GRUBER TIBOR

# ANALÍZIS VIII.
## Funkcionálanalízis

# Tartalom

# V. KOMPAKT OPERÁTOROK



.

# I. BEVEZETÉS

## 1. Alapvető tudnivalók

**1.1.** A funkcionálanalízis alapstruktúrái a normált terek és speciálisan a skalárszorzatos terek. Az elkövetkezőkben mindig $\mathbb{K}$ feletti vektortereket tekintünk, azaz a valós és komplex terek elméletét, ahol csak lehet, egyszerre tárgyaljuk. Különösen fontos lesz számunkra ezen terek teljessége, így a következő szokásos elnevezéseket vezetjük be.

Definíció *Egy teljes normált teret* ***Banach-térnek****, egy teljes skalárszorzatos teret* ***Hilbert-térnek*** *nevezünk.*

Mint tudjuk (Analízis III.B.7.4.), bámely normált tér teljessé tehető. Egy skalárszorzatos tér teljessé tétele szintén skalárszorzatos tér, azaz a teljessé tett tér normája is skalárszorzatból származtatható; ezt majd a III. fejezetben megmutatjuk.

**1.2.** Emlékeztetünk a következő fogalmakra a vektorterek elméletéből. Az $\boldsymbol{E}$ vektortér $H$ részhalmaza **lineáris burkának** vagy a $H$ által **kifeszített altérnek** nevezzük a $H$-t tartalmazó $\boldsymbol{E}$-beli lineáris alterek metszetét A $H$ halmaz **lineárisan független**, ha minden $x{\in}H$ esetén $x$ nincs benne a $H\setminus\{x\}$ halmaz lineáris burkában. $H$ **generátor** $\boldsymbol{E}$-ben, ha lineáris burka $\boldsymbol{E}$. Egy lineárisan független generátort **algebrai bázisnak** vagy **Hamel-bázisnak** nevezünk. Minden vektortérben létezik Hamel-bázis (Analízis II.3.2.)

Definíció *Legyen* $(\boldsymbol{E},\|.\|)$ *normált tér; ekkor a* $H{\subset}\boldsymbol{E}$ *részhalmaz* ***zárt lineáris burkának*** *nevezzük a* $H$*-t tartalmazó* $\boldsymbol{E}$*-beli zárt lineáris alterek metszetét. A* $H$ *halmaz* ***topologikusan lineárisan független****, ha minden* $x{\in}H$ *esetén* $x$ *nincs benne a* $H\setminus\{x\}$ *halmaz zárt lineáris burkában.* $H$ ***totális*** $\boldsymbol{E}$*-ben, ha zárt lineáris burka* $\boldsymbol{E}$*. Egy topologikusan lineárisan független totális halmazt* ***topologikus algebrai bázisnak*** *vagy* ***Schauder-bázisnak*** *nevezünk.*

Schauder-bázis nem feltétlenül létezik, azaz van olyan normált tér, amelyben nincs topologikus algebrai bázis.

A $H$ lineáris burkát Span$H$-val jelöljük. Ez a legszűkebb lineáris altér, amely tartalmazza $H$-t. A $H$ zárt lineáris burka nyilván zárt lineáris altér, és a legszűkebb, amely tartalmazza $H$-t.

**1. Állítás** *Normált tér lineáris alterének lezártja lineáris altér.*

Bizonyítás Ha $\boldsymbol{L}$ egy normált lineáris altere, akkor (Analízis III.B.4.9.) $\overline{\boldsymbol{L}}+\overline{\boldsymbol{L}}\subset \overline{\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}}=\overline{\boldsymbol{L}}$, és $\lambda\in\mathbb{K}$ esetén $\lambda\overline{\boldsymbol{L}}=\overline{\lambda\boldsymbol{L}}=\overline{\boldsymbol{L}}$ , így $\overline{\boldsymbol{L}}$ is lineáris altér.

**2. Állítás** *Normált térben a $H$ részhalmaz zárt lineáris burka* $\overline{\mathrm{Span}H}$.

Bizonyítás Ez zárt lineáris altér, amely tartalmazza $H$-t, és a legszűkebb ilyen, mert ha $\boldsymbol{M}$ zárt lineáris altér és $H\subset\boldsymbol{M}$, akkor a lineáris burok és a lezárás ismert tulajdonságai szerint $\mathrm{Span}H\subset\boldsymbol{M}$ és $\overline{\mathrm{Span}H}\subset\boldsymbol{M}$. ■

Egy $H$ halmaz tehát pontosan akkor totális $\boldsymbol{E}$-ben, ha a lineáris burka sűrű $\boldsymbol{E}$-ben.

Tudjuk, hogy normált tér véges dimenziós lineáris altere mindig zárt (Analízis III.B.6.3.). Nem zárt lineáris alterekre a 2. fejezetben látunk sok példát.

**1.3.** Ha $\boldsymbol{E}$ és $\boldsymbol{F}$ vektorterek (azonos test felett), akkor az $A{:}\boldsymbol{E}\rightarrowtail\boldsymbol{F}$ lineáris leképezésre $x\in\mathrm{Dom}A$ esetén $A(x)$ helyett szokásosan a tömör $Ax$ jelölést használjuk.

Teljes normált térbe képező folytonos lineáris leképezések egyértelműen kiterjeszthetők folytonos lineáris leképezéssé az értelmezési tartományuk lezártjára. Közelebbről: ha $\boldsymbol{E}$ normált tér, $\boldsymbol{F}$ Banach-tér, $\boldsymbol{L}\subset\boldsymbol{E}$ lineáris altér, $A:\boldsymbol{L}\to\boldsymbol{F}$ folytonos lineáris leképezés, akkor létezik egyetlen $\overline{A}:\overline{\boldsymbol{L}}\to\boldsymbol{F}$ folytonos lineáris leképezés úgy, hogy $A\subset\overline{A}$. Továbbá $\|\overline{A}\|=\|A\|$ teljesül (Analízis III.B.10.5).

**1.4.** Sokszor lesz szükségünk a végtelen összegzés (sorok) következő általánosítására.

**Definíció** *Legyen $I$ nemüres halmaz és jelölje $\mathcal{F}(I)$ az $I$ nemüres véges részhalmazainak halmazát. Az $(\boldsymbol{E},\|\cdot\|)$ normált térbeli $(x_i)_{i\in I}$ rendszert* ***összegezhetőnek*** *nevezzük, ha létezik olyan $x\in\boldsymbol{E}$, hogy minden $\varepsilon>0$ esetén létezik $J_\varepsilon\in\mathcal{F}(I)$ úgy, hogy minden $K\in\mathcal{F}(I)$, $K\supset J_\varepsilon$ esetén*

$$\left\|x-\sum_{i\in K}x_i\right\|<\varepsilon.$$

Egyszerű tény, hogy ha $(x_i)_{i\in I}$ összegezhető, akkor az **összege** vagyis a definícióban szereplő $x$ egyértelmű; ezt a vektort a $\sum\limits_{i\in I}x_i$ szimbólummal jelöljük.

Ha $(x_i)_{i\in I}$ összegezhető, akkor teljesíti a Cauchy-kritériumot: minden $\varepsilon{>}0$ esetén létezik $J_\varepsilon{\in}\mathcal{F}(I)$ úgy, hogy minden $K{\in}\mathcal{F}(I)$, $K{\cap}J_\varepsilon = \emptyset$ esetén $\left\|\sum\limits_{i\in K} x_i\right\|{<}\varepsilon$. (Ha $\boldsymbol{E}$ teljes, akkor ez a feltétel elégséges is ahhoz, hogy a rendszer összegezhető legyen.) Speciálisan $i{\notin}J_\varepsilon$ esetén $\{i\}{\cap}J_\varepsilon = \emptyset$, így $\|x_i\|{<}\varepsilon$, ezért $\{i{\in}I \mid \|x_i\|{\geq}\varepsilon\}$ véges halmaz, hiszen a $J_\varepsilon$ része. Mivel

$$\{i{\in}I \mid x_i{\neq}0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{i{\in}I \mid \|x_i\|{\geq}1/n\},$$

igaz a következő fontos tény.

**Állítás** *Ha $(x_i)_{i\in I}$ összegezhető, akkor az $\{i{\in}I \mid x_i{\neq}0\}$ halmaz legfeljebb megszámlálható.*

Megemlítjük, hogy az $(x_i)_{i\in I}$ összegezhetőségének definíciója egyenértékű azzal, hogy az $I \to \boldsymbol{E}$, $i \mapsto x_i$ függvény integrálható az $I$ számlálómértéke szerint; ezt $\boldsymbol{E} = \mathbb{K}$ esetén az eddigi tanulmányaink alapján az Olvasó egyszerűen beláthatja.

**1.5.** Bizonyos vektortereken nem normát, hanem félnormát tudunk természetes módon megadni.

**Definíció** *Legyen $\boldsymbol{E}$ vektortér. A $p : \boldsymbol{E}{\to}\mathbb{R}_0^+$ leképezés* ***félnorma****, ha minden $x, y{\in}\boldsymbol{E}$ és $\lambda{\in}\mathbb{K}$ esetén*

*(**NP**) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ ,*
*(**NA**) $p(x{+}y){\leq}p(x){+}p(y)$.*

Ha $p$ félnorma az $\boldsymbol{E}$ vektortéren, akkor **NP** szerint $p(0) = 0$, tehát egy félnorma abban különbözik egy normától, hogy nemnulla vektoron is vehet fel nulla értéket.

Hasonlóan, mint normák esetében, beláthatjuk, hogy minden $x, y{\in}\boldsymbol{E}$ esetén

$$|p(x){-}p(y)|{\leq}p(x{-}y). \tag{$*$}$$

A félnorma definíciós tulajdonságaiból következik, hogy $\boldsymbol{N} := \{x{\in}\boldsymbol{E} \mid p(x) = 0\}$ lineáris altér $\boldsymbol{E}$-ben. A $(*)$ összefüggés szerint ha $x - y \in \boldsymbol{N}$, akkor $p(x) = p(y)$, ezért az $\boldsymbol{E}/\boldsymbol{N}$ faktortéren (Analízis II.6.1.) a

$$\hat{p} : \boldsymbol{E}/\boldsymbol{N}{\to}\mathbb{R}_0^+, \quad \hat{p}(x + \boldsymbol{N}) := p(x).$$

leképezés jól definiált, és könnyű belátni, hogy $\hat{p}$ norma $\boldsymbol{E}/\boldsymbol{N}$-n, amelyet a $p$-hez **asszociált normának**, az $(\boldsymbol{E}/\boldsymbol{N}, \hat{p})$ normált teret a $p$-hez **asszociált normált térnek** nevezzük.

**1.6.** A félnormához asszociált normált tér fenti konstrukciójának speciális esete az, ami az Analízis V. B.III.14. fejezetében szerepel.

Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ $\sigma$-véges mértéktér, $(\boldsymbol{E}, |.|)$ normált tér. Emlékeztetünk arra, hogy $\mathcal{B}(\boldsymbol{E})$ (az $\boldsymbol{E}$ Borel-halmazainak összessége) az $\boldsymbol{E}$ nyílt halmazai által generált $\sigma$-algebra. Egy $f : X \to \boldsymbol{E}$ függvényt akkor mondunk mérhetőnek, ha $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\boldsymbol{E})$-mérhető, azaz minden $\boldsymbol{E}$-beli Borel-halmaz $f$ általi ősképe az $\mathcal{A}$ eleme.

Legyen $1 \leq p \leq \infty$ (figyelem: ez a $p$ nem ugyanaz, mint az előbb, vagyis nem félnorma; sajnálatos módon ugyanazt a $p$ szimbólumot szokták használni általában a félnorma jelölésére és itt a kitevőre, és mi is követtük ezt a szokást). Ekkor $1 \leq p < \infty$ esetén

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu; \boldsymbol{E}) := \{f : X \to \boldsymbol{E} \mid f \text{ mérhető és } |f|^p \ \mu\text{-integrálható}\},$$

illetve

$$\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu; \boldsymbol{E}) := \{f : X \to \boldsymbol{E} \mid f \text{ mérhető és } |f| \ \mu\text{-korlátos}\}$$

vektorterek, és

$$\|.|_p : \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu; \boldsymbol{E}) \to \mathbb{R}_0^+, \quad f \mapsto \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

illetve

$$\|.|_\infty : \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu; \boldsymbol{E}) \to \mathbb{R}_0^+, \quad f \mapsto \mu - \text{ess sup}|f|$$

félnorma rajtuk. Továbbá, $1 \leq p \leq \infty$ esetén az

$$\boldsymbol{N} := \{f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu; \boldsymbol{E}) \mid \|f|_p = 0\}$$

altér megegyezik a

$$\boldsymbol{Z} := \{f : X \to \boldsymbol{E} \mid f \text{ mérhető}, f = 0 \ \mu\text{-m.m.}\}$$

altérrel, így az $(\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu; \boldsymbol{E}), \|.|_p)$ félnormált térhez asszociált normált tér éppen az Analízis V.B.III.14.1.-ben definiált $(L^p(X, \mathcal{A}, \mu; \boldsymbol{E}), \|.\|_p)$ tér lesz, mely a Riesz-Fischer-tétel (Analízis V.B.III.15.2.) szerint teljes, azaz Banach-tér, ha $(\boldsymbol{E}, |.|)$ Banach-tér.

Az $L^p(X, \mathcal{A}, \mu; \boldsymbol{E}) := \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu; \boldsymbol{E})/\boldsymbol{N}$ lineáris tér elemei egymással $\mu$-majdnem mindenütt egyenlő függvények ekvivalenciaosztályai, $F \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu; \boldsymbol{E})$ esetén $\|F\|_p := \|f|_p$ , ahol $f \in F$ tetszőleges.

Érdemes azt is felidézni, hogy ha $\mathcal{A}^\mu$ jelöli az $\mathcal{A}$-nak a $\mu$ szerinti teljesítését (Analízis V.B.6.7.), és $\mathcal{A}'$ olyan $\sigma$-algebra, hogy $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}' \subset \mathcal{A}^\mu$, akkor $\mu$ egyértelműen kiterjeszthető $\mathcal{A}'$-ra. Ekkor $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu; \boldsymbol{E}) \subset \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}', \mu; \boldsymbol{E})$ és szigorú tartalmazás áll, ha $\mathcal{A}$ valódi része $\mathcal{A}'$-nak, viszont $L^p(X, \mathcal{A}, \mu; \boldsymbol{E}) = L^p(X, \mathcal{A}', \mu; \boldsymbol{E})$.

**Megjegyzés** Ezután a jelölésből elhagyjuk a $\sigma$-algebrát és a szokásnak megfelelően $L^p_\mu(X, \boldsymbol{E})$-t írunk. Továbbá a matematikában meghonosodott kis pongyolasággal az $L^p_\mu(X, \boldsymbol{E})$ elemeiről mint függvényekről beszélünk (függvényosztályok helyett); tehát amikor azt mondjuk, hogy az $L^p_\mu(X,\boldsymbol{E})$-beli $f$ függvény, akkor az $f$-fel $\mu$-majdnem mindenütt egyenlő függvények osztályára gondolunk.

Ha $\boldsymbol{E} = \mathbb{K}$, akkor $\mathbb{K}$-t is elhagyjuk a jelölésből, kivéve persze, ha hangsúlyozni akarjuk, hogy csak a valós illetve a komplex esetről van szó.

$\mathbb{R}^N$-en a Lebesgue-mérhető halmazok a Borel-féle $\sigma$-algebra Lebesgue-mérték szerinti teljesítésének az elemei. A Lebesgue-mértéket is el szokás hagyni a jelölésből, tehát $L^p(\mathbb{R}^N,\boldsymbol{E})$-t, $L^p(\mathbb{R}^N)$-t írunk.

Emlékeztetünk a már korábbi tanulmányainkban is használt $l^p{:=}L^p(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),s)$ jelölésre, ahol $s$ a számlálómérték; $l^p$ elemei tehát $p=\infty$ esetén a $\mathbb{K}$ értékű korlátos sorozatok, $1 \le p < \infty$ esetén pedig a $p$-edik hatványon (abszolútértékben) összegezhető sorozatok.

Általában, ha $I$ nemüres halmaz, $l^p(I)$-vel jelöljük a korlátos illetve a $p$-edik hatványon az 1.4. értelmében összegezhető $I \to \mathbb{K}$ függvények összességét (a megfelelő normával ellátva).

**1.7.** Fontos tudatosítanunk, hogy az $L^p$-terekben a sorozatok konvergenciája a normában vett konvergenciát jelenti; ezt sokszor jelölésben is hangsúlyozzuk, hogy a függvények köröben megszokott pontontkénti vagy majdnem mindenütti konvergenciától megkülönböztessük.

Ha tehát $f, f_n \in L^p_\mu(X,E)$ $(n{\in}\mathbb{N})$, akkor $f = \lim\limits_n f_n$ az $L^p_\mu(X,E)$-ben – amit röviden így is jelölünk: $f = (L^p)\lim\limits_n f_n$ – azt jelenti, hogy

$$\lim_n \|f-f_n\|_p = 0, \quad \text{másként ugyanez:} \quad \lim_n \int_X |f-f_n|^p \, d\mu = 0.$$

Ha ez teljesül, akkor az $f_n$ sorozatnak van olyan részsorozata, amely pontonként $\mu$-majdnem mindenütt konvergál $f$-hez.

Abból viszont, hogy $f_n$ pontonként $\mu$-majdnem mindenütt konvergál $f$-hez, nem következik, hogy $L^p$-ben is konvergál $f$-hez. Az $n{\mapsto}n\chi_{[-1/n,1/n]}$ sorozat Lebesgue-majdnem mindenütt a nullához tart, viszont semmilyen $p$ esetén sem tart nullához az $L^p(\mathbb{R})$-ben (sehova sem tart, nem konvergens).

**1.8. Feladatok**

1. Legyen $(\boldsymbol{E}, \|\cdot\|)$ normált tér. Emlékeztetünk, hogy az $x \in \boldsymbol{E}$ távolsága a $H \subset \boldsymbol{E}$ részhalmaztól $d(x,H) := \inf\{\|x-y\| \mid y \in H\}$. Mutassuk meg, hogy ha $\boldsymbol{L}$ lineáris altér, akkor minden $0 \ne \lambda \in \mathbb{K}$ esetén $d(\lambda x, \boldsymbol{L}) = |\lambda| d(x,\boldsymbol{L})$. (Útmutatás: $\|\lambda x - y\| = |\lambda|\,\|x - \frac{1}{\lambda}y\|$, és miközben $y$ befutja $\boldsymbol{L}$-et, $\frac{1}{\lambda}y$ is.)

2. Legyen $\boldsymbol{M}$ zárt lineáris altér egy $(\boldsymbol{E}, \|\cdot\|)$ normált térben, és $x \in \boldsymbol{E} \setminus \boldsymbol{M}$. Mutassuk meg, hogy ha $z_n \in \boldsymbol{M}$ és $\lambda_n \in \mathbb{K}$ olyan, hogy $\lim\limits_n(z_n + \lambda_n x) = 0$, akkor $\lim\limits_n \lambda_n = 0$ (következésképpen az is teljesül, hogy $\lim\limits_n z_n = 0$). (Útmutatás: $d(x,\boldsymbol{M}) > 0$, $d(z_n + \lambda_n x, \boldsymbol{M}) = d(\lambda_n x, \boldsymbol{M}) = |\lambda_n| d(x,\boldsymbol{M})$ és $0 = \lim\limits_n d(z_n + \lambda_n x, \boldsymbol{M})$.)

3. Ismert algebrai tény, hogy lineáris alterek komplexus összege lineáris altér. Zárt lineáris alterek komplexus összege is lineáris altér, de nem feltétlenül zárt. Adjunk ellenpéldát az alábbi vázlat alapján!

Legyen az $l^2$-ben $x_n$ az a vektor, amelyben a $(2n-1)$-edik komponens 1, a többi nulla, és $y_n$ az a vektor, amelyben a $2n$-edik komponens 1, a többi nulla ($n \in \mathbb{N}$). Ekkor $\langle x_n, x_m \rangle = \langle y_n, y_m \rangle = \delta_{nm}$, $\langle x_n, y_m \rangle = 0$ minden $n, m \in \mathbb{N}$ esetén.

Legyen $\alpha_n := \cos(1/n)$, $\beta_n := \sin(1/n)$ és $z_n := \alpha_n x_n + \beta_n y_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Ekkor $\langle z_n, z_m \rangle = \delta_{nm}$ $(m, n \in \mathbb{N})$. Jelölje $\boldsymbol{M}$ és $\boldsymbol{N}$ az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ illetve a $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vektorok kifeszítette zárt lineáris alteret. Minthogy $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \beta_n^2 \le \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} 1/n^2 < +\infty$ , $y := \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \beta_n y_n \in l^2$, sőt benne van az $\boldsymbol{M}$ és $\boldsymbol{N}$ kifeszítette zárt lineáris altérben. Tegyük fel, hogy benne van az $\boldsymbol{M}$ és $\boldsymbol{N}$ kifeszítette lineáris altérben (azaz $\boldsymbol{M}$ és $\boldsymbol{N}$ komplexus öszegében), vagyis $y = x+z$, ahol $x \in \boldsymbol{M}$ , $z \in \boldsymbol{N}$. Ekkor (lévén $\langle y_n, z_m \rangle = \delta_{nm}\beta_m$)

$$\beta_n = \langle y_n, y \rangle = \langle y_n, x+z \rangle = \langle y_n, z \rangle = \left\langle y_n, \sum_{m\in\mathbb{N}} \langle z_m, z \rangle z_m \right\rangle = \langle z_n, z \rangle \beta_n$$

amiből $\langle z_n, z \rangle = 1$ minden $n \in N$ esetén, és ez lehetetetlen.

4. Mutassuk meg, hogy

$$e_1 := (1,0,0,0,\dots), \quad e_2 := (0,1,0,0,\dots), \quad e_3 := (0,0,1,0\dots), \quad \dots$$

Schauder-bázist alkotnak $l^p$-ben $1 \le p < \infty$ esetén, azonban az $(1,1,1,1,\dots) \in l^\infty$ nincs benne ezeknek a vektoroknak a zárt lineáris burkában.

5. $l^1$-ben az előbbi vektorok és $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots)$ együtt lineárisan független halmazt alkotnak, amely azonban nem topologikusan lineárisan független.

6. Igazoljuk, hogy ha $H$ egy normált tér részhalmaza, akkor $\overline{\mathrm{Span} H}$-nak elemei a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n x_n$ alakú konvergens összegek, ahol $x_n \in H$ minden $n$-re (a $H$-ból vett konvergens "végtelen lineáris kombinációk"), de általában nem minden eleme ilyen alakú. (A $H := \{\chi_E \mid E \subset [0,1], E$ Lebesgue-mérhető$\}$ halmaz totális $L^1[0,1]$-ben (lásd a következő fejezetet), de az $\mathrm{id}_{[0,1]} \in L^1[0,1]$ függvény nem állítható elő $H$-beli elemek végtelen lineáris kombinációjaként.)

7. Tudjuk, hogy egy $\boldsymbol{E}$ vektortér algebrai bázisán értelmezett, vektortérbe ható leképezés egyértelműen kiterjeszthető az $\boldsymbol{E}$-n értelmezett lineáris leképezéssé. Igaz-e, hogy egy normált tér $\{x_i \mid i \in I\}$ Schauder-bázisán értelmezett, normált térbe ható $A$ korlátos leképezés (azaz létezik $K > 0$, úgy, hogy $\|Ax_i\| \le K\|x_i\|$ minden $i$-re) egyértelműen kiterjeszthető korlátos (azaz folytonos) lineáris leképezéssé? (Vegyük $l^2$-nek a 3. feladatban adott $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ Schauder-bázisát, és legyen $Ae_n := e_1$. Ha $A$ folytonosan kiterjeszthető, akkor $A \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n A e_n = \left( \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \right) e_1$. Van olyan $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, amely négyzetesen felösszegezhető, de nem összegezhető.)

8. Ha egy Schauder-bázison értelmezett leképezés kiterjeszthető az egész térre folytonos lineáris leképezéssé, akkor a kiterjesztés egyértelmű. Ha tehát két folytonos lineáris leképezés megegyezik egy Schauder-bázison, akkor egyenlők.

9. Legyenek $1 \le M < N$ természetes számok. $\mathbb{K}^N$-en az $x \mapsto \sum_{i=1}^{N-M} |x_i|$ leképezés félnorma. Adjuk meg az asszociált normált teret!

10. Legyen $K \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaz. Ekkor az $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ folytonos függvények vektorterén az $f \mapsto \max_{x \in K} |f(x)|$ leképezés félnorma. Adjuk meg az asszociált normált teret!

11. Az általánosított összegzés az általánosított sorozatok határértékének következő fogalmából speciális esetként adódik.

Az $(S, \le)$ rendezett halmazt **felfelé irányítottnak** nevezzük, ha minden kételemű részhalmaza felülről korlátos $S$-ben (azaz bármely két elemhez van olyan elem, amely mindkettőnél nagyobb vagy egyenlő).

Ha $S$ felfelé irányított, akkor minden véges részhalmaza felülről korlátos.

Legyen $(S, \le)$ felfelé irányított rendezett halmaz. Ha $X$ nem üres halmaz, akkor $X^I$ elemeit $X$-beli $X$-ben haladó **általánosított sorozatoknak** nevezzük.

Legyen $(M, d)$ metrikus tér. Az $M$-ben haladó $(x_i)_{i \in I}$ általánosított sorozat **konvergens** és határértéke $a \in M$, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $i_\varepsilon \in I$ úgy, hogy minden $i \in I$, $i \ge i_\varepsilon$ esetén $d(x_i, a) < \varepsilon$. Az $(x_i)_{i \in I}$ általánosított sorozat **Cauchy-féle**, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $i_\varepsilon \in I$ úgy, hogy minden $i \in I$ , $i \ge i_\varepsilon$ és $j \in I$ , $j \ge i_\varepsilon$ esetén $d(x_i, x_j) < \varepsilon$.

Belátható, hogy konvergens általánosított sorozat határértéke egyértelmű. Továbbá, konvergens általánosított sorozat Cauchy-féle, és ha $M$ teljes, akkor fordítva is igaz.

Ha $I$ nemüres halmaz, akkor $(\mathcal{F}(I), \subset)$ felfelé irányított rendezett halmaz: $J, K \in \mathcal{F}(I)$ esetén $J \cup K \in \mathcal{F}(I)$ a $\{J, K\}$ felső korlátja. Az $(x_i)_{i \in I}$ rendszer akkor összegezhető, ha az $\mathcal{F}(I) \to E$ , $J \mapsto \sum_{i \in J} x_i$ általánosított sorozat konvergens.

# 2. Sűrű lineáris alterek

**2.1.** Sokszor vesszük hasznát, ha tudjuk, hogy egy normált térben valamely "jó tulajdonságú" lineáris altér sűrű. Most konkrét Banach-terek egyes sűrű lineáris altereit írjuk le.

Világos, ha egy lineáris altér tartalmaz egy sűrű alteret, akkor maga is sűrű.

Továbbá, ha egy sűrű lineáris altér minden eleme előáll egy másik altérből vett sorozat határértékeként, akkor az a másik lineáris altér is sűrű.

**2.2.** Egyszerű tény, hogy $l^p$-ben $1 \le p < \infty$ esetén a véges sorozatok (vagyis amelyeknek csak véges sok tagja nem nulla) sűrű lineáris alteret alkotnak; $l^\infty$-

ben azonban nem: az $(1,1,1,1,\dots) \in l^\infty$ sorozatnak bármely véges sorozattól a távolsága 1.

**2.3.** Legyen $(X,\mathcal{A},\mu)$ $\sigma$-véges mértéktér, és tekintsük az $L^p_\mu(X)$ Banach-teret, $1 \le p < \infty$ (az $X \to \mathbb{K}$ mérhető és $p$-ik hatványon integrálható függvények – pontosabban függvényosztályok – terét). Ha $\mathcal{S}$ olyan félgyűrű, hogy az általa generált $\sigma$-algebrának a $\mu$ szerinti teljesítése tartalmazza $\mathcal{A}$-t, akkor a $\mu$-integrálható $\mathcal{S}$-lépcsős függvények sűrű lineáris alteret alkotnak $L^p_\mu(X)$-ben (Analízis V.B.15.3.: a $\mathcal{S}$-lépcsős függvények ugyanazok, mint a $\mathcal{R}$-lépcsős függvények, ahol $\mathcal{R}$ az $\mathcal{S}$ gernerálta gyűrű). $L^\infty_\mu(X)$-ben az $\mathcal{A}$-lépcsős függvények sűrűn vannak, de általában az $\mathcal{S}$-lépcsősök nem.

**2.4.** Emlékeztetünk arra, hogy egy $M$ metrikus téren értelmezett $\mathbb{K}$ értékű $f$ folytonos függvény tartója az

$$\overline{\{x \in M \mid f(x) \neq 0\}}$$

halmaz.

**Állítás** *$L^p(\mathbb{R}^N)$-ben $1 \le p < \infty$ esetén a kompakt tartójú folytonos függvények sűrű lineáris alteret alkotnak.*

Bizonyítás Tekintsük először az $N = 1$ esetet. A korlátos intervallumok összessége tartalmaz egy olyan $\mathcal{S}$ félgyűrűt (például az alulról nyílt, felülről zárt korlátos intervallumokat), amely generálja a Borel-halmazokat. Legyen $I := \rfloor a, b\lceil$ korlátos intervallum (mindegy, hogy a végpontok egyike vagy másika hozzátartozik-e vagy sem); ekkor $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\phi_{n,I}(x) := \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le a - \frac{1}{n}, \\ n\left(x - a + \frac{1}{n}\right) & \text{ha } a - \frac{1}{n} < x \le a, \\ 1 & \text{ha } a < x \le b, \\ n\left(b + \frac{1}{n} - x\right) & \text{ha } b < x \le b + \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{ha } b + \frac{1}{n} < x \end{cases}$$

kompakt tartójú folytonos függvény, és

$$\int_{\mathbb{R}} |\phi_{n,I]} - \chi_I|^p =$$

$$= \int_{a-\frac{1}{n}}^{a} n^p \left(x - a + \frac{1}{n}\right)^p dx + \int_{b}^{b+\frac{1}{n}} n^p \left(b + \frac{1}{n} - x\right)^p dx = \frac{2}{n(p+1)},$$

tehát $(L^p) \lim\limits_{n} \phi_{n,I} = \chi_I$.

Ezért a $\sum_{k=1}^{r} c_k \chi_{I_k}$ $\mathcal{S}$-lépcsős függvény a $\left(\sum_{k=1}^{r} c_k \phi_{n,I_k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt tartójú folytonos függvények sorozatának a határértéke, és ezzel bebizonyítottuk, amit akartunk.

Az $N > 1$ esetben az $\mathcal{S}^N$ félgyűrű generálja a Borel-halmazokat. Mivel az $\mathop{\times}_{i=1}^{N} I_i$ tégla karakterisztikus függvénye $(x_1, \ldots, x_N) \mapsto \prod_{i=1}^{N} \chi_{I_i}(x_i)$, ezt az $(x_1, \ldots, x_N) \mapsto \prod_{i=1}^{N} \phi_{n,I_i}(x_i)$ kompakt tartójú foytonos függvények sorozatának határértékeként tudjuk előállítani, és aztán a gondolatmenetet úgy folytathatjuk, mint az $N = 1$ esetben. ■

Megjegyezzük, hogy $\phi_{n,I}$ pontonként $\chi_{\overline{I}}$-hoz tart, tehát $\chi_I$-hez csak majdnem mindenütt konvergál, ha $I$ nem zárt. Olyan sorozatot is gyárthattunk volna, amely mindenütt $\chi_I$-hez tart, de a későbbiek szempontjából ez előnyösebb.

**2.5.** Azt már tudjuk, hogy

$$\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{ha } t \leq 0, \\ e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{ha } t > 0 \end{cases}$$

végtelen sokszor differenciálható függvény. Ha $0 < r < R$, akkor

$$\xi_{r,R} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\eta(R^2 - x^2)}{\eta(x^2 - r^2) + \eta(R^2 - x^2)}$$

olyan végtelen sokszor differenciálható függvény, amelyre

$$\begin{aligned} \xi_{r,R}(x) &= 0 \quad \text{ha } |x| \geq R, \\ 0 < \xi_{r,R}(x) &< 1 \quad \text{ha } r < |x| < R, \\ \xi_{r,R}(x) &= 1 \quad \text{ha } |x| \leq r. \end{aligned}$$

**Állítás** *$L^p(\mathbb{R}^N)$-ben $1 \leq p < \infty$ esetén a kompakt tartójú végtelen sokszor differenciálható függvények sűrű lineáris alteret alkotnak.*

Bizonyítás Tekintsük először az $N = 1$ esetet. Vegyünk egy $I := ]a, b[$ intervallumot, és legyen $r := \frac{b-a}{2}$,

$$\phi_{n,I}(x) := \xi_{r,r+\frac{1}{n}}\left(x - \frac{a+b}{2}\right).$$

Ekkor

$$\int_{\mathbb{R}} |\phi_{n,I} - \chi_I|^p = \int_{a-\frac{1}{n}}^{a} |\phi_{n,I}|^p + \int_{b}^{b+\frac{1}{n}} |\phi_{n,I}|^p \leq \frac{2}{n},$$

és ezután úgy folytathatjuk, mint az előző pontban.

**2.6.** Bár az előző eredményünk magában foglalja a 2.4-belit (a kompakt tartójú végtelenszer differenciálható függvények altere szűkebb a kompakt tartójú folytonos függvények alterénél), mégsem hiábavaló az előző bizonyítás, mert általánosítható metrikus terekre, ahol a differenciálhatóságnak nincs értelme. Nevezetesen metrikus térben minden zárt halmazhoz és őt tartalmazó nyílt halmazhoz megadható olyan folytonos függvény, amely a zárt halmazon 1, a nyílt halmazon kívül 0, és mindenhol máshol a 0 és 1 között veszi fel az értékét (Analízis III.B.8.14.). Ha $\mu$ $\sigma$-véges Borel-mérték, azaz egy $M$ metrikus tér Borel-halmazain van adva, és minden kompakt halmaz mértéke véges, akkor $1 \leq p < \infty$ esetén $L^p_\mu(M)$-ben a kompakt tartójú folytonos függvények sűrű lineáris alteret alkotnak.

**2.7.** Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum (nem szükségképpen korlátos), és tekintsük $L^p(I)$-t. Mivel az egypont halmazok Lebesgue-mértéke nulla, $L^p(I) = L^p(\overline{I})$, azaz lényegtelen, hogy az intervallum nyílt-e, zárt-e. Viszont az $I$-n értelmezett folytonos függvények tartója szempontjából nem mindegy. Ha $I$ nyílt, és az $f : I \to \mathbb{K}$ folytonos függvény tartója kompakt, akkor $f$ egyértelműen kiterjeszthető az $I$ lezártjára folytonos függvénnyé úgy, hogy a kiterjesztés tartója megegyezik az $f$ tartójával; ekkor a kiterjesztés az $I$ végpontjaiban nulla értéket vesz fel. Viszont egy nem nyílt $I$ intervallumon kompakt tartójú folytonos függvény nem szükségképpen nulla az $I$ végpontjaiban.

Értelemszerű, mit jelent az, hogy az $f : I \to \mathbb{K}$ folytonos függvény tartója kompakt az $I$ belsejében.

Mivel az $I$ intervallum belsejében levő intervallumok tartalmaznak egy olyan félgyűrűt (például az alulról nyílt, felülről zárt intervallumokat), a 2.6. bizonyításához hasonlóan érvelhetünk, hogy igazoljuk az alábbi állítást.

Állítás *$1 \leq p < \infty$ estén $L^p(I)$-ben az $I$ belsejében kompakt tartójú végtelenszer differenciálható függvények sűrű lineáris alteret alkotnak.*

**2.8.** Legyen $K \subset \mathbb{R}$ kompakt intervallum. A $K$-n értelmezett $\mathbb{K}$ értékű folytonos függvények a maximum-normával ellátva Banach-tér (Analízis III.B.8.12.), amelyet $C(K)$-val jelölünk.

Állítás *(**Weierstrass–féle approximációs tétel**) A $C(K)$ Banach-térben a polinomok alkotta lineáris altér sűrű.*

Bizonyítás Tekintsük először a $K := [0, 1]$ esetet. Legyen $\Theta := \mathrm{id}_{[0,1]}$, és definiáljuk a $[0, 1]$ intervallumon a következő, úgynevezett **Bernstein-polinomokat**: $n \in \mathbb{N}$ és $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ esetén

$$p_{n,k} := \binom{n}{k} \Theta^k (1-\Theta)^{n-k}.$$

Ekkor az

$$(x,y)\mapsto(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

függvény első változóbeli nulladik, első és második parciális deriváltját komponálva a $(\Theta,1-\Theta)$ függvénnyel kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n}p_{n,k}=1,\quad \sum_{k=0}^{n}kp_{n,k}=n\Theta,\quad \sum_{k=0}^{n}k(k-1)p_{n,k}=n(n-1)\Theta^2.$$

Továbbá ezen formulákból könnyen származtathatjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n}(k-n\Theta)^2p_{n,k}=n\Theta(1-\Theta)\le n.$$

Legyen $f\in C([0,1])$ és $\varepsilon>0$. Ekkor $f$ egyenletes folytonossága miatt létezik $\delta>0$ úgy, hogy minden $x,y\in K$ , $|x-y|<\delta$ esetén $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

Definiáljuk $n\in\mathbb{N}$ esetén a

$$P_n:=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)p_{n,k}$$

polinomot. Ha $x\in[0,1]$ , és

$$H:=\{k\in\{0,1,...,n\mid |x-k/n|<\delta\},$$

akkor $k\notin H$ esetén

$$\frac{1}{n\delta}(k-nx)\ge 1,$$

így

$$\begin{aligned}
&|f(x)-P_n(x)|=\\
&=\left|\sum_{k=0}^{n}\big(f(x)-f(k/n)\big)p_{n,k}(x)\right|\le\sum_{k=0}^{n}|f(x)-f(k/n)|p_{n,k}(x)=\\
&=\sum_{k\in H}|f(x)-f(k/n)|p_{n,k}(x)+\sum_{k\notin H}|f(x)-f(k/n)|p_{n,k}(x)\le\\
&\le\varepsilon+\sum_{k\notin H}|f(x)-f(k/n)|p_{n,k}(x)\le\varepsilon+2\|f\|\sum_{k\notin H}p_{n,k}(x)\le\\
&\le\varepsilon+\frac{2\|f\|}{n^2\delta^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2p_{n,k}(x)\le\varepsilon+\frac{2\|f|\|}{n^2\delta^2}n=\varepsilon+\frac{2\|f\|}{n\delta^2}.
\end{aligned}$$

Így, ha $n > \dfrac{2\|f\|}{\varepsilon\delta^2}$, akkor $\|f - P_n\| < 2\varepsilon$, és ezzel bebizonyítottuk, amit akartunk.

Térjünk most át a $K := [a,b]$ $(a < b)$ esetre. Ekkor

$$\phi : [a,b] \to [0,1], \quad x \mapsto \frac{x-a}{b-a}$$

folytonos bijekció, az inverze is folytonos. Ha $f \in C([a,b])$, akkor $f \circ \phi^{-1} \in C([0,1])$. Ha $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan polinomsorozat, mely $[0,1]$-en egyenletesen konvergál az $f \circ \phi^{-1}$ függvényhez, akkor $P_n \circ \phi$ olyan polinomsorozat, mely egyenletesen konvergál az $[a,b]$ intervallumon az $f$ függvényhez.

**2.9. Feladatok**

1. Igazoljuk, hogy a véges értékű sorozatok összessége sűrű lineáris altér $l^p$-ben minden $1 \le p < \infty$ esetén!

2. Az $\mathcal{S}$ félgyűrűbeli véges mértékű halmazok karakterisztikus függvényei totális halmazt alkotnak $L^p_\mu(X)$-ben $1 \le p < \infty$ esetén.

3. Bizonyítsuk be, hogy $\left\{ \mathrm{id}^n_{[a,b]} \mid n \in \mathbb{N}_0 \right\}$ Schauder-bázis $C([a,b])$-ben!

4. Eredményeink alapján mutassuk meg, hogy két sűrű lineáris altér metszete lehet a nulla-altér.

# II. A FUNKCIONÁLANALÍZIS ALAPTÉTELEI

## 3. A Baire-féle kategóriatétel

**3.1.** Állítás *Metrikus térben*

*(i) véges sok sűrű nyílt halmaz metszete sűrű,*
*(ii) véges sok üres belsejű zárt halmaz uniójának belseje üres.*

Bizonyítás (i) Legyen $G$ és $H$ két tetszőleges nyílt részhalmaza egy $M$ metrikus térnek. Ekkor $G \subset G \cup H^{\flat} = (G \cap H) \cup H^{\flat}$, így $\overline{G} \subset \overline{G \cap H} \cup H^{\flat}$, ezért $\overline{G} \cap H \subset \overline{G \cap H}$. Ha $G$ sűrű, akkor ebből következik, hogy $H \subset \overline{G \cap H}$, így ha $H$ is sűrű, $M = \overline{H} \subset \overline{G \cap H}$, tehát $G \cap H$ sűrű halmaz $M$-ben.

(ii) Ha $S$ és $T$ üres belsejű zárt részhalmazai $M$-nek, akkor a $G := S^{\flat}$ és $H := T^{\flat}$ sűrű nyílt halmazok, így (1) szerint $G \cap H$ sűrű, és ezért a $(G \cap H)^{\flat} = S \cup T$ halmaz belseje üres.

**3.2.** Az előbbi állítás második pontját az elsőből egyszerű komplementációval bizonyítottuk. Az is nyilvánvaló, hogy az első pont is így következik a másodikból, vagyis (i) és (ii) egyenértékű.

Megszámlálható sok halmaz esetén az (i) és (ii) tulajdonságok nem feltétlenül teljesülnek. Csak azt tudjuk bebizonyítani, ugyancsak egyszerű komplementációval, hogy a két tulajdonság egyenértékű, vagyis ha az egyik teljesül, akkor a másik is.

Állítás *Egy metrikus térre a következők ekvivalensek:*

*(i) Megszámlálható sok sűrű nyílt halmaz metszete sűrű.*
*(ii) Megszámlálható sok üres belsejű zárt halmaz uniójának belseje üres.*

**3.3.** Állítás *(**Baire-féle kategóriatétel**) Teljes metrikus térben teljesülnek a 3.2. állítás ekvivalens feltételei.*

Bizonyítás Azt mutatjuk meg, hogy teljes metrikus térben megszámlálható sok sűrű nyílt halmaz metszete sűrű. Legyen $(M,d)$ teljes metrikus tér, $U_n$ $(n \in \mathbb{N})$ sűrű nyílt halmazok $M$-ben. Tegyük fel, hogy a metszetük nem sűrű, azaz a metszetük lezártja nem az egész $M$. Ekkor van $x \in M$ és $r > 0$ úgy, hogy

$$G_r(x) \cap \left( \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \right) = \emptyset.$$

Mivel $U_1$ sűrű, a $G_r(x)$ nyílt halmazzal való metszete, amely szintén nyílt, nem üres. Ezért van olyan $x_1$ és $0 < r_1 \leq \frac{r}{2}$, hogy $\overline{G_{r_1}(x_1)} \subset U_1 \cap G_r(x)$. Mivel $U_2$ sűrű, a $G_{r_1}(x_1)$ nyílt halmazzal való metszete, amely szintén nyílt, nem üres. Ezért van olyan $x_2$ és $0 < r_2 \leq \frac{r}{4}$, hogy $\overline{G_{r_2}(x_2)} \subset U_2 \cap G_{r_1}(x_1)$. Tovább folytatva látjuk, hogy van olyan $x_n \in M$ és $0 < r_n \leq \frac{r}{2^n}$, hogy $\overline{G_{r_n}(x_n)} \subset U_n \cap G_{r_{n-1}}(x_{n-1})$. Világos, hogy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, hiszen ha $m > n$, akkor $d(x_n, x_m) \leq \frac{r}{2^n}$. Mivel a metrikus tér teljes, létezik

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{G_{r_n}(x_n)} \subset G_r(x) \cap \left( \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \right),$$

ami ellentmondás.

**3.4.** Az előbbi állításnak egy következményét használjuk leginkább, amelynek megfogalmazásához bevezetünk egy fogalmat.

Definíció *Egy metrikus tér részhalmazát **seholsem sűrűnek** hívjuk, ha a lezártjának a belseje üres.*

Az előbbi állítás szerint megszámlálható sok seholsem sűrű halmaz uniójának (sőt a lezártjuk uniójának) a belseje üres, igaz tehát:

Állítás *Teljes metrikus térben nemüres nyílt halmaz nem állítható elő megszámlálható sok seholsem sűrű halmaz egyesítéseként.*

**3.5.** Szokás egy metrikus tér egy részhalmazát első kategóriájúnak nevezni, ha előllítható megszámlálható sok seholsem sűrű halmaz uniójaként, egy nem első kategóriájú halmazt pedig második kategóriájúnak. Innen ered a Baire-féle tétel elnevezése.

**3.6.** Állítás *Egy normált tér lineáris altere vagy sehol sem sűrű, vagy mindenütt sűrű részhalmaz.*

Bizonyítás Ha $\boldsymbol{L}$ nem seholsem sűrű, akkor az $\overline{\boldsymbol{L}}$ halmaz belseje nem üres, ezért létezik nyílt gömb, legyen ez $G_r(x)$, úgy, hogy $G_r(x) \subset \overline{\boldsymbol{L}}$. Ekkor $G_r(0) = G_r(x) - x$

is része az $\overline{\boldsymbol{L}}$ altérnek, így az is fennáll, hogy $\mathbb{K}G_r(0) \subset \overline{\boldsymbol{L}}$. Viszont $\mathbb{K}G_r(0)$ az egész vektortér, tehát $\boldsymbol{L}$ mindenütt sűrű. ■

Állításunk egyszerű következménye, hogy normált térben valódi zárt lineáris altér seholsem sűrű.

**3.7. Feladatok**

1. Seholsem sűrű részhalmaz tetszőleges részhalmaza sehol sem sűrű.

2. Seholsem sűrű részhalmaz lezártja olyan sehol sem sűrű részhalmaz, melynek komplementere nyílt és mindenütt sűrű.

3. Bizonyítsuk be, hogy véges sok seholsem sűrű részhalmaz egyesítése seholsem sűrű. Mutassuk meg, hogy még teljes metrikus térben is előfordulhat, hogy megszámlálható sok seholsem sűrű halmaz egyesítése mindenütt sűrű (az egyesítés belseje ugyan üres a Baire-tétel szerint, de a lezártjának a belseje már nem).($\mathbb{R}$-ben a racionális számok halmaza megszámlálható sok seholsem sűrű zárt (egyelemű) halmaz uniója.)

4. $L^p[-n,n]$-et az $L^p(\mathbb{R})$ lineáris alterének tekintjük úgy, hogy a függvényeket $[-n,n]$-en kívül nullának vesszük. Nyilvánvaló, hogy $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-n,n]=\mathbb{R}$; igaz-e, hogy $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L^p([-n,n]) = L^p(\mathbb{R})$? (Alkalmazzuk a Baire-féle kategória-tételt és a 3.6. állítás következményét.)

# 4. A Banach-féle nyíltleképezés-tétel

**4.1.** Tudjuk hogy egy lineáris leképezés folytonossága ekvivalens annak 0 pontbeli folytonosságával (Analízis III.B.10.1.). Az alábbi állítás hasonlót állapít meg lineáris leképezések nyíltságára. Emlékeztetünk arra, hogy ha $M$ és $N$ metrikus terek, akkor egy $f : M \to N$ leképezést nyíltnak nevezünk, ha minden $M$-beli nyílt halmaz $f$ általi képe nyílt $N$-ben.

