása.*

Bizonyítás Jelölje $t \mapsto \big(R_t(y,v), \Gamma_t(y,v)\big)$ a karakterisztikus differenciálegyenletnek az $x(0) = y$, $u(0) = v$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását (lásd 23.6.).

Legyen $p : \mathbb{R}^{N-1} \rightarrowtail \mathbf{V}$ a H egy paraméterezése és

$$\nu := u_o \circ p.$$

Az u_o függvény folytonos differenciálhatósága éppen azt jelenti, hogy ν folytonosan differenciálható.

Tudjuk (lásd 21.3.), hogy

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1} \rightarrowtail \mathbf{V} \times \mathbb{R}, \quad (t, \xi) \mapsto \big(R_t, \Gamma_t\big)(p(\xi), \nu(\xi))$$

folytonosan differenciálható. Természetesen folytonosan differenciálható az első komponense, a

$$P : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1} \rightarrowtail \mathbf{V}, \quad (t, \xi) \mapsto R_t(p(\xi), \nu(\xi))$$

függvény is. Mivel ez t-ben eleget tesz a karakterisztikus differenciálegyenlet első komponensének és $R_0(y,v) = y$, a t szerinti és a ξ szerinti parciális deriváltakból könnyen kapjuk, hogy

$$\mathrm{D}P(0,\xi) = \big(f(p(\xi),\nu(\xi)) \quad \mathrm{D}p(\xi)\big),$$

ahol ξ a p értelmezési tartományának bármely eleme, és az $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{N-1} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezést a szokásos mátrixalakban írtuk, azaz ha $(\alpha,\eta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{N-1}$, akkor

$$\mathrm{D}P(0,\xi)(\alpha,\eta) = f(p(\xi),\nu(\xi))\alpha + \mathrm{D}p(\xi)\eta.$$

Tudjuk, hogy $\mathrm{D}p(\xi)$ injektív, és H-nak $p(\xi)$-beli érintőtere éppen $\mathrm{D}p(\xi)$ értékkészlete. Ebből és a H érintőterére kirótt feltételből következik, hogy $\mathrm{D}P(0,\xi)$ injektív; mivel azonos dimenziós vektorterek közötti lineáris leképezés, bijektív is. Ez az inverzfüggvény-tétel folytán azt jelenti, hogy a P értelmezési tartományában levő bármely $(0,\xi)$ egy környezetében P kis diffeomorfizmus. Rögzítsünk egy ξ_o-at, vegyük a $(0,\xi_o)$-nak egy ilyen környezetét, és jelöljük (t,ξ)-vel a környezet elemeit. Legyen U ennek a környezetnek a P általi képe, és jelölje $(\hat{t},\hat{\xi})$ a P itteni inverzét. Ekkor tehát

$$\hat{t}\big(R_t(p(\xi),\nu(\xi))\big) = t, \qquad \hat{\xi}\big(R_t(p(\xi),\nu(\xi))\big) = \xi,$$

speciálisan $\hat{t}(p(\xi)) = 0$.

Az értelmezésből így nyilvánvaló, hogy

$$U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \phi(x) := \Gamma_{\hat{t}(x)}\big(p(\hat{\xi}(x)),\nu(\hat{\xi}(x))\big)$$

a kvázilineáris parciális differenciálegyenlet megoldása és $\phi(z) = u_o(z)$, ha $z \in U \cap H$. A karakterisztikus differenciálegyenlet megoldásainak egyértelműségéből és a 31.3. állításból következik, hogy ϕ az U-ban a Cauchy-feladat egyetlen megoldása. A H részsokaságot az ilyen U nyílt halmazok lefedik. Az egyértelműség miatt az egyes ilyen nyílt halmazon értelmezett megoldások összeilleszthetők (azaz értelmezési tartományaik közös részén megegyeznek); az összes ilyen megoldás összeillesztése az eredeti Cauchy-feladat egyértelmű megoldása lesz a H-t tartalmazó valamely nyílt halmazon.

31.6. Megjegyzések (i) Speciális esetben a Cauchy-feladat is "valódi" kezdetiérték-probléma. Legyen ugyanis $\mathbf{V} = \mathbb{R}\times\mathbf{U}$ és $H = \{t_o\}\times\mathbf{U}$. Ekkor u_o tekinthető az $\mathbf{U}$-n adott függvénynek, és az $u|_H = u_o$ feltételt

$$u(t_o,\cdot) = u_o$$

formában írhatjuk, ami azt jelenti, hogy meg van adva a keresett függvény a t_o "időpontban".

(ii) Ha az $f(z, u_o(z)) \notin T_z(H)$ feltétel nem teljesül, több megoldása is lehet a Cauchy-feladatnak. Például $N = 2$ esetén, ha $\{(z, u_o(z)) \mid z \in H\}$ karakterisztikus görbe, akkor végtelen sok megoldás van.