Állítás *Legyen $\boldsymbol{E}$ és $\boldsymbol{F}$ normált tér, $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ lineáris leképezés. Ekkor a következők ekvivalensek:*

*(i) $A$ nyílt leképezés.*
*(ii) Minden $\varepsilon>0$ esetén létezik $\delta>0$ úgy, hogy $G_\delta^{\boldsymbol{F}}(0) \subset A[G_\varepsilon^{\boldsymbol{E}}(0)]$.*
*(iii) Létezik $\rho>0$ úgy, hogy $G_\rho^{\boldsymbol{F}}(0) \subset A[G_1^{\boldsymbol{E}}(0)]$.*

Bizonyítás (iii)⇒(ii) Adott $\varepsilon$-hoz legyen $\delta := \varepsilon\rho$. Ekkor ugyanis

$$A[G_\varepsilon^{\boldsymbol{E}}(0)] = A[\varepsilon G_1^{\boldsymbol{E}}(0)] = \varepsilon A[G_1^{\boldsymbol{E}}(0)] \supset \varepsilon G_\rho^{\boldsymbol{F}}(0) = G_{\varepsilon\rho}^{\boldsymbol{F}}(0).$$

(ii)⇒(i) Legyen $U \subset \boldsymbol{E}$ nyílt halmaz és $y \in A[U]$. Legyen $x \in U$ olyan, hogy $y = Ax$. Ekkor létezik $\varepsilon>0$ úgy, hogy $x + G_\varepsilon^{\boldsymbol{E}}(0) = G_\varepsilon^{\boldsymbol{E}}(x) \subset U$, és a feltétel szerint létezik olyan $\delta>0$, hogy $A[G_\varepsilon^{\boldsymbol{E}}(0)] \supset G_\delta^{\boldsymbol{F}}(0)$, ezért

$$y+G_\delta^{\boldsymbol{F}}(0)\subset Ax+A[G_\varepsilon^{\boldsymbol{E}}(0)] = A[x+G_\varepsilon^{\boldsymbol{E}}(0)] = A[G_\varepsilon^{\boldsymbol{E}}(x)]\subset A[U],$$

tehát $y$ belső pontja $A[U]$-nak.

(i)$\Rightarrow$(iii) A $G_1^{\boldsymbol{E}}(0)\subset\boldsymbol{E}$ halmaz nyílt, így $A[G_1^{\boldsymbol{E}}(0)]$ is nyílt halmaz, amelynek eleme – és ezért belső pontja – a $0\in\boldsymbol{F}$ vektor.

**4.2.** A most következő állítás magában is érdekes, de jobbára csak segédeszköz az ezt követő tétel bizonyításához.

Állítás *Legyen $\boldsymbol{E}$ és $\boldsymbol{F}$ Banach-tér, $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ folytonos lineáris leképezés. Ha létezik $r>0$ úgy, hogy*

$$G_r^{\boldsymbol{F}}(0) \subset \overline{A[G_1^{\boldsymbol{E}}(0)]},$$

*akkor minden $0<\rho<r$ esetén*

$$G_\rho^{\boldsymbol{F}}(0) \subset A[G_1^{\boldsymbol{E}}(0)].$$

Bizonyítás Hagyjuk el a rövidebb írás kedvéért a felső indexeket, amelyek azt mutatják, melyik térbeli gömbről van szó.

$G_r(0)$ elemei az $A[G_1(0)]$ érintkezési pontjai, tehát minden $y\in G_r(0)$ és $0<\alpha<1$ esetén van olyan $y_1\in A[G_1(0)]$, hogy $\|y-y_1\|<\alpha r$, azaz $y-y_1\in G_{\alpha r}(0)$.

Egyszerű tény, hogy egy halmaz lezártjának nemnulla számszorosa egyenlő a halmaz számszorosának lezártjával, tehát igaz, hogy

$$G_{\alpha r}(0) = \alpha G_r(0) \subset \alpha\overline{A[G_1^{\boldsymbol{E}}(0)]} = \overline{\alpha A[G_1^{\boldsymbol{E}}(0)]} = \overline{A[\alpha G_1^{\boldsymbol{E}}(0)]} = \overline{A[G_\alpha(0)]}.$$

Ezért létezik olyan $y_2\in A[G_\alpha(0)]$, hogy $\|(y-y_1)-y_2\|<\alpha^2 r$, azaz $y-y_1-y_2\in G_{\alpha^2 r}(0)$. Így folytatva azt kapjuk, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén létezik $y_n\in A[G_{\alpha^{n-1}}(0)]$ úgy, hogy $\|y-\sum_{i=1}^{n} y_i\|<\alpha^n r$, amiből következik, hogy $y=\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$.

Legyen $x_n\in G_{\alpha^{n-1}}(0)\subset\boldsymbol{E}$ olyan, hogy $Ax_n=y_n$. Ekkor, a $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ sor abszolút konvergens, ezért – lévén $\boldsymbol{E}$ teljes – konvergenes is; legyen $x$ az összege. Erre $\|x\|\le\sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha^{n-1}=\frac{1}{1-\alpha}$ teljesül.

Mivel $A$ folytonos és lineáris, $Ax=A\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n=\sum_{n\in\mathbb{N}} Ax_n=y$, azaz minden $G_r(0)$-beli $y$ egy $G_{1/(1-\alpha)}(0)$-beli $x$-nek az $A$ általi képe, vagyis $G_r(0)\subset A[G_{1/(1-\alpha)}(0)]$, amiből $(1-\alpha)$-val való szorzással és a $\rho:=(1-\alpha)r$ definícióval adódik a bizonyítani kívánt összefüggés.

**4.3.** Állítás *(**Banach-féle nyíltleképezés-tétel**) Legyen $\boldsymbol{E}$ és $\boldsymbol{F}$ Banach-tér. Egy $A : \boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ folytonos lineáris leképezés pontosan akkor nyílt, ha szürjektív.*

Bizonyítás Ha $A$ nyílt, akkor $A[\boldsymbol{E}]\subset\boldsymbol{F}$ nyílt lineáris altér, így szükségképpen $A[\boldsymbol{E}] = \boldsymbol{F}$.

Ha $A$ szürjektív, akkor

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A[G_n(0)] = \boldsymbol{F},$$

tehát a Baire-féle kategóriatétel szerint (3.4. állítás) van olyan $m\in\mathbb{N}$, hogy $\overline{A[G_m(0)]}$ belseje nem üres; a belseje nem lehet diszjunkt $A[G_m(0)]$-tól, ezért létezik $y \in A[G_m(0)]$ és $\alpha > 0$ úgy, hogy $G_\alpha(y) \subset \overline{A[G_m(0)]}$. Legyen $x \in G_m(0)$ és $y = Ax$. Mivel

$$G_\alpha(0) = G_\alpha(y) - y \subset \overline{A[G_m(0)]} - Ax = \overline{A[G_m(0)] - Ax} = \\ = \overline{A[G_m(0)] - x]} \subset \overline{A[G_{2m}(0)]},$$

tehát $G_{\frac{\alpha}{2m}}(0) \subset \overline{A[G_1(0)]}$, így az előző állítás szerint, ha $\rho < \frac{\alpha}{2m}$, akkor $G_\rho(0) \subset A[G_1(0)]$, és a 4.1-ben mondottak alapján $A$ nyílt leképezés.

**4.4.** Azonnal megállapíthatjuk a nyíltleképezés-tétel két egyszerű de fontos következményét.

**1.** Állítás *Legyen $\boldsymbol{E}$ és $\boldsymbol{F}$ Banach-tér, $A : \boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ folytonos lineáris bijekció. Ekkor $A^{-1}$ folytonos lineáris leképezés.*

Előző tanulmányainkban (Analízis III.B.10.9. és IV.B.6.1.) használtuk az „invertálhatóság” fogalmát, amely azt a feltételt jelentette, hogy egy folytonos lineáris bijekció inverze is legyen folytonos. Látjuk, hogy Banach-terek közötti folytonos lineáris bijekciókra nem kell külön kikötnünk ezt a feltételt. Ez igen hasznos tudnivaló; például az inverzfüggvény-tételben és az implicitfügggvény-tételben bizonyos deriváltak (amelyek szükségképpen folytonos lineáris leképezések) invertálhatósága kellett; most látjuk, elég azt tudnunk, hogy ezek a deriváltak bijekciók.

**2.** Állítás *Egy ($\mathbb{K}$ feletti) vektortéren bármely két összehasonlítható teljes norma ekvivalens.*

Bizonyítás Legyen $\|.\|$ és $\|.\|'$ két teljes norma az $\boldsymbol{E}$ vektortéren, és tegyük fel, hogy $\|.\|$ finomabb, mint $\|.\|'$. Ekkor van olyan $\alpha > 0$, hogy $\|x\|' \leq \alpha\|x\|$ minden $x$-re, tehát az $\mathrm{id}_{\boldsymbol{E}} : \boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$ lineáris bijekció $\|.\| - \|.\|'$-folytonos. Így az előbbi állítás szerint $\mathrm{id}_{\boldsymbol{E}}{}^{-1} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{E}}$ $\|.\|' - \|.\|$-folytonos, azaz $\|.\|'$ finomabb, mint $\|.\|$.

**4.5. Feladatok**

1. A 4.2. állítás igaz akkor is, ha $\boldsymbol{E}$ Banach-tér, $\boldsymbol{F}$ normált tér.

2. Hol használjuk ki a 4.3. állításban, hogy mind $\boldsymbol{E}$ mind $\boldsymbol{F}$ Banach-tér?

3. Legyenek $\boldsymbol{M}$ és $\boldsymbol{N}$ kiegészítő zárt lineáris alterek egy $\boldsymbol{E}$ Banach-térben. Mutassuk meg, hogy

i) $\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{E}, \quad (u, v) \mapsto u + v$ folytonos lineáris bijekció (használjuk az „1-es" szorzatnormát), tehát az inverz is folytonos;

(ii) ha $\boldsymbol{F}$ Banach-tér és $A : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{F}$, $B : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{F}$ folytonos lineáris leképezés, akkor $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{F}$, $u + v \mapsto Au + Bv$ is folytonos lineáris.

# 5. A zártgrafikon-tétel

5.1. Legyen $M$ és $N$ metrikus tér és $f : M \rightarrowtail N$ zárt halmazon értelmezett folytonos leképezés. Ekkor $\mathrm{Graph}(f) \subset M \times N$ zárt halmaz bármely szorzatmetrikára nézve. Ugyanis, ha $(x_n, f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergens sorozat $\mathrm{Graph}(f)$-ben, akkor létezik $x \in M$ , $y \in N$ úgy, hogy $\lim_n x_n = x$ és $\lim_n f(x_n) = y$. Viszont $f$ folytonossága miatt $\lim_n f(x_n) = f(\lim_n x_n)$, azaz $y = f(x)$, vagyis $\lim_n (x_n, f(x_n)) \in \mathrm{Graph}(f)$, tehát $f$ grafikonja zárt $M \times N$-ben.

Viszont egy zárt halmazon értelmezett és zárt grafikonú leképezés nem szükségképpen folytonos. Példa erre az $\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$-nek az a kiterjesztése, amely a nullához nullát rendel.

Lineáris leképezések folytonossága és grafikonjának a zártsága szoros kapcsolatban áll egymással.

Állítás *(**Zártgrafikon-tétel**) Legyen $\boldsymbol{E}$ és $\boldsymbol{F}$ Banach-tér, $A : \boldsymbol{E} \rightarrowtail \boldsymbol{F}$ lineáris leképezés. Ekkor a következő tulajdonságok közül bármely kettő maga után vonja a harmadikat:*

*(i)* $\mathrm{Dom}(A)$ *zárt,*
*(ii)* $\mathrm{Graph}(A)$ *zárt,*
*(iii) $A$ folytonos.*

Bizonyítás (i) Legyen $\mathrm{Dom}(A)$ és $\mathrm{Graph}(A)$ zárt. Ekkor $\mathrm{Dom}(A)$ zárt lineáris altér $\boldsymbol{E}$-ben, tehát teljes is, és $\mathrm{Graph}(A)$ zárt lineáris altér $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$-ben, tehát teljes is (bármely szorzatnorma leszűkítésére nézve). Jelölje, mint szokásosan, $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{E}}$ és $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{F}}$ az $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$ természetes projekcióit. Ekkor $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{E}}|_{\mathrm{Graph}(A)} : \mathrm{Graph}(A) \to \mathrm{Dom}(A)$ folytonos lineáris bijekció, így a nyílt leképezés tétele szerint az inverze folytonos, következésképpen az $A = \mathrm{pr}_{\boldsymbol{F}} \circ \left(\mathrm{pr}_{\boldsymbol{E}}|_{\mathrm{Graph}(A)}\right)^{-1}$ kompozíció folytonos.

(ii) Legyen $\mathrm{Dom}(A)$ zárt és $A$ folytonos. Ekkor az állítás előtt mondottak szerint $\mathrm{Graph}(A)$ zárt.

(iii) Legyen Graph$(A)$ zárt és $A$ folytonos. Ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Dom$(A)$-beli konvergens sorozat, akkor $A$ korlátossága miatt $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat $\boldsymbol{F}$-ben, következésképpen konvergens is $\boldsymbol{F}$-ben, így az $(x_n, Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Graph$(A)$-beli sorozat konvergens $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$-ben. Graph$(A)$ zártsága miatt $\lim_n (x_n, Ax_n)\in\text{Graph}(A)$, speciálisan $\lim_n x_n \in \text{Dom}(A)$, tehát Dom$(A)$ zárt.

**5.2.** Definíció *Legyen* $\boldsymbol{E}$ *és* $\boldsymbol{F}$ *Banach-tér. Azt mondjuk, hogy az* $A : \boldsymbol{E}\rightarrowtail\boldsymbol{F}$ *lineáris leképezés* ***zárt****, ha a grafikonja zárt* $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$*-ben.*

Állítás *Legyen* $\boldsymbol{E}$ *és* $\boldsymbol{F}$ *Banach tér. Az* $A : \boldsymbol{E}\rightarrowtail\boldsymbol{F}$ *lineáris leképezés pontosan akkor zárt, ha minden olyan* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Dom$(A)$*-beli konvergens sorozat esetén* $(x := \lim_n x_n \in \boldsymbol{E})$*, melyre az* $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat is konvergens* $(y := \lim_n Ax_n \in \boldsymbol{F})$*, az teljesül, hogy* $x\in\text{Dom}(A)$ *és* $y = A(x)$*, azaz* $A\lim_n x_n = \lim_n Ax_n$.

Bizonyítás Ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat, melyre a fenti feltétel teljesül, akkor az $(x_n, Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Graph$(A)$-beli sorozat konvergál $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$-ben $(x, y)$-hoz. Nyilvánvaló, hogy $A$ pontosan akkor zárt, ha minden ilyen sorozat esetén $(x, y)\in\text{Graph}(A)$, azaz $x\in\text{Dom}(A)$ és $y = A(x)$. ■

Másként - sorokkal megfogalmazva – ugyanez: az $A : \boldsymbol{E}\rightarrowtail\boldsymbol{F}$ lineáris leképezés pontosan akkor zárt, ha minden olyan Dom$(A)$-ban futó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat esetén, amelyre létezik $x := \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \in \boldsymbol{E}$ és létezik $y := \sum_{n\in\mathbb{N}} Ax_n \in \boldsymbol{F}$ is, az teljesül, hogy $x \in \text{Dom}(A)$ és $y = A(x)$, azaz $A\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} Ax_n$.

Érdemes leírni a folytonosság feltételét, hogy jól összehasonlíthassuk a zártság feltételével. Az $A : \boldsymbol{E}\rightarrowtail\boldsymbol{F}$ lineáris leképezés pontosan akkor folytonos, ha minden olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Dom$(A)$-beli konvergens sorozat esetén, amelyre $x := \lim_n x_n \in \text{Dom}(A)$, az $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens $(y := \lim_n Ax_n \in \boldsymbol{F})$, az teljesül, hogy $y = A(x)$, azaz $A\lim_n x_n = \lim_n Ax_n$.

A példa, amelyet 5.1-ben hoztunk zárt grafikonú de nem folytonos leképezésre, nem lineáris. A III. részben találkozunk olyan lineáris leképezésekkel, amelyek zártak de nem folytonosak.

**5.3.** Egyszerű tény, hogy zárt lineáris leképezés számszorosa zárt. Azonban két zárt lineáris leképezés összege nem feltétlenül zárt. Erre legegyszerűbb példa: ha $A$ nem folytonos, sűrűn, de nem mindenütt értelmezett zárt lineáris leképezés (ilyen van, majd látjuk a III.részben), akkor $-A$ is ilyen, és $A + (-A)$ a sűrűn de nem mindenütt értelmezett nulla leképezés, amely nem zárt, hiszen ha zárt volna, akkor – lévén folytonos is – a zártgrafikon-tétel szerint zárt lenne az értelmezési tartománya.

**Állítás** *Legyen $\boldsymbol{E}$ és $\boldsymbol{F}$ Banach tér, $A : \boldsymbol{E} \rightarrowtail \boldsymbol{F}$ zárt, $B : \boldsymbol{E} \rightarrowtail \boldsymbol{F}$ folytonos lineáris leképezés,* $\mathrm{Dom}(A) \subset \mathrm{Dom}(B)$. *Ekkor $A+B$ zárt.*

Bizonyítás Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathrm{Dom}(A+B) = \mathrm{Dom}(A)$-beli sorozat, mely konvergál $x$-hez $\boldsymbol{E}$-ben, és az $((A+B)(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens $\boldsymbol{F}$-ben. Ekkor $B$ folytonossága miatt a $(Bx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat Cauchy-féle, így konvergens $\boldsymbol{F}$-ben, következésképpen az $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens $\boldsymbol{F}$-ben. Mivel $A$ zárt, $x\in\mathrm{Dom}(A)$ és $Ax = \lim_n Ax_n$. Természetesen $x$ benne van $B$ értelmezési tartományában is, és $B$ folytonossága miatt $Bx = \lim_n Bx_n$. Az is igaz tehát, hogy hogy $x \in \mathrm{Dom}(A+B)$ és $(A+B)x = \lim_n (A+B)x_n$, azaz $A+B$ zárt.

**5.4. Állítás** *Ha $A : \boldsymbol{E} \rightarrowtail \boldsymbol{F}$ Banach-terek közötti zárt lineáris injekció, akkor $A^{-1}$ is zárt.*

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy az $U : \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}\times\boldsymbol{E}$, $(x,y)\mapsto(y,x)$ leképezés lineáris izometrikus bijekció bármely szorzatnormában, így ha $\mathrm{Graph}(A)\subset\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$ zárt, akkor $\mathrm{Graph}(A^{-1}) = U[\mathrm{Graph}(A)]\subset\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{E}$ is zárt.

**5.5.** Folytonos lineáris leképezés magja (a nullának az ősképe) zárt lineáris altér. A magtér zártságához kevesebb is elég.

**Állítás** *Legyen $\boldsymbol{E}$ és $\boldsymbol{F}$ Banach tér, $A : \boldsymbol{E} \rightarrowtail \boldsymbol{F}$ zárt lineáris leképezés. Ekkor* $\mathrm{Ker}(A) := \overset{-1}{A}(\{0\})\subset\boldsymbol{E}$ *zárt lineáris altér.*

Bizonyítás Legyen $x\in\overline{\mathrm{Ker}(A)}$. Ekkor létezik $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathrm{Ker}(A)$-beli sorozat úgy, hogy $x = \lim_n x_n$. Mivel $\lim_n A(x_n) = \lim_n 0 = 0$, az $A$ zártsága miatt $x\in\mathrm{Dom}(A)$ és $0 = A(x)$, azaz $x\in\mathrm{Ker}(A)$.

**5.6. Definíció** *Legyen $\boldsymbol{E}$ és $\boldsymbol{F}$ Banach tér. Az $A : \boldsymbol{E} \rightarrowtail \boldsymbol{F}$ lineáris leképezés* ***lezárható****, ha a grafikonjának a lezártja egy lineáris leképezés grafikonja, azaz ha létezik $\overline{A} : \boldsymbol{E} \rightarrowtail \boldsymbol{F}$ lineáris leképezés, úgy, hogy* $\overline{\mathrm{Graph}(A)} = \mathrm{Graph}(\overline{A})$*; ekkor az $\overline{A}$ zárt lineáris leképezést az $A$* ***lezártjának*** *nevezzük.*

Van olyan lineáris leképezés, amely nem lezárható: a grafikonjának a lezártja nem függvénygrafikon (lásd az 5.7.1. feladatot).

**Állítás** *Ha $A : \boldsymbol{E} \rightarrowtail \boldsymbol{F}$ lineáris leképezés és van olyan $B : \boldsymbol{E} \rightarrowtail \boldsymbol{F}$ zárt lineáris leképezés, hogy $A\subset B$, akkor $A$ lezárható.*

Bizonyítás Mivel az $A$ grafikonja része a $B$ grafikonjának, és ez utóbbi zárt halmaz, $\overline{\mathrm{Graph}(A)} \subset \mathrm{Graph}(B)$, tehát $\overline{\mathrm{Graph}(A)}$ egy lineáris leképezés (a $B$ leszűkítésének) a grafikonja.

**5.7. Feladatok**

1. Mutassuk meg, hogy az alábbi lineáris leképezés nem lezárható. Legyen $\boldsymbol{L}$ nem zárt lineáris altér egy $\boldsymbol{E}$ normált térben, $a \in \overline{\boldsymbol{L}}$, $a \notin \boldsymbol{L}$. Az $A : \boldsymbol{L} + \mathbb{K}a \to \boldsymbol{E}$, $x + \lambda a \mapsto \lambda a$ leképezés lineáris és $\{(a, a), (a, 0)\} \subset \overline{\mathrm{Graph}(A)}$, valamint $\{(0, 0), (0, a)\} \subset \overline{\mathrm{Graph}(A)}$. (Ha $x_n \in \boldsymbol{L}$ és $\lim_n x_n = a$, akkor $\lim_n Ax_n = 0$.)

2. Legyenek $\boldsymbol{M}$ és $\boldsymbol{N}$ kiegészítő alterek egy Banach-térben, és legyen $P$ az $\boldsymbol{N}$ mentén az $\boldsymbol{M}$-re való vetítés (Analízis II.8.2.(v)). Igazoljuk, hogy $P$ akkor és csak akkor folytonos, ha $\boldsymbol{M}$ és $\boldsymbol{N}$ zárt. (Ha $P$ folytonos, akkor $\mathrm{Ker}P$ és $\mathrm{Ker}(\mathrm{id} - P)$ zártak. Ha $\boldsymbol{M}$ és $\boldsymbol{N}$ zárt, elég megmutatni, hogy $P$ zárt. Legyen $x := \lim_n x_n$ és $y := \lim_n Px_n$. Nyilván $x$ benne van $P$ értelmezési tartományában, hiszen az az egész tér. Mivel $Px_n \in \boldsymbol{M}$ minden $n$-re és $\boldsymbol{M}$ zárt, $y \in \boldsymbol{M}$, azaz $y = Py$. Hasonlóan $x_n - Px_n \in \boldsymbol{N}$, ezért $x - y \in \boldsymbol{N}$, azaz $P(x - y) = 0$, így végül $y = Px$.)

Itt jegyezzük meg, hogy egy zárt lineáris altérnek nem feltétlenül létezik zárt kiegészítő altere.

3. Igazoljuk, hogy Banach-terek közötti lineáris leképezés pontosan akkor zárt, ha az értelmezési tartománya Banach-tér az $|||x||| := \|x\| + \|Ax\|$ normával.

4. Legyenek $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$ és $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ Banach-terek, $A_1 : \boldsymbol{E}_1 \rightarrowtail \boldsymbol{F}_1$, $A_2 : \boldsymbol{E}_2 \rightarrowtail \boldsymbol{F}_2$ zárt lineáris leképezések. Ekkor az $A_1 \times A_2 : \boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{E}_2 \rightarrowtail \boldsymbol{F}_1 \times \boldsymbol{F}_2$ lineáris leképezés zárt (ahol természetesen a szorzattereken vehetjük bármelyik ismert szorzatnormát).

# 6. A Banach–Steinhaus-tétel

**6.1. Állítás** (***Banach–Steinhaus-tétel***) *Legyen $\boldsymbol{E}$ Banach tér és $\boldsymbol{F}$ normált tér. Az $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ folytonos lineáris leképezések egy $H$ halmaza pontosan akkor korlátos (a folytonos lineáris leképezések normája szerint), ha minden $x \in \boldsymbol{E}$ esetén az $\{Ax \mid A \in H\}$ halmaz korlátos $\boldsymbol{F}$-ben.*

Bizonyítás Legyen $H$ korlátos, azaz létezzen $K > 0$ úgy, hogy $\|A\| \le K$ minden $A \in H$ esetén. Ekkor, ha $x \in \boldsymbol{E}$, a $H$ minen $A$ elemére $\|Ax\| \le \|A\|\|x\| \le K\|x\|$, tehát az $\{Ax \mid A \in H\}$ halmaz korlátos $\boldsymbol{F}$-ben, $K\|x\|$ egy korlátja.

A másik irány bizonyításához vegyük észre, hogy minden $n$ pozitív egész számra $Z_n := \bigcap_{A \in H} \overset{-1}{A}\left(\overline{G_n(0)}\right)$ zárt részhalmaza $\boldsymbol{E}$-nek, és ha minden $x \in \boldsymbol{E}$ esetén az $\{Ax \mid A \in H\}$ halmaz korlátos $\boldsymbol{F}$-ben, akkor $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n = \boldsymbol{E}$. Így a Baire-féle kategóriatétel szerint van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy $Z_m$ belseje nem üres, ezért létezik $x_0 \in Z_m$ és $r > 0$ úgy, hogy $G_r(x_0) \subset Z_m$. Ekkor tehát minden $y \in G_1(0)$ és $A \in H$ esetén

$$\|Ay\| = \frac{1}{r}\|Ary\| \le \frac{1}{r}\left(\|A(x_0 + ry)\| + \|A(x_0)\|\right) \le \frac{2m}{r},$$

következésképpen $\|A\| \leq \dfrac{2m}{r}$ minden $A \in H$ esetén.

**6.2.** A Banach–Steinhaus-tétel leggyakrabban használt következményét fogalmazza meg az alábbi állítás.

Állítás *Ha $\boldsymbol{E}$ Banach-tér, $\boldsymbol{F}$ normált és $A_n : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ $(n\in\mathbb{N})$ folytonos lineáris leképezések olyan sorozata, amely pontontként mindenütt konvergens, azaz minden $x\in\boldsymbol{E}$ esetén $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens $\boldsymbol{F}$-ben, akkor az $A : \boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$, $x\mapsto \lim_n A_n x$ formulával értelmezett leképezés lineáris, folytonos, továbbá*

$$\|A\| \leq \liminf_n \|A_n\| < +\infty.$$

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy $A : \boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ lineáris leképezés. Minden $x\in\boldsymbol{E}$ esetén $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos $\boldsymbol{F}$-ben, így a Banach–Steinhaus-tétel szerint $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos halmaz az $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ folyton lineáris leképezések terében, tehát $x\in\boldsymbol{E}$ esetén

$$\|A(x)\| = \lim_n \|A_n(x)\| = \liminf_n \|A_n(x)\| \leq \Big(\liminf_n \|A_n\|\Big)\|x\|. \blacksquare$$

Általában folytonos leképezések pontonként konvergens sorozatának a határértéke nem folytonos. Korábban megismertünk egy feltételt, amely biztosítja a határérték folytonosságát: az egyenletes konvergenciát. Most azt látjuk, hogy a linearitás és a teljesség is maga után vonja a határérték folytonosságát.

**6.3. Feladat**

$\boldsymbol{E}$ teljessége nem hagyható el a Banach–Steinhaus-tételből.

$\boldsymbol{L} := \left\{ x \in l^2 \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{N}} n^2|x_n|^2 < \infty \right\}$ valódi sűrű lineáris altér $l^2$-ben. Definiáljuk a folytonos lineáris leképezések $A_n : l^2 \to l^2$, $x \mapsto (x_1, 2x_2, \dots, nx_n, 0, 0, \dots)$ $(n\in\mathbb{N})$ sorozatát. Mutassuk meg hogy minden $x \in \boldsymbol{L}$ esetén létezik $Ax := \lim_n A_n x$, de az így definiált $A$ lineáris leképezés nem folytonos.

# 7. A Hahn–Banach-tétel

**7.1. Állítás** (**Hahn–Banach-tétel**) *Legyen $\boldsymbol{E}$ vektortér $\mathbb{R}$ felett és $p : \boldsymbol{E}\to\mathbb{R}$ olyan leképezés, hogy minden $x, y\in\boldsymbol{E}$ és $\lambda\in\mathbb{R}_0^+$ esetén*

- $p(\lambda x) = \lambda p(x)$,
- $p(x+y)\leq p(x)+p(y)$.

*Ha $\boldsymbol{L}$ lineáris altér $\boldsymbol{E}$-ben és $h : \boldsymbol{L} \to \mathbb{R}$ olyan lineáris leképezés, hogy $h\leq p|_{\boldsymbol{L}}$, akkor létezik $l : \boldsymbol{E}\to\mathbb{R}$ lineáris leképezés, amelyre $h\subset l$ és $l\leq p$.*

Bizonyítás Ha $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{E}$, akkor nincs mit bizonyítani. Tegyük fel, hogy $\boldsymbol{L}\neq\boldsymbol{E}$; legyen $x_1\in\boldsymbol{E}\setminus\boldsymbol{L}$ és $\boldsymbol{L}_1 := \boldsymbol{L}+\mathbb{R}x_1$. Tetszőleges $x, y\in\boldsymbol{L}$ esetén

$$h(x)+h(y) = h(x+y) \leq p(x+y) \leq p(x-x_1) + p(x_1+y),$$

következésképpen

$$h(x)-p(x-x_1) \leq p(x_1+y)-h(y).$$

Ebből rögzített $y\in\boldsymbol{L}$ esetén azt kapjuk, hogy

$$\alpha := \sup_{x\in\boldsymbol{L}} (h(x)-p(x-x_1)) < \infty,$$

tehát minden $x, y\in\boldsymbol{L}$ esetén

$$h(x)-p(x-x_1) \leq \alpha \leq p(y+x_1)-h(y). \tag{1}$$

Mivel $\boldsymbol{L}$ és $\mathbb{R}x_1$ kiegészítő alterek $\boldsymbol{L}_1$-ben, létezik egyetlen $h_1 : \boldsymbol{L}_1\to\mathbb{R}$ lineáris leképezés úgy, hogy minden $x\in\boldsymbol{L}$ és $\lambda\in\mathbb{R}$ esetén

$$h_1(x+\lambda x_1) = h(x)+\lambda\alpha.$$

Legyen $z\in\boldsymbol{L}$ és $\lambda>0$, ekkor az $y := \frac{1}{\lambda}z$ vektorra az (1) egyenlőtlenség szerint $\lambda\alpha\leq p(z+\lambda x_1)-h(z)$, következésképpen

$$h_1(z+\lambda x_1) = h(z)+\lambda\alpha \leq p(z+\lambda x_1). \tag{2}$$

Hasonlóan, ha $\lambda<0$, akkor az $x := -\frac{1}{\lambda}z$ vektorra alkalmazva az (1) egyenlőtlenséget, ismét (2)-re jutunk. $\lambda = 0$ esetén pedig $h\leq p|_{\boldsymbol{L}}$ miatt ismét (2)-t kapjuk. Tehát $h_1\leq p_{|\boldsymbol{L}_1}$, és nyilván $h\subset h_1$.

Jelölje $\mathcal{F}$ azon $f : \boldsymbol{E}\rightarrowtail\mathbb{R}$ lineáris leképezések halmazát, melyekre $h\subset f$ és $f \leq p_{|\mathrm{Dom}(f)}$ teljesül, és tekintsük $\mathcal{F}$-en a szokásos tartalmazással definiált rendezést. Ha $L\subset\mathcal{F}$ lánc, akkor $\bigcup\limits_{f\in L} f$ felső határa $L$-nek $\mathcal{F}$-ben, így a Zorn-lemma szerint $\mathcal{F}$-nek létezik maximális eleme, legyen $l$ egy ilyen. Tegyük fel, hogy $\mathrm{Dom}(l)\neq\boldsymbol{E}$; ekkor az előzőek szerint $l$ kiterjeszthető egy szigorúan bővebb altérre úgy, hogy a kiterjesztés is $\mathcal{F}$-beli, és ez ellentmond annak, hogy $l$ maximális. Tehát $\mathrm{Dom}(l) = \boldsymbol{E}$.

**7.2.** A Hahn–Banach-tétel egyszerű és alkalmazásokban leginkább használt következménye az alábbi állítás, amelyet szintén szokás Hahn–Banach-tételnek nevezni.

Állítás *Legyen $\boldsymbol{E}$ vektortér $\mathbb{K}$ felett és $p : \boldsymbol{E}\to\mathbb{R}_0^+$ félnorma. Ha $\boldsymbol{L}\subset\boldsymbol{E}$ lineáris altér és $h : \boldsymbol{L}\to\mathbb{K}$ olyan lineáris leképezés, hogy $|h|\leq p|_{\boldsymbol{L}}$, akkor létezik $l : \boldsymbol{E}\to\mathbb{K}$ lineáris leképezés, amelyre $h\subset l$ és $|l|\leq p$.*

Bizonyítás (1) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. A Hahn–Banach-tétel szerint létezik $l : \boldsymbol{E}\to\mathbb{R}$ lineáris leképezés úgy, hogy $h\subset l$ és $l\leq p$. Bármely $x\in\boldsymbol{E}$ esetén

$$-p(x) = -p(-x) \leq -l(-x) = l(x)\leq p(x),$$

tehát $|l|\leq p$.

(2) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Azt használjuk ki, hogy egy komplex értékű $\mathbb{C}$-lineáris leképezés képzetes és valós része egyértelműen meghatározzák egymást: ha $L : \boldsymbol{E} \to \mathbb{C}$ lineáris, akkor az $\boldsymbol{E}$ minden $x$ elemére $\mathrm{Im}(Lx) = -\mathrm{Re}(L(ix))$, amint arról könnyű meggyőződni az egymással egyenlő $iLx$ és $L(ix)$ valós részeinek összehasonlításával.

Most tehát $\mathrm{Re}\circ h : \boldsymbol{L}\to\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-lineáris leképezés, és $|\mathrm{Re}\circ h|\leq|h|\leq p|_{\boldsymbol{L}}$. Az előző pont szerint létezik $f : \boldsymbol{E}\to\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-lineáris leképezés úgy, hogy $\mathrm{Re}\circ h\subset f$ és $|f|\leq p$. Ekkor

$$l : \boldsymbol{E}\to\mathbb{C}, \quad x\mapsto f(x)-if(ix)$$

$\mathbb{C}$-lineáris leképezés. Mivel $\boldsymbol{L}\subset\boldsymbol{E}$ $\mathbb{C}$-lineáris altér és $h$ $\mathbb{C}$-lineáris leképezés, ha $x\in\boldsymbol{L}$, akkor $l(x) = \mathrm{Re}l(x)-i\mathrm{Re}l(ix) = h(x)$, azaz $h\subset l$. Tetszőleges $x\in\boldsymbol{E}$ esetén létezik $\alpha(x)\in\mathbb{T}$ úgy, hogy $|l(x)| = \alpha(x)l(x)$, ezért, mivel $|l(x)|$ valós,

$$|l(x)| = \alpha(x)l(x) = l(\alpha(x)x) =$$
$$= f(\alpha(x)x)-if(i\alpha(x)x) = f(\alpha(x)x)\leq p(\alpha(x)x) = p(x),$$

tehát $|l|\leq p$.

**7.3.** Definíció *Legyen $\boldsymbol{E}$ normált tér $\mathbb{K}$ fölött. Az $\boldsymbol{E} \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris leképezéseket $\boldsymbol{E}$ feletti **funkcionáloknak**, és a funkcionálok összességét az **$\boldsymbol{E}$ (topologikus) duálisának** nevezzük és $\boldsymbol{E}'$-vel jelöljük.*

$\boldsymbol{E}'$ a pontonkénti algebrai műveletekkel és a szokásos szuprémum-normával normált tér $\mathbb{K}$ felett, mely $\mathbb{K}$ teljessége miatt teljes még akkor is, ha $\boldsymbol{E}$ nem az (Analízis III.B.10.7.).

**7.4.** Állítás *Legyen $\boldsymbol{E}$ normált tér ($\mathbb{K}$ felett), $\boldsymbol{L}\subset\boldsymbol{E}$ lineáris altér és $h : \boldsymbol{L}\to\mathbb{K}$ folytonos lineáris leképezés. Ekkor létezik $l \in \boldsymbol{E}'$ úgy, hogy $h\subset l$ és $\|l\| = \|h\|$.*

BIZONYÍTÁS Mivel $h$ folytonos, a $p := \|h\|\ \|.\|$ leképezés olyan félnorma ($h \neq 0$ esetén norma) $\boldsymbol{E}$-n, hogy $|h| \leq p|_{\boldsymbol{L}}$ teljesül, tehát az előző állítás szerint létezik $l : \boldsymbol{E} \to \mathbb{K}$ lineáris leképezés úgy, hogy $l \subset h$ és $|l(x)| \leq \|h\|\ \|x\|$ az $\boldsymbol{E}$ minden $x$ elemére. Tehát $l$ folytonos és $\|l\| \leq \|h\|$. Viszont $\|l\| \geq \|h\|$ is teljesül, hiszen

$$\|l\| = \sup\{|l(x)| \mid x \in \boldsymbol{E}, \|x\| = 1\} \geq \sup\{|l(x)| \mid x \in \boldsymbol{L}, \|x\| = 1\}.$$

**7.5.** Állítás *Ha $\boldsymbol{M}$ zárt lineáris altér az $\boldsymbol{E}$ normált térben és $x \in \boldsymbol{E} \setminus \boldsymbol{M}$, akkor létezik $l \in \boldsymbol{E}'$ úgy, hogy $l(x) = \|x\| \neq 0$, $l|_{\boldsymbol{M}} = 0$.*

BIZONYÍTÁS Az. 1.8.2. feladat alapján könnyű ellenőrizni, hogy $h : \boldsymbol{M} + \mathbb{K}x \to \mathbb{K}$, $y + \lambda x \mapsto \lambda\|x\|$ olyan folytonos lineáris leképezés az $\boldsymbol{M} + \mathbb{K}x$ lineáris altéren, amelyre $h(x) = \|x\|$, $h|_{\boldsymbol{M}} = 0$. Alkalmazzuk a 7.4. állítást erre a $h$-ra. ■

Speciálisan ($\boldsymbol{M} = \{0\}$ esetére) az eredményünk azt adja, hogy minden $0 \neq x \in \boldsymbol{E}$ esetén létezik olyan $l \in \boldsymbol{E}'$, hogy $l(x) = \|x\|$ teljesül (ez persze igaz akkor is, ha $x = 0$).

Ebből következik, hogy $\boldsymbol{E}'$ **szétválasztja** $\boldsymbol{E}$ pontjait, ami az alábbi három egyenértékű állítást jelenti:

(i) ha $x \in \boldsymbol{E}$ és $l(x) = 0$ minden $l \in E'$ esetén, akkor $x = 0$;

(ii) ha $x, y \in \boldsymbol{E}$, $x \neq y$, akkor van olyan $l \in \boldsymbol{E}'$, hogy $l(x) \neq l(y)$;

(iii) ha $x, y \in \boldsymbol{E}$ és $l(x) = l(y)$ minden $l \in \boldsymbol{E}'$ esetén, akkor $x = y$.

Tudjuk lineáris algebrából, hogy az $\boldsymbol{E} \to \mathbb{K}$ lineáris leképezések szétválasztják $\boldsymbol{E}$ pontjait (Analízis II.12.2.). Most azt látjuk, hogy már $\boldsymbol{E} \to \mathbb{K}$ *folytonos* lineáris leképezések is szétválasztják $\boldsymbol{E}$ pontjait.

A szétválasztási tulajdonságot most úgy tehetjük szemléletessé, hogy ha $x \neq y$, akkor van olyan *zárt* hipersík, amely elválasztja egymástól $x$-et és $y$-t, a két vektor a hipersík ,,különböző oldalán" van.

**7.6.** Állítás *Az $\boldsymbol{E}$ normált tér minden $x$ elemére*

$$\|x\| = \sup_{l \in \boldsymbol{E}', \|l\| \leq 1} |l(x)|.$$

BIZONYÍTÁS Ha $l \in \boldsymbol{E}'$ és $\|l\| \leq 1$, akkor $|l(x)| \leq \|l\|\ \|x\| \leq \|x\|$, így

$$\sup_{l \in \boldsymbol{E}', \|l\| \leq 1} |l(x)| \leq \|x\|.$$

Viszont van olyan $l \in \boldsymbol{E}'$, amelyre $l(x) = \|x\|$, tehát a fenti egyenlőtlenség valójában egyenlőség. ■

Ha $\boldsymbol{E}$ normált tér, akkor $\boldsymbol{E}'$ is normált tér, így értelmezhető az $\boldsymbol{E}'' := (\boldsymbol{E}')'$ normált tér is. $x \in \boldsymbol{E}$ esetén

$$i(x) : \boldsymbol{E}' \to \mathbb{K}, \quad l \mapsto l(x)$$

lineáris leképezés, amely $|l(x)|\leq\|l\|\,\|x\|$ miatt folytonos, és $\|i(x)\|\leq\|x\|$. Az előbbi eredményünk szerint

$$\|i(x)\| = \sup_{l\in \boldsymbol{E}', \|l\|\leq 1} |i(x)(l)| = \sup_{l\in \boldsymbol{E}', \|l\|\leq 1} |l(x)| = \|x\|,$$

tehát $i : \boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}''$ lineáris izometria, így szükségképpen injektív.

Ezáltal az izometrikus injekció által azonosítjuk $\boldsymbol{E}$-t az $\boldsymbol{E}''$ egy lineáris alterével.

Definíció *Az $\boldsymbol{E}$ Banach teret* ***reflexívnek*** *nevezzük, ha $i : \boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}''$ (izometrikus lineáris) bijekció.*

Az $\boldsymbol{E}$ reflexív Banach-tér esetén tehát $\boldsymbol{E}'' \equiv \boldsymbol{E}$.

**7.7.** Nyilvánvaló, hogy $0 \neq l\in\boldsymbol{E}'$ esetén $\mathrm{Ker}(l)\subset\boldsymbol{E}$ valódi zárt lineáris altér. Ennek egy megfordítása a következő állítás.

Állítás *Legyen $\boldsymbol{E}$ normált tér, $f : \boldsymbol{E}\to\mathbb{K}$ nem nulla lineáris leképezés. Ekkor a következők ekvivalensek:*

*(i)* *$f$ folytonos,*
*(ii)* $\mathrm{Ker}(f)\subset\boldsymbol{E}$ *zárt,*
*(iii)* $\mathrm{Ker}(f)\subset\boldsymbol{E}$ *nem sűrű.*

Bizonyítás Ha $f$ folytonos, akkor $\mathrm{Ker}(f)$ zárt E-ben.

Legyen $\mathrm{Ker}(f)$ zárt $\boldsymbol{E}$-ben; ha sűrű volna, akkor $\mathrm{Ker}(f) = \boldsymbol{E}$ azaz $f = 0$ volna.

Tegyük fel, hogy $\mathrm{Ker}(f)\subset\boldsymbol{E}$ nem sűrű. Ekkor létezik $x\in\boldsymbol{E}$ és $r>0$ úgy, hogy $x+G_r(0)\subset\boldsymbol{E}\setminus\mathrm{Ker}(f)$. Mivel $f$ lineáris, ebből következik, hogy $-f(x)\notin f[G_r(0)]$. Ekkor speciálisan $f(x)\neq 0$. Ha $z\in\boldsymbol{E}$ olyan, hogy $|f(z)| \neq 0$, akkor

$$f\left(\frac{-f(x)}{f(z)}z\right) = -f(x),$$

következésképpen $\left\|\frac{f(x)}{f(z)}z\right\|\geq r$, és így $\|z\|\geq\left|\frac{f(z)}{f(x)}\right|r$, azaz ha $|f(z)\geq|f(x)|$, akkor $z\notin G_r(0)$. Tehát $z\in G_r(0)$ esetén $|f(z)|\leq|f(x)|$, azaz $f$ korlátos a $G_r(0)$ nyílt gömbön, ezért folytonos.

**7.8.** A duálisok segítségével általánosíthatjuk a komplex függvénytan eredményeit, amelyeket csak véges dimenziós vektorterekre láttunk be.

(i) Legyen $\boldsymbol{E}$ reflexív komplex Banach-tér, és $f:\mathbb{C} \rightarrowtail \boldsymbol{E}$ differenciálható. Ekkor minden $a\in\mathrm{Dom}(f)$ egy (maximális sugarú) $K_r(a)$ környezetében $f$ hatványsorral állítható elő,

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} c_n(z-a)^n \qquad (z\in K_r(a)), \tag{$*$}$$

amelyben a $c_n$ együtthatók az $\boldsymbol{E}$ elemei.

Ugyanis minden $l{\in}\boldsymbol{E}$ esetén $l{\circ}f{:}\mathrm{Dom}(f){\to}\mathbb{C}$ differenciálható, tehát analitikus, és így vannak olyan $c_n(l)$ komplex számok, hogy

$$l(f(z)) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} c_n(l)(z-a)^n \qquad (z{\in}K_r(a)). \tag{$**$}$$

A hatványsor együtthatóinak egyértelműségéből azonnal adódik, hogy minden $n{\in}\mathbb{N}_0$ esetén az $\boldsymbol{E}'{\to}\mathbb{C}$, $l{\mapsto}c_n(l)$ leképezés lineáris. Továbbá tudjuk, hogy

$$c_n(l) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_r(a)} \frac{l(f(w))}{(w-a)^{(n+1)}}dw,$$

tehát

$$|c_n(l)|{\le}\|l\|\frac{\max\limits_{w\in C_r(a)}\|f(w)\|}{r^n},$$

ami azt mutatja, hogy az $l{\mapsto}c_n(l)$ hozzárendelés folytonos is, tehát $c_n{\in}\boldsymbol{E}'' \equiv \boldsymbol{E}$. Mivel

$$\limsup_n \sqrt[n]{\|c_n\|}{\le}\limsup_n \frac{\sqrt[n]{\max\limits_{w\in C_r(a)}\|f(w)\|}}{r} = \frac{1}{r},$$

a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} c_n(z-a)^n$ sor $\boldsymbol{E}$-ben abszolút konvergens ha $|z-a|<r$, tehát $\boldsymbol{E}$ teljessége miatt konvegens is, és ezért a folytonos lineáris $l$ kiemelhető a $(**)$ jobb oldalán álló szumma elé, majd elhagyható mindkét oldalról, mert az egyenlőség minden $l$-re teljesül, és $\boldsymbol{E}'$ elemei szétválasztják $\boldsymbol{E}$ pontjait: így megkapjuk a $(*)$ egyenlőséget.

(ii) Legyen $\boldsymbol{E}$ komplex normált tér, és $f{:}\mathbb{C}{\to}\boldsymbol{E}$ differenciálható, korlátos függvény; ekkor $f$ konstans (Liouville tétele).

Ugyanis minden $l{\in}\boldsymbol{E}'$ esetén $l{\circ}f{:}\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ differenciálható korlátos függvény, ezért konstans, azaz minden $z$ és $w$ komplex számra $l(f(z)) = l(f(w))$. Mivel a duális elemei szétválasztják $\boldsymbol{E}$ pontjait, $l$ elhagyható mindkét oldalról.

### 7.9. Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy normált térben zárt lineáris altér és véges dimenziós lineáris altér komplexus összege zárt lineáris altér. (Útmutatás: elég belátni egy dimenziós esetre. Legyen $\boldsymbol{M}$ zárt lineáris altér és $0{\neq}x{\notin}\boldsymbol{M}$. Legyen $n{\mapsto}y_n{+}\lambda_n x$ konvergens sorozat az $\boldsymbol{M}{+}\mathbb{K}x$ altérben. Van olyan $l$ elem a normált tér duálisában, hogy $l(x) = 1$ és $l|_{\boldsymbol{M}} = 0$. Az $n{\mapsto}l(y_n{+}\lambda_n x){=:}\lambda_n$ sorozat is konvergens, következésképpen az $n{\mapsto}y_n$ sorozat is.)

2. Igazoljuk, hogy ha $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ normált terek közötti folytonos lineáris leképezés, akkor $\|A\| = \sup\limits_{l\in\boldsymbol{F}',\|l\|=1}\ \sup\limits_{x\in\boldsymbol{E},\|x\|=1} |l(Ax)|$.