(iii) A megoldást gyakorlatilag úgy állíthatjuk elő, hogy az

$$x = R_t(p(\xi), \nu(\xi)), \quad u = \Gamma_t(p(\xi), \nu(\xi))$$

egyenlős;gekből t és ξ kiküszöbölésével összefüggést állapítunk meg x és u között.

31.7. Példaként oldjuk meg az

$$(u : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad x_2\partial_1 u - x_1\partial_2 u = 0,$$

$$u(1, \xi) = \xi^2 \qquad (\xi \in \mathbb{R})$$

Cauchy-feladatot.

Itt tehát $H = \{1\} \times \mathbb{R}$, amelynek paraméterezése $p(\xi) = (1, \xi)$, és ennek megfelelően $\nu(\xi) = \xi^2 \quad (\xi \in \mathbb{R})$. A karakterisztikus differenciálegyenlet a megfelelő kezdeti feltételekkel a következő:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & x_1(0) &= 1, \\ \dot{x}_2 &= -x_1, & x_2(0) &= \xi, \\ \dot{u} &= 0, & u(0) &= \xi^2. \end{aligned}$$

Megoldása:

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi \sin t + \cos t, \\ x_2 &= \xi \cos t - \sin t, \\ u &= \xi^2. \end{aligned}$$

Ebből $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$.

31.8. Feladatok

1. Keressük meg az

$$(u : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad x_2\partial_1 u - x_1\partial_2 u = x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$$

kvázilineáris parciális differenciálegyenletnek azt a megoldását, amely eleget tesz az

$$u(0, \xi) = \xi \qquad (\xi \in \mathbb{R})$$

feltételnek.

2. Oldjuk meg az

$$(u : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad \partial_1 u + x_1 x_3 \partial_2 u - x_1 x_2 \partial_3 u = 0,$$

$$u(0,\xi_1,\xi_2)=\xi_1\xi_2 \quad (\xi_1\in\mathbb{R},\xi_2\in\mathbb{R})$$

Cauchy-feladatot.

3. Melyik az a felület $\mathbb{R}^3$-ban, amely átmegy az $\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1+x_2=1, x_3=2\}$ egyenesen és az $(1,-1,0)$ vektorral adott $0\le\alpha\le\pi/2$ szöget zár be? (Tegyük fel, hogy a felületet egy $u:\mathbb{R}^2\rightarrowtail\mathbb{R}$ függvény grafikonja.)

32. Általános egyenletek

32.1. Legyen $F:\mathbf{V}\times\mathbb{R}\times\mathbf{V}^*\rightarrowtail\mathbb{R}$ folytonos függvény, és foglalkozzunk most az

$$(*)\qquad (u:\mathbf{V}\rightarrowtail\mathbb{R})? \qquad F\circ(\mathrm{id}_{\mathbf{V}},u,\mathrm{D}u)=0$$

differenciálegyenlettel; ennek a megoldása olyan – nyílt halmazon értelmezett – $\phi:\mathbf{V}\rightarrowtail\mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, amelyre $\mathrm{Graph}(\phi,\mathrm{D}\phi)\subset\mathrm{Dom}F$ és $F(x,\phi(x),\mathrm{D}\phi(x))=0$ minden $x\in\mathrm{Dom}\phi$ esetén.

E parciális differenciálegyenlet **karakterisztikus differenciálegyenletén** az

$$\big((x,u,d):\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbf{V}\times\mathbb{R}\times\mathbf{V}^*\big)? \qquad \begin{aligned}\dot{x}&=\mathrm{D}_3F(x,u,d),\\ \dot{u}&=(d\mid \mathrm{D}_3F(x,u,d)),\\ \dot{d}&=-\mathrm{D}_1F(x,u,d)-\mathrm{D}_2F(x,u,d)\cdot d\end{aligned}$$

közönséges differenciálegyenletet értjük.

Kérjük az olvasót, ellenőrizze, hogy ebben a differenciálegyenletben minden rendben van: ha $x:\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbf{V}$, akkor $\dot{x}$ értékei $\mathbf{V}$-ben vannak; F-nek a harmadik (azaz $\mathbf{V}^*$-változója) szerinti parciális deriváltja pedig $\mathbf{V}^{**}\equiv\mathbf{V}$ értékű függvény, tehát az első egyenlőség értelmes stb.

A $(*)$ parciális differenciálegyenlet **karakterisztikus sávján** a karakterisztikus differenciálegyenlet olyan (r,γ,ω) megoldását értjük, amelyre $F\circ(r,\gamma,\omega)=0$ teljesül.