3. Adjunk meg $l^p$-n olyan lineáris funcionált, amely nem folytonos. (Útmutatás: vegyük az 1.8.4. feladatban szereplő vektorok által kifeszített lineáris alteret

(nem zártat!). Tekintsük azt a lineáris leképezést, amelyet ezen az altéren a $e_n \mapsto n$ formula határoz meg, és amely nulla az altér egy tetszőlegesen választott kiegészítőjén.)

4. Mutssuk meg, hogy a 7.8.(i)-ben szereplő együtthatókra $c_n = \mathrm{D} f^n(a)(1, \ldots, 1)$ teljesül (ne feledjük, hogy $\mathrm{D}^n f(a) : \mathbb{C}^n \to \boldsymbol{E}$ szimmetrikus $n$-lineáris leképezés).

# 8. Egyes Banach-terek duálisa

A Hahn-Banach-tétel következményei mutatják, milyen lényeges szerepet játszik normált terek duálisa. Ezért fontos ismernünk (jellemeznünk) konkrét normált terek duálisát.

**8.1.** Az egyik leggyakrabban használt Banach-tér $C(K)$, egy $K$ kompakt metrikus téren értelmezett $\mathbb{K}$ értékű folytonos függvények tere a maximum-normával ellátva.

Emlékeztetünk arra, hogy kompakt metrikus tér kompakt halmazai által generált kvázi-$\sigma$-gyűrű (a Baire-féle kvázi-$\sigma$-gyűrű) egyenlű a nyílt halmazok generálta $\sigma$-algebrával (a Borel-féle $\sigma$-algebrával).

A kompakt metrikus tér Borel-halmazain értelmezett $\mathbb{K}$ értékű mértéket Radon-mértéknek hívunk; Radon-mérték variációja Borel-mérték (Analízis V.B.17.8.).

Ha $m$ Radon-mérték $K$-n, akkor az

$$l_m : C(K) \to \mathbb{K}, \quad f \mapsto \int_K f \, d\, m \tag{$*$}$$

lineáris funkcionál folytonos, hiszen $\left| \int_K f d\mu \right| \leq \|f\| \, |m|(K)$. Más szóval, minden $m$ Radon-mértékhez természetes módon hozzárendelhetjük a $C(K)$ duálisának egy $l_m$ elemét. Könnyű látni, hogy ez a hozzárendelés lineáris, és az előbbiek szerint $\|l_m\| \leq |m|(K)$. Még azt sem nehéz belátni, hogy ez a megfeleltetés injekció.

Tegyük ugyanis fel, hogy $l_m = 0$. A $K$ minden $H$ kompakt részhalmaza és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $\phi_{n,H} : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény (Analízis III.8.14.), hogy

$$\begin{aligned} \phi_{n,H}(x) &= 0 \quad \text{ha } d(x, H) > \frac{1}{n}, \\ 0 \leq \phi_{n,H}(x) &\leq 1 \quad \text{ha } 0 < d(x, H) \leq \frac{1}{n}, \\ \phi_{n,H}(x) &= 1 \quad \text{ha } 0 = d(x, H), \end{aligned}$$

és világos, hogy $\lim_n \phi_{n,H} = \chi_H$.

Mivel $0 = l_m(\phi_{n,H}) = \int\limits_K \phi_{n,H}\, dm$ és $|\phi_{n,H}| \le 1$, az 1 konstans függvény pedig integrálható a véges $|m|$ mérték szerint, a Lebesgue-tétel alapján a limesz bevihető az integráljel alá, így $0 = \int \chi_H\, dm = m(H)$ adódik. Ez minden $H$ kompakt részhalmazra igaz. Továbbá a mérték szubtraktivitása miatt kompakt halmazok különbségének a mértéke is nulla. A $\{H \setminus H' \mid H, H' \subset K,\ H, H' \text{ kompakt}\}$ halmazrendszer félgyűrű, amely tartalmazza a kompakt halmazokat, tehát az általa generált kvázi-$\sigma$-gyűrű a Borel-féle $\sigma$-algebra; következésképpen $m = 0$ (Analízis V.B.17.8.)

A Radon mértékek vektorteret alkotnak a pontonkénti műveletekkel. Megmutatható, hogy $m \to |m|(K)$ norma ezen a vektortéren, amivel a Radon-mértékek Banach-teret alkotnak; továbbá az $m \to l_m$ megfeletés szürjektív és izometrikus is. Ezeknek a bizonyítása meghaladja a jegyzetünk kereteit.

Állítás *(**Riesz-féle repezentációs tétel**) A $(*)$ formulával meghatározott $m \to l_m$ leképezés lineáris izometrikus bijekció a $K$ Radon-mértékeinek Banach-tere és $C(K)'$ között.*

Így $C(K)$ duálisát azonosíthatjuk a $K$-n adott Radon-mértékek összességével.

**8.2.** Állítás *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ $\sigma$-véges mértéktér, $1 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$ és $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Ekkor az*

$$L^q_\mu(X) \to \big(L^p_\mu(X)\big)', \quad g \mapsto l_g,$$

$$l_g(f) := \int_X gf\, d\mu \qquad (f \in L^p_\mu(X))$$

*formulával meghatározott leképezés lineáris izometria (tehát injektív) és $p \ne \infty$ esetén szürjetív is.*

Bizonyítás A Hölder-egyenlőtlenség szerint $l_g$ jól van definiálva (az integrál létezik), lineáris, folytonos, és $\|l_g\| \le \|g\|_q$.

Az is egyszerű tény, hogy a $g \mapsto l_g$ hozzárendelés lineáris.

Ha $p = \infty$ (akkor $q = 1$) és $f := e^{-i\arg g} \in L^\infty_\mu(X)$, amelyre $\|f\|_\infty = 1$, továbbá

$$|l_g(f)| = \int_X |g|\, d\mu = \|g\|_1\, \|f\|_\infty,$$

ezért $\|l_g\| = \|g\|_1$.

Ha $p \ne \infty$, akkor

$$f := |g|^{q/p} e^{-i\arg g} \in L^p_\mu(X),$$

amelyre

$$\|f\|_p = \left(\int_X |g|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \|g\|_q^{q/p},$$

továbbá $1 + \frac{q}{p} = q$ miatt

$$|l_g(f)| = \int_X |g|^{1+q/p} \, d\mu = \|g\|_q^q = \|g\|_q \|g\|_q^{q/p},$$

ezért $\|l_g\| = \|g\|_q$.

Beláttuk tehát az állításunk első részét. Azt kell még megmutatnunk, hogy a $g \mapsto l_g$ leképezés szürjektív, ha $p \neq \infty$.

Legyen $l \in \big(L^p_\mu(X)\big)'$. A véges mértékű halmazok karakterisztikus függvényei az $L^p_\mu(X)$ elemei, ezért megadhatjuk a véges mértékű halmazokon a $\mathbb{K}$ értékű $E \mapsto \nu(E) := l(\chi_{_E})$ leképezést.

Ha $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mérhető halmazok diszjunkt rendszere és $\mu(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n) < \infty$, akkor a halmazok (véges mértékűek lévén) karakterisztikus függvényei az $L^p_\mu(X)$ elemei, és Beppo Levi tétele alapján

$$\chi_{\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n} = (L^p) \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n},$$

ezért $\nu$ – lévén $l$ folytonos lineáris – $\sigma$-additív, azaz $\mathbb{K}$ értékű mérték a véges $\mu$-mértékű halmazok kvázi-$\sigma$-gyűrűjén. Ha $\mu(E) = 0$, akkor $\chi_{_E} = 0$ $\mu$-majdnem mindenütt, ezért (mert valójában nem a karakterisztrikus függggvényről van szó, hanem a megfelelő függvényosztályról), $l(\chi_{_E}) = 0$.

Ez azt jelenti, hogy $\nu$ abszolút folytonos $\mu$-re; tehát a Radon–Nykodim-tétel szerint létezik $g : X \to \mathbb{K}$ mérhető függvény, amellyel $\nu = g\mu$. Megmutatjuk, hogy $g$ a $q$-ik hatványon integrálható.

Minden $m\in\mathbb{N}$ esetén $G_m := \{x \in X \mid |g(x)|^q \leq m\} \in \mathcal{A}$, valamint $G_m \subset G_{m+1}$ és $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} G_m = X$.

A $\mu$ mérték $\sigma$-végessége miatt pedig létezik $H_n \in \mathcal{A}$, $H_n \subset H_{n+1}$, $\mu(H_n) < \infty$ $(n\in\mathbb{N})$, és $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n = X$.

Legyen

$$\gamma_{nm} := \int\limits_{H_n \cap G_m} |g|^q \, d\mu.$$

Ha létezik $\lim\limits_{n,m} \gamma_{nm}$, akkor Beppo Levi tétele alapján $g \in L^q_\mu(X)$.

Tegyük fel, hogy $g \notin L^q_\mu(X)$; ekkor nem létezik $\lim\limits_{n,m} \gamma_{nm}$, ami azzal egyenértékű, hogy $\{\gamma_{nm} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ nem korlátos.

Ekkor elég nagy $n$ és $m$ indexekre már $\gamma_{nm} > 0$, és definiálhatjuk a

$$g_{nm} := \frac{\chi_{H_n \cap G_m} |g|^{q-1} e^{-i \arg g}}{\sqrt[p]{\gamma_{nm}}}$$

függvényeket. Mivel $(q-1)p = q$, ezek a függvények $p$-ik hatványon integrálhatók, és $\|g_{n,m}\|_p = 1$.

Továbbá

$$l(g_{n,m}) = \frac{1}{\sqrt[p]{\gamma_{n,m}}} \int_{H_n \cap G_m} \|g\|^q \, d\mu = \gamma_{n,m}^{1-1/p},$$

ami nem korlátos sorozat $(n,m)$-ben, és ez ellentmond $l$ folytonosságának (korlátosságának). ∎

Így tehát $1 \le p < \infty$ esetén $L^q_\mu(X)$-t azonosíthatjuk $L^p_\mu(X)$ duálisával, $p = \infty$ esetén pedig egy lineáris alterével.

**8.3.** Két példát is hozunk arra, hogy $L^1_\mu(X) \ne \big(L^\infty_\mu(X)\big)'$.

1. $L^1([0,1]) \ne (L^\infty([0,1]))'$.

Tegyük fel ugyanis az ellenkezőjét.

$C([0,1])$ az $L^\infty([0,1])$ zárt lineáris altere. A $\varphi \mapsto \varphi(0)$ leképezés (a nullára koncentrált Dirac-mérték szerinti integrálás) folytonos lineáris funkcionál $C([0,1])$-en. A Hahn–Banach-tétel szerint van $l$ folytonos lineáris kiterjesztése $L^\infty([0,1])$-re. Feltételezésünk szerint ez a kiterjesztés $g\lambda$ alakú, ahol $g \in L^1([0,1,])$ és $\lambda$ a Lebesgue-mérték. Az

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - nx & \text{ha } 0 \le x < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{ha } \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

függvények folytonosak, ezért egyrészt

$$l(f_n) = 1 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

másrészt $\lim\limits_n f_n = 0$ majdnem mindenütt és $|f_n| \le 1$, tehát a Lebesgue-tétel alapján

$$\lim_n l(f_n) = \lim_n \int_0^1 g f_n = 0,$$

ami ellentmondás.

2. $l^1 \ne (l^\infty)'$.

Tegyük fel ugyanis az ellenkezőjét.

Vezessük be a következő jelölést: ha $a \in l^p$ és $b \in l^q$ – és persze $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ –, akkor legyen

$$a \cdot b := \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n.$$

Legyen $e_n$ az a sorozat, amelynek az $n$-ik tagja 1, a többi nulla ($n\in\mathbb{N}$). Ekkor

$$x_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i \in l^1,$$

és

$$\boldsymbol{L} := \{a \in l^\infty \mid \text{létezik } \lim_n x_n \cdot a\}$$

lineáris altér, amelyen az $a \mapsto \lim_n x_n \cdot a$ hozzárendelés lineáris és foytonos is, hiszen $|x_n \cdot a| \le \|a\|_\infty$ minden $n$-re. Ez a funkcionál nem nulla, mert az $(1,1,1,\dots) \in \boldsymbol{L}$ elemen az értéke 1.

Ezért a Hahn–Banach-tétel szerint van nemnulla folytonos lineáris kiterjesztése $l^\infty$-re. A feltevésünk szerint ez a kiterjesztés $l^1$-ben van, azaz létezik olyan $0 \ne x \in l^1$, amellyel $\lim_n x_n \cdot a = x \cdot a$ minden $a \in \boldsymbol{L}$ esetén.

Minden $m$-re $e_m \in \boldsymbol{L}$ és

$$x_n \cdot e_m = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{ha } m \le n, \\ 0 & \text{ha } m > n, \end{cases}$$

tehát $0 = \lim_n x_n \cdot e_m = x \cdot e_m$, amiből $x = 0$ következik, és ez ellentmondás.

**8.4. Feladatok**

1. $L^p_\mu(X)$ reflexív, ha $1 < p \le \infty$.

2. Egy $\boldsymbol{E}$ normált térben futó $(x)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat **gyengén konvergens**, ha létezik $x\in\boldsymbol{E}$ úgy, hogy $\lim_n l(x_n)=l(x)$ minden $l\in\boldsymbol{E}'$ esetén; ekkor azt mondjuk, hogy $x$ a sorozat **gyenge limesze**, és azt írjuk, hogy $x=(w)\lim_n x_n$.

Bizonyítsuk be, hogy egy gyengén konvergens sorozat

(i) korlátos, (ii) gyenge limesze egyértelmű.

3. Igazoljuk, hogy ha az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, akkor gyengén is konvergens és $(w)\lim_n x_n = \lim_n x_n$.

4. A gyenge konvergenciából általában nem következik a konvergencia. Mutassuk meg 8.2. alapján, hogy az $e_n := (0,0,\dots,0,\underset{(n)}{1},0,\dots)$ formulával definiált $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $l^p$-ben nem konvergens de gyengén a nullához tart $1 \le p < \infty$ esetén.

5. Tudjuk, hogy $\mathbb{K}^N$-ben egy sorozat pontosan akkor konvergens, ha minden komponens-sorozata konvergens. Igazoljuk az előbbi eredmények alapján, hogy $1 \le p < \infty$ esetén ha egy sorozat $l^p$-ben gyengén konvergens, akkor minden komponens-sorozata konvergens; viszont abból, hogy minden komponens-sorozata konvergens, nem következik, hogy gyengén konvergens (tekintsük az $(ne_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot).

6. Véges dimenziós normált téren minden gyengén konvergens sorozat konvergens is.

7. Tegyk fel, hogy az $\boldsymbol{E}$ normált térbeli $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra minden $l\in\boldsymbol{E}'$ esetén létezik $\lim\limits_n l(x_n) =: \xi(l)$; igaz-e, hogy a sorozat gyengén konvergens? (Útmutatás: tekintsük $x_n$-et az $\boldsymbol{E}''$ elemének; ekkor a Banach–Steinhaus-tétel szerint $l \mapsto \xi(l)$ szintén az $\boldsymbol{E}''$ eleme. Ha az $\boldsymbol{E}$ normált tér reflexív (és így szükségszerűen Banach-tér), akkor a sorozat gyengén konvergens. Nem reflexív Banach-térben előfordulhat, hogy a sorozatnak nincs gyenge limesze.)

8. Tegyük fel, hogy egy reflexív $\boldsymbol{E}$ Banach-térbeli $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra az $\boldsymbol{E}'$ egy totális halmazának (speciálisan egy Schauder-bázisának) minden $l$ elemére létezik $\lim\limits_n l(x_n))$; igaz-e, hogy a sorozat gyengén konvergens? (Útmutatás: tekintsük a $n^{3/4}\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ sorozatot $L^2([0,1])$-ben; duálisában, amely ő maga, a $\{\chi_E \mid E$ Borel-halmaz$\}$ totális halmazt és az $\mathrm{id}_{[0,1]}^{-1/4}$ függvényt.)

9. Igazoljuk, hogy $p \neq \infty$ esetén $L^p(\mathbb{R})$-ben $(w)\lim\limits_n \chi_{[n,n+1]} = 0$.(Útmutatás: tegyük fel, hogy ez nem igaz, azaz van olyan $g \in L^q(\mathbb{R})$, hogy $\lim\limits_n l_g(\chi_{[n,n+1]}) \neq 0$, azaz van olyan $\alpha > 0$, hogy $\left|\int_n^{n+1} g\right| > \alpha$ végtelen sok $n$-re.)

10. Ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gyengén konvergens az $\boldsymbol{E}$ normált térben és $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ folytonos lineáris leképezés, akkor $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gyengén konvergens $\boldsymbol{F}$-ben és $(w)\lim\limits_n Ax_n = A\big((w)\lim\limits_n x_n\big)$.

11. Legyen $\boldsymbol{E}$ és $\boldsymbol{F}$ Banach-tér, $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ lineáris leképezés. Mutassuk meg, hogy ha az $\boldsymbol{E}$-beli minden $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\boldsymbol{E}$-beli sorozatra, amelyre $\lim\limits_n x_n = 0$, az teljesül, hogy $(w)\lim\limits_n Ax_n = 0$, akkor $A$ folytonos. Útmutatás: elég belátni, hogy $A$ zárt. Legyen $x := \lim\limits_n x_n$, $y := \lim\limits_n Ax_n$; a feltételek szerint $(w)\lim\limits_n A(x_n - x) = 0$, amiből $l(y - Ax) = 0$ adódik az $\boldsymbol{E}'$ minden elemére.)

# 9. A Stone–Weierstrass-tétel

**9.1.** Ebben a fejezetben a 2.8-ban bebizonyított tételnek nagy jelentőségű általánosítását tárgyaljuk arra az esetre, amikor $K$ tetszőleges kompakt metrikus tér.

Először bevezetünk néhány fogalmat.

Azt mondjuk, hogy a $C(K,\mathbb{K})$ egy $H$ részhalmaza **szétválasztja** $K$ pontjait, ha minden $x\in K$, $y\in K$, $x\neq y$ esetén létezik $u\in H$ úgy, hogy $u(x)\neq u(y)$.

A $C(K,\mathbb{K})$ egy $A$ részhalmazát **részalgebrának** nevezzük, ha lineáris altér és minden $u,v\in A$ esetén $uv\in A$.

Az $A\subset C(K,\mathbb{C})$ részhalmazt ***-részalgebrának** nevezzük, ha részalgebra és minden $u\in A$ esetén $u^*\in A$.

Az $L\subset C(K,\mathbb{R})$ részhalmazt **lineáris hálónak** nevezzük, ha lineáris altér és minden $u,v\in L$ esetén $u\vee v, u\wedge v\in L$.

Ha $p=\sum_{k=0}^{n} c_k \mathrm{id}_{\mathbb{K}}^k$ polinom és $f\in C(K,\mathbb{K})$, akkor $p(f):=\sum_{k=0}^{n} c_k f^k \in C(K,\mathbb{K})$ (ahol természetesen $f^0 := 1$). Továbbá, ha $A$ a $C(K,\mathbb{K})$ részalgebrája és $p$ olyan polinom, amelyre $p(0)=0$ (vagyis a konstans tagja nulla), akkor $p(u)\in A$ az $A$ minden $u$ elemére.

**9.2.** Állítás *Ha $A$ a $C(K,\mathbb{R})$ részalgebrája, akkor minden $u\in A$ esetén $|u|\in\overline{A}$.*

Bizonyítás Tetszőleges $\varepsilon>0$ esetén az $]-\varepsilon^2,\infty[\to\mathbb{R}^+$, $t\mapsto\sqrt{t+\varepsilon^2}$ függvény analitikus, ezért az $\frac{1}{2}$ körüli Taylor-sora előállítja a $[0,1]$ intervallumon, ami azt jelenti, hogy $[0,1]$-en polinomok sorozatának egyenletes határértéke; tehát létezik $p$ polinom úgy, hogy $|p(t)-\sqrt{t+\varepsilon^2}|\le\varepsilon$ minden $t$-re a $[0,1]$ intervallumból. Speciálisan $|p(0)|\le 2\varepsilon$. (Megjegyezzük, az ilyen polinom létezése a 2.8-beli Weierami ige egy-tételből is következik, itt azonban annál egyszerűbb tényre hivatkoztunk.)

Mivel $p-p(0)$ olyan polinom, amelynek a konstans tagja nulla, az előző pontban mondottak szerint minden $u\in A$ esetén $p(u^2)-p(0)\in A$. Tegyük most fel, hogy $|u|\le 1$; ekkor

$$\|p(u^2)-p(0)-|u|\| = \max_{x\in K}|p(u^2(x))-p(0)-\sqrt{u^2(x)}|\le \max_{t\in[0,1]}|p(t)-p(0)-\sqrt{t}|\le$$
$$\le \max_{t\in[0,1]}|p(t)-\sqrt{t+\varepsilon^2}|+\max_{t\in[0,1]}|\sqrt{t+\varepsilon^2}-\sqrt{t}|+|p(0)|\le 4\varepsilon;$$

a középső tag becslését úgy kaphatjuk meg, hogy be is szorozzuk, el is osztjuk a $\sqrt{t+\varepsilon^2}+\sqrt{t}$ mennyiséggel. Azt kaptuk, hogy $|u|$ érintkezési pontja $A$-nak.

A nulla nyilvánvalóan az $A$ eleme. Ha $0\neq u\in A$, akkor $u=\|u\|\frac{u}{\|u\|}$, és $\frac{|u|}{\|u\|}$ hozzátartozik $\overline{A}$-hoz, amely lineáris altér, így $u$ is az eleme. ■

Mivel bármely $f$ és $g$ függvényre

$$f\wedge g=\frac{1}{2}\big(f+g-|f-g|\big),\quad f\vee g=\frac{1}{2}\big(f+g+|f-g|\big),$$

eredményünkből egyszerűen adódik:

**Következmény** Ha $A$ a $C(K,\mathbb{R})$ zárt részalgebrája, akkor lineáris háló.

**9.3.** Állítás *Legyen $L\subset C(K,\mathbb{R})$ lineáris háló. Ha $f\in C(K,\mathbb{R})$ olyan, hogy minden $x,y\in K$ és $\varepsilon>0$ esetén létezik $u_\varepsilon^{xy}\in L$ úgy, hogy $|f(x)-u_\varepsilon^{xy}(x)|<\varepsilon$ és $|f(y)-u_\varepsilon^{xy}(y)|<\varepsilon$, akkor $f\in\overline{L}$.*

(Mielőtt bebizonyítanánk ezt az állítást, megfogalmazzuk másképpen is, hogy egy kicsit szemléletesebbé tegyük, miről van szó: ha $f$ olyan $K\to\mathbb{R}$ folytonos függvény, hogy minden $x,y$ esetén van olyan függvénysorozat $L$-ben, amely az $x$ és $y$

pontban az $f(x)$-hez illetve az $f(y)$-hoz konvergál, akkor van olyan függvénysorozat $L$-ben, amely $K$-n egyenletesen konvergál az $f$-hez.)

Bizonyítás Minden $x,y\in K$ és $\varepsilon > 0$ esetén

$$U_\varepsilon^{xy} := \{z\in K \mid u_\varepsilon^{xy}(z)>f(z)-\varepsilon\}, \qquad V_\varepsilon^{xy} := \{z\in K \mid u_\varepsilon^{xy}(z)<f(z)+\varepsilon\}$$

nem üres nyílt halmazok, hiszen $x$ is, $y$ is az elemeik, és nyílt halmazoknak az $u_\varepsilon^{xy}-f$ folytonos függvény általi ősképei.

Mivel $\bigcup\limits_{y\in K} U_\varepsilon^{xy} = K$, $K$ kompakt, van olyan $y_1,\dots,y_n \in K$, hogy $\bigcup\limits_{k=1}^{n} U_\varepsilon^{xy_k} = K$. Lévén $L$ lineáris háló, $\bigvee\limits_{k=1}^{n} u_\varepsilon^{xy_k} =: u_\varepsilon^x \in L$.

Egyszerű tény, hogy $u_\varepsilon^x(z)>f(z)-\varepsilon$ minden $z\in K$ esetén, és $u_\varepsilon^x(z)<f(z)+\varepsilon$ ha $z\in W_\varepsilon^x := \bigcap\limits_{k=1}^{n} V_\varepsilon^{xy_k}$. Mivel $W_\varepsilon^x$-ek nyílt halmazok és lefedik $K$-t, van olyan $x_1,\dots,x_m$ eleme $K$-nak, hogy $\bigcup\limits_{i=1}^{n} W_\varepsilon^{x_i} = K$. Hasonlóan láthatjuk, mint az előbb, hogy $\bigwedge\limits_{i=1}^{m} u_\varepsilon^{x_i} =: u_\varepsilon\in L$ és

$$u_\varepsilon(z)-\varepsilon<f(z)<u_\varepsilon(z)+\varepsilon \qquad (z\in K).$$

**9.4. Állítás** *(**Stone-tétel**) Legyen $L\subset C(K,\mathbb{R})$ olyan lineáris háló, mely tartalmazza a konstans függvényeket és szétválasztja $K$ pontjait. Ekkor $L$ sűrű $C(K,\mathbb{R})$-ben.*

Bizonyítás Legyen $f\in C(K,\mathbb{R})$ és $x,y\in K$. Ha $x\neq y$, akkor létezik $h\in L$ úgy, hogy $h(x)\neq h(y)$. Az

$$u^{xy} := f(x)+\frac{f(y)-f(x)}{h(y)-h(x)}(h-h(x))$$

függvény az $L$ eleme, és $u^{xy}(x)=f(x)$, $u^{xy}(y)=f(y)$. Ha $x = y$, akkor az $u^{xy} := f(x)$ konstans függvény az $L$ eleme.

Az így definiált $u^{xy}$ függvények eleget tesznek a 9.3. állítás feltételeinek minden $\varepsilon>0$ esetén, tehát $f\in\overline{L}$; mivel $f$ tetszőleges, ez éppen azt jelenti, hogy $L$ sűrű $C(K,\mathbb{R})$-ben.

**9.5. Állítás** *(**Stone–Weierstrass-tétel, valós**) Legyen $A\subset C(K,\mathbb{R})$ olyan részalgebra, mely tartalmazza a konstans függvényeket és szétválasztja $K$ pontjait. Ekkor $A$ sűrű $C(K,\mathbb{R})$-ban.*

Bizonyítás Könnyen látható, hogy $\overline{A}\subset C(K,\mathbb{R})$ is részalgebra; a 9.2. állítás következménye szerint $\overline{A}$ lineáris háló. Mivel $A\subset\overline{A}$ miatt $\overline{A}$ szétválasztja $K$ pontjait és tartalmaza a konstans függvényeket, a 9.4. állításból azonnal következik, amit bizonyítani akarunk.

**9.6.** Állítás (***Stone–Weierstrass-tétel, komplex***) *Legyen $A{\subset}C(K,\mathbb{C})$ *-részalgebra, mely tartalmazza a konstans függvényeket és szétválasztja $K$ pontjait. Ekkor $A$ sűrű $C(K,\mathbb{C})$-ben.*

Bizonyítás Legyen $B{:=}A{\cap}C(K,\mathbb{R})$. Ha $u{\in}A$, akkor

$$\mathrm{Re}(u){=}\frac{u{+}u^*}{2} \in B \quad \text{és} \quad \mathrm{Im}(u){=}\frac{u{-}u^*}{2i} \in B,$$

következésképpen $B{\subset}C(K,\mathbb{R})$ is szétválasztja $K$ pontjait, emellet valós részalgebra, mely tartalmazza a konstans függvényeket. Az előző állítás szerint $B$ sűrű $C(K,\mathbb{R})$-ben. Ha $f{\in}C(K,\mathbb{C})$, akkor $\mathrm{Re}(f)$ és $\mathrm{Im}(f)$ tetszőlegesen megközelíthető $B$-beli függvényekkel, így $f{=}\mathrm{Re}(f){+}i\mathrm{Im}(f)$ tetszőlegesen megközelíthető $A$-beli függvényekkel.

**9.7. Feladatok**

1. Ha $K{\subset}\mathbb{C}$ kompakt halmaz, akkor $\left\{1, \mathrm{id}_K^n, (\mathrm{id}_K^n)^* \mid n{\in}\mathbb{N}\right\}$ Schauder-bázis $C(K,\mathbb{C})$-ben.

2. A $H{\subset}C(K,\mathbb{R})$ részhalmazt **felfelé** (illetve **lefelé**) **irányítottnak** nevezzük, ha minden $u,v{\in}H$ esetén létezik $w{\in}H$ úgy, hogy $u{\vee}v{\le}w$ (illetve $u{\wedge}v{\ge}w$).

Bizonyítsuk be, hogy ha $H{\subset}C(K,\mathbb{R})$ olyan felfelé (illetve lefelé) irányított halmaz, hogy $f{:=}\bigvee\limits_{u\in H} u{\in}H$ (illetve $f{:=}\bigwedge\limits_{u\in H} u{\in}H$, akkor minden $\varepsilon{>}0$ esetén létezik $h_\varepsilon{\in}H$ úgy, hogy minden $h{\in}H$, $h{\ge}h_\varepsilon$ (illetve $h{\le}h_\varepsilon$) esetén $\|f{-}h\|{<}\varepsilon$. (Útmutatás: minden $x{\in}K$ és $\varepsilon{>}0$ esetén létezik $u_\varepsilon^x{\in}H$ úgy, hogy $f(x){-}\varepsilon{<}u_\varepsilon^x(x){\le}f(x){<}f(x){+}\varepsilon$. A felfelé irányítottság miatt minden $x$-re és $y$-ra létezik $u_\varepsilon^{xy}{\ge}u_\varepsilon^x{\vee}u_\varepsilon^y$, és nyilvánvaló, hogy $f(x){-}\varepsilon{<}u_\varepsilon^{xy}(x){\le}f(x){<}f(x){+}\varepsilon$, valamint $f(y){-}\varepsilon{<}u_\varepsilon^{xy}(y){\le}f(y){<}f(y){+}\varepsilon$.)

3. Igazoljuk Dini tételét: ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton növő (illetve fogyó) $C(K,\mathbb{R})$-beli sorozat, hogy $f{:=}\bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ (illetve $f{:=}\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$) folytonos $K$-n. Ekkor a konvergencia $K$-n egyenletes, azaz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál $f$-hez a $C(K,\mathbb{R})$ Banach-térben.

# III. HILBERT-TEREK

## 10. Skalárszorzat és norma kapcsolata

**10.1** Legyen $(\boldsymbol{E}, \langle .,. \rangle)$ skalárszorzatos tér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor $x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ norma $\boldsymbol{E}$-n, melyet a $\langle .,. \rangle$ skalárszorzat által generált normának nevezünk. Egy skalárszorzatos teret a skalárszorzata által generált normával egyben normált térnek tekintünk. Tetszőleges $x, y \in \boldsymbol{E}$ esetén teljesül a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|,$$

így a skalárszorzat $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} \to \mathbb{K}$ folytonos leképezés, speciálisan a változóiban folytonos. Különösen fontos lesz, hogy minden $x \in \boldsymbol{E}$ esetén $\boldsymbol{E} \to \mathbb{K}$, $y \mapsto \langle x, y \rangle$ folytonos lineáris leképezés, amelyet az $\langle x|$ szimbólummal jelölünk.

Egy teljes skalárszorzatos teret **Hilbert-térnek** nevezünk. Egy Hilbert-tér tehát Banach-tér a skalárszorzat által generált normával.

Állítás *Legyen $(\boldsymbol{E}, \langle .,. \rangle)$ skalárszorzatos tér $\mathbb{K}$ fölött. Ekkor minden $x, y \in \boldsymbol{E}$ esetén*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \tag{1}$$

*továbbá*

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *esetén*

$$\langle x, y \rangle = \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2, \tag{2}$$

- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *esetén*

$$\langle x, y \rangle = \left( \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 \right) - i \left( \left\| \frac{x+iy}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x-iy}{2} \right\|^2 \right). \tag{3}$$

Az Olvasóra bízzuk, végezze el azokat az egyszerű számolásokat, amelyekkel ezek a formulák igazolhatók.

Az (1) összefüggést **parallelogramma-egyenlőségnek** hívjuk.

**10.2.** Ha az $\boldsymbol{E}$ normált tér normája skalárszorzatból származik, akkor minden $\boldsymbol{E}$-beli vektorpárra teljesül a parallelogramma-egyenlőség. Megmutatjuk, hogy ez a feltétel elegendő is ahhoz, hogy egy adott norma skalárszorzatból származzon.

Állítás *Legyen $(\boldsymbol{E}, \|.\|)$ olyan mormált tér, hogy bármely két $\boldsymbol{E}$-beli vektorra teljesül a parallelogramma-egyenlőség. Ekkor létezik egyetlen $S : \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}\to\mathbb{K}$ skalárszorzat úgy, hogy minden $x\in\boldsymbol{E}$ esetén $S(x,x)=\|x\|^2$.*

Bizonyítás Az előbbi állítás (2) és (3) pontja szerint ha létezik ilyen skalárszorzat, akkor az egyértelmű.

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ esetén legyen

$$S : \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}\to\mathbb{R}, \quad (x,y)\mapsto \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2.$$

Nyilvánvaló, hogy ez a leképezés folytonos, szimmetrikus, és az $\boldsymbol{E}$ minden $x$ elemére $S(x,x) = \|x\|^2$. Megmutatjuk, hogy $S$ bilineáris.

$x, y, z\in\boldsymbol{E}$ esetén a parallelogramma-egyenlőség szerint

$$\begin{aligned} S(x,z)+S(y,z) &= \left\|\frac{x+z}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-z}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{y+z}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{y-z}{2}\right\|^2 = \\ &= \frac{1}{2}\left(\left\|\frac{x+y+2z}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x+y-2z}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2\right) = \\ &= \frac{1}{2}S(x+y,2z). \end{aligned}$$

Ha $y:=0$, akkor $S(x,z)=\frac{1}{2}S(x,2z)$, ezért $\frac{1}{2}S(x+y,2z)=S(x+y,z)$, így

$$S(x,z)+S(y,z) = S(x+y,z),$$

tehát $S$ az első változójában additív; folytonos is, ezért $\mathbb{R}$-lineáris. Mivel $S$ szimmetrikus, a második változójában is $\mathbb{R}$-lináris.

$\mathbb{K}=\mathbb{C}$ esetén az előzőek szerint

$$S_{\mathbb{R}} : \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}\to\mathbb{R}, \quad (x,y)\mapsto \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2$$

szimmetrikus $\mathbb{R}$-bilineáris leképezés, és $S_{\mathbb{R}}(ix,iy)=S_{\mathbb{R}}(x,y)$, így

$$S : \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}\to\mathbb{R}, \quad (x,y)\mapsto S_{\mathbb{R}}(x,y)-iS_{\mathbb{R}}(x,iy)$$

skalárszorzat, amelyre $S(x,x)=\|x\|^2$.

**10.3.** Legyen $(\boldsymbol{E}, \langle .,. \rangle)$ skalárszorzatos tér. Ha $\|.\|$ jelöli a skalárszorzat által generált normát, akkor $(\boldsymbol{E}, \|.\|)$ normált tér. Ez a normált tér teljessé tehető (Analízis III.B.IV.7.5.), azaz létezik $(\widehat{\boldsymbol{E}}, \widehat{\|.\|})$ teljes normált tér, és $i : \boldsymbol{E} \to \widehat{\boldsymbol{E}}$ izometrikus lineáris leképezés úgy, hogy $i[\boldsymbol{E}]$ sűrű lineáris altér $\widehat{\boldsymbol{E}}$-ben. Azonosítsuk szokás szerint $\boldsymbol{E}$-t $i[\boldsymbol{E}]$-vel. Ha tehát $x \in \widehat{\boldsymbol{E}}$, akkor létezik $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\boldsymbol{E}$-ben, hogy $x = \lim_n x_n$. A norma folytonossága miatt ebből egyszerűen adódik, hogy a $\widehat{\|.\|}$ norma is teljesíti a parallelogramma-egyenlőséget, ezért egy $\widehat{\langle .,. \rangle}$ skalárszorzatból származtatható amely nyilván az eredeti skalárszorzat kiterjesztése.

Tehát $(\widehat{\boldsymbol{E}}, \widehat{\langle .,. \rangle})$ Hilbert-tér, melyet az $(\boldsymbol{E}, \langle .,. \rangle)$ skalárszorzatos tér **teljes burkának** nevezünk.

**10.4.** Sokszor nem skalárszorzatot, hanem csak "félskalárszorzatot" tudunk természetes módon megadni egy vektortéren.

Legyen $\boldsymbol{E}$ vektortér $\mathbb{K}$ felett, és $S : \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}\to\mathbb{K}$ olyan leképezés, hogy minden $x, y, z\in\boldsymbol{E}$, és $\lambda\in\mathbb{K}$ esetén

(**S1'**) $S(x, x)\in\mathbb{R}_0^+$,

(**S2**) $S(y, x)=S(x, y)^*$,

(**SA**) $S(x, y+z)=S(x, y)+S(x, z)$,

(**SP**) $S(x, \lambda y)=\lambda S(x, y)$.

$S$ nem skalárszorzat, mivel **S1'** gyengébb, mint amit a skalárszorzatra kirovunk: nem követeljük meg azt, hogy $S(x, x)=0$ csak $x=0$ esetén álljon fenn. Ettől eltekintve rendelkezik a skalárszorzat minden tulajdonságával.

Megmutatjuk, hogy $S$-re teljesül a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség: minden $x, y\in E$ esetén

$$|S(x, y)|\leq\sqrt{S(x, x)}\sqrt{S(y, y)}$$

(viszont egyenlőség nem csak akkor teljesülhet, ha $x$ és $y$ párhuzamosak).

Ugyanis, ha $z := S(x, x)y - S(y, y)x$, akkor

$$0 \leq S(z, z) = S(x, x)^2 S(y, y) - S(x, x)S(x, y)^* S(x, y) = \\ = S(x, x)\left(S(x, x)S(y, y) - |S(x, y)|^2\right).$$

Ha $S(x, x)\neq 0$, akkor ebből következik a kívánt egyenlőtlenség. Ha $S(y, y)\neq 0$, akkor a fenti egyenlőtlenségben $x$ és $y$ szerepét megcserélve szintén a kívánt egyenlőtlenség adódik. Tegyük fel, hogy $S(x, x)=S(y, y)=0$. Ekkor

$$0 \leq S(y - S(x, y)x, y - S(x, y)x) = -2|S(x, y)|^2,$$

következésképpen $S(x, y)=0$, így ismét teljesül az egyenlőtlenség.

A Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenségből következik, hogy

(1) ha $x\in\boldsymbol{E}$ olyan vektor, hogy $S(x, x)=0$, akkor minden $y\in\boldsymbol{E}$ esetén $S(x, y)=0$.

(2) a

$$p : \boldsymbol{E}\to\mathbb{R}_0^+, \quad x\mapsto\sqrt{S(x, x)}$$

leképezés félnorma $\boldsymbol{E}$-n, így

$$\boldsymbol{N} := \{x{\in}\boldsymbol{E} \mid p(x){=}0\} = \{x{\in}\boldsymbol{E} \mid S(x,x){=}0\}$$

lineáris altere $\boldsymbol{E}$-nek, és (1) szerint $\boldsymbol{N}{=}\{x{\in}\boldsymbol{E} \mid S(x,.){=}0\}$. Jelölje $\pi$ az $\boldsymbol{E}{\to}\boldsymbol{E}/\boldsymbol{N}$ kanonikus szürjekciót.

Legyenek $x_1, y_1, x_2, y_2{\in}\boldsymbol{E}$ olyanok, hogy $x_1{-}x_2{\in}\boldsymbol{N}$ és $y_1{-}y_2{\in}\boldsymbol{N}$. Ekkor az előzőek szerint

$$S(x_1,y_1){-}S(x_2,y_2){=}S(x_1{-}x_2,y_1){+}S(x_2,y_1{-}y_2){=}0,$$

azaz $S(x_1,y_2){=}S(x_2,y_2)$, ezért létezik egyetlen $\hat{S} : \boldsymbol{E}/\boldsymbol{N}{\times}\boldsymbol{E}/\boldsymbol{N}{\to}\mathbb{K}$ leképezés úgy, hogy $\hat{S}{\circ}(\pi{\times}\pi){=}S$. Könnyen látható, hogy $\hat{S}$ skalárszorzat $\boldsymbol{E}/\boldsymbol{N}$-en, melyre minden $x{\in}\boldsymbol{E}$ esetén

$$\hat{S}(\pi(x),\pi(x)){=}S(x,x){=}p(x)^2{=}\hat{p}(\pi(x))^2,$$

tehát az $\hat{S}$ által generált norma megegyezik a $p$ félnormához asszociált normával. $\hat{S}$-ot az $S$-hez **asszociált skalárszorzatnak**, $(\boldsymbol{E}/\boldsymbol{N},\hat{S})$-ot pedig az $S$-hez **asszociált skalárszorzatos térnek** nevezzük.

**10.5.** A fenti konstrukciónak speciális esete a négyzetesen integrálható függvények tere, amely az Analízis V.B.14. fejezetében szerepel.

Legyen $(X,\mathcal{A},\mu)$ $\sigma$-véges mértéktér, $\boldsymbol{K}$ Hilbert-tér. Ekkor

$$\mathcal{L}^2(X,\mathcal{A},\mu;\boldsymbol{K}) := \{\varphi : X{\to}\boldsymbol{K} \mid \varphi \text{ mérhető és } |\varphi|^2 \ \mu\text{-integrálható}\}$$

lineáris tér; $\varphi,\psi{\in}\mathcal{L}^2(X,\mathcal{A},\mu;\boldsymbol{K})$ esetén az $\langle\varphi,\psi\rangle : X{\to}\mathbb{K},\ x\mapsto\langle\varphi(x),\psi(x)\rangle$ függvény mérhető, és $|\langle\varphi,\psi\rangle|{\le}|\varphi|\,|\psi|$ miatt a Hölder-egyenlőtlenség szerint $\mu$-integrálható. Az

$$\mathcal{L}^2(X,\mathcal{A},\mu;\boldsymbol{K}){\times}\mathcal{L}^2(X,\mathcal{A},\mu;\boldsymbol{K}) \to \mathbb{K}, \quad (\varphi,\psi){\mapsto}\int_X \langle\varphi,\psi\rangle d\mu \qquad (*)$$

leképezés nem skalárszorzat, de rendelkezik az S1', S2, SA, SP tulajdonságokkal.

Mivel $\varphi{\in}\mathcal{L}^2(X,\mathcal{A},\mu;\boldsymbol{K})$ esetén $\int_X \langle\varphi,\varphi\rangle d\mu{=}\|\varphi|_2$, a $(*)$ által generált félnorma megegyezik az $\mathcal{L}^2(X,\mathcal{A},\mu;\boldsymbol{K})$ térnek az 1.5-ben tárgyalt félnormájával. Ezért az előzőekben mondottak szerint a függvényosztályokból álló $L^2(X,\mathcal{A},\mu;\boldsymbol{K})$ skalárszorzatos tér, sőt teljes, tehát Hilbert-tér. Az $F,G\in L^2(X,\mathcal{A},\mu;\boldsymbol{K})$ függvényosztályok skalárszorzata $\int_X \langle\varphi,\psi\rangle\, d\mu$, ahol $\varphi\in F$ és $\psi\in G$ tetszőleges.

Sokszor foglalkozunk négyzetesen integrálható függvényterekkel. Elismételjük, amit korábban is mondtunk. A jelölésből elhagyjuk a $\sigma$-algebrát, és a szokásnak megfelelően $L^2_\mu(X,\boldsymbol{K})$-t írunk. Továbbá a matematikában meghonosodott kis pongyolasággal az $L^2_\mu(X,\boldsymbol{K})$ elemeiről mint függvényekről beszélünk (függvényosztályok helyett); tehát amikor azt mondjuk, hogy az $L^2_\mu(X,\boldsymbol{K})$-beli $\varphi$ függvény, akkor a $\varphi$-vel $\mu$-majdnem mindenütt egyenlő függvények osztályára gondolunk.

Ha $\boldsymbol{K}=\mathbb{K}$, akkor $\mathbb{K}$-t is elhagyjuk a jelölésből, kivéve persze, ha hangsúlyozni akarjuk, hogy csak a valós illetve a komplex esetről van szó.

$\mathbb{R}^N$-en a Lebesgue-mérhető halmazok a Borel-féle $\sigma$-algebra Lebesgue-mérték szerinti teljesítésének az elemei. A Lebesgue-mértéket is el szokás hagyni a jelölésből, tehát $L^2(\mathbb{R}^N,\boldsymbol{K})$-t, $L^2(\mathbb{R}^N)$-t írunk.

Továbbá $l^2$ a $\mathbb{K}$ értékű négyzetesen összegezhető sorozatok tere, és ha $I$ nemüres halmaz, akkor $l^2(I)$ jelöli az 1.4. értelmében négyzetesen összegezhető $I\to\mathbb{K}$ függvények összességét, amelyen

$$\langle\lambda,\mu\rangle=\sum_{i\in I}{\lambda_i}^*\mu_i \qquad \lambda,\mu\in l^2(I)$$

jól definiált skalárszorzat, ami abból adódik, hogy ez is a fent definiált függvényterek speciális esete, az $I$ számlálómértéke szerint integrálással. Közvetlenül is megmutathatjuk, hogy a definíció jó (a szóban forgó összeg létezik). Ugyanis az $I$ minden $F$ véges részhalmaza esetén

$$\left|\sum_{i\in F}{\lambda_i}^*\mu_i\right|\le\sum_{i\in F}|{\lambda_i}^*\mu_i|\le\sqrt{\sum_{i\in F}|\lambda_i|^2}\sqrt{\sum_{i\in F}|\mu_i|^2},$$

következésképpen a Cauchy-kritérium szerint létezik a $\sum\limits_{i\in I}{\lambda_i}^*\mu_i$ összeg.

**10.6. Feladatok**

1. Legyen $\boldsymbol{H}_1$ és $\boldsymbol{H}_2$ Hilbert-tér. Mutassuk meg, hogy $\boldsymbol{H}_1\times\boldsymbol{H}_2\to\mathbb{K}$, $\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big)\mapsto\langle x_1,y_1\rangle+\langle x_2,y_2\rangle$ skalárszorzat, amellyel a Descartes-szorzat Hilbert-tér.

2. Legyenek $\boldsymbol{H}_n$ ($n\in\mathbb{N}$) Hilbert-terek. Mutassuk meg, hogy a Descartes-szorzatuk azon lineáris altere, amelynek elemeit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\|x_n\|^2\infty$ jellemez, Hilbert-tér az $\langle x,y\rangle:=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\langle x_n,y_n\rangle$ skalárszorzattal.

3. Mutassuk meg, hogy ha $K$ nem egyelemű halmaz, akkor $C(K)$ normája nem származtatható skaláris szorzatból!

4. Ha $\mu$ olyan mérték, amelynek értékkészlete kettőnél több elemű, akkor $p\ne2$ esetén $L^p_\mu(X)$ normája nem származtatható skaláris szorzatból!

5. Legyenek $1\le M<N$ természetes számok. $\mathbb{K}^N$-en az $(x,y)\mapsto\sum\limits_{i=1}^{N-M}x_i^*y_i$ leképezés "félskalárszorzat". Adjuk meg az asszociált skalárszorzatos teret!

# 11. Hilbert-terek zárt alterei, ortogonális projektorok

**11.1.** Állítás *Legyen $L$ nemüres, konvex, zárt halmaz a $\boldsymbol{H}$ Hilbert-térben. Ekkor minden $x \in \boldsymbol{H}$ esetén létezik egyetlen $y \in L$, amelyre*

$$\|x-y\| = \inf_{z \in L} \|x-z\| = d(x, L).$$

Bizonyítás Legyen $x \in \boldsymbol{H}$ tetszőleges, és $d := d(x, L)$. Ekkor létezik $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat $L$-ben úgy, hogy $\lim\limits_n \|x-z_n\| = d$. Mivel $L$ konvex, $m, n \in \mathbb{N}$ esetén $\frac{z_n+z_m}{2} \in L$, így $\left\|x - \frac{z_n+z_m}{2}\right\| \geq d$ . A parallelogramma-egyenlőség szerint

$$\begin{aligned}
\|z_m - z_n\|^2 &= \|(x-z_n)-(x-z_m)\|^2 = \\
&= 2\|x-z_n\|^2 + 2\|x-z_m\|^2 - \|(x-z_n)+(x-z_m)\|^2 \leq \\
&\leq 2\|x-z_n\|^2 + 2\|x-z_m\|^2 - 4d^2,
\end{aligned}$$

ezért $\lim\limits_n \|x-z_n\|^2 = d^2$ miatt $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat $L$-ban, így konvergens, és $L$ zártsága miatt a határértéke az $L$ eleme; jelölje $y \in L$ ezt a határértékét. Ekkor

$$\|x-y\| = \lim_n \|x-z_n\| = d$$

teljesül.

Tegyük fel, hogy $y_1 \in L$ és $y_2 \in L$ két olyan vektor, amelyre $\|x-y_1\| = \|x-y_2\| = d$. Ekkor ismét a parallelogramma-egyenlőség szerint

$$\begin{aligned}
&\|y_2 - y_1\|^2 = \|(x-y_1)-(x-y_2)\|^2 = \\
&\qquad = 2\|x-y_1\|^2 + 2\|x-y_2\|^2 - \|(x-y_1)+(x-y_2)\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0,
\end{aligned}$$

következésképpen $y_1 = y_2$. ■

Az állításban szereplő, egyértelműen létező $y$ elem az $L$ halmaz $x$-hez legközelebbi eleme.

Megjegyezzük, hogy lineáris altér nemüres konvex halmaz, tehát zárt lineáris altérre is igaz az állítás.

**11.2.** A Hilbert-tér $x$ és $y$ vektorát **ortogonálisnak** mondjuk, ha $\langle x, y \rangle = 0$. Az $x$ vektor **ortogonális** az $A$ részhalmazra, ha ortogonális az $A$ minden elemére. Az $A$ és $B$ részhalmazok **ortogonálisak**, ha az $A$ minden eleme ortogonális a $B$ minden elemére.

Állítás *Legyen $\boldsymbol{M}$ zárt lineáris altér a $\boldsymbol{H}$ Hilbert-térben és $x \in \boldsymbol{H}$. Jelölje $x_{\boldsymbol{M}} \in \boldsymbol{M}$ az $\boldsymbol{M}$-nek az $x$-hez legközelebbi elemét. Ekkor $x_{\boldsymbol{M}}$ az egyetlen olyan vektor, hogy $x - x_{\boldsymbol{M}}$ ortogonális $\boldsymbol{M}$-re.*

Bizonyítás Legyen $z \in \boldsymbol{M}$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. Ekkor $x_{\boldsymbol{M}} \in \boldsymbol{M}$ miatt $x_{\boldsymbol{M}} + \lambda z \in \boldsymbol{M}$, következésképpen $\|x_{\boldsymbol{M}} - x\| \leq \|x - x_{\boldsymbol{M}} - \lambda z\|$, így

$$\|x - x_{\boldsymbol{M}}\|^2 \leq \|x - x_{\boldsymbol{M}} - \lambda z\|^2 = \|x - x_{\boldsymbol{M}}\|^2 + |\lambda|^2 \|z\|^2 - 2\mathrm{Re}(\lambda \langle x - x_{\boldsymbol{M}}, z\rangle),$$

azaz

$$0 \leq |\lambda|^2 \|z\|^2 - 2\mathrm{Re}(\lambda \langle x - x_{\boldsymbol{M}}, z\rangle).$$

Speciálisan, minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$0 \leq \lambda^2 \|z\|^2 - 2\lambda \mathrm{Re}(\langle x - x_{\boldsymbol{M}}, z\rangle),$$

amiből $\mathrm{Re}(\langle x - x_{\boldsymbol{M}}, z\rangle) = 0$. Ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, akkor készen vagyunk, ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, akkor minden $\mu \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda := i\mu$ helyettesítéssel

$$0 \leq \mu^2 \|z\|^2 + 2\mu \mathrm{Im}(\langle x - x_{\boldsymbol{M}}, z\rangle),$$

következésképpen $\mathrm{Im}(\langle x - x_{\boldsymbol{M}}, z\rangle) = 0$, ezért $\langle x - x_{\boldsymbol{M}}, z\rangle = 0$. Mivel $z$ az $\boldsymbol{M}$ tetszőleges eleme volt, ez azt jelenti, hogy $x - x_{\boldsymbol{M}}$ otogonális $\boldsymbol{M}$-re.

Tegyük fel, hogy $y \in \boldsymbol{M}$ olyan, hogy $x - y$ ortogonális $\boldsymbol{M}$-re. Ekkor minden $z \in \boldsymbol{M}$ esetén

$$0 = \langle z, x - y\rangle = \langle z, (x - x_{\boldsymbol{M}}) + (x_{\boldsymbol{M}} - y)\rangle = \langle z, x_{\boldsymbol{M}} - y\rangle.$$

Mivel $x_{\boldsymbol{M}} - y \in \boldsymbol{M}$, és a fenti egyenlőség minden $\boldsymbol{M}$-beli $z$-re, speciálisan $(x_{\boldsymbol{M}} - y)$-ra is teljesül, az következik, hogy $x_{\boldsymbol{M}} - y = 0$, azaz $y = x_{\boldsymbol{M}}$.

Definíció *Az állításban szereplő $x_{\boldsymbol{M}} \in \boldsymbol{M}$ vektor neve: az $x$-nek az $\boldsymbol{M}$-re való* ***ortogonális projekciója*** *vagy* ***ortogonális vetülete****.*

**11.3.** Definíció *A $\boldsymbol{H}$ Hilbert-tér $L$ nemüres részhalmazának* ***ortogonálisa*** *azoknak a $\boldsymbol{H}$-beli vektoroknak az $L^{\perp}$ szimbólummal jelölt összessége, amelyek ortogonálisak $L$-ra.*

A definíció szerint tehát

$$L^{\perp} = \{x \in \boldsymbol{H} \mid \langle y, x\rangle = 0, \text{minden } y \in L \text{ esetén}\}.$$

Egyszerű tény, hogy $K \subset L$ esetén $L^{\perp} \subset K^{\perp}$, ezért $L \subset \mathrm{Span}L \subset \overline{\mathrm{Span}L}$ miatt

$$(\overline{\mathrm{Span}L})^{\perp} \subset (\mathrm{Span}L)^{\perp} \subset L^{\perp}. \tag{$*$}$$

Továbbá nyilvánvaló, hogy $L \subset L^{\perp\perp}$, következésképpen

$$\overline{\mathrm{Span} L} \subset L^{\perp\perp}. \tag{$**$}$$

Végül azt is könnyű látni, hogy $L^{\perp}$ zárt lineáris altér, mert elemeinek lináris kombinációja is $L^{\perp}$-ben van, továbbá $L^{\perp}$-beli konvergens sorozat határértéke is.

**11.4.** Állítás *Ha $\boldsymbol{M}$ zárt lineáris lineáris altér a $\boldsymbol{H}$ Hilbert térben, akkor $\boldsymbol{M}$ és $\boldsymbol{M}^{\perp}$ kiegészítő alterek $\boldsymbol{H}$-ban, azaz*

$$\boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{M}^{\perp} = 0, \qquad \boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}^{\perp} = \boldsymbol{H}.$$

Bizonyítás Ha $x \in \boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{M}^{\perp}$, akkor $\langle x, x\rangle = 0$, következésképpen $x = 0$. Bármely $x \in \boldsymbol{H}$ esetén a 11.2. állítás szerint létezik egyetlen $x_{\boldsymbol{M}} \in \boldsymbol{M}$ úgy, hogy $x - x_{\boldsymbol{M}} \in \boldsymbol{M}^{\perp}$. Ekkor $x = x_{\boldsymbol{M}} + (x - x_{\boldsymbol{M}}) \in \boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}^{\perp}$.

**11.5.** Ha $\boldsymbol{M}$ zárt lineáris altér, akkor $\boldsymbol{M}^{\perp\perp} = \boldsymbol{M}$. Ugyanis $\boldsymbol{M}^{\perp}$ kiegészítő altere $\boldsymbol{M}$ is és $\boldsymbol{M}^{\perp\perp}$ is, továbbá a $(*)$ összefüggés alapján $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{M}^{\perp\perp}$, és ez csak úgy lehet, ha egyenlők.

Állítás *Ha $\emptyset \neq L \subset \boldsymbol{H}$, akkor*

$$\overline{\mathrm{Span} L} = L^{\perp\perp}.$$

Bizonyítás A 11.3. $(*)$ összefüggése és az előző eredmény alapján $L^{\perp\perp} \subset \left(\overline{\mathrm{Span} L}\right)^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Span} L}$, és ez a 11.3. $(**)$ összefüggésével adja a kívánt eredményt. ■

Az előbbi állítást így is megfogalmazhatjuk: Hilbert-tér egy részhalmaza pontosan akkor totális, ha az ortogonálisa a $\{0\}$ altér.

Speciálisan egy lineáris altér pontosan akkor sűrű, ha ortogonálisa a $\{0\}$ altér.

Jegyezzük meg tehát: ha $\langle x, y\rangle = 0$ egy totális halmazból vett $x$-ekre, akkor $y = 0$. Másképp ugyanez: ha $\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle$ egy totális halmazból vett $x$-ekre, akkor $y = z$.

Ennek egyszerű, de fontos következménye: ha $A, B : \boldsymbol{H} \rightarrowtail \boldsymbol{H}$ lineáris leképezések, $\mathrm{Dom}(A) = \mathrm{Dom}(B)$ és $\langle x, Ay\rangle = \langle x, By\rangle$ a közös értelmezési tartomány minden $y$ elemére, valamint egy totális halmazból vett $x$-ekre, akkor $A = B$.

**11.6.** Emlékeztetünk a következő lineáris algebrabeli tényekre (Analízis II.9.5.).

Legyen $\boldsymbol{E}$ vektortér. A $P : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ lineáris leképezés **projektor**, ha $P^2 = P$. Ha $P$ projektor, akkor $\mathrm{id}_{\boldsymbol{E}} - P$ is projektor, amelyre

$$P(\mathrm{id}_{\boldsymbol{E}} - P) = (\mathrm{id}_{\boldsymbol{E}} - P)P = 0,$$
$$\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_{\boldsymbol{E}} - P) = \mathrm{Ran}(P),$$
$$\mathrm{Ran}(\mathrm{id}_{\boldsymbol{E}} - P) = \mathrm{Ker}(P),$$

továbbá, $\mathrm{Ker}(P)$ és $\mathrm{Ran}(P)$ kiegészítő alterek $\boldsymbol{E}$-ben. Azt mondjuk, hogy $P$ a $\mathrm{Ker}(P)$ mentén a $\mathrm{Ran}(P)$-re való vetítés.

Ha $\boldsymbol{E}$ normált tér és $P:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$ folytonos projektor, akkor $\mathrm{Ker}(P)=\overset{-1}{P}[0]$ és $\mathrm{Ran}(P)=\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E-P)$ zárt lineáris alterek.

Definíció *A* $P:\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}$ *folytonos projektort* **ortogonális projektornak** *nevezzük, ha* $\mathrm{Ker}(P)$ *és* $\mathrm{Ran}(P)$ *ortogonális alterek.*

Állítás *Ha* $\boldsymbol{M}$ *zárt lineáris altér a* $\boldsymbol{H}$ *Hilbert-térben, akkor a* $P_{\boldsymbol{M}}:\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}$, $x\mapsto x_{\boldsymbol{M}}$ *leképezés (lásd a 11.2. állítást) ortogonális projektor,* $\mathrm{Ran}(P_{\boldsymbol{M}})=\boldsymbol{M}$ *és* $\mathrm{Ker}(P_{\boldsymbol{M}})=\boldsymbol{M}^{\perp}$. *Ha* $\boldsymbol{M}\neq\{0\}$, *akkor* $\|P_{\boldsymbol{M}}\|=1$.

Bizonyítás Egyszerű tény, hogy $P_{\boldsymbol{M}}$ lineáris. Definícója szerint $P_{\boldsymbol{M}}(x)\in M$ az egyetlen olyan vektor, melyre $x-P_{\boldsymbol{M}}(x)\in\boldsymbol{M}^{\perp}$ teljesül. Ezért minden $x\in\boldsymbol{H}$ esetén

$$P_{\boldsymbol{M}}(x)-P_{\boldsymbol{M}}(P_{\boldsymbol{M}}(x))\in\boldsymbol{M}\cap\boldsymbol{M}^{\perp}=\{0\},$$

következésképpen $P_{\boldsymbol{M}}(x)=P_{\boldsymbol{M}}(P_{\boldsymbol{M}}(x))$, azaz $P_{\boldsymbol{M}}$ projektor. Nyilvánvaló, hogy $\mathrm{Ran}(P_{\boldsymbol{M}})=\boldsymbol{M}$. Továbbá $P_{\boldsymbol{M}}(x)=0$ definíció szerint ekvivalens azzal, hogy $x\in\boldsymbol{M}^{\perp}$, tehát $\mathrm{Ker}(P_{\boldsymbol{M}})=\boldsymbol{M}^{\perp}$.

Mivel $P_{\boldsymbol{M}}(x)$ és $x-P_{\boldsymbol{M}}(x)$ ortogonálisak,

$$\|x\|^2=\|P_{\boldsymbol{M}}(x)\|^2+\|x-P_{\boldsymbol{M}}(x)\|^2\geq\|P_{\boldsymbol{M}}(x)\|^2,$$

így $P_{\boldsymbol{M}}$ folytonos, és $\|P_{\boldsymbol{M}}\|\leq 1$. Ha pedig $x\in\boldsymbol{M}$, akkor $P_{\boldsymbol{M}}(x)=x$, amiből $\boldsymbol{M}\neq\{0\}$ esetén $\|P_{\boldsymbol{M}}\|=1$. ■

Érdemes megjegyezni, hogy $P_{\boldsymbol{H}}=\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ és $P_{\{0\}}=0$.

**11.7.** Egy Hilbert-tér zárt lineáris alterei és ortogonális projektorai kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak. Ugyanis, ha $\boldsymbol{M}\subset\boldsymbol{H}$ zárt lineáris altér, akkor $P_{\boldsymbol{M}}$ olyan ortogonális projektor, hogy $\mathrm{Ran}(P_{\boldsymbol{M}})=\boldsymbol{M}$. Ha $P$ ortogonális projektor, akkor $\mathrm{Ran}(P)$ zárt lineáris altér, és $x-P_{\mathrm{Ran}(P)}(x)\in\mathrm{Ran}(P)^{\perp}=\mathrm{Ker}(P)$ a $\boldsymbol{H}$ minden $x$ elemére. Következésképpen $P(x)=P(P_{\mathrm{Ran}(P)}(x))=P_{\mathrm{Ran}(P)}(x)$, tehát

$$P_{\mathrm{Ran}(P)}=P.$$

Jelölje $\mathcal{M}(\boldsymbol{H})$ illetve $\mathcal{P}(\boldsymbol{H})$ a $\boldsymbol{H}$ zárt lineáris altereinek, illetve a $\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}$ ortogonális projektoroknak a halmazát. Ekkor az előzőek szerint

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{H})\to\mathcal{P}(\boldsymbol{H}),\quad \boldsymbol{M}\mapsto P_{\boldsymbol{M}}\qquad\text{és}\qquad\mathcal{P}(\boldsymbol{H})\to\mathcal{M}(\boldsymbol{H}),\quad P\mapsto\mathrm{Ran}(P)$$

bijektív leképezések, melyek egymás inverzei.

**11.8. Feladatok**

1. Lássuk el $\mathbb{R}^2$-t a $|.|_\infty$ normával. Mutassuk meg, hogy $x$ az $L := [0,1] \times [0,1]$ zárt konvex halmazon kívüli pont, akkor több olyan $y \in L$ létezik, amelyre $|x-y|_\infty = d(x, L)$.

2. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ $\sigma$-véges mértéktér. Bizonyítsuk be, hogy minden $E \in \mathcal{A}$ esetén az $L^2_\mu(X) \to L^2_\mu(X)$, $\varphi \mapsto \chi_E \varphi$ leképezés ortogonális projektor.

3. Legyen $\boldsymbol{M}$ és $\boldsymbol{N}$ zárt lineáris altér, $\dim \boldsymbol{M} < \infty$, $\dim \boldsymbol{M} < \dim \boldsymbol{N}$. Ekkor $\boldsymbol{M}^\perp \cap \boldsymbol{N} \neq \{0\}$.

4. Igazoljuk, hogy a 11.1. állítás akkor is igaz, ha elhagyjuk a tér teljességét (azaz Hilbert-tér helyett skalárszorzatos teret veszünk), viszont a konvex halmazról követeljük meg, hogy legyen teljes.

5. A 11.4. állítás is igaz, ha elhagyjuk a tér teljességét, viszont a lineáris altérről követeljük meg, hogy teljes legyen.

# 12. A Riesz-féle reprezentációs tétel

**12.1.** Egy $\boldsymbol{H}$ Hilbert-tér bármely $x$ elemére $\langle x| : H \to \mathbb{K}$, $y \mapsto \langle x, y \rangle$ folytonos lineáris funkcionál, azaz a $\boldsymbol{H}$ duálisának eleme. Most megmutatjuk, hogy a duális minden eleme ilyen alakú.

Állítás (***Riesz-féle reprezentációs tétel***) *Legyen $\boldsymbol{H}$ Hilbert-tér. Ekkor*

$$j : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}', \quad x \mapsto \langle x|$$

*konjugált lineáris, izometrikus bijekció.*

Bizonyítás A skalárszorzat tulajdonságai miatt $j$ nyilvánvalóan konjugált lineáris. Minden $x, y \in \boldsymbol{H}$ esetén $|j(x)(y)| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$, így $\|j(x)\| \leq \|x\|$; viszont $|j(x)(x)| = \|x\|^2$, ezért $\|j(x)\| = \|x\|$. Tehát $j$ izometrikus, speciálisan injektív.

Legyen $l \in \boldsymbol{H}'$. Ha $l = 0$, akkor $l = \langle 0|$. Tegyük fel, hogy $l \neq 0$. Ekkor $\mathrm{Ker}(l) \subset \boldsymbol{H}$ valódi zárt lineáris altér, ezért $\mathrm{Ker}(l)^\perp \neq \{0\}$. Legyen $z \in \mathrm{Ker}(l)^\perp \setminus \{0\}$. Minden $x \in \boldsymbol{H}$ esetén $l(z)x - l(x)z \in \mathrm{Ker}(l)$, így $\langle z, l(z)x - l(x)z\rangle = 0$, következésképpen

$$l(x) = \frac{l(z)}{\|z\|^2}\langle z, x\rangle \qquad (x \in \boldsymbol{H}),$$

ami azt mondja, hogy

$$l = j\left(\frac{l(z)}{\|z\|^2} z\right),$$

tehát $j$ szürjekció.

**12.2.** A $\boldsymbol{H}'$ Banach-téren bármely két vektorra teljesül a parallelogramma-egyenlőség, ugyanis minden $x, y \in \boldsymbol{H}$ esetén

$$\|j(x)+j(y)\|^2+\|j(x)-j(y)\|^2 = \|j(x+y)\|^2+\|j(x-y)\|^2 =$$
$$= \|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2+2\|y\|^2 = 2\|j(x)\|^2+2\|j(y)\|^2,$$

tehát $\boldsymbol{H}'$ normája skalárszorzatból származik, és a 10.2. állítás alapján minden $x, y \in \boldsymbol{H}$ esetén

$$\langle j(x), j(y)\rangle = \langle x, y\rangle^* = \langle y, x\rangle.$$

Tehát $\boldsymbol{H}'$ is Hilbert-tér, így értelmezhető a $j' : \boldsymbol{H}' \to \boldsymbol{H}''$ leképezés is. Ha $x, y \in \boldsymbol{H}$, akkor

$$[j'(j(x))](j(y)) = \langle j(x), j(y)\rangle = \langle y, x\rangle = [j(y)](x),$$

azaz a $j' \circ j : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}''$ bijekció megegyezik a 7.6-ban definiált kanonikus leképezéssel. Megállapíthatjuk tehát:

Állítás *Minden Hilbert-tér reflexív Banach-tér.*

**12.3. Feladatok**

1. Bizonyítsuk be, hogy egy $\boldsymbol{H}$ Hilbert-térbeli $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor gyengén konvergens (lásd a 8.4.2. feladatot), ha minden $y \in \boldsymbol{H}$ esetén létezik $\lim\limits_n \langle y, x_n\rangle$!

2. Mutassuk meg, hogy egy Hilbert-térbeli $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra, és $x$ elemre a következők egyenértékűek:

(i) $x = \lim\limits_n x_n$ ,

(ii) $\|x\| = \lim\limits_n \|x_n\|$ és $x = (w) \lim\limits_n x_n$ .

3. Igazoljuk, hogy egy $A : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ folytonos lineáris leképezésre $\|A\| = \sup\limits_{\|y\|=\|x\|=1} |\langle y, Ax\rangle|$.

# 13. Ortonormált rendszerek

**13.1.** Definíció *A $(\boldsymbol{H}, \langle ., .\rangle)$ Hilbert-térben az $(e_i)_{i\in I}$ rendszert **ortonormáltnak** nevezzük, ha minden $i, j \in I$ esetén:*

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i=j \\ 0 & \text{ha } i\neq j. \end{cases}$$

*Egy ortonormált rendszert **teljesnek** nevezünk, ha nem valódi része semmilyen más ortonormált rendszernek.*

Definíció szerint tehát az $(e_i)_{i\in I}$ ortonormált rendszer pontosan akkor teljes, ha

$$\{e_i \mid i\in I\}^{\perp} = \{0\}, \tag{$*$}$$

ami azzal egyenértékű, hogy totális.

**1. Állítás** *Minden nemnulla Hilbert-térben létezik teljes ortonormált rendszer.*

Bizonyítás Legyen $\mathcal{F}$ a $\boldsymbol{H}$-beli ortonormált rendszerek halmaza. Ez nem üres, mert bármely 1 normájú vektorból álló egy elemű halmaz ortonormált rendszer. $\mathcal{F}$ a halmazelméleti tartalmazással rendezett halmaz. Könnyű látni, hogyt bármely $\mathcal{F}$-beli lánc halmazelméleti uniója ortonormált rendszer. Így az unió a lánc felső korlátja $\mathcal{F}$-ben; a Zorn-lemma szerint $\mathcal{F}$-ben létezik maximális elem. $\mathcal{F}$ maximális elemei pontosan a teljes ortonormált rendszerek.

**2. Állítás** *Minden ortonormált rendszer egy teljes ortonormált rendszer része (szokásos szóhasználattal: minden ortonormált rendszer kiegészíthető teljessé).*

Bizonyítás Legyen $L$ ortonormált rendszer és $\mathcal{F}_L$ az $L$-et tartalmazó ortonormált rendszerek összessége, majd érveljünk ugyanúgy, mint az előbb.

**13.2. Állítás** *Hilbert-térben minden ortonormált rendszer topologikusan lineárisan független. A teljes ortonormált rendszerek topologikus algebrai bázisok (Schauder-bázisok).*

Bizonyítás Legyen $(e_i)_{i\in I}$ ortonormált rendszer. Tegyük fel, hogy valamely $j \in I$ esetén $e_j \in \overline{\operatorname{Span}\{e_i \mid i \in I \setminus \{j\}\}} = \{e_i \mid i \in I \setminus \{j\}\}^{\perp\perp}$ (lásd a 11.5. állítást). Mivel $e_j \in \{e_i \mid i \in I \setminus \{j\}\}^{\perp}$, ez azt jelenti, hogy $\langle e_j, e_j\rangle = 0$, ami ellentmondás. Tehát az ortonormált rendszer topologikusan lineárisan független.

Ha az ortonormált rendszer teljes, akkor totális, tehát Schauder-bázis.

**13.3. Állítás** *Legyen $(e_i)_{i\in I}$ ortonormált rendszer és $\lambda_i \in \mathbb{K}$ $(i \in I)$. $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i e_i$ pontosan akkor létezik, ha $\sum\limits_{i\in I} |\lambda_i|^2 < \infty$.*

Bizonyítás Ha $F$ az $I$ véges részhalmaza, akkor

$$\left\|\sum_{i\in F} \lambda_i e_i\right\|^2 = \sum_{i\in F} |\lambda_i|^2,$$

ezért a Cauchy-kritétium szerint a $(\lambda_i e_i)_{\in I}$ rendszer pontosan akkor összegezhető, amikor a $(|\lambda_i|^2)_{\in I}$ rendszer összegezhető. ■

**13.4.** Állítás *Legyen $(e_i)_{i\in I}$ ortonormált rendszer a $\boldsymbol{H}$ Hilbert-térben. Jelölje $\boldsymbol{M}$ az $\{e_i \mid i\in I\}$ halmaz zárt lineáris burkát. Ekkor minden $x\in\boldsymbol{H}$ esetén az $(\langle e_i, x\rangle e_i)_{i\in I}$ rendszer összegezhető $\boldsymbol{H}$-ban, és*

$$\sum_{i\in I} \langle e_i, x\rangle e_i = P_{\boldsymbol{M}}(x),$$

*továbbá az $(|\langle e_i, x\rangle|^2)_{i\in I}$ rendszer összegezhető $\mathbb{R}_0^+$-ban, és*

$$\sum_{i\in I} |\langle e_i, x\rangle|^2 = \|P_{\boldsymbol{M}}(x)\|^2.$$

Bizonyítás Minthogy a normanégyzetet skalárszorzat adja meg, egyszerű számolás mutatja, hogy ha $F$ az $I$ véges részhalmaza, akkor

$$\left\| x - \sum_{i\in F} \langle e_i, x\rangle e_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i\in F} |\langle e_i, x\rangle|^2.$$

Mivel a bal oldal nemnegatív, és az egyenlőség minden véges $F$-re igaz, ebből adódik, hogy a $(|\langle e_i, x\rangle|^2)_{i\in I}$ rendszer összegezhető, és fennáll az úgynevezett **Bessel-egyenlőtlenség**:

$$\sum_{i\in I} |\langle e_i, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Ezért a 13.3. állítás szerint az $(\langle e_i, x\rangle e_i)_{i\in I}$ rendszer is összegezhető $\boldsymbol{H}$-ban. Továbbá minden $j\in I$ esetén

$$\left\langle e_j, x - \sum_{i\in I} \langle e_i, x\rangle e_i \right\rangle = \langle e_j, x\rangle - \langle e_j, x\rangle = 0,$$

így $x - \sum\limits_{i\in I} \langle e_i, x\rangle e_i \in \boldsymbol{M}^\perp$, ezért $\sum\limits_{i\in I} \langle e_i, x\rangle e_i = P_{\boldsymbol{M}}(x)$, amiből azonnal adódik az állításban a normanégyzetre vonatkozó egyenlőség is.

**13.5.** Az előzőek egyszerű, de fontos következményét foglaljuk most össze.

**Állítás** *Egy* $\boldsymbol{H}$ *Hilbert-térbeli* $(e_i)_{i\in I}$ *ortonormált rendszerre a következők egyenértékűek:*

*(i)* $(e_i)_{i\in I}$ *teljes,*

*(ii)* $x = \sum_{i\in I} \langle e_i, x\rangle e_i$ ,

*(iii)* $\langle y, x\rangle = \sum_{i\in I} \langle y, e_i\rangle\langle e_i, x\rangle$ ,

*(iv)* $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle e_i, x\rangle|^2$

*a* $\boldsymbol{H}$ *minden* $x$ *és* $y$ *elemére.*

Bizonyítás Ha az ortonormált rendszer teljes, akkor az előző pont jelöléseivel $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{H}$, azaz $P_{\boldsymbol{M}} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$, így (i)-ből következik (ii), amelyből nyilvánvalóan adódik (iii), és ennek speciális esete (iv). Ha pedig (iv) teljesül, akkor olyan $x$, amely minden $e_i$-re ortogonális, szükségképpen 0, tehát az ortonormált rendszer teljes. ■

Az (iii) illetve az (iv) összefüggést **Parseval-egyenlőségnek** nevezik. A Bessel-egyenlőtlenségben tehát pontosan akkor áll egyenlőség minden $x$-re (Parseval-egyenlőség), ha az ortonormált rendszer teljes.

A fenti összefüggésekben fontos szerepet játszó $\langle e_i, x\rangle$ $(i\in I)$ számokat az $x$ vektornak az adott ortonormált rendszerre vonatkozó **Fourier-együtthatóinak** hívjuk.

Egy vektor Fourier-együtthatóinak négyzete összegezhető, ezért az 1.4. állítás szerint bármely vektornak legfeljebb megszámlálható sok Fourier-együtthatója nem nulla.

**13.6. Állítás** *Legyenek* $(e_i)_{i\in I}$ *és* $(d_j)_{j\in J}$ *teljes ortonormált rendszerek egy Hilbert-térben. Ekkor* $I$ *és* $J$ *azonos számosságúak.*

Bizonyítás Ha $I$ és $J$ közül az egyik véges, akkor a megfelelő ortonormált rendszer algebrai bázis, így a másik is az, és ismert lineáris algebrai tény, hogy azonos számoságúak. Tegyük fel, hogy $I$ és $J$ végtelen halmazok. Ekkor minden $i\in I$ esetén

$$A_i := \{j\in J \mid \langle e_i, d_j\rangle \neq 0\}$$

(az $e_i$ vektor Fourier-együtthatói a másik ortonormált rendszerre vonatkozóan) legfeljebb megszámlálható. Minden $j\in J$ esetén $d_j\neq 0$, ezért létezik $i\in I$ úgy, hogy $\langle e_i, d_j\rangle \neq 0$, azaz $j\in A_i$; tehát

$$J = \bigcup_{i\in I} A_i,$$

következésképpen $J$ kisebb vagy egyenlő számosságú, mint $I\times\mathbb{N}$, amely viszont $I$-vel azonos számosságú.

$I$ és $J$ szerepét megcserélve kapjuk, hogy $I$ is kisebb vagy egyenlő számosságú, mint $J$, így a Schröder–Bernstein-tétel szerint $I$ és $J$ azonos számosságúak. ■

Egy Hilbert-térben tehát minden teljes ortonormált rendszer számossága ugyanaz, ezt a számosságot a Hilbert-tér **Hilbert-dimenziójának** nevezzük.

**13.7.** Két Hilbert-teret **izomorfnak** mondunk, ha van közöttük izometrikus lineáris bijekció.

Állítás *Két Hilbert-tér pontosan akkor izomorf, ha Hilbert-dimenziójuk megegyezik.*

Bizonyítás A 13.3-ben mondottak szerint ha $(e_i)_{i\in I}$ teljes ortonormált rendszer egy $\boldsymbol{H}$ Hilbert-térben, akkor

$$l^2(I) \to \boldsymbol{H}, \quad \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$$

izometrikus lineáris bijekció a két Hilbert-tér között. Legyen $a_i \in l^2(I)$ az az $I \to \mathbb{K}$ függvény, amelynek az értéke az $i$ helyen 1, máshol 0. Nyilvánvaló, hogy $(a_i)_{i\in I}$ teljes ortonormált rendszer $l^2(I)$-ben, így ennek a Hilbert-dimenziója azonos az $I$ számosságával.

Tehát csak azt kell belátni, hogy az $l^2(I)$ és $l^2(J)$ Hilbert-terek pontosan akkor izomorfak egymással, ha $I$ és $J$ azonos számosságúak, ami igen egyszerű feladat.

**13.8.** Állítás *Egy Hilbert-tér pontosan akkor legfeljebb megszámlálható Hilbert-dimenziós, ha szeparábilis.*

Bizonyítás Ha a Hilbert-tér Hilbert-dimenziója $n\in\mathbb{N}$, akkor izomorf $\mathbb{K}^n$-nel, következésképpen szeparábilis. Legyen $\boldsymbol{H}$ megszámlálható Hilbert-dimenziós, és $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teljes ortonormált rendszer. Ekkor $\mathbb{K}{=}\mathbb{R}$ esetén ennek $\mathbb{Q}$ együtthatójú, $\mathbb{K}{=}\mathbb{C}$ esetén ennek $\mathbb{Q}{+}i\mathbb{Q}$ együtthatójú lineáris kombinációinak halmaza megszámlálható sűrű halmaz $\boldsymbol{H}$-ban. Ugyanis, legyen $x\in\boldsymbol{H}$ és $\epsilon>0$. Ekkor $(\langle e_n, x\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ négyzetesen összegezhető, ezért létezik $m\in\mathbb{N}$ úgy, hogy $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} |\langle e_n, x\rangle|^2<\epsilon/2$. Továbbá, $(\langle e_n, x\rangle e_n)_n\in\mathbb{N}$ összegezhető $\boldsymbol{H}$-ban és $x=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \langle e_n, x\rangle e_n$. Mivel $\mathbb{Q}$ (illetve $\mathbb{Q}{+}i\mathbb{Q}$) sűrű $\mathbb{R}$-ben (illetve $\mathbb{C}$-ben), létezik olyan $\mathbb{Q}$-beli (illetve $\mathbb{Q}{+}i\mathbb{Q}$-beli) $\lambda$ sorozat, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $|\langle e_n, x\rangle-\lambda_n|^2<\epsilon/2^{n+1}$. Ekkor

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{m} \lambda_n e_n \right\|^2 < \epsilon.$$

Fordítva, legyen $(e_i)_{i\in I}$ teljes ortonormált rendszer $\boldsymbol{H}$-ban. Ekkor bármely $r<\sqrt{2}/2$ esetén $(G_r(e_i))_{i\in I}$ diszjunkt nyílt gömbök rendszere. Ha $D\subset\boldsymbol{H}$ sűrű halmaz, akkor minden $i\in I$ esetén $D\cap G_r(e_i)\neq\emptyset$, így $D$ nagyobb vagy egyenlő számosságú, mint $I$. Ha tehát $I$ nem legfeljebb megszámlálható, akkor $D$ sem lehet az.

**13.9.** Állítás (**Gram–Schmidt-féle ortogonalizáció**) *Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lineárisan független rendszer a $\boldsymbol{H}$ Hilbert-térben. Ekkor létezik $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált rendszer $\boldsymbol{H}$-ban úgy, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $\langle a_n, e_n\rangle\neq 0$, továbbá az $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ és $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ rendszerek lineáris burka megegyezik.*

Bizonyítás Jelölje $\boldsymbol{M}_n$ az $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ rendszer lineáris burkát ($n\in\mathbb{N}$). Legyen $e_1 := \dfrac{a_1}{\|a_1\|}$ , és $n\geq 1$ esetén

$$b_{n+1} := a_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, a_{n+1}\rangle e_k,$$

és

$$e_{n+1} := \frac{b_{n+1}}{\|b_{n+1}\|}.$$

Teljes indukciót alkalmazunk. Mivel $b_2 = a_2 - \langle e_1, a_2\rangle e_1 \neq 0$ és $\langle b_2, e_1\rangle = 0$, az $(e_1, e_2)$ ortogonális rendszer, melynek lineáris burka $\boldsymbol{M}_2$, és $\langle a_2, e_2\rangle \neq 0$.

Tegyük fel, hogy $n$-re igaz az állítás. Ekkor $b_{n+1}$ ortogonális $\boldsymbol{M}_n$-re, tehát – ha $e_{n+1}$ jól van definiálva, azaz $b_{n+1}\neq 0$ –, akkor $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ ortonormált rendszer, amelynek a lineáris burka a $b_{n+1}$ definíciója alapján $\boldsymbol{M}_{n+1}$. Ha $\langle a_{n+1}, b_{n+1}\rangle = 0$ volna, akkor

$$\|a_{n+1}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle e_k, a_{n+1}\rangle|^2 = \|P_{\boldsymbol{M}_n}(a_{n+1})\|^2$$

teljesülne, de akkor $a_{n+1}$ az $\boldsymbol{M}_n$ eleme volna, ami ellentmondás, így $\langle b_{n+1}, a_{n+1}\rangle\neq 0$, speciálisan $b_{n+1}\neq 0$, tehát $e_{n+1}$ jól van definiálva, és $\langle a_{n+1}, e_{n+1}\rangle \neq 0$. ∎

Érdemes megjegyezni, hogy seholsem használtuk ki a Hilbert-tér teljességét, tehát a Gram–Schmidt-féle ortogonalizáció bármilyen skalárszorzatos térben végrehajtható.

**13.10. Feladatok**

1. Legyen $l^2$-ben $e_n$ az sorozat, amelynek az $n$-ik tagja 1, minden más tagja 0. Ekkor $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teljes ortonormált rendszer. Írjuk le az $\left\{\sum\limits_{k=1}^{2n} e_k \mid n\in\mathbb{N}\right\}^{\perp}$ halmazt.

2. Adjuk meg $l^2_{\mathbb{C}}$-ben az $(1,0,0,\dots)$, $(1,1,0,\dots)$, $(1,1,1,\dots)$, $\dots$ rendszer Gram-Schmidt-ortogonalizációját!

3. Legyen $\boldsymbol{M}$ az $(e_i)_{i\in I}$ ortonormált rendszer által kifeszített zárt lineáris altér a $\boldsymbol{H}$ Hilbert-térben. Igazoljuk, hogy bármely $x\in\boldsymbol{H}$ esetén $\boldsymbol{M}$-ben az $x$-et normában legjobban megközelítő elem $\sum\limits_{i\in I}\langle e_i, x\rangle e_i$!

4. Legyen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált rendszer egy Hilbert-térben. Mutassuk meg, hogy ez a sorozat gyengén (de normában nem) tart a nullához!

# 14. Speciális ortogonális rendszerek

**14.1. Állítás** $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{in} \mid n\in\mathbb{Z} \right\}$ *teljes ortonormált rendszer* $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$*-ben.*

Bizonyítás Az $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$-beli skalárszorzat definíciója alapján könnyen ellenőrizhető, hogy a fenti rendszer ortonormált:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} e^{imx}\, dx = 2\pi\delta_{nm}.$$

A teljesség bizonyítása két lépésben történik.

Legyen először $\phi\in L([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ olyan *folytonos* függvény, hogy minden $n\in\mathbb{Z}$ esetén $\langle \exp^{in}, \phi\rangle=0$, és tegyük fel, hogy $\phi\neq 0$, azaz létezik $c\in[-\pi,\pi]$ úgy, hogy $\phi(c)\neq 0$. Ekkor $\mathrm{Re}(\phi(c))$ és $\mathrm{Im}(\phi(c))$ egyike nem nulla, tegyük fel például, hogy $\mathrm{Re}(\phi(c))\neq 0$. Ekkor $\mathrm{Re}(\phi(c))$ vagy pozitív, vagy negatív, tegyük fel például, hogy $\mathrm{Re}(\phi(c))>0$. Mivel $\phi$ folytonos, létezik $\delta>0$ úgy, hogy minden $x\in J:=[c-\delta, c+\delta]$ esetén $\mathrm{Re}(\phi(x))>0$. A

$$T : [-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto 1-\cos(\delta)+\cos(x-c)$$

függvényre a következők teljesülnek:

$$\begin{aligned} T(x)&\geq 1 \quad \text{ha } x\in J,\\ |T(x)|&<1 \quad \text{ha } x\notin J, \end{aligned}$$

és a

$$T = (1-\cos(\delta))+\frac{1}{2}(e^{-ic}\exp^{i} + e^{ic}\exp^{-i})$$

felírás szerint $T$ eleme a szóban forgó ortonormált rendszer lineáris burkának, sőt $n\in\mathbb{N}_0$ esetén $T^n$ is, így $\langle T^n, \phi\rangle=0$. A $(T^n\mathrm{Re}\circ\phi)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a $[-\pi,\pi]\setminus J$ halmazon pontonként nullához konvergál, $|T^n\mathrm{Re}\circ\phi|\leq|\mathrm{Re}\circ\phi|$ és $\mathrm{Re}\circ\phi$ (lévén korlátos mérhető fügvény) Lebesgue-integrálható $[-\pi,\pi]\setminus J$-n, így a Lebesgue tétel szerint

$$\lim_n \int_{[-\pi,\pi]\setminus J} T^n\mathrm{Re}\circ\phi=0. \tag{1}$$

Továbbá a $J$ intervallumon $T^n\mathrm{Re}\circ\phi\geq\mathrm{Re}\circ\phi>0$, ezért

$$\int_J T^n\mathrm{Re}\circ\phi\geq\int_J \mathrm{Re}\circ\phi>0. \tag{2}$$

Tehát minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $\langle T^n, \phi\rangle$=0 miatt és amiatt, hogy $T^n$ valós,

$$0 = \mathrm{Re}\int_{-\pi}^{\pi} T^n\phi = \int_{-\pi}^{\pi} T^n \mathrm{Re}\circ\phi = \int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus J} T^n\mathrm{Re}\circ\phi + \int\limits_J T^n\mathrm{Re}\circ\phi \geq$$

$$\geq \int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus J} T^n\mathrm{Re}\circ\phi + \int\limits_J \mathrm{Re}\circ\phi.$$

Elvégezve az $n \to \infty$ határátmenetet (1) szerint azt kapjuk, hogy

$$0 \geq \int\limits_J \mathrm{Re}\circ\phi,$$

ami ellentmond a (2)-ben tett megállapításunknak, így $\phi$=0.

Legyen most $\phi \in L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ olyan *tetszőleges, nem feltétlenül folytonos* függvény, hogy minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén $\left\langle \exp^{in}, \phi\right\rangle$=0. Ekkor – mivel véges mértékű halmazon négyzetesen integrálható függvény integrálható – az

$$F : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto \int\limits_{-\pi}^{x} \phi$$

függvény jól értelmezett, abszolút folytonos, és $F(-\pi)$=0, $F(\pi)=\langle 1,\phi\rangle$=0. A parciális integrálás tétele szerint $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ esetén

$$\left\langle \exp^{in}, F\right\rangle = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}F(x)dx = \frac{1}{-in}\left[\exp^{-in}F\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{-in}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\phi(x)dx = 0.$$

A

$$G := F - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$$

függvény folytonos, és minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén $\left\langle \exp^{in}, G\right\rangle$=0, így a bizonyítás első része szerint $G$=0, azaz $F$ konstans, ezért $F(-\pi)$=0 miatt $F$=0. Ebből $F$ definíciója szerint azt kapjuk, hogy $\phi$-nek a $[-\pi,\pi]$ minden részintervallumára vett integrálja 0, következésképpen $\phi$ Lebesgue-majdnem mindenütt 0 a $[-\pi,\pi]$ intervallumon, és ezt kellett bizonyítanunk. ■

A fenti állításban szereplő teljes ortonormált rendszert **Fourier-rendszernek** vagy **trigonometrikus rendszernek** nevezzük.

Jegyezzük meg, hogy eredményünk szerint az $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ Hilbert-tér szeparábilis.

**14.2.** Mivel

$$\cos nx = \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i},$$

egyszerű tény, hogy a

$$\cos \bullet n := (x \mapsto \cos nx), \qquad \sin \bullet n := (x \mapsto \sin nx)$$

jelöléssel

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos \bullet n, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \bullet n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \tag{$*$}$$

szintén teljes ortonormált rendszer $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$-ben. Ennek az ortonormált rendszernek minden tagja valós, tehát az $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ elemeinek is tekinthetők. A valós értékű függvények közül is csak a nulla lehet ortogonális mindegyikre, tehát $(*)$ teljes ortonormált rendszer $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$-ben.

**14.3.** Az egypont halmazok Lebesgue-mértéke nulla, ezért a $[-\pi,\pi]$ intrervallum helyett írhattuk volna akár a $]-\pi,\pi[$ intervallumot is. Most maradunk annál, hogy zárt intervallumot tekintünk. Bármilyen $[a,b]$ korlátos zárt intervallum esetén $S : [a,b] \to [-\pi,\pi]$, $x \mapsto \dfrac{2\pi x-(a+b)\pi}{b-a}$ folytonosan differenciálható bijekció, ezért az integrálhelyettesítés formula alapján nyilvánvaló, hogy ha $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teljes ortonormált rendszer $L^2([-\pi,\pi])$-ben, akkor $\left(\sqrt{\frac{2\pi}{b-a}}\eta_n \circ S\right)_{n\in\mathbb{N}}$ teljes ortonormált rendszer $L^2([a,b])$-ben.

**14.4.** Legyen $I{\subset}\mathbb{R}$ nyílt intervallum $a$ kezdő- és $b$ végponttal; megengedjük, hogy $a=-\infty$, $b=\infty$ legyen. A $\rho : I{\to}\mathbb{R}^+$ függvényt **súlyfüggvénynek** nevezzük, ha
- folytonos,
- Lebesgue-integrálható,
- minden $k{\in}\mathbb{N}_0$ esetén, ha $a{=}-\infty$, akkor $\lim\limits_{x\to-\infty} \rho(x)x^k{=}0$, és ha $b{=}+\infty$, akkor $\lim\limits_{x\to+\infty} \rho(x)x^k{=}0$.

Legyen $\rho$ súlyfüggvény, és jelölje $\lambda$ az $I$ Lebesgue-mértékét. Ekkor $\rho\lambda$ véges mérték $I$ fölött (azaz $I$ Borel-halmazain); vegyük az $L^2_{\rho\lambda}(I)$ Hilbert-teret. A súlyfüggvény definíciójában fontos, hogy $I$ nyílt, mert előfordulhat, hogy $\rho$ folytonos $I$-n, de nem terjeszthető ki foytonosan az $I$ lezártjára. Viszont minden egypont halmaz $\rho\lambda$ mértéke nulla, így $\rho\lambda$ természetes módon kiterjeszthető az $I$ lezártjára úgy, hogy a végpontok mértéke is nulla; ezért a négyzetesen integrálható függvények terében $I$ helyett vehetnénk akár $I$ lezártját is.

Minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $\mathrm{id}_I^n{\in}L^2_{\rho\lambda}(I)$. Ez nyilvánvaló, ha $I$ korlátos, hiszen a polinomok korlátosak korlátos halmazon, és $\rho\lambda$ véges mérték. Ha $I$ nem korlátos, akkor $|\mathrm{id}_I^{2n+2}|\rho$ folytonos függvény, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}|\mathrm{id}_I^{2n+2}|\rho{=}0$, ezért létezik $y$ és $z$ az $I$-ben úgy, hogy minden $x{\in}I$, $x{<}y$ vagy $x{>}z$ esetén

$$|x^{2n}\rho(x)|{\le}\frac{1}{|x|^2}\ ,$$

következésképpen $\mathrm{id}_I^{2n}\rho{\in}L^1_\lambda(I)$, így $\mathrm{id}_I^{2n}{\in}L^1_{\rho\lambda}(I)$, ezért $\mathrm{id}_I^n{\in}L^2_{\rho\lambda}(I)$.

Triviális, hogy az $\{\mathrm{id}_I^n \mid n{\in}\mathbb{N}_0\}$ rendszer lineárisan független $L^2_{\rho\lambda}(I)$-ben. Az ebből a Gram–Schmidt-ortogonalizációval származtatott ortonormált rendszert jelölje $\{P_n^\rho \mid n\in\mathbb{N}_0\}$. Ezt a **$\rho$-súlyfüggvényre nézve ortonormált polinomrendszernek** nevezzük.

**14.5.** Állítás *Legyen $I{\subset}\mathbb{R}$ korlátos intervallum, $\rho : I\to\mathbb{R}^+$ súlyfüggvény. Ekkor $\{P_n^\rho \mid n\in\mathbb{N}_0\}$ teljes ortonormált rendszer $L^2_{\rho\lambda}(I)$-ben.*

Bizonyítás A polinomrendszer, definíciójából adódóan, ortonormált rendszer. Azt kell csak belátni, hogy teljes. Ehhez viszont elég megmutatni, hogy az identitáshatványok totális rendszert alkotnak, vagyis az olyan függvény, amely ortogonális minden $id_I^n$-re, nulla.