Állítás *A $\phi:\mathbf{V}\rightarrowtail\mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény akkor és csak akkor megoldása a $(*)$ parciális differenciálegyenletnek, ha minden $x_o\in\mathrm{Dom}\phi$ esetén van olyan (r,γ,ω) karakterisztikus sáv, hogy $r(0)=x_o$ és $\gamma=\phi\circ r$, $\omega=\mathrm{D}\phi\circ r$.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy ϕ a parciális differenciálegyenlet megoldása, $x_o\in\mathrm{Dom}\phi$. Legyen r az

$$(x:\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbf{V})? \qquad \dot{x}=\mathrm{D}_3F(x,\phi\circ x,\mathrm{D}\phi\circ x),\quad x(0)=x_o$$

kezdetiérték-probléma megoldása és $\gamma := \phi \circ r$, $\omega := \mathrm{D}\phi \circ r$. Egyszerű számolással meggyőződhetünk arról, hogy r és γ kielégíti a karakterisztikus differenciálegyenlet megfelelő részét. Továbbá

$$\dot{\omega} = (\mathrm{D}^2\phi \circ r) \cdot \dot{r}.$$

Az $F \circ (\mathrm{id}_{\mathbf{V}}, \phi, \mathrm{D}\phi) = 0$ egyenlőség differenciálásából azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{D}_3 F \circ (\mathrm{id}_{\mathbf{V}}, \phi, \mathrm{D}\phi) \cdot \mathrm{D}^2\phi = -\mathrm{D}_1 F \circ (\mathrm{id}_{\mathbf{V}}, \phi, \mathrm{D}\phi) - \mathrm{D}_2 F \circ (\mathrm{id}_{\mathbf{V}}, \phi, \mathrm{D}\phi) \cdot \mathrm{D}\phi.$$

Komponáljuk mindkét oldalt az r függvénnyel; a bal oldalon

$$\mathrm{D}_3 F \circ (r, \gamma, \omega) \cdot \mathrm{D}^2\phi \circ r = \dot{r} \cdot (\mathrm{D}^2\phi \circ r) = \dot{\omega}$$

adódik, a jobb oldalon pedig

$$-\mathrm{D}_1 F \circ (r, \gamma, \omega) - \mathrm{D}_2 F \circ (r, \gamma, \omega) \cdot \omega,$$

tehát (r, γ, ω) karakterisztikus sáv, így ϕ teljesíti a szükséges feltételt.

Tegyük most fel, hogy ϕ teljesíti a szükséges feltételt. Ekkor minden $x_o \in \mathrm{Dom}\phi$ esetén van olyan (r, γ, ω) karakterisztikus sáv, hogy $r(0) = x_o$, $\gamma(0) = \phi(x_o)$, $\omega(0) = \mathrm{D}\phi(x_o)$ és persze $F\big(r(0), \gamma(0), \omega(0)\big) = 0$, azaz

$$F\big(x_o, \phi(x_o), \mathrm{D}\phi(x_o)\big) = 0.$$

Ez bármely $x_o \in \mathrm{Dom}\phi$ esetén fennáll, tehát ϕ megoldás.

32.3. A Cauchy-feladatot az általános esetben pontosan úgy fogalmazzuk meg, mint a kvázilineáris parciális differenciálegyenletekre (31.4. definíció). Megoldhatóságáról is hasonlót mondhatunk, mint a 31.5.-ben

Állítás *Tegyük fel, hogy F kétszer folytonosan differenciálható, u_o folytonosan differenciálható, továbbá minden $z \in H$ és $d \in \mathbf{V}^*$ esetén $\mathrm{D}_3 F(z, u_o(z), d) \notin T_z(H)$. Ekkor van a Cauchy-feladatnak egy, a H-t tartalmazó nyílt halmazon értelmezett egyértelmű megoldása.*

Bizonyítás Az F-re kirótt feltétel szerint a karakterisztikus differenciálegyenlet jobb oldala folytonosan differenciálható, ezért a karakterisztikus differenciálegyenlet minden kezdeti feltétel mellett egyértelműen megoldható.