Legyen először $\phi{\in}L^2_{\rho\lambda}(I)$ olyan *folytonos* függvény, hogy minden $n\in\mathbb{N}_0$ esetén $\langle\mathrm{id}_I^n,\phi\rangle{=}0$, és tegyük fel, hogy $\phi{\ne}0$, azaz létezik $c{\in}I$ úgy, hogy $\phi(c){\ne}0$. Ekkor $\mathrm{Re}(\phi(c))$ és $\mathrm{Im}(\phi(c))$ egyike nem nulla, tegyük fel például, hogy $\mathrm{Re}(\phi(c)){\ne}0$. Ekkor $\mathrm{Re}(\phi(a))$ vagy pozitív, vagy negatív, tegyük fel például, hogy $\mathrm{Re}(\phi(c)){>}0$. Mivel $\phi$ folytonos, létezik $\delta{>}0$ úgy, hogy minden $x{\in}J{:=}[c{-}\delta,c{+}\delta]$ esetén $\mathrm{Re}(\phi(x)){>}0$.

Jelölje $a$ és $b$ az $I$ kezdő- illetve végpontját, és legyen $\alpha{:=}\max(b{-}c,c{-}a)$. A

$$T : I{\to}\mathbb{R},\quad x{\mapsto}1{+}\frac{\delta^2{-}(x{-}c)^2}{\alpha^2{-}\delta^2}$$

függvényre a következők teljesülnek:

$$\begin{aligned}T(x){\ge}1 &\quad \text{ha } x\in J,\\ |T(x)|{<}1 &\quad \text{ha } x\notin J.\end{aligned}$$

$T$ polinom, sőt $n\in\mathbb{N}_0$ esetén $T^n$ is polinom, következésképpen $\langle T^n,\phi\rangle{=}0$.

A $(T^n{\cdot}\mathrm{Re}{\circ}\phi)_n{\in}\mathbb{N}$ függvénysorozat az $I\backslash J$ halmazon pontonként nullához konvergál, $|T^n{\cdot}\mathrm{Re}{\circ}\phi|{\le}|\mathrm{Re}{\circ}\phi|$; $\phi$ négyzetesen integrálható $I\backslash J$-n a véges $\rho\lambda$ mérték szerint, így integrálható is, ezért a Lebesgue-tétel szerint

$$\lim_n\int\limits_{I\backslash J}\rho{\cdot}T^n\mathrm{Re}{\circ}\phi{=}0.$$

Továbbá a $J$ halmazon $T^n{\cdot}\mathrm{Re}{\circ}\phi{\geq}\mathrm{Re}{\circ}\phi{>}0$, ezért

$$\int_J \rho T^n{\cdot}\mathrm{Re}{\circ}\phi{\geq}\int_J \rho\mathrm{Re}{\circ}\phi{>}0.$$

Eután ugyanúgy érvelhetünk, mint a 14.1. bizonyításában.

Legyen most $\phi{\in}L^2_{\rho\lambda}(I)$ olyan *tetszőleges, nem feltétlenül folytonos* függvény, hogy minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $\langle \mathrm{id}_I^n, \phi\rangle{=}0$. Ekkor az

$$F : I{\to}\mathbb{K}, \quad x{\mapsto}\int_a^x \phi\rho$$

függvény abszolút folytonos, $F(a){=}0$, és $F(b){=}\langle 1, \phi\rangle{=}0$. Továbbá $F$ korlátos, így Lebesgue-integrálható, és a parciális integrálás tétele szerint minden $n{\in}\mathbb{N}$ esetén

$$0 = \langle \mathrm{id}_I^n, \phi\rangle = \int_a^b \mathrm{id}_I^n\phi\rho = [\mathrm{id}_I^n F]_a^b - n\int_a^b \mathrm{id}_I^{n-1}F = -n\left\langle \mathrm{id}_I^{n-1}, \frac{F}{\rho}\right\rangle,$$

következésképpen $\dfrac{F}{\rho}{=}0$, így $F{=}0$. Ebből $F$ definíciója szerint azt kapjuk, hogy $\phi\rho$-nak $I$ minden részintervallumára vett integrálja 0, következésképpen $\phi\rho$ Lebesgue-majdnem mindenütt 0 az $I$ intervallumon. Mivel $\rho$ mindenütt pozitív, ebből következik, hogy a $\phi$ fügvény $\rho\lambda$-majdnem mindenütt nulla az $I$ intervallumon, és ezt kellett bizonyítanunk.

**14.6.** $\{P_n^\rho \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ teljes ortonormált rendszer $L^2_{\rho\lambda}(I)$-ben akkor is, ha $I$ nem korlátos intervallum, azonban a bizonyításhoz nem elegendőek az eddig rendelkezésünkre álló eszközök.

A mondottak szerint tehát az $L^2_{\rho\lambda}(I)$ Hilbert-tér szeparábilis.

**14.7.** Állítás *Legyen $I{\subset}\mathbb{R}$ intervallum, $\rho : I{\to}\mathbb{R}^+$ súlyfüggvény. Ekkor $\left\{P_n^\rho\sqrt{\rho} \mid n \in \mathbb{N}_0\right\}$ teljes ortonormált rendszer $L^2(I)$-ben.*

Bizonyítás Egyszerű tény, hogy a szóban forgó rendszer ortonormált. Megmutatjuk, hogy teljes. Ehhez megint elég megmutatni azt, hogy az $\{\mathrm{id}_I^n\sqrt{\rho} \mid n \in \mathbb{N}\}$ rendszer totális.

Legyen $\phi{\in}L^2_\lambda(I)$ olyan függvény, hogy minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $\left\langle \mathrm{id}_I^n\sqrt{\rho}, \phi\right\rangle{=}0$. Ekkor

$$0 = \int_I \mathrm{id}_I^n\sqrt{\rho}\phi = \int_I \mathrm{id}_I^n\frac{\phi}{\sqrt{\rho}}\rho,$$

így az előző állítás szerint az $\dfrac{\phi}{\sqrt{\rho}}$ függvény $\rho\lambda$-majdnem mindenütt nulla $I$-n, következésképpen a $\sqrt{\rho}\phi$ függvény $\lambda$-majdnem mindenütt nulla. Mivel $\rho$ seholsem nulla, ebből következik, hogy $\phi$ a Lebsgue-mértrék szerint majdnem mindenütt nulla az $I$ intervallumon, és ezt kellett bizonyítanunk.

**14.8.** A gyakorlatban is fontos ortogonális polinomrendszerek a következők:

1. A **Jacobi-polinomok**: $I{:=}]-1,1[,\quad \rho(x):=(1{-}x)^{\alpha}(1{+}x)^{\beta}$ $(\alpha,\beta{>}{-1})$; speciálisan:

| | |
|---|---|
| a **Legendre-polinomok**: | $\alpha{=}\beta{=}0,$ |
| az **elsőfajú Csebisev-polinomok**: | $\alpha{=}\beta{=}-\frac{1}{2},$ |
| a **másodfajú Csebisev-polinomok**: | $\alpha{=}\beta{=}\frac{1}{2}.$ |

2. A **Laguerre-polinomok**: $I{:=}[0,+\infty[,\quad \rho(x):=\exp(-x)$.
3. Az **Hermite-polinomok**: $I{:=}\mathbb{R},\quad \rho(x):=\exp(-x^2)$.

**14.9.** A $P_n$ $(n{\in}\mathbb{N})$ $n$-edik ortogonális polinom kielégíti a következő közönséges differenciálegyenletet:

| | |
|---|---|
| Jacobi-polinomok: | $((1{-}\mathrm{id}_I^2)\rho P_n')'{+}\rho n(n{+}\alpha{+}\beta{+}1)P_n{=}0,$ |
| Laguerre-polinomok: | $(\mathrm{id}_I\rho P_n')'{+}n\rho P_n{=}0,$ |
| Hermite-polinomok: | $(\rho P_n')'{+}2n\rho P_n{=}0.$ |

Ezt például az Hermite-polinomokra a következőképpen láthatjuk be. Felhasználva, hogy $\rho'{=}{-}2\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\rho$, a fenti differenciálegyenlet átírható a

$$P_n''{-}2\mathrm{id}_{\mathbb{R}}P_n'{+}2nP_n{=}0$$

alakba. Egyszerű megmutatni (Analízis VII.14.5.), hogy a fenti másodrendű differenciálegyenletnek a

$$P_n{:=}\sum_{k=0}^{n}c_k\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^k,\qquad c_{k+1}{=}{-}\frac{2(n{-}k)}{(k{+}2)(k{+}1)}c_k$$

rekurziós formulával meghatározott $n$-edfokú polinom a megoldása.

Minden $m,n{\in}\mathbb{N}$ esetén

$$(\rho P_n')'{+}2n\rho P_n=0,$$
$$(\rho P_m')'{+}2m\rho P_m=0;$$

az elsőt $P_m$-mel, a másodikat $P_n$-nel megszorozva, és a Lebesgue-mérték szerint integrálva azt kapjuk, hogy

$$2(n{-}m)\int\limits_{\mathbb{R}}P_nP_m\rho=\int\limits_{\mathbb{R}}(\rho P_m')'P_n{-}(\rho P_n')'P_m=={}[(\rho P_m')P_n{-}(\rho P_n')P_m]_{-\infty}^{+\infty}=0,$$

így $m{\neq}n$ esetén: $\langle P_m, P_n\rangle{=}0$, azaz $\{P_n \mid n{\in}\mathbb{N}\}$ a $\rho(x){:=}e^{-x^2}$ $(x{\in}\mathbb{R})$ súlyfüggvényre ortonormált rendszer, tehát ezek az Hermite-polinomok.

A 14.7. állítás szerint a

$$H_n(x){:=}P_n(x)e^{-x^2/2} \qquad (x{\in}\mathbb{R}, n{\in}\mathbb{N})$$

formulával definiált **Hermite-függvények** tehát teljes ortonormált rendszert alkotnak $L^2(\mathbb{R})$-ben.

**14.10.** Bizonyos négyzetesen integrálható függvényterekben adtunk meg teljes ortonormált rendszereket. Sokszor az ilyen rendszerek valamely függvényszeresei jönnek elő az alkalmazásokban. Ezekről mondunk most valamit általános keretek között.

Állítás *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ $\sigma$-véges mértéktér, és $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teljes ortonormált rendszer $L^2_\mu(X)$-ben. Ha $\theta \in L^\infty_\mu$ olyan, hogy $|\theta| > 0$ $\mu$-majdnem mindenütt, akkor a $(\theta\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rendszer topologikus algebrai bázis (Schauder-bázis) $L^2_\mu(X)$-ben; speciálisan, ha $|\theta| = 1$, akkor teljes ortonormált rendszer.*

Bizonyítás Jegyezzük meg először is, hogy minden $\phi \in L^2_\mu(X)$ esetén $\theta\phi$ is négyzetesen integrálható, tehát a szóban forgó rendszer valóban $L^2_\mu(X)$-ben van.

Tegyük fel, hogy $\phi \in L^2_\mu(X)$ ortogonális minden $\theta\eta_n$-re. Ekkor

$$0 = \int\limits_X \phi^*\theta\eta_n\, d\mu = \int\limits_X (\phi\theta^*)^*\eta_n\, d\mu,$$

amiből az következik, hogy $\phi\theta^* = 0$ $\mu$-majdnem mindenütt, tehát a $\theta$ tulajdonságai miatt $\phi = 0$ $\mu$-majdnem mindenütt. Következésképpen a szóban forgó rendszer totális. Topologikusan linárisan független is; tegyük ugyanis föl, hogy nem az; például $\theta\eta_1 \in \overline{\mathrm{Span}\{\theta\eta_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}} = \{\theta\eta_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}^{\perp\perp}$. Ez azt jelenti, hogy ha $\phi \in L^2_\mu(X)$ olyan, hogy $\langle\phi, \theta\eta_n\rangle = 0$ minden $1 \neq n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor $\langle\phi, \theta\eta_1\rangle = 0$. Vegyük a $\phi := \dfrac{\eta_1}{\theta}$ függvényt, hogy azt kapjuk, $\eta_1 = 0$, ami ellentmondás. Ugyanígy érvelhetünk az 1 index helyett akármelyikre.

Végül egyszerű tény, hogy ha $|\theta| = 1$, akkor

$$\langle\theta\eta_n, \theta\eta_m\rangle = \int\limits_X (\theta\eta_n)^*(\theta\eta_m)\, d\mu = \langle\eta_n, \eta_m\rangle.$$

**14.11. Feladatok**

1. Mutassuk meg, hogy $L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C})$-ben $\left\{(2\pi)^{-1/2}\mathrm{id}^n_{\mathbb{T}} \mid n{\in}\mathbb{Z}\right\}$ teljes ortonormált rendszer! (Útmutatás: $L^2(\mathbb{T}) \to L^2([-\pi, \pi])$, $\omega \mapsto (x \mapsto \omega(e^{ix}))$ izometrikus lineáris bijekció.)

2. Írjuk le $L^2([-\pi,\pi])$-ben az $\left\{\sum_{k=0}^{2n}\cos\bullet k \mid n\in\mathbb{N}_0\right\}^{\perp}$ halmazt!

3. Igazoljuk, hogy

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\bullet n, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\bullet\frac{2n-1}{2} \;\middle|\; n\in\mathbb{N}\right\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\}\bigcup$$

$$\left\{\cos\bullet\frac{n+1}{2} \;\middle|\; n\in\mathbb{N}_0,\, n \text{ páratlan}\right\}\bigcup\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\bullet\frac{n+1}{2} \;\middle|\; n\in\mathbb{N}_0,\, n \text{ páros}\right\},$$

valamint

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\bullet n, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\bullet\frac{2n-1}{2} \;\middle|\; n\in\mathbb{N}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\bullet\frac{n+1}{2} \;\middle|\; n\in\mathbb{N}_0,\, n \text{ páratlan}\right\}\bigcup\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\bullet\frac{n+1}{2} \;\middle|\; n\in\mathbb{N}_0,\, n \text{ páros}\right\}$$

teljes ortonormált rendszerek $L^2([-\pi,\pi])$-ben.

Az első a ,,nyitott végű állóhullámok" összessége, a második a ,,zárt végű állóhullámok" összessége.

4. Általánosítsuk a 14.10. állítást úgy, hogy ha $(\eta_i)_{i\in I}$ Schauder-bázis, akkor $(\theta\eta_i)_{i\in I}$ is az.

# 15. Hilbert-terek tenzorszorzata

**15.1.** Legyen $(X,\mathcal{A},\mu)$ és $(Y,\mathcal{B},\nu)$ $\sigma$-véges mértéktér. A $\phi : X\to\mathbb{K}$ és $\psi : Y\to\mathbb{K}$ függvényekre a szokásunknak megfelelően a $\phi\otimes\psi : X\times Y\to\mathbb{K}$, $(x,y)\mapsto\phi(x)\psi(y)$ jelölést alkalmazzuk. $\mu\otimes\nu$ pedig a szorzatmértéket jelöli (Analízis V.B.12.1.).

Fubini tételéből egyszerűen származtathatjuk, hogy ha $\phi\in L^2_\mu(X)$ és $\psi\in L^2_\nu(Y)$, akkor $\phi\otimes\psi\in L^2_{\mu\otimes\nu}(X\times Y)$ és

$$\|\phi\otimes\psi\|^2 = \|\phi\|^2\|\psi\|^2.$$

Következésképpen, ha $K\in L^2_{\mu\otimes\nu}(X\times Y)$, akkor $K\phi\otimes\psi$ (és persze $K^*\phi\otimes\psi$) integrálható $\mu\otimes\nu$ szerint.

**Állítás** *Legyen $\psi\in L^2_\nu(Y)$, $K\in L^2_{\mu\otimes\nu}(X\times Y)$. Ekkor az*

$$x\mapsto\int_Y K^*(x,y)\psi(y)d\nu(y) \qquad (*)$$

*függvény $\mu$-majdnem minden $x\in X$ esetén értelmezett és négyzetesen $\mu$-integrálható.*

Bizonyítás A $\sigma$-végesség miatt létezik $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{A}$-beli halmazsorozat úgy, hogy $X=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$, és minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $\mu(E_n)<\infty$. Ekkor $\chi_{E_n} \in L^2_\mu(X)$, tehát az előzőek alapján $K^*(\chi_{E_n} \otimes \psi)$ integrálható $\mu\otimes\nu$ szerint, amiből Fubini tételével azt kapjuk, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ és $\mu$-majdnem minden $x\in E_n$ esetén $K^*(x,.)\psi$ $\nu$-integrálható; ez igaz lesz $\mu$-majdnem minden $x\in X$ esetén is, hiszen megszámlálható sok $\mu$-nulla halmaz uniója $\mu$-nulla. Ezért ismét alkalmazhatjuk Fubini tételét minden $\phi \in L^2_\mu(X)$ estén:

$$\int\limits_{X\times Y} K^*\phi\otimes\psi d(\mu\otimes\nu) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y K^*(x,y)\psi(y)d\nu(y)\right)\phi(x)d\mu(x),$$

továbbá a Cauchy–Schwartz-egyenlőtlenség szerint

$$\left|\int\limits_X \left(\int\limits_Y K^*(x,y)\psi(y)d\nu(y)\right)\phi(x)d\mu(x)\right| =$$
$$= \left|\int\limits_{X\times Y} K^*\phi\otimes\psi d(\mu\otimes\nu)\right| \leq \|K\|\|\phi\otimes\psi\| = \|K\|\|\phi\|\|\psi\|,$$

tehát az $L^2_\mu(X)\to\mathbb{K}$, $\phi\mapsto \int\limits_X \left(\int\limits_Y K^*(x,y)\psi(y)d\nu(y)\right)\phi(x)d\mu(x)$ leképezés folytonos lineáris, így az $L^2_\mu(X)$ Hilbert-térre vonatkozó Riesz-féle reprezentációs tétel szerint a $(*)$ függvény benne van $L^2_\mu(X)$-ben.

**15.2.** Állítás *Ha $(\phi_i)_{i\in I}$ illetve $(\psi_j)_{j\in J}$ teljes ortonormált rendszer $L^2_\mu(X)$-ben illetve ${L_\nu}^2(Y)$-ban, akkor $(\phi_i\otimes\psi_j)_{(i,j)\in I\times J}$ teljes ortonormált rendszer $L^2_{\mu\otimes\nu}(X\times Y)$-ban.*

Bizonyítás Fubini tételével könnyen beláthatjuk, hogy $(\phi_i\otimes\psi_j)_{(i,j)\in I\times J}$ ortonormált rendszer. Tegyük fel, hogy $K\in L^2_{\mu\otimes\nu}(X\times Y)$ ortogonális minden $\phi_i\otimes\psi_j$-re, vagyis az előbbi eredményünket alkalmazva:

$$0 = \int\limits_{X\times Y} K^*\phi_i\otimes\psi_j d(\mu\otimes\nu) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y K^*(x,y)\psi_j(y)d\nu(y)\right)\phi_i(x)d\mu(x).$$

Ez azt jelenti, hogy az $x\mapsto \int\limits_Y \psi_j(y)K(x,y)d\nu(y)$ függvény ortogonális minden $\phi_i$-re, tehát $\mu$-majdnem mindenütt nulla. Következésképpen $\mu$-majdnem minden

$x \in X$ esetén $K(x,.)$ ortogonális minden $\psi_j$-re, tehát $\nu$-majdnem mindenütt nulla. Ezek együtt azt adják, hogy $K$ $\mu\otimes\nu$-majdnem mindenütt nulla, és ezt akartuk bizonyítani.

**Következmény** $L^2_{\mu\otimes\nu}(X \times Y)$-ben az

$$\left\{\phi \otimes \psi \mid \phi \in L^2_\mu(X),\ \psi \in L^2_\nu(Y)\right\}$$

halmaz totális (tehát az ilyen függvények lineáris kombinációi sűrű lineáris alteret alkotnak).

**15.3.** Legyen $\boldsymbol{H}$ és $\boldsymbol{K}$ Hilbert-tér. Vegyük a $\boldsymbol{H} \otimes \boldsymbol{K}$ (algebrai) tenszorszorzatukat (Analízis II.24.).

Állapítsuk meg először is, hogy ha

$$\sum_{i=1}^n x_i \otimes u_i = \sum_{k=1}^m x'_k \otimes u'_k,$$

akkor minden $y \in \boldsymbol{H}$ és $v \in \boldsymbol{K}$ esetén

$$\sum_{i=1}^n \langle y, x_i\rangle u_i = \sum_{k=1}^m \langle y, x'_k\rangle u'_k, \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^n x_i \langle v, u_i\rangle = \sum_{k=1}^m x'_k \langle v, u'_k\rangle.$$

A tenzorszorzat elemeit ugyanis $\boldsymbol{H}^* \times \boldsymbol{K}^* \to \mathbb{K}$ bilineáris leképezéseknek felfogva azt kapjuk minden $y$-ra és $v$-re – hiszen $\langle y| \in \boldsymbol{H}^*$, $\langle v| \in \boldsymbol{K}^*$ –, hogy

$$\sum_{i=1}^n \langle y, x_i\rangle \langle v, u_i\rangle = \sum_{k=1}^m \langle y, x'_k\rangle \langle v, u'_k\rangle,$$

azaz

$$\left\langle y, \sum_{i=1}^n x_i \langle v, u_i\rangle \right\rangle = \left\langle y, \sum_{k=1}^m x'_k \langle v, u'_k\rangle \right\rangle,$$

$$\left\langle v, \sum_{i=1}^n \langle y, x_i\rangle u_i \right\rangle = \left\langle v, \sum_{k=1}^m \langle y, x'_k\rangle u'_k \right\rangle.$$

Mivel ez minden $y$-ra illetve $v$-re fennáll, igazak a kívánt egyenlőségek.

Ebből könnyen kapjuk, hogy a

$$\boldsymbol{H} \otimes \boldsymbol{K} \to \mathbb{K}, \qquad \left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes u_i, \sum_{j=1}^m y_j \otimes v_j\right) \mapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \langle x_i, y_j\rangle \langle u_i, v_j\rangle$$

leképezés jól definiált, és skalárszorzat.

Speciálisan tehát

$$\|x \otimes u\| = \|x\|\,\|u\| \qquad (x \in \boldsymbol{H}, u \in \boldsymbol{K}). \tag{$*$}$$

Definíció *$\boldsymbol{H} \otimes \boldsymbol{K}$-nak a fenti skalárszorzattal képzett teljes burkát a két Hilbert-tér* ***Hilbert-tenzorszorzatának*** *hívjuk, és $\boldsymbol{H}\overline{\otimes}\boldsymbol{K}$-val jelöljük.*

Állítás *Ha $(x_i)_{i\in I}$ és $(u_j)_{j\in J}$ teljes ortonormált rendszer $\boldsymbol{H}$-ban illetve $\boldsymbol{K}$-ban, akkor $(x_i \otimes u_j)_{(i,j)\in I\times J}$ teljes ortonormált rendszer $\boldsymbol{H}\overline{\otimes}\boldsymbol{K}$-ban.*

Bizonyítás A $\boldsymbol{H} \otimes \boldsymbol{K}$ skalárszorzatának definíciójából azonnal következik, hogy a szóban forgó rendszer ortonormált.

A $(*)$ összefüggés szerint a $\otimes : \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{K} \to \boldsymbol{H} \otimes \boldsymbol{K}$ bilineáris leképezés mindkét változójában folytonos, ezért

$$\left(\sum_{i\in I} \alpha_i x_i\right) \otimes \left(\sum_{j\in J} \beta_j u_j\right) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} \alpha_i\beta_j x_i \otimes u_j,$$

vagyis a tenzorszorzat alakú elemek halmaza része a szóban forgó rendszer zárt lineáris burkának; következésképpen része a szorzat alakú elemek zárt lineáris burka is, ami $\boldsymbol{H}\overline{\otimes}\boldsymbol{K}$. ■

Összevetve mostani eredményünket az előzővel, látjuk, hogy $L^2_{\mu\otimes\nu}(X \times Y) = L^2_\mu(X)\overline{\otimes}L^2_\nu(Y)$.

**15.4. Feladatok**

1. Adjunk meg egy teljes ortonormált rendszert $L^2(\mathbb{R}^3)$-ban!

2. Igazoljuk, hogy $L^2(\mathbb{R}^N)$ szeparábilis!

3. Ha $A : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ és $B : \boldsymbol{K} \to \boldsymbol{K}$ folytonos lineáris leképezések, akkor létezik egyértelműen egy $A\overline{\otimes}B : \boldsymbol{H}\overline{\otimes}\boldsymbol{K} \to \boldsymbol{H}\overline{\otimes}\boldsymbol{K}$ folytonos lineáris leképezés úgy, hogy $A\overline{\otimes}B(x \otimes u) = Ax \otimes Bu$, és $\|A\overline{\otimes}B\| = \|A\|\,\|B\|$.

4. Legyen $\boldsymbol{K}$ Hilbert-tér, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ $\sigma$-véges mértéktér, és használjuk a 10.5. jelöléseit. Mutassuk meg, hogy

$$L^2_\mu(X)\overline{\otimes}\boldsymbol{K} \equiv L^2_\mu(X, \boldsymbol{K}), \quad \phi \otimes u \equiv (x \mapsto \phi(x)u\ ,$$

ahol az azonosítás azt jelenti, létezik egyetlen skalárszorzat-tartó lineáris bijekció a szóban forgó két Hilbert-tér között, amely a jelzett elemeket egymásba képezi.

5. Értelmezzük az előbbiek speciális eseteként az $L^2_{\mu\otimes\nu}(X \times Y) \equiv L^2_\mu(X, L^2_\nu(Y))$ azonosítást!

# IV. OPERÁTOROK HILBERT-TEREKBEN

Ebben a fejezetben $\boldsymbol{H}$ adott Hilbert-teret jelöl, és operátoron $\boldsymbol{H} \rightarrowtail \boldsymbol{H}$ lineáris leképezést értünk.

## 16. Operátorok adjungáltja

**16.1.** Legyen $A$ sűrűn értelmezett operátor. Ekkor minden $y \in \boldsymbol{H}$ esetén $\langle y| \circ A : \mathrm{Dom}(A) \to \mathbb{K}$ lineáris leképezés (jelölés: 12.1.) Ha ez a leképezés folytonos, akkor az 1.3. szerint egyértelműen kiterjeszthető $\boldsymbol{H}$-n értelmezett folytonos lineáris leképezéssé, azaz $\boldsymbol{H}'$-beli elemmé; jelölje ezt $\overline{\langle y| \circ A}$. A Riesz-féle reprezentációs tétel szerint létezik egyetlen, $A^*y$-gal jelölt vektor $\boldsymbol{H}$-ban, amelyre

$$\langle A^*y| = \overline{\langle y| \circ A}.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\mathrm{Dom}(A^*) := \{y \in \boldsymbol{H} \mid \langle y| \circ A \text{ folytonos}\},$$

lineáris altér $\boldsymbol{H}$-ban, és az

$$A^* : \mathrm{Dom}(A^*) \to \boldsymbol{H}, \quad y \mapsto A^*y$$

leképezés lineáris.

**Definíció** *$A^*$-ot az $A$ operátor **adjungáltjának** nevezzük.*

Az adjungált definíciója tehát egyenértékű azzal, hogy

$$\langle A^*y, x\rangle = \langle y, Ax\rangle \qquad \big(x \in \mathrm{Dom}(A), y \in \mathrm{Dom}(A^*)\big). \tag{$*$}$$

Jegyezük meg, hogy csak sűrűn értelmezett operátornak van adjungáltja, továbbá a fenti egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha $x$ az $A$ értelmezési tartományában, $y$ az $A^*$ értelmezési tartományában van. Erre mindig figyelni kell, hiszen a bal oldali kifejezés akármilyen $x$-re, a jobb oldali pedig akármilyen $y$-ra is értelmes.

Sokszor kell eldöntenünk, benne van-e $y$ vektor egy $A$ operátor adjungáltjának az értelmezési tartományában, azaz $\langle y| \circ A$ folytonos-e. Világos, ha találunk egy $z$ vektort úgy, $\langle y| \circ A \subset \langle z|$, akkor $y \in \mathrm{Dom}(A^*)$ és $z = A^*y$.

Végül megemlítjük azt az egyszerű tényt, hogy $\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}^* = \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$.

**16.2.** Állítás *(i) Ha $A$ sűrűn értelmezett, folytonos operátor, és $\overline{A}$ jelöli az egyértelmű kiterjesztését az egész térre, akkor $A^* = (\overline{A})^*$.*

*(ii) Ha $A$ mindenütt értelmezett, folytonos operátor, akkor $A^*$ is mindenütt értelmezett, folytonos operátor, és*

$$\|A^*\|=\|A\|.$$

Bizonyítás Ha $A$ sűrűn (esetleg mindenütt) értelmezett, folytonos operátor, akkor nyilvánvaló, hogy $\mathrm{Dom}(A^*)=\boldsymbol{H}$.

(i) Minden $y$-ra $\langle A^*y| = \overline{\langle y| \circ A} = \langle y| \circ \overline{A} = \langle (\overline{A})^* y|$.

(ii) Minden $x, y \in \boldsymbol{H}$ esetén az előző pont $(*)$ összefüggése teljesül, ezért

$$\sup_{\|y\|\le 1} \|A^*y\| = \sup_{\|y\|\le 1} \sup_{\|x\|\le 1} |\langle A^*y, x\rangle| = \sup_{\|x\|\le 1} \sup_{\|y\|\le 1} |\langle A^*y, x\rangle| =$$

$$= \sup_{\|x\|\le 1} \sup_{\|y\|\le 1} |\langle y, Ax\rangle| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| = \|A\| < +\infty,$$

amit bizonyítani akartunk.

**16.3.** Állítás *Minden adjungált operátor zárt.*

Bizonyítás Legyen $A$ sűrűn értelmezett operátor, és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathrm{Dom}(A^*)$-ban, mely konvergál egy $\boldsymbol{H}$-beli $y$-hoz, úgy, hogy az $(A^*y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergál egy $\boldsymbol{H}$-beli $z$-hez. Ekkor $x \in \mathrm{Dom}(A)$ esetén

$$\langle z, x\rangle = \lim_n \langle A^*y_n, x\rangle = \lim_n \langle y_n, Ax\rangle = \langle y, Ax\rangle,$$

következésképpen $y \in \mathrm{Dom}(A^*)$ és $z = A^*(y)$, így az 5.2. állítás szerint $A^*$ zárt.

**16.4. Állítás** *Legyenek $A$ és $B$ sűrűn értelmezett operátorok.*

*(1) Ha* $\mathrm{Dom}(A+B)=\mathrm{Dom}(A)\cap\mathrm{Dom}(B)$ *sűrű, akkor*

$$(A+B)^* \supset A^*+B^*,$$

*és ha $A$ vagy $B$ egyike mindenütt értelmezett és folytonos, akkor egyenlőség van.*

*(2) Ha* $\mathrm{Dom}(AB)=B^{-1}[\mathrm{Dom}(A)]$ *sűrű, akkor*

$$(AB)^* \supset B^*A^*,$$

*és ha $A$ mindenütt értelmezett és folytonos, akkor egyenlőség van.*

*(3) Ha* $\mathrm{Dom}(A^*)$ *sűrű, akkor*

$$A^{**} \supset A.$$

*(4) $\lambda\in\mathbb{K}$ esetén*

$$(\lambda A)^* \supset \lambda^* A^*,$$

*és ha $\lambda\neq 0$, akkor egyenlőség van.*

*(5) Ha $A\subset B$, akkor $B^*\subset A^*$.*

Bizonyítás (1) Ha $y\in\mathrm{Dom}(A^*+B^*)$, akkor $\langle y|\circ A$ és $\langle y|\circ B$ folytonosak, következésképpen $\langle y|\circ(A+B) = \langle y|\circ A+\langle y|\circ B$ is folytonos, tehát $y\in\mathrm{Dom}((A+B)^*)$. Továbbá $x\in\mathrm{Dom}(A+B)$ esetén

$$\langle (A^*+B^*)(y), x\rangle=\langle A^*y, x\rangle+\langle B^*y, x\rangle = =\langle y, Ax\rangle+\langle y, Bx\rangle = \langle y, (A+B)x\rangle,$$

tehát $(A+B)^*\supset A^*+B^*$.

Ha például $A$ mindenütt értelmezett és folytonos, akkor $y\in\mathrm{Dom}((A+B)^*)$ esetén $\langle y|\circ(A+B)=\langle y|\circ A+\langle y|\circ B$ folytonos, és mivel $\langle y|\circ A$ folytonos, $\langle y|\circ B$ is az, tehát $y\in\mathrm{Dom}(A^*)\cap\mathrm{Dom}(B^*)=\mathrm{Dom}(A^*+B^*)$.

(2) Ha $y\in\mathrm{Dom}(B^*A^*)$, akkor $y\in\mathrm{Dom}(A^*)$ valamint $A^*y\in\mathrm{Dom}(B^*)$, így $\langle y|\circ A$ és $\langle A^*y|\circ B=\langle y|\circ AB$ folytonosak, tehát $y\in\mathrm{Dom}((AB)^*)$. Továbbá $x\in\mathrm{Dom}(AB)$ esetén

$$\langle B^*A^*y, x\rangle = \langle A^*y, Bx\rangle = \langle y, ABx\rangle,$$

tehát $(AB)^*\supset B^*A^*$.

Ha $A$ mindenütt értelmezett és folytonos, akkor $y \in \mathrm{Dom}((AB)^*)$ esetén $\langle y|\circ AB$ folytonos, és a 16.2. állítás szerint $\mathrm{Dom}(A^*) = \mathrm{Dom}(A)=\boldsymbol{H}$, így $\langle A^*y|\circ B=\langle y|\circ AB$ folytonos, tehát $A^*y\in\mathrm{Dom}(B^*)$, vagyis $y\in\mathrm{Dom}(B^*A^*)$.

(3) Ha $x \in \mathrm{Dom}(A)$, akkor $\langle x| \circ A^* = \langle Ax|$ folytonos $A^*$ értelmézési tartományán, tehát $x \in \mathrm{Dom}(A^{**})$. Továbbá $x \in \mathrm{Dom}(A^*)$ esetén

$$\langle Ay, x\rangle = \langle y, A^* x\rangle = \langle A^{**}y, x\rangle,$$

tehát $A \subset A^{**}$.

(4) és (5) bizonyítása annyira egyszerű, hogy az Olvasóra hagyjuk.

**16.5.** Az előbbi eredményünk szerint, ha $A$ és $B$ mindenütt értelmezett, folytonos operátorok, és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor

$$\begin{aligned} (A+B)^* &= A^* + B^*, \\ (\lambda A)^* &= \lambda^* A^*, \\ (AB)^* &= B^* A^*, \\ A^{**} &= A, \\ \|A^*\| &= \|A\|. \end{aligned}$$

Jelölje $\mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ a $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ folytonos lineáris leképezések Banach-terét a sup-operátonormára nézve. Ekkor $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$, így a kompozícióval együtt $\mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ Banach-algebra $\mathbb{K}$ felett. Egy $\mathbb{K}$ feletti olyan Banach-algebrát, melyen adott egy egyváltozós $^*$ művelet, melyre teljesülnek az fenti tulajdonságok, **$B^*$-algebrának** nevezünk. $\mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ tehát az $A \mapsto A^*$ adjungálással $B^*$-algebra. Egy $B^*$-algebrát **$C^*$-algebrának** nevezünk, ha minden $A$ elemére $\|A^*A\| = \|A\|^2$ áll fönn. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ $C^*$-algebra.

**16.6.** Állítás *Ha $A$ mindenütt értelmezett, folytonos operátor, akkor*

$$\|A^*A\| = \|A\|^2.$$

Bizonyítás Az operátornorma tulajdonsága és a 16.2.(ii) állítás miatt

$$\|A^*A\| \le \|A^*\|\,\|A\| = \|A\|^2.$$

Továbbá minden $x \in \boldsymbol{H}$ esetén

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle x, A^*Ax\rangle \le \|A^*A\|\,\|x\|^2,$$

ezért $\|Ax\| \le \sqrt{\|A^*A\|}\,\|x\|$, így $\|A\| \le \sqrt{\|A^*A\|}$, tehát $\|A\|^2 \le \|A^*A\|$.

**16.7.** Állítás *Ha $A$ sűrűn értelmezett operátor, akkor*

$$\mathrm{Ker}(A^*) = \mathrm{Ran}(A)^\perp.$$

Bizonyítás $y \in \operatorname{Ker}(A^*)$ ekvivalens azzal, hogy $y \in \operatorname{Dom}(A^*)$ és $A^*y=0$, azaz minden $x \in \operatorname{Dom}(A)$ esetén $0=\langle A^*y, x\rangle=\langle y, Ax\rangle$, ami épp azt jelenti, hogy $y \in \operatorname{Ran}(A)^{\perp}$.

**Következmény** $A^*$ pontosan akkor injektív, ha $\operatorname{Ran}(A)$ sűrű $\boldsymbol{H}$-ban.

**16.8.** Állítás *Ha $A$ olyan sűrűn értelmezett operátor, hogy $A$ injektív és $\operatorname{Dom}(A^{-1})=\operatorname{Ran}(A)$ sűrű, akkor*

$$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}.$$

Bizonyítás Mind $AA^{-1}$ mind $A^{-1}A$ sűrűn értelmezett, és az identitásnak a leszűkítései, tehát az adjungáltjuk a 16.2. (i) szerint maga az identitás. A szorzatok adjujungálásának szabályából

$$(A^{-1})^*A^* \subset (AA^{-1})^* = \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}, \quad A^*(A^{-1})^* \subset (A^{-1}A)^* = \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}.$$

Azt kell már csak megmutatnunk, hogy a bal oldalakon álló szorzatok értelmezési tartománya a megegyezik a hátul álló operátor értelmezési tartományával, azaz $\operatorname{Ran}(A^*) \subset \operatorname{Dom}(A^{-1})^*$ és $\operatorname{Ran}(A^{-1})^* \subset \operatorname{Dom}(A^*)$.

Íme: ha $z \in \operatorname{Ran}(A^*)$, akkor van olyan $y \in \operatorname{Dom}(A^*)$, hogy $z = A^*y$. Ekkor

$$\langle z| \circ A^{-1} = \langle A^*y| \circ A^{-1} \subset \langle y| \circ A \circ A^{-1} \subset \langle y|,$$

azaz $z$ benne van $(A^{-1})^*$ értelmezési tartományában.

Ha $z \in \operatorname{Ran}(A^{-1})^*$, akkor van olyan $y \in \operatorname{Dom}(A^{-1})^*$, hogy $z = (A^{-1})^*y$. Ekkor

$$\langle z| \circ A = \langle (A^{-1})^*y| \circ A \subset \langle y| \circ A^{-1} \circ A \subset \langle y|,$$

azaz $z$ benne van $A^*$ értelmezési tartományában.

**16.9.** $\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}$-n

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle$$

skalárszorzat, mely $\langle (x_1, x_2), (x_1, x_2)\rangle=\|x_1\|^2+\|x_2\|^2$ miatt a kettes szorzatnormát indukálja, tehát $\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}$ ezzel a skalárszorzattal Hilbert-tér (teljes). A

$$V : \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}, \quad (x, y) \mapsto (-y, x)$$

leképezés lineáris, izometrikus bijekció, és $V \circ V=-\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}}$.

Állítás *Ha $A$ sűrűn értelmezett operátor, akkor*

$$\operatorname{Graph}(A^*)=(V[\operatorname{Graph}(A)])^{\perp}.$$

Bizonyítás A Hilbert-tér $x$ és $y$ vektorára $(x,y)\in(V[\mathrm{Graph}(A)])^{\perp}$ akkor és csak akkor teljesül, ha minden $z\in\mathrm{Dom}(A)$ esetén $\langle(x,y),V(z,Az)\rangle=0$ áll fönn; azonban $\langle(x,y),V(z,Az)\rangle=-\langle x,Az\rangle+\langle y,z\rangle$ miatt ez ekvivalens azzal, hogy minden $z\in\mathrm{Dom}(A)$ esetén $\langle x,Az\rangle=\langle y,z\rangle$, következésképpen $x\in\mathrm{Dom}(A^*)$ valamint $y=A^*x$, tehát $(x,y)\in\mathrm{Graph}(A^*)$. ■

Ez az eredményünk magában foglalja azt, amit 16.3-ban mondtunk: látjuk, hogy $A^*$ grafikonja zárt lineáris altér, tehát $A^*$ zárt operátor.

Mivel $V$ izometrikus, megtartja az ortogonalitást, ezért $V[(V[\mathrm{Graph}(A)])^{\perp}=(VV[\mathrm{Graph}(A)])^{\perp}$, így az is igaz, hogy

$$V[\mathrm{Graph}(A^*)]=(\mathrm{Graph}(A))^{\perp}.$$

**16.10.** Állítás *Ha $Z$ sűrűn értelmezett zárt operátor, akkor* $\mathrm{Dom}(Z^*)$ *sűrű.*

Bizonyítás Ha $z\in\mathrm{Dom}(Z^*)^{\perp}$, akkor $y\in\mathrm{Dom}(Z^*)$ esetén $\langle z,y\rangle=0$, következésképpen $\langle(0,z),V(y,Z^*y)\rangle=\langle z,y\rangle=0$, ezért

$$(0,z)\in(V[\mathrm{Graph}(Z^*)])^{\perp}=\mathrm{Graph}(Z)^{\perp\perp}=\mathrm{Graph}(Z),$$

(ugyanis $\mathrm{Graph}(Z)$ zárt lineáris altér), így $z=Z(0)=0$, tehát $\mathrm{Dom}(Z^*)^{\perp}=\{0\}$, azaz $\mathrm{Dom}(Z^*)$ sűrű.

**16.11.** Állítás *Az $A$ sűrűn értelmezett operátor pontosan akkor lezárható, ha $A^*$ sűrűn értelmezett, és ekkor*

$$\overline{A}=A^{**}.$$

Bizonyítás Ha $A$ lezárható, akkor $A\subset\overline{A}$, következésképpen $(\overline{A})^*\subset A^*$; mivel $(\overline{A})^*$ sűrűn értelmezett, $A^*$ is az.

Ha $A^*$ sűrűn értelmezett, akkor

$$\mathrm{Graph}(A^{**})=(V[\mathrm{Graph}(A^*)])^{\perp}=\mathrm{Graph}(A)^{\perp\perp}=\overline{\mathrm{Graph}(A)},$$

így $A$ lezárható, és $\overline{A}=A^{**}$.

**16.12.** A most következő állítás jelentőségét csak később látjuk meg.

Állítás *Legyen $Z$ sűrűn értelmezett zárt operátor. Ekkor*

*(i)* $\mathrm{Dom}(Z^*Z)$ *sűrű lineáris altér,*

*(ii)* $\mathrm{Ran}(\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}+Z^*Z)=\boldsymbol{H}$,

*(iii)* $Z|_{\mathrm{Dom}(Z^*Z)}$ *grafikonja sűrű $Z$ grafikonjában.*

BIZONYÍTÁS A 16.9. szerint $\mathrm{Graph}(Z^*)=(V[\mathrm{Graph}(Z)])^\perp$; minthogy $Z$ grafikonja zárt, és $V$ izometrikus, $V[\mathrm{Graph}(Z)]$ is zárt lineáris altér, tehát $\mathrm{Graph}(Z^*)$ és $V[\mathrm{Graph}(Z)]$ kiegészítő alterek $\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}$-ban. Ezért minden $x\in\boldsymbol{H}$ esetén $(0,x)\in\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}$ egyértelműen felbontható ezekben az alterekben levő vektorok összegére, azaz minden $x$-hez létezik egyetlen $Bx\in\mathrm{Dom}(Z)$ és $Cx\in\mathrm{Dom}(Z^*)$ úgy, hogy

$$(0,x)=V(Bx,ZBx)+(Cx,Z^*Cx)=(-ZBx,Bx)+(Cx,Z^*Cx).$$

Ekkor $ZBx=Cx$, és

$$x=Bx+Z^*Cx=Bx+Z^*ZBx=(\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}+Z^*Z)Bx,$$

így $(\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}+Z^*Z)$ szürjekció, amivel bebizonyítottuk az (ii) kijelentést.

Legyen $y\in\mathrm{Dom}(Z)$ olyan, hogy $(y,Zy)\in\big(\mathrm{Graph}(Z|_{\mathrm{Dom}(Z^*Z)})\big)^\perp$. Ekkor minden $x\in\mathrm{Dom}(Z^*Z)$ esetén

$$\begin{aligned}0=&\langle(y,Zy),(x,Zx)\rangle=\langle z,x\rangle+\langle Zz,Zx\rangle=\\=&\langle y,x\rangle+\langle y,Z^*Zx\rangle=\langle y,(\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}+Z^*Z)x\rangle,\end{aligned}$$

tehát $y=0$, ezért a $\mathrm{Graph}(Z|_{\mathrm{Dom}(Z^*Z)})$ lineáris altér ortogonálisa a $\mathrm{Graph}(Z)$ Hilbert-térben $\{(0,0)\}$, így $\mathrm{Graph}(Z|_{\mathrm{Dom}(Z^*Z)})$ sűrű $\mathrm{Graph}(Z)$-ben, amivel bebizonyítottuk az (iii) kijelentést.

Mivel $\mathrm{Dom}(Z^*Z)\subset\mathrm{Dom}(Z)$, ha $\mathrm{Dom}(Z^*Z)$ nem sűrű, akkor van olyan $x\in\mathrm{Dom}(Z)$, amely nem torlódási pontja $Z^*Z$ értelmezési tartományának. Ekkor azonban $(x,Zx)$ sem lehet torlódási pontja $Z^*Z$ grafikonjának, ami ellentétben áll (iii)-vel, és ezzel bebizonyítottuk (i)-t is.

**16.13. Feladatok**

1. Lapozzunk vissza az 5.7.1. feladathoz, és legyen $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{L}$ pedig sűrű lineáris altér $\boldsymbol{H}$-ban. Ekkor létezik $A$-nak adjungáltja. Mutassuk meg, hogy $\mathrm{Dom}(A^*)=\{a\}^\perp$. Ez összhangban van azzal, hogy $A$ nem lezárható, és $\mathrm{Dom}(A^*)$ nem sűrű.

2. $l^2$-ben a **jobbra tolás operátora**

$$R:l^2\to l^2,\qquad (a_1,a_2,a_3,\dots)\mapsto(0,a_1,a_2,a_3,\dots).$$

Mutassuk meg, hogy ennek adjungáltja a **balra tolás operátora**:

$$L:l^2\to l^2,\qquad (a_1,a_2,a_3,a_4,\dots)\mapsto(a_2,a_3,a_4,\dots).$$

3. Legyen $A:l^2\rightarrowtail l^2$ a

$$\mathrm{Dom}(A):=\left\{x\;\middle|\;\sum_{n\in\mathbb{N}}n^2|x_n|^2<\infty\right\},\qquad Ax:=(x_1,2x_2,3x_3,\dots)$$

formulákkal definiálva. Mutassuk meg, hogy sűrűn van értelmezve, és az adjungáltja önmaga.

4. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teljes ortonormált rendszer egy Hilbert-térben, valamint $\eta_n \in \mathbb{K}$ $(n\in\mathbb{N})$. Definiáljuk az $A$ operátort a

$$\mathrm{Dom}(A) := \left\{ x \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{N}} |\eta_n|^2 |\langle a_n, x\rangle|^2 < \infty \right\}, \quad Ax := \sum_{n\in\mathbb{N}} \eta_n \langle a_n, x\rangle b_n$$

formulákkal. Mutassuk meg, hogy $A$ sűrűn van értelmezve,

$$\mathrm{Dom}(A^*) := \left\{ y \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{N}} |\eta_n|^2 |\langle b_n, y\rangle|^2 < \infty \right\}, \quad A^*y := \sum_{n\in\mathbb{N}} \eta_n^* \langle b_n, y\rangle^* a_n.$$

$A^*$ is sűrűn értelmezett, és $A^{**} = A$. Adjuk meg az $A^*A$ operátort is! Mikor lesz $A$ folytonos?

5. Legyen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható injekció, amelynek az inverze is folytonosan differenciálható. Adjuk meg az $A_F : L^2(\mathbb{R}) \rightarrowtail L^2(\mathbb{R})$ operátort a

$$\mathrm{Dom}(A_F) := \{\phi \mid \phi \circ F \in L^2(\mathbb{R})\}, \quad A_F\phi := \phi \circ F$$

formulákkal. Bizonyítsuk be, hogy $\phi \in \mathrm{Dom}(A_F)$ pontosan akkor, ha $\dfrac{\phi\chi_{\mathrm{Ran}F}}{\sqrt{|F' \circ F^{-1}|}}$ is négyzetesen integrálható. Ha ez sűrű, akkor $\psi \in \mathrm{Dom}(A_F^*)$ pontosan akkor, ha $\dfrac{\psi}{\sqrt{|F'|}} \in L^2(\mathbb{R})$, és ez esetben $A_F^*\psi = \dfrac{\psi \circ F^{-1}\chi_{\mathrm{Ran}F}}{|F' \circ F^{-1}|}$.