Legyen p és ν ugyanaz, mint a 31.5. bizonyításában. Az

$$\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbf{V}^* \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1}, \quad (\xi, d) \mapsto \big(F(p(\xi), \nu(\xi), d),\ \mathrm{D}p(\xi)^* \cdot d - \mathrm{D}\nu(\xi)\big)$$

függvénynek $\big(\mathrm{D}_3 F(p(\xi), \nu(\xi), d) \quad \mathrm{D}p(\xi)^*\big)$ a $\mathbf{V}^*$-változója szerinti parciális deriváltja, amely az érintőterekre kirótt feltételünkből következően injektív. Ezért az implicitfüggvény-tételből a p értelmezési tartománya minden pontjának egy környezetében létezik egyetlen $\delta : \mathbb{R}^{N-1} \rightarrowtail \mathbf{V}^*$ folytonosan differenciálható függvény, amelyre

$$F(p(\xi), \nu(\xi), \delta(\xi)) = 0, \qquad \mathrm{D}p(\xi)^* \cdot \delta(\xi) - \mathrm{D}\nu(\xi) = 0.$$

Jelölje $t \mapsto \big(R_t(y,v,e),\, \Gamma_t(y,v,e),\, \Omega_t(y,v,e)\big)$ a karakterisztikus differenciálegyenletnek az $x(0) = y$, $u(0) = v$, $d(0) = e$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását.

Ezután ugyanúgy lehet folytatni, mint a 31.5. bizonyításában:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1} \rightarrowtail \mathbf{V}, \quad (t, \xi) \mapsto R_t(p(\xi), \nu(\xi), \delta(\xi))$$

lokálisan injektív, és ha $(\hat{t}, \hat{\xi})$ jelöl egy ilyen lokális inverzet, akkor

$$x \mapsto \Gamma_{\hat{t}(x)}\big(p(\hat{\xi}(x)), \nu(\hat{\xi}(x)), \delta(\hat{\xi}(x))\big)$$

a Cauchy-feladat egyértelmű megoldása a H egy pontjának egy környezetében. Az ilyen megoldások összeillesztéséből megkapjuk a kívánt megoldást. A részleteket az olvasóra bízzuk.

32.4. Tekintsük példaként az

$$(u : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad (\partial_1 u)^2 + (\partial_2 u)^2 = 1, \qquad u(\xi, \xi) = 1 \qquad (\xi \in \mathbb{R})$$

Cauchy-feladatot.

Itt tehát $F(x_1, x_2, u, d_1, d_2) = d_1^2 + d_2^2 - 1$ és $H = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2\}$, amelynek paraméterezése $p(\xi) = (\xi, \xi) \quad (\xi \in \mathbb{R})$; erre $\mathrm{D}p(\xi)^* = (1, 1)$. Továbbá $\nu(\xi) = 1$, amelyre $\mathrm{D}\nu(\xi) = 0$.

H egyenes, amelynek érintőtere minden pontban önmaga. F-nek (d_1, d_2) szerinti parciális deriváltja $2(d_1, d_2)$, és ez benne lehet H-ban (H érintőterében), így az előző állításunknak idevágó feltétele nem teljesül. Látjuk is, hogy a (most ξ-től független)

$$d_1^2 + d_2^2 - 1 = 0, \qquad d_1 + d_2 = 0$$

egyenletnek két megoldása van: $\delta_1 = -\delta_2 = 1/\sqrt{2}$ és $\delta_1 = -\delta_2 = -1/\sqrt{2}$. Ennek megfelelően a karakterisztikus differenciálegyenlet a megfelelő kezdeti feltételekkel a következő:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2d_1, & x_1(0) &= \xi, \\ \dot{x}_2 &= 2d_2, & x_2(0) &= \xi, \\ \dot{u} &= 2(d_1^2 + d_2^2), & u(0) &= 1, \\ \dot{d}_1 &= 0, & d_1(0) &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \dot{d}_2 &= 0, & d_2(0) &= \mp\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Ebből $d_1 = -d_2 = \pm 1/\sqrt{2}$, amelyet betéve az első három egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$x_1 = \pm\sqrt{2}t + \xi, \quad x_2 = \mp\sqrt{2}t + \xi, \quad u = 2t + 1.$$

Innen t és ξ kiküszöbölésével a Cauchy-feladat alábbi két megoldását nyerjük:

$$u(x_1, x_2) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) + 1.$$

32.5. Feladatok

1. A 32.4.-beli példánk differenciálegyenletéhez vegyük az alábbi kezdeti feltételt: $H := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}, \quad u|_H = 0.$

2. Oldjuk meg az

$$(u : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad (\partial_1 u)^2 = x_1 x_2, \qquad u(0, \xi) = \xi \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

Cauchy-feladatot.

3. Oldjuk meg az

$$(u : \mathbb{R}^3 \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad (\partial_1 u)^2 = x_1 x_2, \qquad u(0, \xi, \xi) = \xi \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

Cauchy-feladatot.

4. Keressük meg az

$$(u : \mathbb{R}^3 \rightarrowtail \mathbb{R})? \qquad 2x_1\partial_1 u + x_2\partial_2 u - (\partial_3 u)^2 = 2u, \qquad u(1, \xi, \xi) = 2\xi^2 \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

Caucy-feladat megoldását.