Mutassuk meg, hogy ha $A_F^*$ sűrűn értelmezett, akkor $A_F^{**} = A_F$.

6. Vizsgáljuk meg az $F := \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^3$, $F := \mathrm{arctg}$ és $F := \exp$ esetben, vajon az előbbi feladatban szereplő $A_F$ operátor sűrűn van-e értelmezve, és ha igen, az adjungáltja sűrűn van-e értelmezve.

7. Legyen $A$ sűrűn értelmezett operátor. Ekkor $A^*|_{\overline{\mathrm{Ran}(A)}}$ injektív és $A^*[\overline{\mathrm{Ran}(A)}] = \mathrm{Ran}(A^*)$. (Útmutatás: $\mathrm{Ker}(A^*)^\perp = \overline{\mathrm{Ran}(A)}$.)

8. Legyen $x, y \in \boldsymbol{H}$ és vezessük be az $|x\rangle\langle y| : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$, $\quad z \mapsto \langle y, z\rangle x$ jelölést. Mutassuk meg, hogy $|x\rangle\langle y|$

(i) folytonos lineáris leképezés $\|\,|x\rangle\langle y|\,\| = \|x\|\,\|y\|$,

(ii) ha $x \neq 0$ és $y \neq 0$, akkor értékkészlete $\mathbb{K}y$ (egy dimenizós altér),

(iii) adungáltja $|y\rangle\langle x|$.

Igazoljuk, hogy ha $A$ egy rangú folytonos lineáris leképezés (az értékkészlete egy dimenziós), akkor létezik $0 \neq x$ és $0 \neq y$ úgy, hogy $A = |x\rangle\langle y|$. Továbbá, ha $A = |x'\rangle\langle y'|$, akkor van olyan nem nulla $\alpha$ szám, hogy $x' = \frac{1}{\alpha^*}x$, $y' = \alpha y$.

9. Mutassuk meg, hogy $l^2$-n a folytonos operátorokat olyan "végtelen mátrixokkal" reprezentálhatjuk, amelyek minden sora és minden oszlopa négyzetesen

összegezhető; formulákban: $\mathcal{L}in(l^2)$ azonosítható az

$$\left\{\alpha \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_{nm}|^2 < \infty, \sum_{m\in\mathbb{N}} |\alpha_{nm}|^2 < \infty,\ n, m \in \mathbb{N}\right\}$$

vektortérrel úgy, hogy

$$(\alpha x)_n := \sum_{m\in\mathbb{N}} \alpha_{nm} x_m \qquad (x \in l^2).$$

Mi a 2. feladatban értelmezett jobbra illetve balra tolás operátorának a mátrixa? Mi a 8. feladatban értelmezett operátor mátrixa?

Hogyan adható meg egy operátor mátrixából az adjungáltjának a mátrixa?

10. Egy $R : \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H} \to \mathbb{K}$ leképezést szeszkilinárisnak mondunk, ha lineáris a második változójában és konjugált lineáris az első változójában. Egy ilyen leképezés pontosan akkor folytonos, ha létezik $K > 0$ úgy, hogy $\|R(x, y)\| \leq K\|x|\,\|y\|$ minden $x, y \in \boldsymbol{H}$ esetén (ugyanúgy, mint egy bilineáris leképezés, lásd Analízis III.B.10.11.), és ekkor $\|R\| := \sup\limits_{\|x\|=\|y\|=1} |R(x, y)|$.

Bizonyítsuk be, hogy minden $R$ folytonos szeszkilineáris leképezéshez létezik egyértelműen egy $A_R : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ folytonos lineáris leképezés úgy, hogy $R(x, y) = \langle x, A_R y\rangle$, és az $R \to A_R$ hozzárendelés lineáris izometrikus bijekció. Útmutatás: alkalmazzuk a Riesz-féle reprezentációs tételt).

11. Azt mondjuk, hogy mindenütt értelmezett folytonos operátorok $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata

– **normában** (vagy **uniform**) **konvergens**, ha létezik $A$ mindenütt értelmezett folytonos operátor úgy, hogy $\lim\limits_n \|A_n - A\| = 0$, és ekkor az $A = (u)\lim\limits_n A_n$ jelölést használjuk;

– **erősen konvergens**, ha létezik $A$ mindenütt értelmezett folytonos operátor úgy, hogy $\lim\limits_n A_n x = Ax$ minden $x \in \boldsymbol{H}$ esetén, és ekkor az $A = (s)\lim\limits_n A_n$ jelölést használjuk (vagyis az erős konvergencia a pontonkénti konvergencia);

– **gyengén konvergens**, ha létezik $A$ mindenütt értelmezett folytonos operátor úgy, hogy $\lim\limits_n \langle y, A_n x\rangle = \langle y, Ax\rangle$ minden $x, y \in \boldsymbol{H}$ esetén, és ekkor az $A = (w)\lim\limits_n A_n$ jelölést használjuk.

Bizonyítsuk be, hogy ha az operátorsorozat normában konvergens, akkor erősen is konvergens és $(s)\lim\limits_n A_n = (u)\lim\limits_n A_n$, és ha erősen konvergens, akkor gyengén is konvergens és $(w)\lim\limits_n A_n = (s)\lim\limits_n A_n$.

Legyen $R$ és $L$ a 2. feladatban bevezetett jobbra tolás illetve balra tolás operátora. Mutassuk meg, hogy

– az $(L^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat normában nem konvergens, de $(s)\lim\limits_n L^n = 0$,

– az $(R^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat erősen nem konvergens, de $(w)\lim\limits_n R^n = 0$.

12. Bizonyítsuk be a következőket.

(i) Az operátorok lineáris műveletei felcserélhetők az előző feladatban értelmezett mindhárom határértékkel, azaz ha $A = (.)\lim\limits_n A_n$ és $B = (.)\lim\limits_n B_n$, akkor $A + B = (.)\lim\limits_n (A_n + B_n)$, és hasonló igaz a számmal szorzásra.

(ii) Az operátorok szorzása felcserélhető az egyenletes és az erős határértékkel, azaz ha $A = (u)\lim\limits_n A_n$ és $B = (u)\lim\limits_n B_n$, akkor $AB = (u)\lim\limits_n (A_n B_n)$, és ugyanez igaz az erős limeszre is (aminek bizonyításhoz fel kell használni a Banach–Steinhaus-tételt). A gyenge határértékre viszont ez nem áll: $(w)\lim\limits_n L^n = (w)\lim\limits_n R^n = 0$, de $L^n R^n = \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ minden $n$-re.

(iii) Az adjungálás felcserélhető az egyenletes és a gyenge határértékkel, azaz ha $A = (u)\lim\limits_n A_n$, akkor $A^* = (u)\lim\limits_n A_n^*$, és ugyanez igaz a gyenge limeszre is. Az erős határértékre viszont ez nem áll: $(s)\lim\limits_n L^n = 0$, de az $(L^n)^* = R^n$ sorozatnak nem létezik erős határértéke.

13. Legyen $A_1$ és $A_2$ a $\boldsymbol{H}_1$ illetve a $\boldsymbol{H}_2$ sűrűn értelmezett operátora. Ekkor $(A_1 \times A_2)^* = A_1^* \times A_2^*$.

14. Legyen $A_1$ és $A_2$ a $\boldsymbol{H}_1$ illetve a $\boldsymbol{H}_2$ sűrűn értelmezett operátora. Definiáljuk az $A_1 \otimes A_2$ operátort $\boldsymbol{H}_1 \overline{\otimes} \boldsymbol{H}_2$-ben (lásd a 15. fejezetet) a $\mathrm{Dom}(A_1) \otimes \mathrm{Dom}(A_2)$ lineáris altéren a szokásos formulákkal. Bizonyítsuk be, hogy $(A_1 \otimes A_2)^* \supset A_1^* \otimes A_2^*$.

# 17. Speciális típusú operátorok

**17.1.** Már eddig is sokat szerepeltek izometrikus lineáris leképezések, most ezeket vizsgáljuk meg közelebbről.

**1. Állítás** *Egy $V : \boldsymbol{H} \rightarrowtail \boldsymbol{H}$ operátorra a következők egyenértékűek:*

*(i)* $\|Vx\| = \|x\|$ *minden* $x \in \mathrm{Dom}(V)$ *esetén,*

*(ii)* $\langle Vx, Vy\rangle = \langle x, y\rangle$ *minden* $x, y \in \mathrm{Dom}(V)$ *esetén.*

Bizonyítás (ii)-ből nyilvánvalóan következik (i), az pedig a azért vonja maga után (ii)-t, mert a skalárszorzatot a norma a 10.1. állítás szerint meghatározza. ■

Tehát egy operátor pontosan akkor izometrikus, ha skalárszorzattatrtó.

Megjegyezzük, hogy ha $V$ izometrikus operátor, akkor

– $V$ folytonos, $\|V\| = 1$,

– $V$ injektív, és $V^{-1}$ is izometrikus.

**2.** Állítás *Egy $V$ izometrikus operátorra a következők egyenértékűek:*

*(i)* $\mathrm{Dom}(V)$ *zárt,*
*(ii)* $\mathrm{Ran}(V)$ *zárt,*
*(iii)* $\mathrm{Graph}(V)$ *zárt.*

Bizonyítás Legyen $\mathrm{Dom}(V)$ zárt. Vegyünk egy $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens sorozatot $\mathrm{Ran}(V)$-ben. Ekkor minden $n$-re van olyan $x_n \in \mathrm{Dom}(V)$, hogy $y_n = Vx_n$. Mivel $\|x_m - x_n\| = \|y_m - y_n\|$, az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat Cauchy-féle, ezért konvergens, $x := \lim\limits_n x_n \in \mathrm{Dom}(V)$. Minthogy $\|Vx - y_n\| = \|x - x_n\|$, az igaz, hogy $\lim\limits_n y_n = Vx \in \mathrm{Ran}(V)$, azaz $\mathrm{Ran}(V)$ zárt.

A $V^{-1}$ izomertrikus operátorra alkalmazva az előbbi eredményt látjuk, ha $\mathrm{Ran}(V)$ zárt, akkor $\mathrm{Dom}(V)$ is zárt.

$V$ folytonossága és a zártgrafikon-tétel szerint $\mathrm{Graph}(V)$ zártsága egyenértékű $\mathrm{Dom}(V)$ zártságával.

**17.2.** Állítás *Egy mindenütt értelmezett $V$ operátor pontosan akkor izometrikus, ha*

$$V^*V = \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}},$$

*és ekkor*

$$VV^* = P_{\mathrm{Ran}(V)}$$

*(ahol az utolsó szimbólum a* $\mathrm{Ran}(V)$ *zárt lineáris altér ortogonális projektorát jelöli).*

Bizonyítás Ha $V$ izometrikus, akkor minden $x, y \in \boldsymbol{H}$ esetén

$$\langle x, y\rangle = \langle Vx, Vy\rangle = \langle V^*Vx, y\rangle,$$

amiből a 11.4-ben mondottak szerint $V^*V = \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$. Ha viszont ez az utóbbi egyenlőség teljesül, akkor minden $x, y \in \boldsymbol{H}$ esetén

$$\langle x, y\rangle = \langle x, V^*Vy\rangle = \langle Vx, Vy\rangle.$$

Ha $z \in \mathrm{Ran}(V)$, akkor létezik $x \in \boldsymbol{H}$ úgy, hogy $z = Vx$, és $VV^*z = VV^*Vx = Vx = z$. Ha $z \in (\mathrm{Ran}(V))^{\perp} = \mathrm{Ker}(V^*)$, tehát $VV^*z = 0$. Összegezve: $VV^*$ a $\mathrm{Ran}(V)$-n az identitás, $(\mathrm{Ran}(V)^{\perp}$-on a nulla, tehát $VV^*$ az állított ortogonális projektor.

**17.3.** Definíció *Egy bijektív izometrikus operátort **unitérnek** hívunk.*

Egy izometrikus operátor, mégha mindenütt is van értelmezve, nem szükségképpen unitér. Példa erre $l^2$-ben a jobbra tolás operátora, amely mindenhol értelmezett, izometrikus, azonban nem szürjektív, ezért nem unitér: az $(1, 0, 0, \dots)$ vektor nincs benne az értékkészletében.

Állítás *Egy sűrűn értelmezett $U$ operátor pontosan akkor unitér, ha $U^*=U^{-1}$.*

Bizonyítás Ha $U$ unitér, akkor az előző állítás szerint $U^*U = \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$, $UU^* = P_{\mathrm{Ran}(U)} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$, tehát valóban az $U$ adjungáltja az inverze is egyben.

Ha $U$ sűrűn értelmezett, és $U^* = U^{-1}$, akkor minden $x \in \mathrm{Dom}(U)$ esetén

$$\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux\rangle = \langle U^*Ux, x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2,$$

így $U$ izometrikus. $U^{-1}$ zárt, mert egy adjungált operátorral egyenlő; de ekkor $U$ is zárt. A 17.1.2. állítás szerint ekkor $\mathrm{Dom}(U)$ zárt, azaz $U$ mindenütt értelmezett. Ekkor viszont $U^*$ is mindenütt értélmezett, azaz $\boldsymbol{H} = \mathrm{Dom}(U^{-1}) = \mathrm{Ran}(U)$. Mindent egybevetve $U$ izometrikus bijekció, azaz unitér.

**17.4.** Definíció *Az $S$ sűrűn értelmezett operátor*
*(1)* ***szimmetrikus****, ha $S \subset S^*$, (2)* ***önadjungált****, ha $S=S^*$.*

Mivel bármely operátor adjungáltja zárt, önadjungált operátor szükségképpen zárt. Ezért egy önadjungált operátor a zártgrafikon-tétel szerint pontosan akkor folytonos, ha mindenütt értelmezett.

Egy $S$ szimmetrikus operátor adjungáltja sűrűn van értelmezve, hiszen $S \subset S^*$, ezért a 16.11. állítás szerint $S$ lezárható és $\overline{S} = S^{**}$; a 16.4.(3) szerint $S^{**} \subset S^*$; továbbá $S^*$ zárt operátor, ezért $(S^*)^{**} = S^*$; mindezek azt eredményezik, hogy a szimmetrikus operátor lezártja is szimmetrikus:

$$\overline{S}=S^{**}\subset S^*=(S^*)^{**}=(S^{**})^*=(\overline{S})^*.$$

Egy szimmetrikus operátort **lényegében önadjungáltnak** nevezünk, ha lezártja önadjungált. Az $S$ szimmetrikus operátor pontosan akkor lényegében önadjungált, ha $S^{**}=S^*$ teljesül.

Ha az $S$ szimmetrikus operátor a $T$ szimmetrikus operátor kiterjesztése, akkor $T\subset S\subset S^*\subset T^*$ teljesül. Ebből következik, hogy önadjungált operátor maximális szimmetrikus operátor, azaz nincs valódi szimmetrikus kiterjesztése.

Ha tehát $T$ és $S$ önadjungált operátorok és $T \subset S$, akkor $T = S$.

**17.5.** Állítás *A sűrűn értelmezett $P$ operátor pontosan akkor ortogonális projektor, ha $P^2=P=P^*$ teljesül.*

Bizonyítás Ha $P^2=P=P^*$, akkor $x\in\mathrm{Dom}(P)$ esetén $Px\in\mathrm{Dom}(P) = \mathrm{Dom}(P^*)$, ezért

$$\|Px\|^2 = \langle Px, Px\rangle = \langle P^*Px, x\rangle = \langle Px, x\rangle \le \|Px\|\|x\|,$$

azaz $\|Px\|\le\|x\|$, tehát $P$ folytonos, emellett $P=P^*$ miatt zárt is, következésképpen $\mathrm{Dom}(P)$ zárt, ezért $P$ mindenütt értelmezett. Tehát $P$ folytonos projektor, és $\mathrm{Ker}(P)=\mathrm{Ker}(P^*)=\mathrm{Ran}(P)^\perp$ miatt ortogonális.

Legyen $P$ ortogonális projektor. Ekkor $P^2 = P$, és $(P^*)^2 = (P^2)^* = P^*$, tehát $P^*$ is folytonos projektor. Továbbá

$$\mathrm{Ker}(P) = \mathrm{Ran}(P)^{\perp} = \mathrm{Ker}(P^*),$$

és

$$\mathrm{Ran}(P)^{\perp} = \mathrm{Ker}(P) = \mathrm{Ker}(P^{**}) = \mathrm{Ran}(P^*)^{\perp}.$$

$P$ és $P^*$ folytonos projektorok, így $\mathrm{Ran}(P)$ és $\mathrm{Ran}(P^*)$ zártak, ezért $\mathrm{Ran}(P^*) = \mathrm{Ran}(P)$, tehát $P$ és $P^*$ képterei és magterei megegyeznek, következésképpen $P{=}P^*$.

**17.6.** Definíció *Egy $N$ sűrűn értelmezett zárt operátort **normálisnak** nevezünk, ha $NN^*{=}N^*N$.*

Nyilvánvaló, hogy az unitér és az önadjungált operátorok normálisak.

Állítás *Ha $N$ normális operátor, akkor*

*(1)* $\mathrm{Dom}(N^*){=}\mathrm{Dom}(N)$,
*(2) minden* $x{\in}\mathrm{Dom}(N)$ *esetén* $\|N^*x\| = \|Nx\|$.

Bizonyítás Minden $y{\in}\mathrm{Dom}(N^*N)$ esetén

$$\|Ny\|^2 = \langle Ny, Ny\rangle = \langle N^*Ny, y\rangle = \langle NN^*y, y\rangle = \langle N^*y, N^*y\rangle = \|N^*y\|^2,$$

tehát $\|N^*y\|{=}\|Ny\|$. Legyen $x{\in}\mathrm{Dom}(N)$. Ekkor a 16.12. állítás szerint létezik $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathrm{Dom}(N^*N)$-ben úgy, hogy $(x, Nx){=}\lim\limits_n(y_n, Ny_n)$. Minden $m, n{\in}\mathbb{N}$ esetén $\|N^*y_n{-}N^*y_m\|{=}\|Ny_n{-}Ny_m\|$, így $(N^*y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat $\boldsymbol{H}$-ban, következésképpen létezik $\lim\limits_n N^*y_n{=:}z$. Mivel $N^*$ zárt, ez maga után vonja, hogy $x{\in}\mathrm{Dom}(N^*)$ és $z{=}N^*x$, ezért

$$\|N^*x\| = \|z\| = \lim_n \|N^*y_n\| = \lim_n \|Ny_n\|{=}\|Nx\|.$$

Emellett azt kaptuk még, hogy $\mathrm{Dom}(N){\subset}\mathrm{Dom}(N^*)$. $N$ és $N^*$ szerepét felcserélve, $N^{**}{=}N$ miatt (ugyanis $N$ zárt) $\mathrm{Dom}(N^*){\subset}\mathrm{Dom}(N)$ is igaz, azaz

$$\mathrm{Dom}(N^*) = \mathrm{Dom}(N).$$

**Következmény** Ha $N$ normális operátor, akkor

$$\mathrm{Ker}(N) = \mathrm{Ker}(N^*) = \mathrm{Ran}(N)^{\perp}.$$

**17.7.** Ha $S$ önadjungált és injektív, akkor a 16.8. szerint az inverze is önadjungált: $(A^{-1})^*{=}(A^*)^{-1}{=}A^{-1}$ miatt $A^{-1}$ önadjungált. Természetesen unitér operátor inverze is unitér. Most megmutatjuk, normális operátorra is hasonló igaz.

**Állítás** *Az $N$ normális operátor pontosan akkor injektív, ha* $\mathrm{Ran}(N)$ *sűrű, és ekkor $N^{-1}$ normális. Ha* $\mathrm{Ran}(N)=\boldsymbol{H}$, *akkor $N^{-1}$ folytonos.*

Bizonyítás $\mathrm{Ker}(N)=\mathrm{Ran}(N)^{\perp}$ miatt $N$ akkor és csak akkor injektív, ha $\mathrm{Ran}(N)$ sűrű, és ekkor

$$N^{-1}(N^{-1})^{*}=N^{-1}(N^{*})^{-1}=(N^{*}N)^{-1}=(NN^{*})^{-1}=(N^{*})^{-1}N^{-1}=(N^{-1})^{*}N^{-1},$$

tehát $N^{-1}$ normális. Ha $\mathrm{Ran}(N)=\boldsymbol{H}$, akkor $N^{-1}$ a zárt grafikon tétele szerint folytonos.

**17.8. Állítás** *Ha $A$ sűrűn értelmezett operátor egy komplex Hilbert-téren, akkor*

*(1) $A\subset A^{*}$ pontosan akkor, ha minden $x\in\mathrm{Dom}(A)$ esetén $\langle x, Ax\rangle\in\mathbb{R}$.*
*(2) $A=0$ pontosan akkor, ha minden $x\in\mathrm{Dom}(A)$ esetén $\langle x, Ax\rangle=0$.*

Bizonyítás Ha $A \subset A^{*}$, akkor minden $x\in\mathrm{Dom}(A)$ esetén

$$\langle x, Ax\rangle = \langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle^{*},$$

következésképpen $\langle x, Ax\rangle\in\mathbb{R}$.

Vezessük be $x, y\in\mathrm{Dom}(A)$ az

$$\alpha := \langle x, Ay\rangle+\langle y, Ax\rangle = \langle x+y, A(x+y)\rangle-\langle x, Ax\rangle-\langle y, Ay\rangle,$$

és

$$\beta := i\langle x, Ay\rangle-i\langle y, Ax\rangle = \langle x+iy, A(x+iy)\rangle-\langle x, Ax\rangle-\langle y, Ay\rangle$$

jelölést.

(1) Ha minden $x\in\mathrm{Dom}(A)$ esetén $\langle x, Ax\rangle\in\mathbb{R}$, akkor $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$, így

$$\langle x, Ay\rangle = \frac{\alpha-i\beta}{2} = \left(\frac{\alpha+i\beta}{2}\right)^{*} = \langle y, Ax\rangle^{*} = \langle Ax, y\rangle,$$

tehát $A\subset A^{*}$.

(2) Ha minden $x\in\mathrm{Dom}(A)$ esetén $\langle x, Ax\rangle=0$, akkor $\alpha=\beta=0$, így $\langle x, Ay\rangle=0$. Mivel $\mathrm{Dom}(A)$ sűrű, ebből következik, hogy $Ay=0$ minden $y\in\mathrm{Dom}(A)$ esetén, azaz $A=0$. ■

Világos, hogy valós Hilbert-téren (1) nem igaz, hiszen a skalárszorzat minden értéke valós, és vannak nem szimmetrikus operátorok (még véges dimenzióban is).

Ugyancsak egyszerű ellenpélda hozható arra, hogy valós Hilbert-téren (2) sem igaz: példa erre $\mathbb{R}^2$-n (a szokásos skalárszorzással) az $(x, y) \mapsto (-y, x)$ lineáris leképezés.

**17.9. Állítás** *Ha $S$ folytonos (tehát mindenütt értelmezett) önadjungált operátor, akkor*

$$\|S\| = \sup_{x\in E, \|x\|\le 1} |\langle x, Sx\rangle|.$$

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy

$$\alpha := \sup_{x\in \boldsymbol{H}, \|x\|\le 1} |\langle x, Sx\rangle| \le \|S\|.$$

Minden $x, y\in\boldsymbol{H}$ létezik $\lambda\in\mathbb{T}$ úgy, hogy $|\langle y, Sx\rangle| = \lambda^*\langle y, Sx\rangle = \langle\lambda y, Sx\rangle$. Ekkor speciálisan $\langle\lambda y, Sx\rangle\in\mathbb{R}$, így

$$\langle\lambda y, Sx\rangle = \frac{1}{4}\Big(\langle x+\lambda y, S(x+\lambda y)\rangle - \langle x-\lambda y, S(x-\lambda y)\rangle\Big),$$

következésképpen, ha $\|x\|\le 1$ és $\|y\|\le 1$, akkor

$$|\langle y, Sx\rangle| \le \frac{\alpha}{4}(\|x+\lambda y\|^2 + \|x-\lambda y\|^2) = \frac{\alpha}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2) \le \alpha,$$

ezért $\|S\|\le\alpha$.

**17.10. Állítás** *Ha $N$ folytonos (tehát mindenütt értelmezett) normális operátor, akkor $\|N^2\| = \|N\|^2$.*

Bizonyítás A Hilbert-tér minden $x$ elemére a 17.6. állítás szerint $\|N^2x\| = \|N^*Nx\|$, amiből azonnal adódik, hogy $\|N^2\| = \|N^*N\|$; már csak a 16.6. állítást kell figyelembe vennünk, hogy a bizonyítás végére érjünk.

**17.11. Feladatok**

1. Egy $A$ operátor unitér transzformáltján egy $UAU^{-1}$ operátort értünk, ahol $U$ unitér operátor. Mivel az unitér operátorok skalárszorzattartó lineáris bijekciók, vagyis felcserélhetők a Hilbert-teret definiáló minden művelettel, egy operátor és unitér transzformáltja ugyanazokkal a tulajdonságokkal rendelkezik. Bizonyítsuk is be konkrétan, hogy ha $A$ a) zárt, b) önadjungált, c) normális, akkor unitér transzformáltja is ilyen. Továbbá, ha $A$ lezárható, akkor $UAU^{-1}$ is lezárható, és $\overline{UAU^{-1}} = U\overline{A}U^{-1}$.

2. Ha $A$ folytonos operátor és $U$ unitér operátor, akkor $\|A\| = \|UAU^{-1}\| = \|UA\| = \|AU\|$.

3. Igazoljuk, hogy a $V : l^2 \to l^2$, $(x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0\dots)$ izometrikus operátor. Adjuk meg az adjungáltját!

4. Legyen $a\in\mathbb{R}$. Az $L_a : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, $L_a\phi(x) := \phi(x-a)$ $(x\in\mathbb{R})$ operátor unitér.

5. Mutassuk meg, hogy izometrikus operátor kiterjeszthető izometrikus operátorrá az értelmezési tartományának lezártjára.

6. Parciális izometriának nevezünk egy $V$ operátort, ha létezik egy $M_V$ zárt lineáris altér, amelyen $V$ izometrikus, és $Vx{=}0$, ha $x$ ortogonális $M_V$-re. Adjunk példát parciális izometriára, és az előző jelölésekkel bizonyítsuk be, hogy
– $\mathrm{Ran}(V)$ zárt lineáris altér,
– $V^*V$ az $M_V$ projektora,
– $VV^*$ a $\mathrm{Ran}(V)$ projektora,
– $V^*$ is parciális izometria, amelyre $M_{V^*}{=}\mathrm{Ran}(V)$ és $\mathrm{Ran}(V^*){=}M_V$.

7. Legyenek $P_n$ ($n{\in}\mathbb{N}$) páronként ortogonális projektorok (azaz $P_nP_m{=}0$ ha $n{\neq}m$). Ekkor a pontonként értelmezett $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} P_n$ a $\mathrm{Ran}(P_n)$-ek kifeszítette zárt lineáris altér projektora.

8. Az önadjungált operátorok a valós számoknak, az unitérek az egységnyi abszolút értékű számoknak felelnek meg. Legyen $A$ sűrűn értelmezett operátor. Igaz-e, hogy
– $\mathrm{Re}(A){:=}\frac{1}{2}{\cdot}(A{+}A^*)$ és $\mathrm{Im}(A){:=}\frac{1}{2i}{\cdot}(A{-}A^*)$ önadjungált?
– $A^*A$ pozitív definit önadjungált?
– ha $A$ önadjungált, akkor a pontonkénti sorösszeggel értelmezett $e^{iA}$ unitér?

9. Az $\mathbb{R}{\to}\mathbb{T}$, $s{\mapsto}(s{-}i)(s{+}i)^{-1}$ függvény injektív, értékkészlete $\mathbb{T}\backslash\{1\}$, inverze $u{\mapsto}i(1{+}u)(1{-}u)^{-1}$. Legyen $S$ önadjugált operátor. Mutassuk meg, hogy ha $I$ a Hilbert-tér identitása, akkor $U{:=}(S{-}iI)(S{+}iI)^{-1}$ unitér és $S{=}i(I{+}U)(I{-}U)^{-1}$!

10. Legyen $V_1$ és $V_2$ izometrikus operátor a $\boldsymbol{H}_1$ illetve a $\boldsymbol{H}_2$ Hilbert-térben. Ekkor $V_1 \times V_2$ izmetrikus $\boldsymbol{H}_1 \times \boldsymbol{H}_2$-ben, amely pontosan akkor unitér, ha $V_1$ és $V_2$ unitér.

11. Legyen $T_1$ és $T_2$ szimmetrikus operátor a $\boldsymbol{H}_1$ illetve a $\boldsymbol{H}_2$ Hilbert-térben. Ekkor $T_1 \times T_2$ szimmetrikus $\boldsymbol{H}_1 \times \boldsymbol{H}_2$-ben, amely pontosan akkor önadjungált, ha $T_1$ és $T_2$ önadjungált.

12. Ha $T$ szimmetrikus operátor és $\mathrm{Ran}(T)$ sűrű, akkor $T$ injektív és $T^{-1}$ szimmetrikus. Ha $\mathrm{Ran}(T){=}\boldsymbol{H}$, akkor $T^{-1}$ önadjungált és folytonos. (Útmutatás: ha $\mathrm{Ran}(T)$ sűrű, akkor $\{0\}{=}\mathrm{Ran}(T)^{\perp}{=}\mathrm{Ker}(T^*){\supset}\mathrm{Ker}(T)$.)

13. Legyen $A : \mathbb{R}^N{\to}\mathbb{R}^N$ lineáris bijekció, $K_A : L^2(\mathbb{R}^N){\to}L^2(\mathbb{R}^N)$, $\phi \mapsto \phi{\circ}A^{-1}$. Mutassuk meg, hogy $K_A$ folytonos lineáris bijekció, $\|K_A\| = |\mathrm{det}A|$ és $(K_A)^* = |\mathrm{det}A|K_{A^{-1}}$. Milyen $A$ esetén lesz $K_A$ a) önadjungált, b) unitér, c) projektor?

14. Legyen $A : \mathbb{K}^M{\to}\mathbb{K}^M$ lineáris leképezés, $F_A : L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{K}^M){\to}L^2(\mathbb{R}^N.\mathbb{K}^M)$, $\phi \mapsto A{\circ}\phi$. Tekintsük $\mathbb{K}^M$-en a szokásos skalárszorzatot. Mutassuk meg, hogy $F_A$ folytonos lineáris leképezés, $\|F_A\| = \|A\|$ és $F_A^* = F_{A^*}$. Milyen $A$ esetén lesz $F_A$ a) önadjungált, b) unitér, c) projektor?

15. Vegyük a 4. feladatban meghatározott operátorokat. Világos, hogy $L_0$ az identitás. Mutassuk meg, hogy nem létezik $(u)\lim\limits_{a\to 0} L_a$, viszont $(s)\lim\limits_{a\to 0} L_a = \mathrm{id}_{L^2(\mathbb{R})}$. (Ha $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ kompakt tartójú folytonos függvény, akkor $(L^2)\lim\limits_{a\to 0} L_a\psi = \psi$. Ha $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, akkor minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\psi$ kompakt tartójú folytonos

úgy, hogy $\|\psi - \phi\| < \varepsilon$; ehhez az $\varepsilon$-hos és $\psi$-hez létezik olyan $r > 0$, hogy minden $|a| < r$ esetén $\|L_a\psi - \psi\| < \varepsilon$; vegyük figyelembe, hogy $L_a$ unitér, és tekintsük a $\|L_a\phi - \phi\| \leq \|L_a\phi - \boldsymbol{L}_a\psi\| + \|L_a\psi - \psi\| + \|\psi - \phi\|$ egyenlőtlenséget.)

16. Ha az $L : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ leképezésre

(i) $\langle Ly, Lx\rangle = \langle y, x\rangle$ teljesül minden $x, y \in \boldsymbol{H}$ esetén, akkor $L$ lineáris,

(ii) $\|Ly - Lx\| = \|y - x\|$ minden $x, y \in \boldsymbol{H}$ esetén és $L0 = 0$, valamint a Hilbert-tér **valós**, akkor $L$ lineáris.
(Lásd Analízis II.31.9.).

# 18. Pozitív operátorok

**18.1.** Ha $T$ szimmetrikus operátor, akkor minden $x \in \mathrm{Dom}(T)$ esetén $\langle x, Tx\rangle \in \mathbb{R}$. Ez persze triviális valós Hilbert-terekre, komplex Hilbert-terekre is egyszerű tény, és ott még egyenértékű is azzal, hogy $T$ szimmetrikus (lásd a 17.8. állítást).

Definíció *Legyenek $S$ és $T$ olyan önadjungált operátorok, melyek egyike legalább mindenütt értelmezett. Azt mondjuk, hogy $S$ **nagyobb vagy egyenlő, mint** $T$ ($S \geq T$), ha minden $x \in \mathrm{Dom}(S) \cap \mathrm{Dom}(T)$ esetén $\langle x, Sx\rangle \geq \langle x, Tx\rangle$. Az $S$ önadjungált operátor **pozitív**, ha $S \geq 0$, és **szigorúan pozitív**, ha létezik $\sigma > 0$ úgy, hogy $S \geq \sigma \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$.*

A 17.9. állítás egyszerű következménye:

Állítás *Ha $S, T \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ és $S \geq T \geq 0$, akkor $\|S\| \geq \|T\|$.*

**18.2.** Állítás *Legyen $Z$ sűrűn értelmezett zárt operátor. Ekkor $Z^*Z$ pozitív önadjungált operátor.*

Bizonyítás $x \in \mathrm{Dom}(Z^*Z)$ esetén

$$\|x\|\,\|(\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} + Z^*Z)x\| \geq \langle x, (\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} + Z^*Z)x\rangle = \|x\|^2 + \|Zx\|^2 \geq \|x\|^2,$$

így $\|(\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} + Z^*Z)x\| \geq \|x\|$, tehát $(\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} + Z^*Z)$ injektív, és inverze folytonos. A 16.12. állítás szerint $\mathrm{Ran}(\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} + Z^*Z) = \boldsymbol{H}$, tehát $A := (\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} + Z^*Z)^{-1} : \boldsymbol{H} \to \mathrm{Dom}(Z^*Z)$ folytonos operátor.

Minden $y_1, y_2 \in \boldsymbol{H}$ esetén létezik $x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(Z^*Z)$ úgy, hogy $y_1 = (\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} + Z^*Z)x_1$ és $y_2 = (id_{\boldsymbol{H}} + Z^*Z)x_2$, ezért

$$\begin{aligned}\langle y_2, Ay_1\rangle &= \langle (\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} + Z^*Z)x_2, x_1\rangle = \langle x_2, x_1\rangle + \langle Z^*Zx_2, x_1\rangle = \\ &= \langle x_2, x_1\rangle + \langle Zx_2, Zx_1\rangle = \langle x_2, x_1\rangle + \langle x_2, Z^*Zx_1\rangle = \\ &= \langle x_2, (\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} + Z^*Z)x_1\rangle = \langle Ay_2, y_1\rangle,\end{aligned}$$

tehát $A$ önadjungált.

$A$ injektív és az inverze sűrűn értelmezett (a 16.12. állítás szerint), ezért a 16.8. állítás miatt ($\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}+Z^*Z$) önadjungált, így $Z^*Z$ is önadjungált (lásd 16.4.(1)).

Ha $x\in\mathrm{Dom}(Z^*Z)$, akkor $\langle x, Z^*Zx\rangle=\|Zx\|^2\geq 0$, azaz $Z^*Z$ pozitív.

**18.3.** Állítás *Ha $S \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ pozitív önadjungált operátor, akkor minden $x, y \in \boldsymbol{H}$ esetén*

*(i)* $|\langle y, Sx\rangle|^2 \leq \langle y, Sy\rangle\langle x, Sx\rangle$,
*(ii)* $\|Sx\|^2 \leq \|S\|\langle x, Sx\rangle$.

Bizonyítás (i) Az $(y, x) \mapsto \langle y, Sx\rangle$ leképezésre teljesülnek a 10.4-beli tulajdonságok, így igaz rá a Cauchy–Schwartz-egyenlőtlenség.

(ii) Az előző egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned}\|Sx\|^4 = \langle Sx, Sx\rangle^2 \leq \langle Sx, S(Sx)\rangle\langle x, Sx\rangle &\leq \|Sx\|\,\|S^2x\|\langle x, Sx\rangle \\ \leq \|S\|\,\|Sx\|^2\langle x, Sx\rangle.\end{aligned}$$

**18.4.** Állítás *Legyenek $T, S_n \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ önadjungált operátorok, $S_n \leq S_{n+1} \leq T$ ($n\in\mathbb{N}$). Ekkor létezik $(s)\lim\limits_n S_n$, (pontonkénti határérték) amely önadjungált, és kisebb vagy egyenlő mint $T$.*

Bizonyítás Ha $m < n$, akkor $0 \leq S_n-S_m \leq S-S_1$, így 18.1. alapján $\|S_n-S_m\| \leq \|S - S_1\|$, valamint a 18.3.(ii) következtében a $\boldsymbol{H}$ ninden $x$ elemére

$$\|(S_n - S_m)x\|^2 \leq \|S - S_1\|\langle x, (S_n - S_m)x\rangle. \tag{$*$}$$

Az $\langle x, S_nx\rangle$ ($n\in\mathbb{N}$) valós sorozat monoton növekvő, felülről korlátos, tehát konvergens; mivel $\langle x, S_nx\rangle - \langle x, S_mx\rangle = \langle x, (S_n - S_mx\rangle$, a ($*$) becslés alapján $(S_nx)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat a Hilbert-térben, tehát konvergens, ami éppen azt jelenti, hogy létezik $(s)\lim\limits_n S_n \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$.

Annak bizonyítását, hogy ez a határérték önadjungált és kisebb-egyenlő mint $T$, mint egyszerű feladatot az olvasóra bízzuk.

**18.5.** Állítás *Ha $S \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ pozitív önadjungált operátor, akkor egyértelműen létezik egy $\sqrt{S} \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ pozitív önadjungált operátor úgy, hogy $\left(\sqrt{S}\right)^2 = S$.*

Bizonyítás Zárjuk ki az $S = 0$ triviális esetet. Az $A := \dfrac{S}{\|S\|}$ operátor pozitív önadjungált, amely kisebb-egyenlő mint $\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$, és ha létezik egyértelmű $\sqrt{A}$, akkor

$\sqrt{\|S\|}\sqrt{A}$ az $S$ egyértelmű négyzetgyöke. Ha $X$ jelöli az $A$ keresett négyzetgyökét, akkor az

$$\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} - X = \frac{1}{2}\left(\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} - A + (\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} - X)^2\right)$$

egyenlőség teljesül, amelyet a $0 \leq B := \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} - A \leq \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$, $0 \leq Y := \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} - X$ jelöléssel átírhatunk

$$Y = \frac{1}{2}(B + Y^2) \tag{$*$}$$

alakba. A keresett $Y$-t fokozatos közelítéssel találjuk meg. Legyen

$$Y_0 := 0, \quad Y_n := \frac{1}{2}(B + Y_{n-1}^2) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Teljes indukcióval könnyen beláthatjuk, hogy minden $n$-re
– $0 \leq Y_n \leq \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$,
– $Y_n$ a $B$-nek nemnegatív együtthatós polinomja,
– $Y_n - Y_{n-1}$ is a $B$-nek nemnegatív együtthatós polinomja, amihez az

$$Y_{n+1} - Y_n = \frac{1}{2}(Y_n^2 - Y_{n-1}^2) = \frac{1}{2}(Y_n + Y_{n-1})(Y_n - Y_{n-1})$$

összefüggést használjuk fel ($Y_n$ és $Y_{n-1}$ felcserélhető, mert mindkettő a $B$ polinomja).

Ezért, lévén $B$ minden hatványa pozitív (lásd a 18.7.1. feladatot), $Y_n - Y_{n-1} \geq 0$, azaz végül is $0 \leq Y_n \leq Y_{n+1} \leq \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$. Tehát az előző állítás alapján létezik $Y := (s)\lim\limits_n Y_n$, amely pozitív önadjugált operátor, kisebb-egyenlő, mint $\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$, és teljesíti a $(*)$ öszefüggést, azaz megtaláltunk egy olyan $X$ pozitív önadjungált operátort, amelyre $X^2 = A$.

A megoldás egyértelműségét a következőképpen láthatjuk be. Legyen $X'$ egy olyan pozitív önadjungált operátor, amelyre $(X')^2 = A$. Ekkor $X'A = (X')^3 = AX'$, tehát $X'$ felcserélhető $A$-val, annak minden polinomjával, ilyen polinomok sorozatának határértékével, tehát $X$-szel is. Legyen $Z$ és $Z'$ az $X$-nek illetve az $X'$-nek az előbbiek szerint megkonstruált négyzetgyöke. Vegyük a $\boldsymbol{H}$ egy tetszőleges $x$ elemét, és legyen $y := (X - X')x$. Ekkor

$$\begin{aligned}\|Zy\|^2 + \|Z'y\|^2 = \left\langle y, Z^2 y\right\rangle + \langle y, Z'y\rangle = \langle y, Xx\rangle\langle x, X'x\rangle = \\ = \langle y, (X + X')(X - X')x\rangle = \left\langle y, X^2 - (X')^2)x\right\rangle = 0,\end{aligned}$$

amiből $Zy = Z'y = 0$, és így $Xy = Z^2 y = 0$, $X'y = 0$. Következésképpen

$$\|(X - X')x\|^2 = \langle y, (X - X')x\rangle = \langle (X - X')y, x\rangle = 0,$$

azaz $X - X' = 0$, amit bizonyítani akartunk.

**Megjegyzés** Véges dimenziós Hilbert-téren bármilyen normális operátor négyzetgyökét értelmeztük a spektráltétel segítségével (Analízis II.39.5.). Normális operátorokra tetszőleges Hilbert-téren is igaz egy spektráltétel, amely azonban nem fér e jegyezet keretei közé; ezzel a spektráltétellel is értelmezhető bármilyen normális operátor négyzetgyöke.

**18.6.** Ha $A \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$, akkor $A^*A \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ pozitív önadjungált operátor, ezért az előbbiek szerint $|A| := \sqrt{A^*A}$ szintén pozitív önadjungált operátor.

Állítás *Ha $A \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$, akkor van olyan $V$ izometrikus operátor, hogy $A = V|A|$. Továbbá, ha $S$ pozitív önadjungált operátor, $W$ izometrikus, és $A = WS$, akkor $S = |A|$, továbbá $W$ és $V$ megegyezik* $\mathrm{Ran}|A|$ *lezártján.*

Bizonyítás Definiáljuk $V$-t $\mathrm{Ran}|A|$-n a $V|A|x := Ax$ $(x \in \boldsymbol{H})$ formulával. Ez a definíció jó: ha $|A|x = 0$, akkor $Ax = 0$, ugyanis

$$\langle |A|x, |A|x \rangle = \left\langle x, |A|^2 x \right\rangle = \langle x, A^*Ax \rangle = \langle Ax, Ax \rangle .$$

Ez az egyenlőség egyben azt is mutatja, hogy $V$ izometrikus az $|A|$ értékkészletén, amelyről egyértelműen kiterjeszthető izometrikusan az értékkészlet lezártjára. Ennek ortogonális kiegészítőjén pedig (izometrikusan) akárhogy értelmezhetjük.

Ha $A = WS$, akkor $A^* = SW^*$, így $|A|^2 = A^*A = SW^*WS = S^2$.

**18.7. Feladatok**

1. Ha $S \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ pozitív önadjungált operátor, akkor $S^n$ is az minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. (Útmutatás: tárgyaljuk külön a páros és a páratlan $n$-eket.)

2. Az ortogonális projektorok pozitív önadjungált operátorok. Mutassuk meg, hogy a $P_1$ és $P_2$ ortogonális projektorra $P_1 \le P_2$ pontosan akkor, ha $\mathrm{Ran}P_1 \subset \mathrm{Ran}P_2$.

3. Mi egy ortogonális projektor négyzetgyöke?

4. Ha $P_n$ ortogonális projektorok, $P_n \le P_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor létezik $(s) \lim_n P_n$, amely a $\mathrm{Ran}P_n$-ek kifeszítette zárt lineáris altér projektora.

5. Két felcserélhető, folytonos pozitív önadjungált operátor szorzata is pozitív önadjungált. (Útmutatás: $TS = T\sqrt{S}\sqrt{S} = \sqrt{S}T\sqrt{S}$.)

6. Ha $R, S, T \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ önadjungált operátorok, $RS = SR$, $RT = TR$ és $S \le T$, akkor $RS \le RT$.

7. Ha $S, T \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ önadjungált operátorok $S \le T$, akkor minden $A \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ esetén $A^*SA \le A^*TA$.

8. Ha $S \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ pozitív önadjungált bijekció, akkor $S^{-1}$ és $\sqrt{S}$ is az, továbbá $(\sqrt{S})^{-1} = \sqrt{S^{-1}}$.

## 19. Differenciálás-operátorok $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$-ben

**19.1.** Emlékeztetünk arra, hogy ha $I\subset\mathbb{R}$ (nem szükségképpen korlátos) intervallum, akkor egy $\phi : I\to\mathbb{C}$ függvényt **abszolút folytonosnak** neveztünk, ha létezik $\eta : I\to\mathbb{C}$ lokálisan Lebesgue-integrálható függvény és $a\in I$ úgy, hogy

$$\phi(x) = \phi(a) + \int_a^x \eta \qquad (x\in I).$$

Ha $\phi$ ilyen függvény, akkor $\eta$ Lebesgue-majdnem mindenütt egyértelműen meghatározott. A $\phi$ abszolút folytonos függvény **deriváltján** bármely olyan $\eta$ függvényt értünk, amelyre a fenti egyenlőség teljesül.

Az $L^2(I,\mathbb{C})$ Hilbert-tér elemei függvényosztályok, noha úgy beszélünk róluk, mint függvényekről. Egy függvényosztályban, tudjuk csak egy folytonos függvény lehet, ezért jól meghatározott értelme van annak, ha azt mondjuk, hogy legyen az $L^2(I,\mathbb{C})$ egy eleme folytonos, speciálisan abszolút folytonos. Ha $\phi$ abszolút folytonos, akkor a deriváltja nem, de a deriváltjának a majdnem mindenütti egyenlőséggel meghatározott függvényosztálya egyértelmű.

**19.2.** Definíció *Legyen* $\alpha \in \mathbb{T}$, *és*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dom}(D)&:=\{\phi\in L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C}) \mid \phi \text{ abszolút folytonos}, \phi'\in L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})\},\\
\mathrm{Dom}(P_\alpha)&:=\{\phi\in\mathrm{Dom}(D) \mid \phi(-\pi)=\alpha\phi(\pi)\},\\
\mathrm{Dom}(P_0)&:=\{\phi\in\mathrm{Dom}(D) \mid \phi(-\pi)=\phi(\pi)=0\},
\end{aligned}$$

*és*

$$\begin{aligned}
D &:\mathrm{Dom}(D)\to L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C}), && \phi\mapsto -i\phi',\\
P_\alpha &:\mathrm{Dom}(P_\alpha)\to L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C}), && \phi\mapsto -i\phi',\\
P_0 &:\mathrm{Dom}(P_0)\to L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C}), && \phi\mapsto -i\phi'.
\end{aligned}$$

Ezeket a lineáris leképezéseket a **differenciálás-operátoroknak** nevezzük. Mindhárom operátor sűrűn értelmezett, hiszen $P_0 \subset P_\alpha \subset D$, és $P_0$ értelmezési tartománya tartalmazza a végtelenszer differenciálható, $]-\pi,\pi[$-ben kompakt tartójú függvényeket (lásd 2.7.).

**19.3.** Állítás $P_0{}^*{=}D$.

Bizonyítás $\psi\in\mathrm{Dom}(D)$ és $\phi\in\mathrm{Dom}(P_0)$ esetén

$$\langle\psi,P_0\phi\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\psi^*(-i\phi')=-i[\psi^*\phi]_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}(\psi^*)'(i\phi)=\int_{-\pi}^{\pi}(-i\psi')^*\phi=\langle D\psi,\phi\rangle,$$

következésképpen $D\subset P_0^*$.

Ha $\psi\in\mathrm{Dom}(P_0^*)$, akkor $P_0^*\psi\in L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, és tudjuk, hogy véges mértékű halmazon a négyzetesen integrálható függvények intregrálhatók, tehát jól értelmezett az

$$\eta:=i\left(\delta+\int_{-\pi}P_0^*\psi\right),$$

függvény, ahol $\delta\in\mathbb{C}$ olyan, hogy $\int_{-\pi}^{\pi}(\psi-\eta)=0$. Nyilvánvaló, hogy $\eta\in\mathrm{Dom}(D)$. $\phi\in\mathrm{Dom}(P_0)$ esetén

$$-i\int_{-\pi}^{\pi}\psi^*\phi'=\langle\psi,P_0\phi\rangle=\langle P_0^*\psi,\phi\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}(P_0^*\psi)^*\phi=\int_{-\pi}^{\pi}(-i\eta')^*\phi=-i\int_{-\pi}^{\pi}\eta^*\phi',$$

következésképpen $\int_{-\pi}^{\pi}(\psi-\eta)^*\phi'=0$.

Legyen $\phi:=\int_{-\pi}(\psi-\eta)$. Ekkor $\delta$ választása miatt $\phi\in\mathrm{Dom}(P_0)$, tovább $\phi'=\psi-\eta$, így az előzőek szerint $\int_{-\pi}^{\pi}|\psi-\eta|^2=0$, következésképpen $\psi$ Lebesgue-majdnem mindenütt megegyezik az $\eta\in\mathrm{Dom}(D)$ függvénnyel, ezért $\psi\in\mathrm{Dom}(D)$. Ezzel beláttuk, hogy $P_0^*\subset D$, azaz $P_0^*=D$.

**19.4.** Állítás $D^*=P_0$.

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy $P_0\subset P_0^{**}=D^*$, és $P_0\subset D$ miatt $D^*\subset P_0^*=D$.

Legyen $\psi\in\mathrm{Dom}(D^*)$ és $\phi\in\mathrm{Dom}(D)$. Ekkor

$$-i\int_{-\pi}^{\pi}\psi^*\phi'=\langle\psi,D\phi\rangle=\langle D^*\psi,\phi\rangle=\langle D\psi,\phi\rangle=i\int_{-\pi}^{\pi}(\psi')^*\phi,$$

így

$$[\psi^*\phi]_{-\pi}^{\pi}=\int_{-\pi}^{\pi}(\psi^*\phi'+(\psi')^*\phi)=0.$$

Ez az egyenlőség a $D$ értelmezési tartományának minden minden $\phi$ elemére igaz. $\phi$:=$\mathrm{id}_{[-\pi,\pi]}$+$\pi$∈Dom($D$), amelyre $\phi(-\pi)$=0 és $\phi(\pi)$=$2\pi\neq 0$, így $\psi(\pi)$=0. Hasonlóan, a $\phi$:=$\mathrm{id}_{[-\pi,\pi]}$−$\pi$∈Dom($D$) függvénnyel azt kapjuk, hogy $\psi(-\pi)$=0, azaz $\psi$∈Dom($P_0$). Ezzel beláttuk, hogy $D^*\subset P_0$, következésképpen $D^*=P_0$.

**19.5.** **Állítás** $P_\alpha^*=P_\alpha$.

Bizonyítás $P_0\subset P_\alpha$ miatt $P_\alpha^*\subset P_0^*=D$.

Legyen $\phi,\psi\in\mathrm{Dom}(P_\alpha)$. Ekkor

$$\langle\psi,P_\alpha\phi\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\psi^*(-i\phi')=-i[\psi^*\phi]_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\psi^{*\prime}i\phi=\int_{-\pi}^{\pi}(-i\psi')^*\phi=\langle P_\alpha\psi,\phi\rangle,$$

ugyanis

$$[\psi^*\phi]_{-\pi}^{\pi}=\psi^*(\pi)\phi(\pi)-\psi^*(-\pi)\phi(-\pi)=\psi^*(\pi)\phi(\pi)-\alpha^*\psi^*(\pi)\alpha\phi(\pi)=0,$$

következésképpen $P_\alpha\subset P_a^*$.

Ha $\psi\in\mathrm{Dom}(P_\alpha^*)$ és $\phi\in\mathrm{Dom}(P_\alpha)$, akkor

$$i\int_{-\pi}^{\pi}\psi'^*\phi=\langle P_\alpha^*\psi,\phi\rangle=\langle\psi,P_\alpha\phi\rangle=-i\int_{-\pi}^{\pi}\psi^*\phi'\ ,$$

ezért

$$[\psi^*\phi]_{-\pi}^{\pi}=\int_{-\pi}^{\pi}(\psi^*\phi'+\psi'^*\phi)=0$$

minden $\phi\in\mathrm{Dom}(P_\alpha)$ esetén, azaz

$$0=\psi^*(\pi)\phi(\pi)-\psi^*(-\pi)\phi(-\pi)=\psi^*(\pi)\phi(\pi)-\psi^*(\pi)\alpha\phi(\pi),$$

amiből $\psi(-\pi)=\alpha\psi(\pi)$, azaz $\psi\in\mathrm{Dom}(P_\alpha)$. Ezzel beláttuk, hogy $P_\alpha^*\subset P_\alpha$, és így $P_\alpha^*=P_\alpha$.

**19.6.** Foglaljuk össze eredményeinket!

$P_0$ zárt, mert a $D$-nek az adjungáltja; $P_0$ szimmetrikus de nem önadjungált; $P_0$-nak legalább kontinuum sok önadjungált kiterjesztése van: minden $\alpha\in\mathbb{T}$ esetén $P_\alpha$. Mivel az önadjungált operátorok maximális szimmetrikusok (nincs szimmetrikus kiterjesztésük), minden olyan operátor, amely valamely $P_\alpha$-nak a kiterjesztése, nem szimmetrikus. Ilyen például a $D$, amely zárt, mert a $P_0$-nak az adjungátja.

**19.7.** A kvantummechanika szerint (a $[-\pi,\pi]$ intervallummal reprezentált) egydimenziós dobozba zárt részecske impulzusát egy $P$ önadjungált differenciálás-operátorral kell leírni, energiáját pedig a $\frac{P^2}{2m}$ operátorral, ahol $m$ a részecske tömege. A szokásos tárgyalásokban nem határozzák meg pontosan, mely differenciálás-operátorról van szó, holott láttuk, legalább kontinuum sok különböző önadjungált differenciálás-operátor van. Az energiaoperátort azonban részletesen kifejtik, és bizonyos meggondolásokkal arra jutnak, hogy az értelmezési tartományában olyan függvényeknek kell lenniük, amelyek a határon nulla értéket vesznek föl, a deriváltjukra azonban már nincs semmi kikötés. Ebből végül is a zárt végű állóhullámokra jutnak. A 19.8.6. feladat alapján és a mondott szokásos határfeltételekből azonnal adódik, hogy energiaoperátornak a $\frac{DP_0}{2m}$ operátort veszik. $DP_0$ önadjungált (lásd a 19.8.4. feladatot), de nincs olyan önadjungált differenciálás-operátor, amelynek a négyzete volna. (Van olyan önadjungált operátor, amelynek a négyzete, de az nem diffrenciálás-operátor. Ezt majd később, a spektrumok kapcsán látjuk.)

**19.8. Feladatok**

1. Adjuk meg $P_0 + P_\alpha$, $P_0 + D$ és $P_\alpha + D$ adjungáltját!

2. Bizonyítsuk be, hogy $(P_0^2)^* = D^2$. (Útmutatás: a 16.4.(2) szerint $(P_0^2)^* \supset (P_0^*)^2 = D^2$. Ha $\psi \in \mathrm{Dom}(P_0^2)^*$ és $\phi \in \mathrm{Dom}(P_0^2)$, akkor $\langle (P_0^2)^*\psi, \phi\rangle = \langle \psi, P_0^2\phi\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \psi^*(-\phi'')$. Legyen $\eta(x) := \delta + \gamma x + \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{z} (P_0^2)^*\psi\right) dz$, ahol $\delta$ és $\gamma$ olyan, hogy $\int_{-\pi}^{\pi} (\psi - \eta) = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{z} (\psi - \eta)\right) dz = 0$. Ekkor $\eta \in \mathrm{Dom}(D)$ és $\eta'' = (P_0^2)^*\psi$; parciális integrálással arra jutunk, hogy $\int_{-\pi}^{\pi} (\psi - \eta)^*\phi'' = 0$. Válasszuk meg alkalmasan $\phi$-t a $P_0^2$ értelmezési tartományából, hogy azt kapjuk, $\psi = \eta$.)

3. Bizonyítsuk be, hogy $(D^2)^* = P_0^2$. (Útmutatás: mivel $P_0^2 \subset D^2$, fenáll, hogy $(D^2)^* \subset (P_0^2)* = D^2$. Ha $\psi \in \mathrm{Dom}(D^2)^*$ és $\phi \in \mathrm{Dom}(D^2)$, akkor

$$\int_{-\pi}^{\pi} (-\psi'')^*\phi = \langle (D^2)^*\psi, \phi\rangle = \langle \psi, D^2\phi\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \psi^*(-\phi''),$$

amiből parciális integrálással $(\psi')^*(\pi)\phi(\pi) - (\psi')^*(-\pi)\phi(-\pi) = \psi^*(\pi)\phi'(\pi) - \psi^*(\pi)\phi'(\pi)$ adódik. A $\phi$ alkalmas megválasztásaival lássuk be, hogy $\psi \in \mathrm{Dom}(P_0^2)$.

4. Az előzek mintájára bizonyítsuk be, hogy $P_0 D$, $P_\alpha^2$ és $DP_0$ önadjungált operátorok (ami következik a 18.2. állításból is).

5. Legyen $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, és értelmezzük a

$$\mathrm{Dom}(P_\omega) := \{\phi \in \mathrm{Dom}(D) \mid \phi(-\pi) = \omega\phi(\pi)\},$$

$$P_\omega : \mathrm{Dom}(P_\omega) \to L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C}), \quad \phi \mapsto -i\phi'$$

differenciálás-operátort. Igazoljuk, hogy $(P_\omega)^* = P_{1/\omega^*}$.

$P_\omega$ tehát pontosan akkor önadjungált, ha $\omega \in \mathbb{T}$. Normális-e ez az operátor?

Bizonyítsuk be, hogy $P_\omega^* P_\omega$ önadjungált!

6. A nemkonstans nyitott végű állóhullámok (lásd a 14.11.3. feladatot) deriváltjai éppen a zárt végű állóhullámok számszorosai, a zárt végűek deriváltjai pedig a nemkonstans nyitott végűek számszorosai. Ez motiválja a következő differenciálás-operátorok bevezetését.

$$\mathrm{Dom}(P_o){:=}\left\{\phi \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(n^2\left|\langle\cos\bullet n,\phi\rangle\right|^2+\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2\left|\left\langle\sin\bullet\frac{2n-1}{2},\phi\right\rangle\right|^2\right)<\infty\right\},$$

$$P_o\phi{:=}\frac{i}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(n\langle\cos\bullet n,\phi\rangle\sin\bullet n-\frac{2n-1}{2}\left\langle\sin\bullet\frac{2n-1}{2},\phi\right\rangle\cos\bullet\frac{2n-1}{2}\right),$$

$$\mathrm{Dom}(P_c){:=}\left\{\phi \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(n^2\left|\langle\sin\bullet n,\phi\rangle\right|^2+\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2\left|\left\langle\cos\bullet\frac{2n-1}{2},\phi\right\rangle\right|^2\right)<\infty\right\},$$

$$P_c\phi{:=}-\frac{i}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(n\langle\sin\bullet n,\phi\rangle^*\cos\bullet n-\frac{2n-1}{2}\left\langle\cos\bullet\frac{2n-1}{2},\phi\right\rangle^*\sin\bullet\frac{2n-1}{2}\right).$$

Ellenőrizzük, hogy $P_o$ illetve $P_c$ a nyitott illetve a zárt végű állóhullámokra alkalmazva azok deriváltjának a $-i$-szeresét adja.

A 16.13.4. feladat alapján $P_o^* = P_c$ és $P_c^* = P_o$, tehát mindkét operátor zárt.

Legyen $\boldsymbol{N}$ illetve $\boldsymbol{Z}$ a nyitott illetve a zárt végű állóhullámok által kifeszített lineáris altér (nem a zárt lineáris altér, mert az mindkettőre az egész tér).

Bizonyítsuk be, hogy

– $\overline{P_o|_{\boldsymbol{N}}} = P_o$ és $\overline{P_c|_{\boldsymbol{Z}}} = P_c$,

– $P_o|_{\boldsymbol{N}} = D|_{\boldsymbol{N}}$ és $P_c|_{\boldsymbol{Z}} = P_0|_{\boldsymbol{Z}}$,

amiből $P_o \subset D$ és $P_c \subset P_0$. Az adjungáltakra vonatkozó ismereteink alapján származtassuk ebből, hogy

$$P_o = D, \qquad P_c = P_0.$$

7. A legbővebb differenciálás-operátort a szakaszonként abszolút folytonos függvényeken értelmezhetjük. Ezek olyan függvények, amelyek csak véges sok pontban nem folytonosak de ezekben a pontokban van jobb- és bal oldali határértékük, és azokon az intervallumokon, ahol folytonosak, ott abszolút folytonosak. Az ilyen függvények deriváltját a szakadási helyeket kivéve – amelyek úgyis csak nulla mértékű halmazt alkotnak – ugyanúgy értelmezzük, mint az abszolút folytonosokét. Jelölje $Sz.a.f.$ a $[-\pi,\pi]$ intervallumon szakaszonként abszolút folytonos függvények halmazát. Legyen tehát

$$\mathrm{Dom}(Z) := \{\phi\in Sz.a.f. \mid \phi'\in L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})\}, \qquad Z\phi := -i\phi'.$$

Mivel $D \subset Z$, az igaz, hogy $Z^* \subset D^* = P_0$. Legyen $\phi \in \mathrm{Dom}(Z)$, amelynek egyetlen $a$ pontban van szakadása, $0 \neq \sigma := \phi(a+0) - \phi(a-0)$. Származtassuk $\psi \in \mathrm{Dom}(Z^*)$ esetén a $\langle Z^*\psi, \phi\rangle = \langle \psi, Z\phi\rangle$ egyenlőségből, hogy $\sigma\psi^*(a) = 0$, és ebből azt, hogy $\psi = 0$.

Ez példa arra, leheteséges, hogy egy operátor adjungáltja csak a nullában van értelmezve.

# 20. Differenciálás-operátor $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$-ben

**20.1.** Definíció *$L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$-ben a*

$$\mathrm{Dom}(P) := \{\phi{\in}L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) \mid \phi \text{ abszolút folytonos, } \phi'{\in}L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})\},$$

*és*

$$P : \mathrm{Dom}(P){\to}L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}), \quad \phi{\mapsto}{-i\phi'},$$

*formulákkal meghatározott operátort* ***differenciálás-operátornak*** *nevezzük.*

$P$ sűrűn értelmezett, hiszen $\mathrm{Dom}(P)$ tartalmazza a végtelenszer differenciálható, kompakt tartójú függvényeket.

Állítás *Ha $\phi{\in}\mathrm{Dom}(P)$, akkor $\lim\limits_{+\infty}\phi{=}\lim\limits_{-\infty}\phi{=}0$.*

Bizonyítás $\phi{\in}\mathrm{Dom}(P)$ esetén $\phi'{\in}L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, így $(\phi^*)'\phi$ és $\phi^*\phi'$ Lebesgue-integrálható, következésképpen létezik

$$C{:=}\lim_{x\to\pm\infty}\int_0^x ((\phi^*)'\phi{+}\phi^*\phi') = \lim_{x\to\pm\infty}\left[|\phi|^2\right]_0^x = \lim_{x\to\pm\infty}|\phi(x)|^2{-}|\phi(0)|^2,$$

tehát $\lim\limits_{x\to\pm\infty}|\phi(x)|^2{=}|\phi(0)|^2{+}C$, azonban $|\phi|^2$ integrálhatósága miatt csak

$$\lim_{x\to\pm\infty}|\phi(x)|^2 = 0$$

lehetséges.

**20.2.** Állítás *$P^*{=}P$.*

Bizonyítás Legyen $\phi,\psi{\in}\mathrm{Dom}(P)$; ekkor

$$\langle\psi, P\phi\rangle = \int_{\mathbb{R}}\psi^*(-i\phi') = i\int_{\mathbb{R}}(\psi^*)'\phi = \int_{\mathbb{R}}(-i\psi')^*\phi' = \langle P\psi,\phi\rangle\ ,$$

következésképpen $P\subset P^*$.

Legyen $\psi\in\mathrm{Dom}(P^*)$; ekkor $P^*\psi \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, és tudjuk, hogy négyzetesen integrálható függvények véges mértékű halmazon integrálhatók, ezért minden $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ esetén jól értelmezett az $\eta := i\left(\delta + \int\limits_a P^*\psi\right)$, függvény, ahol $\delta\in\mathbb{C}$ olyan, hogy $\int\limits_a^b(\psi-\eta)=0$ teljesüljön. $\eta$ abszolút folytonos, és $\eta' = iP^*\psi$.

Ha $\phi\in\mathrm{Dom}(P)$ tartója része az $[a,b]$ intervallumnak, akkor

$$-i\int\limits_a^b \psi^*\phi' = \langle\psi, P\phi\rangle = \langle P^*\psi,\phi\rangle = \int\limits_a^b (P^*\psi)^*\phi = \int\limits_a^b (-i\eta')^*\phi =$$
$$= [i\eta^*\phi]_a^b - i\int\limits_a^b \eta^*\phi' = -i\int\limits_a^b \eta^*\phi',$$

következésképpen $\int\limits_a^b(\psi-\eta)^*\phi'=0$.

A

$$\phi : \mathbb{R}\to\mathbb{C}, \quad x\mapsto\begin{cases} \int\limits_a^x(\psi-\eta), & \text{ha } x\in[a,b],\\ 0, & \text{ha } x\notin[a,b]\end{cases}$$

függvény benne van $P$ értelmezési tartományában, tartója része az $[a,b]$ intervallumnak, így $\int\limits_a^b|\psi-\eta|^2=0$, következésképpen $\psi$ az $[a,b]$-n Lebesgue-majdnem mindenütt egyenlő $\eta$-val, tehát $\psi$ az $[a,b]$-n abszolút folytonos és $(\psi|_{[a,b]})'=iP^*\psi|_{[a,b]}$. Ez minden $[a,b]$ intervallumra igaz, így $\psi$ abszolút folytonos és $\psi'=iP^*\psi\in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, azaz $\psi\in\mathrm{Dom}(P)$. Ezzel beláttuk, hogy $P^*\subset P$, és így $P^*=P$.

**20.3. Feladat**

Értelmezzük $L^2(\mathbb{R}^+,\mathbb{C})$-ben a következő differenciálás-operátorokat:

$$\mathrm{Dom}(D) := \{\phi\in L^2(\mathbb{R}^+,\mathbb{C}) \mid \phi \text{ abszolút folytonos}, \phi'\in L^2(\mathbb{R}^+,\mathbb{C})\},$$
$$\mathrm{Dom}(P_0) := \{\phi\in\mathrm{Dom}(D) \mid \phi(0)=0\},$$

és

$$D : \mathrm{Dom}(D)\to L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}), \quad \phi\mapsto -i\phi',$$
$$P : \mathrm{Dom}(P)\to L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}), \quad \phi\mapsto -i\phi'.$$

Igazoljuk, hogy $P_0^* = D$ és $D^* = P_0$.

# 21. A függvénnyel való szorzás-operátorok

**21.1.** Definíció *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ $\sigma$-véges mértéktér, és $f : X \to \mathbb{C}$ mérhető függvény. A*

$$\mathrm{Dom}(M_f) := \{\phi \in L^2_\mu(X) \mid f\phi \in L^2_\mu(X)\},$$

$$M_f : \mathrm{Dom}(M_f) \to L^2_\mu(X), \quad \phi \mapsto f\phi$$

*formulákkal meghatározott $M_f$-et az $f$-**fel való szorzás operátorának** nevezzük.*

Állítás $\mathrm{Dom}(M_f) \subset L^2_\mu(X)$ *sűrű lineáris altér.*

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy $\mathrm{Dom}(M_f)$ lineáris altere $L^2_\mu(X)$-nek. Ha $\phi \in L^2_\mu(X)$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $F_n := \{|f| \leq n\} \subset X$ mérhető halmaz, és $|f\chi_{F_n}\phi| \leq n\chi_{F_n}|\phi|$ miatt $\chi_{F_n}\phi \in \mathrm{Dom}(M_f)$. A $(\chi_{F_n}\phi)_n \in \mathbb{N}$ sorozat pontonként $\phi$-hez konvergál, és $|\phi|$ négyzetesen integrálható majoránsa, így a Lebesgue-tétel szerint $(\chi_{F_n}\phi)_{n\in\mathbb{N}}$ $\phi$-hez konvergál $L^2_\mu(X)$-ben is.

**21.2.** Állítás *Legyen $f$ és $g$ két $X \to \mathbb{C}$ mérhető függvény. $M_f = M_g$ pontosan akkor teljesül, ha $f$ és $g$ $\mu$-majdnem mindenütt egyenlők.*

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy ha $f$ és $g$ $\mu$-majdnem mindenütt egyenlők, akkor $M_f = M_g$.

Tegyük fel, hogy $f$ és $g$ nem $\mu$-majdnem mindenütt egyenlők, és zárjuk ki a $\mu = 0$ triviális esetet. Ekkor létezik $E \in \mathcal{A}$, amelyre $\infty > \mu(E) > 0$, és $E \subset \{f \neq g\}$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$H_n := E \cap \{|f| \leq n\} \cap \{|g| \leq n\}$$

mérhető halmaz, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n = E$, következésképpen létezik olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy $\mu(H_m) > 0$. Ekkor $|f\chi_{H_m}| \leq m|\chi_{H_m}|$ és $|g\chi_{H_m}| \leq m|\chi_{H_m}|$ miatt $\chi_{H_m} \in \mathrm{Dom}(M_f) \cap \mathrm{Dom}(M_g)$. Az $f\chi_{H_m}$ és a $g\chi_{H_m}$ függvények nem $\mu$-majdnem mindenütt egyenlők, tehát $M_f\chi_{H_m} \neq M_g\chi_{H_m}$, és így $M_f \neq M_g$.

**21.3.** Állítás *$M_f$ pontosan akkor folytonos, ha $f$ $\mu$-korlátos, és ekkor*

$$\|M_f\| = \|f\|_\infty.$$

Bizonyítás Legyen $f$ $\mu$-korlátos. Ekkor minden $\phi \in L^2_\mu(X)$ esetén $f\phi \in L^2_\mu(X)$, azaz $\mathrm{Dom}(M_f){=}L^2_\mu(X)$, és

$$\|M_f\phi\|^2 = \int\limits_X |f\phi|^2 d\mu \leq (\|f|_\infty)^2\|\phi\|^2,$$

következésképpen $M_f$ korlátos, és $\|M_f\|{\leq}\|f|_\infty$. Legyen $\alpha$ olyan szám, hogy $\|f|_\infty{>}\alpha$. Ekkor $\mu(\{|f|{>}\alpha\}){\neq}0$, így létezik $E{\in}\mathcal{A}$ olyan, hogy $0{<}\mu(E){<}\infty$, és $E{\subset}\{|f|{>}\alpha\}$. A

$$\psi := \frac{\chi_E}{\sqrt{\mu(E)}} \in L^2_\mu(X)$$

függvény olyan, hogy $\|\psi\|{=}1$ és $\|f\psi\|{>}\alpha$, tehát $\|M_f\| > \alpha$, így $\|M_f\|{\geq}\|f|_\infty$.

Tegyük fel, hogy $f$ nem $\mu$-korlátos. Ekkor minden $n{\in}\mathbb{N}$ esetén létezik olyan $m_n \in \mathbb{N}$ és $E_n{\in}\mathcal{A}$, amelyre $0{<}\mu(E_n){<}\infty$, és $E_n{\subset}\{|f|{>}n\} \cap \{|f|{<}m_n\}$. A

$$\psi_n := \frac{\chi_{E_n}}{\sqrt{\mu(E_n)}} \in L^2_\mu(X)$$

függvények olyanok, hogy $\|\psi_n\|{=}1$, $\psi_n \in \mathrm{Dom}(M_f)$ és $\|f\psi_n\|{>}n$, tehát $M_f$ nem korlátos.

**21.4.** Állítás $(M_f)^*{=}M_{f^*}$.

Bizonyítás Ha $\phi, \psi{\in}\mathrm{Dom}(M_f){=}\mathrm{Dom}(M_{f^*})$, akkor

$$\langle\phi, M_f\psi\rangle = \int\limits_X \phi^* f\psi d\mu = \int\limits_X (f^*\phi)^*\psi d\mu = \left\langle M_f^*\phi, \psi\right\rangle \ ,$$

következésképpen $M_{f^*}{\subset}(M_f)^*$.

Ha $\phi{\in}\mathrm{Dom}((M_f)^*)$ és $\psi{\in}\mathrm{Dom}(M_f)$, akkor

$$\int\limits_X ((M_f)^*\phi)^*\psi d\mu = \langle(M_f)^*\phi, \psi\rangle = \langle\phi, M_f\psi\rangle = \int\limits_X \phi^* f\psi d\mu = \int\limits_X (f^*\phi)^*\psi d\mu \ ,$$

így

$$\int\limits_X ((M_f)^*\phi{-}f^*\phi)^*\psi d\mu{=}0.$$

Legyen $n{\in}\mathbb{N}$ esetén $F_n := \{|f| \leq n\}$, és

$$\psi_n := \chi_{F_n}((M_f)^*\phi{-}f^*\phi).$$

$(M_f)^*\phi\in L^2_\mu(X)$, és az $|f^*\phi\chi_{F_n}|\leq n\chi_{F_n}|\phi|$ egyenlőtlenség szerint $f^*\phi\chi_{F_n}\phi\in L^2_\mu(X)$, következésképpen $\psi_n\in L^2_\mu(X)$. Másrészt az $|f\psi_n| = |f\chi_{F_n}\psi_n|\leq n\chi_{F_n}|\psi|$ egyenlőtlenség miatt $f\psi_n\in L^2_\mu(X)$, tehát $\psi_n \in \mathrm{Dom}(M_f)$, és így

$$\int_X |(M_f)^*\phi - f^*\phi|^2\chi_{F_n}\,d\mu = 0,$$

ezért $(M_f)^*\phi = f^*\phi$ az $F_n$ halmazon $\mu$-majdnem mindenütt. Ez tetszőleges $n\in\mathbb{N}$ esetén igaz, és $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = X$, így $(M_f)^*\phi = f^*\phi$ $\mu$-majdnem mindenütt, következésképpen $\phi\in\mathrm{Dom}(M_{f^*}) = \mathrm{Dom}(M_f)$. Ezzel beláttuk, hogy $(M_f)^* \subset M_{f^*}$, azaz $(M_f)^* = M_{f^*}$.

**Következmény** $M_f$ zárt operátor minden $f : X\to\mathbb{C}$ mérhető függvény esetén, ugyanis $M_f = (M_{f^*})^*$.

Tehát a zártgrafikon-tétel miatt $M_f$ pontosan akkor mindenütt értelmezett, ha folytonos, ami viszont a 21.3. állítás szerint azzal egyenértékű, hogy $f \in L^\infty_\mu(X)$.

**21.5.** Egyszerű tény, hogy $M_1 = \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$, $M_0 = 0$, és minden $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ esetén $M_{\lambda f} = \lambda M_f$ (természetesen $0 = M_{0f} \supset 0M_f$). Továbbá igaz még a következő két összefüggés is, és mindezek ,,rímelnek" a 16.4-ben mondottakra.

Állítás *Legyenek $f, g : X\to\mathbb{C}$ mérhető függvények. Ekkor*

*(i) $M_{f+g}\supset M_f + M_g$ és egyenlőség áll, ha $M_f$ és az $M_g$ közül az egyik folytonos,*

*(ii) $M_{fg}\supset M_f M_g$, a jobb oldal értelmezési tartománya $\mathrm{Dom}(M_g)\cap\mathrm{Dom}(M_{fg})$, és egyenlőség áll, ha $M_g$ folytonos.*

Bizonyítás (i) Ha $\phi \in \mathrm{Dom}(M_f + M_g)$, akkor $f\phi$ és $g\phi$ négyzetesen integrálható, így $(f + g)\phi$ is négyzetesen integrálható, tehát igaz a kijelentett tartalmazás.

Ha például $M_g$ folytonos, azaz $g \in L^\infty_\mu(X)$, és $\phi \in \mathrm{Dom}(M_{f+g})$, akkor $(f + g)\phi$ és nyilvánvalóan $g\phi$ is négyzetesen integrálható, tehát $f\phi$ is négyzetesn integrálható, azaz $\phi \in \mathrm{Dom}(M_f + M_g)$, tehát végül is $M_{f+g} = M_f + M_g$.

(ii) Ha $\phi \in \mathrm{Dom}(M_f M_g)$, akkor $g\phi$ és $f(g\phi) = (fg)\phi$ négyzetesen integrálható, tehát igaz a kijelentett tartalmazás. Az is nyilvánvaló ekkor, hogy a jobb oldal értelmezési tartománya része $\mathrm{Dom}(M_g) \cap \mathrm{Dom}(M_{fg})$-nek. Ha viszont $\phi$ ez utóbbi halmaznak az eleme, akkor $g\phi$ és $(fg)\phi = f(g\phi)$ négyzetesen integrálható, tehát $\phi \in \mathrm{Dom}(M_f M_g)$.

Ha $M_g$ folytonos, akkor mindenütt értelmezett, ezért az értelmezési tartományokra az imént belátott öszefüggés szerint $M_{fg} = M_f M_g$.

**21.6.** Állítás *$M_f$ normális operátor.*

Bizonyítás Ha $\phi\in\mathrm{Dom}(M_{|f|^2})$, akkor $\phi\in L^2_\mu(X)$ és $|f|^2\phi \in L^2_\mu(X)$, így a szorzatuk $|f|^2|\phi|^2$ $\mu$-integrálható, azaz $f\phi\in L^2_\mu(X)$. Ez azt jelenti, hogy $\phi$ az $M_f$ értelmezési tartományának is eleme. Arra jutottunk tehát, hogy $\mathrm{Dom}(M_{|f|^2}) \subset \mathrm{Dom}(M_f) = \mathrm{Dom}(M_{f^*})$. Alkalmazva az előbbi állítás (ii) pontját a $g{:=}f^*$ függvényre azt kapjuk, hogy

$$M_f M_{f^*} = M_{|f|^2} = M_{f^*} M_f,$$

azaz $M_f$ normális.

**21.7. Állítás** *Az $M_f$ operátor pontosan akkor*

*(i) önadjungált, ha $f = f^*$ $\mu$-majdnem mindenütt (azaz $f$ $\mu$-majdnem mindenütt valós értékű),*

*(ii) unitér, ha $|f| = 1$ $\mu$-majdnem mindenütt,*

*(iii) projektor, ha létezik $E \in \mathcal{A}$ úgy, hogy $f = \chi_E$ $\mu$-majdnem minenütt (azaz $f$ $\mu$-majdnem mindenütt 0 és 1 értékű).*

Bizonyítás A 21.3. és 21.4. állításokból azonnal adódnak a kívánt összefüggések az alábbi formulák alapján.

(i) $M_f = (M_f)^* = M_{f^*}$

(ii) $M_1 = \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} = M_f(M_f)^* = M_f M_{f^*} = M_{|f|^2}$.

(iii) $M_{f^2} = (M_f)^2 = M_f$.

**21.8. Feladatok**

1. Legyen $E \in \mathcal{A}$. Ekkor $L^2_\mu(E)$-t szokásosan (nullával való kiterjesztéssel) az $L^2_\mu(X)$ lineáris alterének tekintjük. Mutassuk meg, hogy ennek a zárt lineáris altérnek megfelelő ortogonális projektor a $\chi_E$-vel való szorzás operátora.

2. Igazoljuk, hogy $M_f$ pontosan akkor injektív, ha $\mu(\overset{-1}{f}(\{0\}) = 0$, és ekkor az

$$\frac{1_0}{f}(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{ha } f(x) \neq 0, \\ 0 & \text{ha } f(x) = 0 \end{cases}$$

formulával definiált függvény mérhető, és $(M_f)^{-1} = M_{1_0/f}$.

3. Mutassuk meg, hogy $M_f$ pontosan akkor injektív, és az inverze folyonos, ha van olyan $\alpha > 0$, hogy $\mu(\overset{-1}{f}(G_\alpha(0))) = 0$.

4. Találjunk olyan $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, hogy $L^2(\mathbb{R})$-ben $M_f + M_g \neq M_{f+g}$, illetve $M_f M_g \neq M_{fg}$.

5. Gondoljuk végig, milyenek a szorzás-operátorok $l^2$-ben, és ennek alapján adjunk egyszerű bizonyítást a 16.13.3. feladatra. Adjunk itt is példát az előző feladatnak megfelelően.

6. $\mathbb{K}^N$ operátorai az $N \times N$-es márixok. Fogjuk fel $\mathbb{K}^N$-et $\{1, 2, \ldots, N\} \to \mathbb{K}$ függvényeknek. Milyen mátrixok a szorzás-operátorok?

7. Igazoljuk, hogy $L^\infty_\mu(X) \to \mathcal{L}in(L^2_\mu(X))$, $f \to M_f$ izometrikus lineáris bijekció; sőt, ha $L^\infty_\mu(X)$-et a pontonkénti szorzás és konjugálás műveleteivel is ellátjuk, akkor ez a hozzárendelés izometrikus $*$-algebra homomorfizmus (azaz szorzat- és $*$-tartó is).

8. Igazoljuk, hogy az $M_f$ szorzásoperátor pontosan akkor pozitív önadjungált, ha $f \geq 0$ $\mu$-majdnem mindenütt. Mi a folytonos $M_f$ négyzetgyöke? Értelmezhető-e a nem folytonos $M_f$ négyzetgyöke?

Vizsgáljuk meg ebből a szempontból speciálisan $l^2$-t!

9. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ $\sigma$-véges mértéktér. Az $f : X \to \mathbb{K}$ és $g : Y \to \mathbb{K}$ függvényekre használjuk a szokásos $f \otimes g : X \times Y \to \mathbb{K}$, $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ jelölést. Ha $f$ és $g$ mérhető, akkor $f \otimes g$ is az.

A 15. fejezet szerint $L^2_\mu(X)\overline{\otimes}L^2_\nu(Y) = L^2_{\mu\otimes\nu}(X \times Y)$. Mutassuk meg, hogy $M_f \otimes M_g \subset M_{f\otimes g}$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha mind $f$ mind $g$ lényegében korlátos (azaz $M_f$ és $M_g$ mindenütt értelmezett).

Válaszoljuk meg ennek alapján azt a kérdést, mikor teljesül egyenlőség a 16.13.14. feladatban.

# 22. A Heisenberg-féle felcserélési reláció

**22.1.** Legyen $P$ a 20. fejezetben definiált differenciálás-operátor a $\boldsymbol{H}{:=}L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ Hilbert-téren, és $Q{:=}M_{\mathrm{id}_\mathbb{R}}$. Ekkor $P$ és $Q$ nem folytonos önadjungált operátorok, $PQ{-}QP$ sűrűn értelmezett, mert a kompakt tartójú végtelenszer differenciálható függvények benne vannak az értelmezési tartományában, és $PQ{-}QP{\subset}{-}i\,\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$.

Legyen $P$ a 20. fejezetben definiált valamelyik önadjungált differenciálás-operátor a $\boldsymbol{H}{:=}L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ Hilbert-téren ($P = P_\alpha$ valamely $\alpha$-ra) és $Q{:=}M_{\mathrm{id}_{[-\pi,\pi]}}$. Ekkor $P$ nem folytonos, $Q$ folytonos önadjungált operátor, $PQ{-}QP$ sűrűn értelmezett, és $PQ{-}QP{\subset}{-}i\,\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$.

Mindkét idézett esetben csak tartalmazás áll. Felmerül a kérdés, hogy létezik-e egyáltalán olyan $P$ és $Q$ önadjungált operátor valamely $\boldsymbol{H}$ Hilbert-térben, hogy teljesül a

$$PQ{-}QP = -i\,\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$$

úgynevezett **Heisenberg-féle felcserélési reláció**.

Ha $P$ és $Q$ ilyenek, akkor mindenütt értelmezettek, így zártságuk miatt folytonosak. A következő állítás azt mondja, hogy a fenti egyenlőség folytonos (nem szükségképpen önadjungált) operátorokra nem teljesülhet.

Állítás *Ha $A$ és $B$ folytonos operárotorok, amelyekre $AB{-}BA = \lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ valamely $\lambda{\in}\mathbb{K}$ esetén, akkor $\lambda{=}0$.*

Bizonyítás Ha $A$ és $B$ eleget tesz az állításban kirótt feltételnek, akkor indukcióval megmutatható, hogy minden $n{\in}\mathbb{N}$ esetén $A^nB{-}BA^n{=}n\lambda A^{n-1}$.

Tegyük fel először, hogy létezik olyan $n{\in}\mathbb{N}$, hogy $A^n{=}0$, de $A^{n-1}{\neq}0$. Ekkor $n\lambda A^{n-1}{=}A^nB{-}BA^n{=}0$, következésképpen $\lambda{=}0$.

Tegyük fel most, hogy $A^n{\neq}0$ minden $n{\in}\mathbb{N}$ esetén. Ekkor

$$n|\lambda|\|A^{n-1}\| \le \|A^nB\| + \|BA^n\| \le 2\|B\|\,\|A^{n-1}\|\|A\|,$$

így

$$|\lambda| \le \frac{2\|A\|\,\|B\|}{n}$$

minden $n$-re, következésképpen $\lambda{=}0$.

**22.3.** A kvantummechanika alapaxiómájaként szokás feltenni, hogy egy tömegpont $P$ impulzusát és $Q$ helyzetét olyan operátorokkal kell leírni, amelyek teljesítik a Heisenberg-féle felcserélési relációt. Láttuk, ez lehetetlen. Ha helyette azt követeljük meg, hogy csak egy sűrű lináris altéren álljon fönn az egyenlőség, akkor már nem kívánunk lehetetlent, amint azt a bevezető példák mutatták. Ekkor azonban éppen ezeknek a példáknak a bősége okozza a kellemetlenséget: legalább kontinuum sok unitér inekvivalens lehetőség van. Pontosan megmagyarázzuk, mit értünk ezen.

Legyen $P$ és $Q$ olyan önadjungált operátor valamely $\boldsymbol{H}$ Hilbert-térben, hogy egy sűrű lineáris altéren teljesül a $PQ{-}QP = -i\,\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ összefüggés, $P'$ és $Q'$ olyan önadjungált operátor valamely $\boldsymbol{H}'$ Hilbert-térben, hogy egy sűrű lineáris altéren teljesül a $P'Q'{-}Q'P' = -i\,\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}'}$ összefüggés. Azt mondjuk, hogy a $(P,Q)$ pár **unitér ekvivalens** a $(P',Q')$ párral, ha van olyan olyan $U : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}'$ unitér leképezés (azaz izometrikus lineáris bijekció), hogy $P' = UPU^{-1}$, $Q' = UQU^{-1}$.

Az unitér ekvivalens párokat – és csak azokat – ,,ugyanolyanoknak'', ,,fizikailag egyenértékűeknek'' tekintjük. Ha tehát kontinuum sok unitér inekvivalens lehetőség van, akkor ugyanennyi fizikailag nem egyenértékű kvantummechanika. Később a spektrumokkal kapcsolatban látni fogjuk, hogy az $L^2([-\pi,\pi])$-beli $(P_\alpha, M_{\mathrm{id}_{[-\pi,\pi]}})$ és $(P_{\alpha'}, M_{\mathrm{id}_{[-\pi,\pi]}})$ párok unitér inekvivalensek, ha $\alpha \neq \alpha'$.

A Heisenberg-féle felcserélési relációból formális átalakításokkal, összegzéssel nyerhető az

$$e^{iaP}e^{ibQ} = e^{iab}e^{ibQ}e^{iaP} \qquad (a,b\in\mathbb{R}),$$

Weyl-féle reláció, ahol az exponenciálosoknak jól meghatározott értelme van (nem sorösszeg!). Neumann János megmutatta, hogy ha a $(P,Q)$ pár eleget tesz a fenti relációnak és irreducibilis, azaz csak a triviális zárt alterek – a nulla és az egész –invariánsak mind $P$-re, mind $Q$-ra, akkor ez a pár unitér ekvivalens az $L^2(\mathbb{R})$-beli differenciálás-operátorból és az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$-vel való szorzás-operátorból álló párral.

# 23. Operátorok spektruma

**23.1.** A véges dimenziós vektortéren megismert fogalmakat (Analízis II.37.1.) alkalmazzuk most Hilbert-terekre.

Definíció *A* $\lambda \in \mathbb{K}$ *az* $A$ *operátor* ***sajátértéke****, ha* $\mathrm{Ker}(A - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}) \neq \{0\}$*, és ekkor a* $\mathrm{Ker}(A - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})$ *altér az* $A$*-nak a* $\lambda$*-hoz tartozó* ***sajátaltere****, amelynek nem nulla elemei az* $A$*-nak* $\lambda$*-hoz tartozó* ***sajátvektorai****. Jelölje* $\mathrm{Eig}(A)$ *az* $A$ *sajátértékeinek halmazát.*

Tehát $\lambda \in \mathbb{K}$ pontosan akkor sajátértéke $A$-nak, ha az $A - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ lineáris leképezés nem injektív, és $x \in \mathrm{Dom}(A) \setminus \{0\}$ pontosan akkor $\lambda$-hoz tartozó sajátvektora $A$-nak, ha $Ax = \lambda x$.

Ugyanúgy, mint véges dimenziós vektorterek esetén, egy operátor különböző sajátértékű sajátvektoraiból álló rendszer lineárisan független.

Állítás *Egy zárt operátor minden sajátaltere zárt lineáris altér.*

Bizonyítás Ha $Z$ zárt operátor és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor az 5.3. állítás szerint $Z - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ zárt operátor, így magtere az 5.5. szerint zárt lineáris altér. ∎

Speciálisan, mindenütt értelmezett és folytonos operátor sajátalterei zártak.

**23.2.** Tudjuk, hogy véges dimenziós komplex vektortéren minden operátornak van sajátértéke. Végtelen dimenzióban ez nem igaz. Most a sajátérték fogalmának általánosításával foglalkozunk.

Definíció $\lambda \in \mathbb{K}$ *az* $A$ *operátor* ***reguláris értéke****, ha az* $A - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ *operátor*

*(i) injektív,*
*(ii) értékkészlete sűrű,*
*(iii) inverze folytonos.*

*Jelölje* $\mathrm{Reg}(A)$ *az* $A$ *reguláris értékeinek halmazát. A* $\mathrm{Sp}(A) := \mathbb{K} \setminus \mathrm{Reg}(A)$ *halmazt az* $A$ ***spektrumának*** *nevezzük.*

Nyilvánvaló, hogy $\mathrm{Eig}(A) \subset \mathrm{Sp}(A)$. Ha $\boldsymbol{H}$ véges dimenziós, akkor $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Eig}(A)$, mivel ekkor minden $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ injektív lineáris leképezés bijekció, melynek inverze, lévén lineáris, folytonos.

A spektrum pontjait – a sajátértékeken kívül – aszerint osztályozzuk, hogy a reguláris értékekre felsorolt (ii)-(iii) tulajdonságok közül melyik nem teljesül.

$$\mathrm{Sp}_c(A) := \{\lambda \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Eig}(A) \mid \mathrm{Ran}(A - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}) \text{ sűrű, } (A - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{-1} \text{ nem folytonos}\},$$

$$\mathrm{Sp}_{r_1}(A) := \{\lambda \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Eig}(A) \mid \mathrm{Ran}(A - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}) \text{ nem sűrű, } (A - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{-1} \text{ folytonos}\},$$

$$\mathrm{Sp}_{r_2}(A) := \{\lambda \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Eig}(A) \mid \mathrm{Ran}(A - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}) \text{ nem sűrű, } (A - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{-1} \text{ nem folytonos}\}.$$

Tehát $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Eig}(A) \cup \mathrm{Sp}_c(A) \cup \mathrm{Sp}_{r_1}(A) \cup \mathrm{Sp}_{r_2}(A)$.

$\mathrm{Sp}_c(A)$-t az $A$ **folytonos spektrumának** szokás nevezni, $\mathrm{Sp}_{r_1}(A) \cup \mathrm{Sp}_{r_2}(A)$-t pedig a **maradékspektrumának**.

**Állítás** *Ha $Z$ zárt operátor, akkor $\lambda \in \mathrm{Reg}(Z)$ ekvivalens azzal, hogy $Z-\lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ injektív, az inverze mindenütt értelmezett és folytonos (azaz $\mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ eleme).*

Bizonyítás Ha $Z$ zárt, akkor $\lambda \in \mathrm{Reg}(Z)$ esetén $(Z-\lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{-1}$ sűrűn értelmezett folytonos lineáris leképezés, mely az 5.3. és az 5.4 állítás szerint zárt, így a zárt grafikon tétele szerint mindenütt értelmezett. ■

Ha tehát $\lambda \in \mathrm{Reg}(Z)$, akkor $\mathrm{Ran}(Z - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}) = \boldsymbol{H}$.

Speciálisan igaz ez mindenütt értelmezett folytonos operátorra, azaz $\mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ elemére.

**23.3.** A következőkben szükségünk lesz az Analízis III.B. 10.10. állítás finomítására.

**Állítás** *Legyen $A$ olyan injektív operátor, hogy $A^{-1}$ sűrűn értelmezett és folytonos. Ha $H \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ és $\|H\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$, akkor $A-H$ injektív, $(A-H)^{-1}$ sűrűn értelmezett és folytonos.*

Bizonyítás Ekkor a $HA^{-1} : \mathrm{Ran}(A) \to \boldsymbol{H}$ leképezés folytonos és lineáris, így létezik egyetlen $\overline{HA^{-1}} \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ kiterjesztése, és $\|\overline{HA^{-1}}\| = \|HA^{-1}\| \le \|H\|\,\|A^{-1}\| < 1$. Következésképpen $\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} - \overline{HA^{-1}}$ invertálható, és

$$(\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} - \overline{HA^{-1}})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\overline{HA^{-1}})^n \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H}).$$

Azonban

$$A-H = (\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} - HA^{-1})A = (\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} - \overline{HA^{-1}})A,$$

tehát $A-H$ injektív, és

$$(A-H)^{-1} = A^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\overline{HA^{-1}})^n$$

folytonos leképezés. Továbbá, $\mathrm{Ran}(A-H) = (\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} - \overline{HA^{-1}})[\mathrm{Ran}(A)] \subset \boldsymbol{H}$ sűrű, mert $\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} - \overline{HA^{-1}} : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ folytonos lineáris bijekció, melynek inverze is folytonos, így sűrű alteret sűrű altérbe képez. ■

Megjegyezük, ha $\mathrm{Ran}(A) = \boldsymbol{H}$, akkor $HA^{-1} \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$, így

$$(A-H)^{-1} = A^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (HA^{-1})^n \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H}).$$

**23.4.** **Állítás** *Minden $A$ operátorra $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{K}$ zárt halmaz.*

Bizonyítás Ha $\mathrm{Sp}(A)=\mathbb{K}$, akkor az állítás nyilvánvaló.

$\mathrm{Sp}(A)\neq\mathbb{K}$ esetén legyen $\lambda\in\mathrm{Reg}(A)$. Ekkor $A-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ injektív, inverze sűrűn értelmezett és folytonos. Ha $\alpha\in\mathbb{K}$ olyan, hogy $|\alpha|<\dfrac{1}{\|(A-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{-1}\|}$, akkor az előző állítás és $A-(\lambda+\alpha)\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} = (A-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}) - \alpha\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ miatt $A-(\lambda+\alpha)\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ injektív, az inverze sűrűn értelmezett és folytonos, tehát $\lambda+\alpha\in\mathrm{Reg}(A)$. Tehát $\mathrm{Reg}(A)$ nyílt, következésképpen $\mathrm{Sp}(A)$ zárt részhalmaza $\mathbb{K}$-nak. ■

Eredményünk egyszerű következménye, hogy $\overline{\mathrm{Eig}(A)}\subset\mathrm{Sp}(A)$.

**23.5.** Definíció *Az $A$ operátor* ***rezolvensének*** *az*

$$R_A : \mathrm{Reg}(A)\to\mathcal{L}in(\boldsymbol{H}),\qquad \lambda\mapsto\overline{(A-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{-1}}$$

*leképezést nevezzük.*

Az előző állítást úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha $\lambda\in\mathrm{Reg}(A)$, akkor a $\lambda$ körüli $\dfrac{1}{\|R_A(\lambda)\|}$ sugarú nyílt gömb is $\mathrm{Reg}(A)$ része.

Állítás *Ha $\lambda,\mu\in\mathrm{Reg}(A)$, akkor*

$$R_A(\lambda)-R_A(\mu)=(\lambda-\mu)R_A(\lambda)R_A(\mu).$$

Bizonyítás Az

$$(A-\mu\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})-(A-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})=(\lambda-\mu)\mathrm{id}_{\mathrm{Dom}(A)}$$

egyenlőséget balról $R_A(\lambda)$-val, jobbról $R_A(\mu)$-vel szorozva a kívánt egyenlőséget kapjuk a $\mathrm{Ran}(A-\mu\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})$ sűrű lineáris altéren, amiből következik, hogy mindenütt is igaz.

**23.6.** Állítás *Zárt operátor rezolvense $\mathbb{K}$-analitikus függvény.*

Bizonyítás Legyen $Z$ zárt operátor. Ha $\mathrm{Sp}(Z)=\mathbb{K}$, akkor az állítás nyilvánvaló, hiszen az üres függvény analitikus. Ha $\mathrm{Sp}(Z)\neq\mathbb{K}$, akkor minden $\lambda\in\mathrm{Reg}(Z)$ és $\alpha\in\mathbb{K}$, $|\alpha|<\dfrac{1}{\|R_Z(\lambda)\|}$ ezetén

$$Z-(\lambda+\alpha)\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}=(\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}-\alpha R_Z(\lambda))(Z-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})$$

injektív, az inverze mindenütt értelmezett és folytonos, ezért

$$R_Z(\lambda+\alpha)=R_Z(\lambda)\big(\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}-\alpha R_Z(\lambda)\big)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n R_Z(\lambda)^{n+1},$$

tehát $R_Z$ analitikus, és $\lambda\in\mathrm{Reg}(Z)$ esetén $R_Z{}^{(n)}(\lambda)=n!R_Z(\lambda)^{n+1}$. ■

Megjegyezzük, hogy speciálisan $R_Z{}'(\lambda)=R_Z(\lambda)^2$.

**23.7.** Állítás *Ha $A\in\mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$, akkor* $\mathrm{Sp}(A)$ *része a nulla körüli $\|A\|$ sugarú zárt gömbnek (tehát* $\mathrm{Sp}(A)$ *kompakt részhalmaza $\mathbb{K}$-nak), és az $R_A$ :* $\mathrm{Reg}(A)\to\mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ *rezolvens végtelenben eltűnő.*

Bizonyítás Legyen $\lambda\in\mathbb{K}$ olyan, hogy $|\lambda|>\|A\|$. Ekkor $\|\lambda^{-1}A\|<1$ és

$$A-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} = -\lambda(\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}-\lambda^{-1}A)$$

miatt $A-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ injektív, és

$$R_A(\lambda) = (A-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{n+1}}A^n \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H}).$$

Következésképpen $\lambda\in\mathrm{Reg}(A)$, így $\mathrm{Sp}(A)\subset\{\lambda\in\mathbb{K} \mid |\lambda|\le\|A\|\}$. A fenti formulából közvetlenül látszik, hogy $R_A$ végtelenben eltűnő. ■

A következő fejezetben $\|A\|$-nál esetenként kisebb sugarú zárt gömböt is megadunk, mely tartalmazza $\mathrm{Sp}(A)$-t.

**23.8.** Állítás *Ha $\boldsymbol{H}$ komplex Hilbert-tér és $A\in\mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$, akkor* $\mathrm{Sp}(A)$ *nem üres.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy $\mathrm{Sp}(A)=\emptyset$. Ekkor $R_A : \mathbb{C}\to\mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ a végtelenben eltűnő differenciálható függvény, ezért korlátos $\mathbb{C}$-n, így a Liouville-tétel (lásd 7.8.) szerint konstans függvény, és a konstans (a végtelenben eltünés miatt) szükségképpen nulla; ez ellentmondás, mivel $R_A(\lambda)$ injektív lineáris leképezés. ■

Valós Hilbert-téren folytonos operátor spektruma lehet üres még véges dimenzióban is, amint azt jól tudjuk a vektorterek elméletéből. Például $\mathbb{R}^2$ esetén

$$A : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 ,\ (x,y)\mapsto(-y,x)$$

olyan (folytonos) lineáris leképezés, hogy $\mathrm{Sp}(A)=\mathrm{Eig}(A)=\emptyset$.

**23.9.** Állítás *Ha $Z$ sűrűn értelmezett zárt operátor (speciálisan, ha mindenütt értelmezett és folytonos), akkor*

$$\mathrm{Sp}(Z^*)=\mathrm{Sp}(Z)^*.$$

Bizonyítás Legyen $\lambda\in\mathrm{Reg}(Z)^*$. Ekkor $\lambda^*\in\mathrm{Reg}(Z)$, azaz $Z-\lambda^*\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ injektív és inverze $\mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$-ban van. Ekkor a 16.8. állítás szerint

$$(Z^*-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{-1} = (Z-\lambda^*\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{*-1} = (Z-\lambda^*\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{-1*} \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H}),$$

tehát $\lambda \in \mathrm{Reg}(Z^*)$, azaz $\mathrm{Reg}(Z)^* \subset \mathrm{Reg}(Z^*)$. A 16.10. állítás szerint $Z^*$ is sűrűn értelmezett zárt operátor és $Z{=}Z^{**}$, így az előzőeket $Z^*$-ra alkalmazva kapjuk, hogy $\mathrm{Reg}(Z^*)^* \subset \mathrm{Reg}(Z^{**}) {=} \mathrm{Reg}(Z)$, azaz $\mathrm{Reg}(Z^*) \subset \mathrm{Reg}(Z)^*$. Tehát $\mathrm{Reg}(Z^*) = \mathrm{Reg}(Z)^*$, azaz $\mathrm{Sp}(Z^*) {=} \mathrm{Sp}(Z)^*$. ■

Azonban $\mathrm{Eig}(Z^*) {=} \mathrm{Eig}(Z)^*$ nem feltétlenül teljesül még akkor sem, ha $Z$ zárt.

**23.10.** Állítás *Ha $A$ sűrűn értelmezett operátor és* $\mathrm{Eig}(A^*) \subset \mathrm{Eig}(A)^*$, *akkor* $\mathrm{Ran}(A - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})$ *sűrű, vagy ami ugyanaz,*

$$\mathrm{Sp}_{r_1}(A) {=} \mathrm{Sp}_{r_2}(A) {=} \emptyset.$$

Bizonyítás Legyen $\lambda \in \mathbb{K} \backslash \mathrm{Eig}(A)$. Ekkor $\lambda^* \notin \mathrm{Eig}(A)^*$, így $\lambda^* \notin \mathrm{Eig}(A^*)$, következésképpen $A^* {-} \lambda^* \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} {=} (A {-} \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^*$ injektív, így

$$\mathrm{Ran}(A {-} \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{\perp} = \mathrm{Ker}(A {-} \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^* = \{0\} ,$$

tehát $\mathrm{Ran}(A {-} \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}) \subset \boldsymbol{H}$ sűrű. ■

**23.11.** A most következő állítás önmagában is érdekes, és a spektrumokkal kapcsolatban fontos alkalmazást nyer.

Állítás *Legyen $\boldsymbol{E}$ és $\boldsymbol{F}$ normált tér, $L : \boldsymbol{E} \rightarrowtail \boldsymbol{F}$ injektív lineáris leképezés. $L^{-1}$ pontosan akkor folytonos, ha*

$$\alpha := \inf_{x \in \mathrm{Dom}(L), \|x\|=1} \|Lx\| > 0,$$

*és ekkor* $\|L^{-1}\| {=} \dfrac{1}{a}$.

Bizonyítás Ha $\alpha {>} 0$, akkor minden $x \in \mathrm{Dom}(L)$ esetén $\|Lx\| {\geq} \alpha \|x\|$, azaz minden $y \in \mathrm{Ran}(L)$ esetén $\|L^{-1}y\| {\leq} \dfrac{1}{\alpha} \|y\|$, tehát $L^{-1}$ folytonos és $\|L^{-1}\| \leq \dfrac{1}{\alpha}$.

Ha $L^{-1}$ folytonos, akkor minden $y \in \mathrm{Ran}(L)$ esetén $\|L^{-1}y\| {\leq} \|L^{-1}\| \, \|y\|$, azaz minden $x \in \mathrm{Dom}(L)$ esetén $\|x\| \leq \|L^{-1}\| \, \|Lx\|$ és így $1 \leq \|L^{-1}\| \alpha$ azaz $\|L^{-1}\| \geq \dfrac{1}{\alpha}$.

**23.12.** Definíció *$\lambda \in \mathbb{K}$ az $A$ operátor* ***általánosított sajátértéke****, ha $\lambda \notin \mathrm{Eig}(A)$ és létezik $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat $\mathrm{Dom}(A)$-ban úgy, hogy valamely $K {>} 0$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|x_n\| {\geq} K$, és*

$$\lim_n (A {-} \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}) x_n = 0. \qquad (*)$$

1.Táblázat. Az $A$ operátor spektruma

<table>
<tr><td rowspan="2" colspan="2">$\mathrm{Ran}\,(A{-}\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})$</td><td colspan="2">$A{-}\lambda\mathrm{id}$<br>injektív</td><td rowspan="2">$(A{-}\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})$<br>nem<br>injektív</td></tr>
<tr><td>$(A{-}\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{-1}$<br>folytonos</td><td>$(A{-}\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{-1}$<br>nem folytonos</td></tr>
<tr><td rowspan="2">sűrű</td><td>zárt</td><td rowspan="2">$\mathrm{Reg}(A)$</td><td rowspan="2">$\mathrm{Sp}_c(A)$</td><td rowspan="4">$\mathrm{Eig}(A)$</td></tr>
<tr><td>nem zárt</td></tr>
<tr><td rowspan="2">nem sűrű</td><td>zárt</td><td rowspan="2">$\mathrm{Sp}_{r_1}(A)$</td><td rowspan="2">$\mathrm{Sp}_{r_2}(A)$</td></tr>
<tr><td>nem zárt</td></tr>
</table>

2.Táblázat. A $Z$ zárt operátor spektruma

<table>
<tr><td rowspan="2" colspan="2">$\mathrm{Ran}\,(Z{-}\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})$</td><td colspan="2">$Z{-}\lambda\mathrm{id}$<br>injektív</td><td rowspan="2">$(Z{-}\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})$<br>nem<br>injektív</td></tr>
<tr><td>$(Z{-}\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{-1}$<br>folytonos</td><td>$(Z{-}\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{-1}$<br>nem folytonos</td></tr>
<tr><td rowspan="2">sűrű</td><td>zárt</td><td>$\mathrm{Reg}(Z)$</td><td>—</td><td rowspan="4">$\mathrm{Eig}(Z)$</td></tr>
<tr><td>nem zárt</td><td>—</td><td>$\mathrm{Sp}_c(Z)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">nem sűrű</td><td>zárt</td><td>$\mathrm{Sp}_{r_1}(Z)$</td><td>—</td></tr>
<tr><td>nem zárt</td><td>—</td><td>$\mathrm{Sp}_{r_2}(Z)$</td></tr>
</table>

**Állítás** $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Eig}(A)$ *pontosan akkor általánosított sajátértéke A-nak, ha létezik* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat* $\mathrm{Dom}(A)$*-ban úgy, hogy minden* $n{\in}\mathbb{N}$ *esetén* $\|x_n\| = 1$ *és a* $(*)$ *egyenlőség teljesül.*

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy ha a sorozat tagjai mind egységvektorok, akkor a $K := 1$ számmal teljesül a definíció feltétele. Ha viszont a sorozat alulról korlátos, akkor az $y_n := \dfrac{x_n}{\|x_n\|}$ sorozat tagjai egységvektorok, és

$$\|(A - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})y_n\| \leq \frac{1}{K}\|(A - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})x_n\|,$$

tehát a bal oldal határértéke nulla.

**23.13.** Állítás $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Eig}(A)$ *pontosan akkor általánosított sajátértéke A-nak, ha* $(A - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{-1}$ *nem folytonos.*

Bizonyítás $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Eig}(A)$ miatt $A - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ injektív, és a 23.11. állítás szerint $(A - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{-1}$ pontosan akkor nem folytonos, ha

$$\inf_{x \in \mathrm{Dom}(A), \|x\|=1} \|(A - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})x\| = 0.$$

Ha $\lambda$ általánosított sajátérték, akkor az előzőek szerint a fenti egyenlőség nyilvánvalóan igaz. Ha viszont ez az egyenlőség áll, akkor az infimum alaptulajdonsága szerint létezik $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egységvektorokból álló sorozat, amelyre $(*)$ teljesül.

**23.14. Feladatok**

1. Ha $\lambda \in \mathrm{Eig}(A)$, akkor $\lambda^2 \in \mathrm{Eig}(A^2)$, és $A$-nak a $\lambda$-hoz tartozó sajátalterét tartalmazza $A^2$-nek a $\lambda^2$-hez tartozó sajátaltere. Adjunk egyszerű példát olyan *valós* véges dimenziós Hilbert-téren értelmezett $A$ operátorra, hogy van az $A^2$-nek olyan sajátértéke, amely nem négyzete az $A$ egy sajátértékének.

2. Legyen $\boldsymbol{H}$ *komplex* Hilbert-tér, $p{:}\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ polinom és $A \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$. Ekkor $\mathrm{Sp}(p(A)) = p[\mathrm{Sp}(A)]$. (Útmutatás. Minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén van olyan $q$ polinom, hogy $p - p(\lambda) = (\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - \lambda)q$, ezért $p(A) - p(\lambda)\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} = (A - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})q(A) = q(A)(A - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})$. Legyen $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ és tegyük fel, hogy $p(\lambda) \notin \mathrm{Sp}(p(A))$. Ekkor $q(A)\big(p(A) - p(\lambda)\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}\big)^{-1} = \big(p(A) - p(\lambda)\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}\big)^{-1}q(A)$, így

$$\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} = (A - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})q(A)\big(p(A) - p(\lambda)\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}\big)^{-1} =$$
$$= \big(p(A) - p(\lambda)\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}\big)^{-1}q(A)(A - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}) = q(A)\big(p(A) - p(\lambda)\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}\big)^{-1}(A - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}),$$

azaz $A - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ invertálható, ami ellentmondás.

Legyen $\eta \in \mathrm{Sp}(p(A))$. Ha $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a $p - \eta$ gyökei (multiplicitással számolva), akkor $p - \eta = \alpha \prod\limits_{k=1}^{n} (id_{\mathbb{K}} - \lambda_k)$ , így $p(A) - \eta \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} = \alpha \prod\limits_{k=1}^{n} (A - \lambda_k \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})$. Ha minden $\lambda_i \notin \mathrm{Sp}(A)$, akkor a jobb oldal minden téneyzője invertálható, ezért a bal oldal is, ami ellentmondás.)

3. Legyen $F_A$ a 17.11.14. feladatban leírt operátor. Mutassuk meg, hogy $\mathrm{Sp}(F_A) = \mathrm{Sp}(A)$, és ha $\boldsymbol{L}$ az $A$-nak a $\lambda$-hoz tartozó sajátaltere $\mathbb{R}^N$-ben, akkor $F_A$-nak a $\lambda$-hoz tartozó sajátaltere $\{\phi \in L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{K}^M) \mid \mathrm{Ran}\phi \subset \boldsymbol{L}\}$.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha $A, B \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$, akkor $\mathrm{Sp}(AB) \setminus \{0\} = \mathrm{Sp}(BA) \setminus \{0\}$. (Útmutatás: ha $0 \neq \lambda \in \mathrm{Sp}(BA)$, akkor a $C := (BA - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{-1}$ jelöléssel $\dfrac{ACB - \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}}{\lambda} = (AB - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{-1}$.

Az $l^2$-beli jobbra tolás és balra tolás operátorára mutassuk meg, hogy $0 \in \mathrm{Sp}(RL)$ de $0 \notin \mathrm{Sp}(LR)$.

5. Igazoljuk, hogy ha $D \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ bijekció, akkor minden $A$ operátorra $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(DAD^{-1})$.

6. Ha $A, B \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ bijekciók, akkor $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$.

7. Definiáljuk $(L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$-ben a $P_a$ differenciáloperátort a $\phi \mapsto -i\phi'$ formulával a $\{\phi \in \mathrm{Dom}(D) : \phi(-\pi) = 0\}$ halmazon! Mutassuk meg, hogy minden $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén az

$$(R_\lambda \phi)(x) := i \int_{-\pi}^{x} e^{\lambda(x-s)} \phi(s) ds \qquad (x \in [-\pi, \pi])$$

formulával megadott $R_\lambda$ mindenütt értelmezett folytonos operátor, amely inverze a $P_a - \lambda \cdot I$ operátornak (ahol $I$ az identitásoperátor). Következésképpen $P_a$ spektruma üres.

8. A sajátérték és a spektrum definíciója Banach-térre is alkalmazható. E fejezet mely állításai maradnak érvényben Banach-térbeli operátorokra?

# 24. A spektrálsugár

**24.1.** Definíció *A mindenütt értelmezett, folytonos $A$ operátor* ***spektrálsugara***

$$r(A) := \inf\{r > 0 \mid \mathrm{Sp}(A) \subset G_r(0) \subset \mathbb{K}\}.$$

Állítás *A spektrálsugárra $r(A) \leq \|A\|$ teljesül. Ha $\mathrm{Sp}(A) = \emptyset$, akkor $r(A) = 0$, ellenkező esetben pedig*

$$r(A) = \sup\{|\lambda| \ \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}.$$

Bizonyítás A legelső egyenlőség a 23.7. állítás szerint igaz. A második egyenlőség nyilvánvaló, és a harmadik is egyszerű tény. ■

Ha $\mathrm{Sp}(A)$ nem üres (komplex Hilbert-téren ez minden $A$-ra teljesül), akkor, lévén a spektrum zárt halmaz, létezik (általában nem egyetlen) $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ úgy, hogy $|\lambda| = r(A)$.

**24.2.** Állítás *Komplex Hilbert-téren értelmezett folytonos $A$ operátorra*

$$r(A) = \inf_n \|A^n\|^{1/n} = \lim_n \|A^n\|^{1/n}.$$

Bizonyítás Ha $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, akkor a 23.14.2. feladat szerint $\lambda^n \in \mathrm{Sp}(A^n)$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén (de arről közvetlenül is meggyőződhetünk az ismert "nevezetes szorzat" segítségével, amely szerint $A^n - \lambda^n I = (A-\lambda I)(A^{n-1} + A^{n-2}\lambda + \cdots + \lambda^{n-1})$), tehát $|\lambda|^n \leq \|A^n\|$, ezért

$$r(A) \leq \inf_n \|A^n\|^{1/n} \leq \liminf_n \|A^n\|^{1/n}.$$

A $G_{1/r(A)}(0) \to \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$, $\alpha \mapsto (I - \alpha A)^{-1}$ leképezés jól értelmezett (ahol, szokásosan, $r(A) = 0$ esetén, a szóban forgó halmaz az egész komplex sík), ugyanis az inverz $\alpha = 0$ esetén triviálisan létezik, $\alpha \neq 0$ esetén pedig $I - \alpha A = -\alpha \left(A - \dfrac{I}{\alpha}\right)$. Továbbá a fenti leképezsés differenciálható, mert a nyilvánvalóan differenciálható $\alpha \mapsto I - \alpha A$ és a szintén differenciálható invertálás kompozíciója. Ezért a függvény analitikus (lásd 7.8.), azaz

$$(I - \alpha A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \alpha^n \qquad (\alpha \in G_{1/r(A)}(0)),$$

ahol az $X_n$-ek a $\mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ elemei.

Viszont, a Neumann-sor szerint

$$(I - \alpha A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \alpha^n \qquad (\alpha \in G_{1/\|A\|}(0)).$$

Következésképpen $X_n = A^n$ minden $n$-re, hiszen a komplex függvénytanból jól ismert tény, hogy egy $U \subset \mathbb{C}$ nyílt halmazon értelmezett $\mathbb{C}$-differenciálható függvényt bármely $U$-beli pont körüli Taylor-sora előállít a maximális sugarú, lezártjával teljes egészében $U$-ban lévő nyílt gömbön.

Így tehát minden $\alpha < \dfrac{1}{r(A)}$ esetén van olyan $M_\alpha > 0$ szám, hogy $\|A^n \alpha^n\| \leq M_\alpha$. Ezért ha $\alpha \neq 0$, akkor $\|A^n\|^{1/n} \leq \dfrac{M_\alpha}{|\alpha|}$, és így $\limsup_n \|A^n\|^{1/n} \leq \frac{1}{|\alpha|}$. Mivel az itteni jobb oldal infimuma $\alpha$-ban éppen $r(A)$, az is igaz, hogy

$$\limsup_n \|A^n\|^{1/n} \leq r(A).$$

Összevetve ezt a bizonyítás elején mondottakkal, megkapjuk a bizonyítandó formulákat. ■

Valós Hilbert-térre az állítás nem igaz még véges dimenzióban sem. Például $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (-y, x)$ olyan (folytonos) lineáris leképezés, amelynek a spektruma üres, tehát $r(A) = 0$, azonban $A^2 = -I$, $A^3 = -A$, $A^4 = I$ miatt minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|A^n\| = 1$, ezért $\lim_n \|A^n\| = 1$.

**24.3.** Állítás *Ha $N \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ normális, akkor* $\lim_n \|N^n\|^{1/n} = \|N\|$.

Bizonyítás A 17.10. állítás szerint $\|N^2\| = \|N\|^2$, amiből indukcióval azt kapjuk, hogy $\|N^{2^n}\| = \|N\|^{2^n}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, így nyilvánvalóan igaz az állítás. ■

Ha tehát a Hilbert-tér komplex, akkor $r(N) = \|N\|$.

**24.4. Feladatok**

1. Mutassuk meg az Analízis III.12.6.7. segítségével, hogy ha $\boldsymbol{H}$ nem szükségképpen komplex Hilbert-tér és $A \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$, akkor létezik

$$\rho(A) := \lim_n \|A^n\|^{1/n} = \inf_n \|A^n\|^{1/n}.$$

2. Használjuk az előbbi feladat jelölését. Igazoljuk, hogy ha $A \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$, akkor a következők ekvivalensek:

(1) $\rho(A) < 1$,

(2) $\sum_{n \in \mathbb{N}} A^n$ abszolút konvergens,

(3) $\lim_n A^n = 0$;

ekkor $\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} - A$ invertálható $\mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$-ben és

$$(\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

(Útmutatás: alkalmazzuk a Cauchy-féle gyökkritériumot.)

3. Bármely $A \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ esetén $A^*A$ önadjungált (tehát normális), ezért $\rho(A^*A) = \|A\|^2$.

# 25. Speciális típusú operátorok spektruma

**25.1. Állítás** *Ha $N$ normális operátor, akkor*

$$\mathrm{Eig}(N^*)=\mathrm{Eig}(N)^*,$$

*és a $\lambda\in\mathrm{Eig}(N)$ illetve a $\lambda^*\in\mathrm{Eig}(N^*)$ sajátértékekhez tartozó sajátalterek megegyeznek.*

Bizonyítás Legyen $\lambda\in\mathbb{K}$. Ekkor $N-\lambda\cdot\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ normális, így 17.6. következménye szerint $\mathrm{Ker}(N^*-\lambda^*\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})=\mathrm{Ker}(N-\lambda\cdot\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^*=\mathrm{Ker}(N-\lambda\cdot\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})$ .

**Megjegyzés** Ha $N$ normális, akkor a fenti eredmény és a 23.10. állítás alapján $\mathrm{Sp}_{r_1}(N)=\mathrm{Sp}_{r_2}(N)=\emptyset$, tehát

$$\mathrm{Sp}(N)=\mathrm{Eig}(N)\cup\mathrm{Sp}_c(N),$$

azaz normális operátor spektrumában csak sajátértékek és általánosított sajátértékek vannak. Más szóval, ha $N-\lambda\cdot\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ injektív és az inverze folytonos, akkor $\lambda\in\mathrm{Reg}(N)$.

Ha $N$ normális operátor, akkor minden $\lambda\in\mathbb{K}$ esetén a 17.6. állítás szerint $N-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ akkor és csak akkor injektív, ha értékkészlete sűrű, így tehát $\lambda\in\mathrm{Eig}(N)$ esetén $\mathrm{Ran}(N-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})$ nem sűrű.

3.Táblázat. Az $N$ norális operátor spektruma

| $\mathrm{Ran}\,(N-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})$ | | $N-\lambda\mathrm{id}$ injektív | | $(N-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})$ nem injektív |
|---|---|---|---|---|
| | | $(N-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{-1}$ folytonos | $(N-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{-1}$ nem folytonos | |
| sűrű | zárt | $\mathrm{Reg}(N)$ | — | — |
| | nem zárt | — | $\mathrm{Sp}_c(N)$ | |
| nem sűrű | zárt | — | — | $\mathrm{Eig}(N)$ |
| | nem zárt | — | | |

**25.2.** Állítás *Legyen $V$ izometrikus és $T$ szimmetrikus operátor. Ekkor*

*(1)* $\mathrm{Eig}(V)\subset\mathbb{T}$ *és* $\mathrm{Eig}(V)^*\subset\mathrm{Eig}(V^*)$,
*és minden $\lambda\in\mathrm{Eig}(V)$, $x\in\boldsymbol{H}$ esetén, ha $Vx=\lambda x$, akkor $V^*x=\lambda^*x$;*

*(2)* $\mathrm{Eig}(T)\subset\mathbb{R}$ *és* $\mathrm{Eig}(T)^*\subset\mathrm{Eig}(T^*)$.

Bizonyítás (1) Legyen $\lambda\in\mathrm{Eig}(V)$, és $0\neq x\in\boldsymbol{H}$ olyan, hogy $Vx=\lambda x$. Ekkor

$$\langle x,x\rangle = \langle Vx,Vx\rangle = \langle\lambda x,\lambda x\rangle = |\lambda|^2\langle x,x\rangle,$$

következésképpen $|\lambda|=1$. Továbbá, $V^*V=\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ miatt

$$x = V^*(Vx) = V^*(\lambda x) = \lambda V^*x,$$

így $V^*x=\lambda^{-1}x=\lambda^*x$, tehát $\lambda^*\in\mathrm{Eig}(V^*)$.

(2) Legyen $\lambda\in\mathrm{Eig}(T)$, és $0\neq x\in\boldsymbol{H}$ olyan, hogy $Tx=\lambda x$. Ekkor

$$\lambda^*\langle x,x\rangle = \langle\lambda x,x\rangle = \langle Tx,x\rangle = \langle x,Tx\rangle = \langle x,\lambda x\rangle = \lambda\langle x,x\rangle,$$

következésképpen $\lambda^*=\lambda$, azaz $\lambda\in\mathbb{R}$. Mivel $T\subset T^*$,

$$\mathrm{Eig}(T)^* = \mathrm{Eig}(T) \subset \mathrm{Eig}(T^*).$$

**25.3.** Állítás *Ha az $A$ operátor normális, szimmetrikus vagy izometrikus, akkor $A$ különböző sajátértékeihez tartozó sajátalterei ortogonálisak egymásra.*

Bizonyítás Legyen $\lambda$ és $\mu$ az $A$ két különböző sajátértéke, és $x,y\in\boldsymbol{H}\setminus\{0\}$ olyanok, hogy $Ax=\lambda x$ és $Ay=\mu y$. Ekkor a 25.1. állítás illetve a 25.2. állítás szerint $A^*y=\mu^*y$, így

$$\mu\langle y,x\rangle = \langle\mu^*y,x\rangle = \langle A^*y,x\rangle = \langle y,Ax\rangle = \lambda\langle y,x\rangle,$$

ezért $\lambda\neq\mu$ miatt $\langle y,x\rangle=0$.

**25.4.** Állítás *Legyen $U$ unitér és $S$ önadjungált operátor. Ekkor*

*(1)* $\mathrm{Sp}(U)\subset\mathbb{T}$ *és* $\mathrm{Eig}(U)^*=\mathrm{Eig}(U^*)$,

*(2)* $\mathrm{Sp}(S)\subset\mathbb{R}$ *és* $\mathrm{Eig}(S)^*=\mathrm{Eig}(S^*)$.

Bizonyítás (1) $U$ normális, így $\mathrm{Eig}(U)^*=\mathrm{Eig}(U^*)$. A 23.7. állítás szerint $\lambda\in\mathrm{Sp}(U)$ esetén $|\lambda|\leq\|U\|=1$. Legyen $\lambda\in\mathbb{K}$, $|\lambda|<1$. Ekkor, minthogy $U^{-1}\in\mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$, valamint $\|\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}\|=|\lambda|<1=\dfrac{1}{\|U^{-1}\|}$, az $U-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ operátor invertálható, azaz $\lambda\notin\mathrm{Sp}(U)$.

(2) $S$ normális, így $\mathrm{Eig}(S)^*{=}\mathrm{Eig}(S^*)$. Legyen $\lambda{=}\alpha{+}i\beta$, ahol $\alpha,\beta{\in}\mathbb{R}$ és $\beta{\neq}0$. Ekkor a 25.2. állítás szerint $\lambda{\notin}\mathrm{Eig}(S)$, és $x{\in}\mathrm{Dom}(S)$ esetén

$$\|(S{-}\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})x\|^2 = \|(S{-}\alpha\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})x\|^2 + \beta^2\|x\|^2 \geq \beta^2\|x\|^2,$$

ezárt a 23.11. állítás következtében $(S{-}\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{-1}$ folytonos, így a 25.1. megjegyzése alapján $\lambda{\in}\mathrm{Reg}(S)$.

**25.5.** Állítás *Legyen $S$ pozitív önadjungált operátor. Ekkor* $\mathrm{Sp}(S){\subset}[0,+\infty[$. *Ha $S$ szigorúan pozitív, és $\sigma{>}0$ olyan, hogy $S{\geq}\sigma\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$, akkor* $\mathrm{Sp}(S){\subset}[\sigma,+\infty[$.

Bizonyítás Legyen $\lambda{<}0$, és $x{\in}\mathrm{Dom}(S)$. Ekkor

$$-\lambda\|x\|^2 = \langle x, -\lambda x\rangle \leq \langle x, Sx\rangle + \langle x, -\lambda x\rangle = \\ = \langle x, (S{-}\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})x\rangle \leq \|x\|\,\|(S{-}\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})x\|,$$

következésképpen $\|(S{-}\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})x\|{\geq}{-}\lambda\|x\|$, így $(S{-}\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})$ injektív, és inverze folytonos, tehát a 25.1. állítás következménye szerint $\lambda{\in}\mathrm{Reg}(S)$.

Ha $S$ szigorúan pozitív, és $\sigma{>}0$ olyan, hogy $S{\geq}\sigma\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$, akkor $\lambda{<}\sigma$ és $x \in \mathrm{Dom}(S)$ esetén

$$(\sigma{-}\lambda)\|x\|^2 \leq \langle x, Sx\rangle + \langle x, -\lambda x\rangle = \langle x, (S{-}\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})x\rangle \leq \|x\|\,\|(S{-}\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})x\|,$$

következésképpen $\|(S{-}\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})x\|{\geq}(\sigma{-}\lambda)\|x\|$, így az előzőhöz hasonló gondolattal azt kapjuk, hogy $\lambda{\in}\mathrm{Reg}(S)$.

**25.6.** Állítás *Legyen $N$ normális operátor és $(x_i)_{i\in I}$ az $N$ sajátvektoraiból álló ortonormált rendszer: minden $i{\in}I$ esetén $Nx_i{=}\lambda_i x_i$ ($\lambda_i$ nem szükségképpen különbözik $\lambda_j$-től, ha $i \neq j$). Ekkor tetszőleges $(c_i)_{i\in I}{\in}l^2_{\mathbb{K}}(I)$ esetén $\sum_{i\in I} c_i x_i{\in}\mathrm{Dom}(N)$ pontosan akkor, ha $\sum_{i\in I} |c_i|^2|\lambda_i|^2{<}{+}\infty$, és ekkor*

$$N\left(\sum_{i\in I} c_i x_i\right) = \sum_{i\in I} c_i N x_i = \sum_{i\in I} c_i\lambda_i x_i.$$

Bizonyítás Legyen $\sum_{i\in I} |c_i|^2|\lambda_i|^2{<}{+}\infty$. Ekkor létezik $\sum_{i\in I} c_i\lambda_i x_i{\in}\boldsymbol{H}$, és minden $x{\in}\mathrm{Dom}(N^*)$ esetén

$$\left\langle \sum_{i\in I} c_i x_i, N^*x \right\rangle = \sum_{i\in I} \langle c_i x_i, N^*x\rangle = \sum_{i\in I} \langle c_i N x_i, x\rangle = \\ = \sum_{i\in I} \langle c_i\lambda_i x_i, x\rangle = \left\langle \sum_{i\in I} c_i\lambda_i x_i, x \right\rangle,$$

ami az adjungált operátor definíciója szerint éppen azt jelenti, hogy $\sum_{i\in I} c_i\lambda_i x_i \in$ $\mathrm{Dom}(N^{**})=\mathrm{Dom}(N)$ és

$$N\left(\sum_{i\in I} c_i x_i\right) = \sum_{i\in I} c_i\lambda_i x_i = \sum_{i\in I} c_i N x_i.$$

Tegyük most fel, hogy $\sum_{i\in I} c_i x_i \in \mathrm{Dom}(N)$. Az $I$ minden véges $F$ részhalmazára $x_F := \sum_{i\in F} c_i\lambda_i x_i \in \mathrm{Dom}(N)=\mathrm{Dom}(N^*)$, és $\|x_F\|^2 = \sum_{i\in F} |c_i|^2|\lambda_i|^2$ miatt egyrészt

$$\left|\left\langle \sum_{i\in I} c_i x_i, N^* x_F \right\rangle\right| = \left|\left\langle N\left(\sum_{i\in I} c_i x_i\right), x_F \right\rangle\right| \leq \left\| N\left(\sum_{i\in I} c_i x_i\right)\right\| \|x_F\|,$$

másrészt

$$\left|\left\langle \sum_{i\in I} c_i x_i, N^* x_F \right\rangle\right| = \left|\sum_{i\in I} \langle c_i x_i, N^* x_F\rangle\right| = \left|\sum_{i\in I} \langle c_i\lambda_i x_i, x_F\rangle\right| = \|x_F\|^2$$

miatt

$$\sqrt{\sum_{i\in F} |c_i|^2|\lambda_i|^2} = \|x_F\| \leq \left\| N\left(\sum_{i\in I} c_i x_i\right)\right\|,$$

és ez azt jelenti, hogy $\sum_{i\in I} |c_i|^2|\lambda_i|^2 < +\infty$.

**25.7.** Állítás *Legyen $N$ olyan normális operátor, melynek sajátalterei által kifeszített zárt lineáris altér az egész tér. Ekkor*

$$\mathrm{Sp}(N) = \overline{\mathrm{Eig}(N)}.$$

Bizonyítás Tudjuk, hogy $\overline{\mathrm{Eig}(N)} \subset \mathrm{Sp}(N)$.

Ha $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \overline{\mathrm{Eig}(N)}$, akkor $\alpha := d(\lambda, \overline{\mathrm{Eig}(N)}) > 0$. Legyen $(x_i)_{i\in I}$ az $N$ sajátvektoraiból álló teljes ortonormált rendszer, $i\in I$ esetén $Nx_i = \lambda_i x_i$.

Ha $x = \sum_{i\in I} c_i x_i \in E$, akkor az előző állítás szerint

$$\|(N-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})x\|^2 = \left\|\sum_{i\in I} c_i(\lambda_i-\lambda)x_i\right\|^2 =$$

$$= \sum_{i\in I} |c_i|^2|\lambda_i-\lambda|^2 \geq \alpha^2 \sum_{i\in I} |c_i|^2 = \alpha^2\|x\|^2,$$

következésképpen $(N-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{-1}$ folytonos, így 25.1. megjegyzése szerint $\lambda\in\mathrm{Reg}(N)$, azaz $\lambda\in\mathbb{K}\setminus\mathrm{Sp}(N)$.

**25.8.** Állítás *Ha $P$ ortogonális projektor, $P\neq 0$, $P\neq\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$, akkor*

$$\mathrm{Sp}(P)=\mathrm{Eig}(P)=\{0,1\}.$$

Bizonyítás Ha $Px=\lambda x$, akkor $\lambda x = Px = P^2x = \lambda^2 x$, ezért $\mathrm{Eig}(P)\subset\{0,1\}$. Ha $P\neq 0$, akkor $\mathrm{Ran}(P)\neq 0$, és minden $x\in\mathrm{Ran}(P)$ esetén $Px=x$, tehát $1\in\mathrm{Eig}(P)$. Ha $P\neq\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$, akkor $\mathrm{Ker}(P)\neq 0$, és minden $x\in\mathrm{Ker}(P)$ esetén $Px=0$, tehát $0\in\mathrm{Eig}(P)$.

Az ortogonális projektor önadjungált, sajátalterei kifeszítik az egész teret, a sajátértékek halmaza zárt, ezért a spektruma az előző állítás szerint a sajátértékeken kívül más pontot nem tartalmaz.

**Megjegyzés** $\mathrm{Sp}(\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})=\mathrm{Eig}(\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})=\{1\}$, és $\mathrm{Sp}(0)=\mathrm{Eig}(0)=\{0\}$.

**25.9. Feladatok**

1. Legyen $R$ a jobbra tolás operátora $l^2$-ben; ekkor $R^*$ a balra tolás operátora (lásd 16.13.2. feladatot). Mutassuk meg, hogy $\mathrm{Eig}(R)=\emptyset$, $\mathrm{Eig}(R^*)=\{\lambda\in\mathbb{K}\mid |\lambda|<1\}$, $\mathrm{Sp}(R)=\mathrm{Sp}(R^*)=\{\lambda\in\mathbb{K}\mid |\lambda|\leq 1\}$. (Útmutatás: a sajátértékekre vonatkozó állítás egyszerű tény, használjuk a 23.4. állítást és következményét, a 23.7. és a 23.9. állítást.)

2. Legyen $V$ a 17.11.3-ban megadott operátor. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Eig}(V)=\{1\}$, $\mathrm{Eig}(V^*)=\{\lambda\in\mathbb{K}\mid|\lambda|<1\}\cup\{1\}$, $\mathrm{Sp}(V)=\mathrm{Sp}(V^*)=\{\lambda\in\mathbb{K}\mid|\lambda|\leq 1\}$.

3. Legyen $L_a$ a 17.10.4-ben definiált operátor. Bizonyítsuk be, hogy $a\neq 0$ esetén $\mathrm{Eig}(L_a)=\emptyset$, $\mathrm{Sp}(L_a)=\mathbb{T}$. (Útmutatás. Tudjuk, hogy $\mathrm{Sp}(L_a)\subset\mathbb{T}$. Ha $\phi$ sajátvektora volna, akkor $|\phi|$ az $a$ szerint periodikus függvény volna, ami nem négyzetesen integrálható. Keressünk minden $\lambda\in\mathbb{T}$ esetén egy "formális sajátvektort", azaz olyan nemnulla (és persze négyzetesen nem integrálható) $\phi$ függvényt, amelyre $L_a\phi=\lambda\phi$ teljesül; ebből találjunk olyan $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot $L^2(\mathbb{R})$-ben, amellyel megmutathatjuk, hogy $\lambda$ általánosított sajátérték.)

4. Legyen $S$ olyan önadjungált operátor, amelynek sajátalterei által kifeszített zárt lineáris altér az egész tér. Mi az $S^2$ spektruma, és mik a sajátalterei?

5. Legyen $S$ olyan pozitív önadjungált operátor (nem szükségképpen folytonos), amelynek sajátalterei által kifeszített zárt lineáris altér az egész tér. Legyen $(e_i)_{i\in I}$ az S sajátvekoraiból álló teljes ortonormált rendszer, a megfelelő (nem szükségképpen különböző) sajátértékek $(\lambda_i)(i\in I)$. Mutassuk meg, hogy a

$$\sqrt{S}:\left\{\sum_{i\in I}c_ie_i\;\middle|\;\text{létezik }\sum_{i\in I}c_i\sqrt{\lambda_i}e_i\right\}\to\boldsymbol{H},\sum_{i\in I}c_ie_i\mapsto\sum_{i\in I}c_i\sqrt{\lambda_i}e_i$$

formálával értelmezett operátor önadjungált és $\left(\sqrt{S}\right)^2=S$.

6. Legyen $S \subset \mathbb{K}$ tetszőleges zárt halmaz. Mutassuk meg, hogy bármely szeparábilis Hilbert-térben van olyan $N$ normális operátor, amelyre $S = \overline{\text{Eig}(N)}$. (Útmutatás: vegyünk egy megszámlálható sűrű részhalmazt $S$-ben és egy teljes ortonormált rendszert sajátértékeknek illetve sajátvektoroknak.)

## 26. A differenciálás-operátorok spektruma

**26.1.** Az $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$-beli $P_0 \subset P_\alpha \subset D$ $(\alpha \in \mathbb{T})$ differenciálás-operátorokat a 19. fejezetben definiáltuk. Mindhárom a $\phi \to -i\phi'$ hozzárendelési utasítással van értelmezve egy-egy sűrű altéren. Tudjuk, hogy $P_\alpha$ önadjungált, $P_0$ és $D$ egymás adjungáltjai.

Az $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$-beli önadjungált $P$ differenciáloperátort a 20. fejezetben definiáltuk, amely szintén $\phi \mapsto -i\phi'$ utasítással van értelmezve egy alkalmas sűrű altéren.

**26.2. Állítás** $\text{Eig}(D){=}\text{Sp}(D){=}\mathbb{C}$, $\quad \text{Eig}(P_0){=}\emptyset$, $\quad \text{Sp}(P_0){=}\mathbb{C}$.

Bizonyítás $\lambda{\in}\mathbb{C}$ esetén $D\exp^{i\lambda} = \lambda\exp^{i\lambda}$, következésképpen $\text{Eig}(D){=}\mathbb{C}$, és így $\text{Sp}(D){=}\mathbb{C}$.

$P_0{=}D^*$ zárt operátor, így a 23.9. állítás szerint $\text{Sp}(P_0){=}\text{Sp}(P_0^*)^*{=}\text{Sp}(D)^*{=}\mathbb{C}$.

Ha $\lambda{\in}\mathbb{C}$ sajátértéke $P_0$-nak, akkor sajátértéke $D$-nek is, következésképpen a $\lambda$-hoz tartozó sajátaltér $\mathbb{C}\exp^{i\lambda}$ volna. Az $e^{i\lambda\pi}{=}e^{-i\lambda\pi}{=}0$ feltétel azonban semmilyen $\lambda$-ra nem teljesül, tehát $\text{Eig}(P_0){=}\emptyset$.

**26.3. Állítás** *$\text{Eig}(P_\alpha){=}\text{Sp}(P_\alpha){=}\mathbb{Z}-\beta$, ahol $\beta \in ]-1,1]$ az az egyértelműen meghatározott szám, amelyre $\alpha = e^{i2\pi\beta}$.*

Bizonyítás Ha $\lambda{\in}\mathbb{C}$ sajátértéke $P_\alpha$-nak, akkor sajátértéke $D$-nek is, és a $\lambda$-hoz tartozó sajátaltér $\mathbb{C}\exp^{i\lambda}$. Az $e^{-i\lambda\pi}{=}e^{i2\pi\beta}e^{i\lambda\pi}$ azaz $e^{2\pi i(\lambda+\beta)} = 1$ feltétel pontosan akkor teljesül, ha $\lambda+\beta{\in}\mathbb{Z}$, tehát $\text{Eig}(P_\alpha){=}\mathbb{Z}-\beta$. $P_\alpha$ önadjungált operátor, melynek sajátvektorai $\{\exp^{i(n-\beta)} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 14.1. és 14.10. szerint teljes ortonormált rendeszert alkotnak, így a 25.7. értelmében $\text{Sp}(P_\alpha) = \overline{\text{Eig}(P_\alpha)}{=}\mathbb{Z}-\beta$.

**26.4. Állítás** $\text{Eig}(P){=}\emptyset$, $\quad \text{Sp}(P){=}\mathbb{R}$.

Bizonyítás $P$ önadjungált, tehát a spektruma valós. Ha $\lambda{\in}\mathbb{R}$ sajátérték, akkor $P\phi{=}-i\phi' = \lambda\phi$ teljesül valamely nemnulla, négyzetesen integrálható $\phi$-re. Ennek az egyenletnek a megoldásai $\phi = c\exp^{i\lambda}$ alakúak, ahol $c \in \mathbb{C}$, de ezek nem integrálhatók négyzetesen, így $\lambda$ nem sajátértéke $P$-nek, következésképpen $\text{Eig}(P){=}\emptyset$.

Legyen $\lambda{\in}\mathbb{R}$; ekkor minden $n{\in}\mathbb{N}$ esetén

$$\phi_n : \mathbb{R}\to\mathbb{C}, \quad x \mapsto e^{ix\lambda-|x|/n}$$

négyzetesen integrálható, és

$$\|\phi_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\phi_n|^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-2|x|/n}\, dx = n \geq 1.$$

Továbbá $P\phi_n - \lambda\phi_n = \dfrac{i}{n}\operatorname{sign}\phi_n$, így $\|P\phi_n - \lambda\phi_n\|^2 = \dfrac{1}{n^2}\|\phi_n\|^2 = \frac{1}{n}$, következésképpen $\lim\limits_n \|P\phi_n - \lambda\phi_n\| = 0$, tehát $\lambda$ általánosított sajátértéke $P$-nek. Ezzel beláttuk, hogy $\mathrm{Sp}(P) = \mathbb{R}$.

**26.5. Feladatok**

1. Igazoljuk, hogy $P_0D$ sajátvektorai a nyított végű állóhullámok, $DP_0$ sajátvektorai a zárt végű állóhullámok (lásd a 14.11.3. feladatot). Adjuk meg ezek szerint ennek a két operátornak a spektrumát.

2. $P_0D$ és $DP_0$ pozitív önadjungált operátorok (lásd a 25.1. feladatot), amelyek sajátaltereinek zárt lineáris burka az egész tér. Ezért a 25.3. feladat szerint van négyzetgyökük, azaz olyan önadjungált operátorok, amelyek négyzetei $P_0D$ illetve $DP_0$. Mutassuk meg, hogy ezek a négyzetgyökök nem differenciálás-operátorok.

3. Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{Eig}(P^2) = \emptyset$, $\mathrm{Sp}(P^2) = \mathbb{R}_0^+$.

4. Bizonyítsuk be a spektrumokról megismertek alapján, hogy az $L^2([-\pi, \pi])$-beli $(P_\alpha, M_{\mathrm{id}_{[-\pi,\pi]}})$ és $(P_{\alpha'}, M_{\mathrm{id}_{[-\pi,\pi]}})$ Heisenberg-párok unitér inekvivalensek, ha $\alpha \neq \alpha'$.

# 27. Szorzásoperátorok spektruma

**27.1.** Emlékeztetünk arra, hogy egy $(M, d)$ metrikus tér Borel-halmazain értelmezett $\nu$ mérték **tartója**

$$\mathrm{Supp}(\nu) := \{x \in M \mid \nu(G) \neq 0 \text{ minden } G \text{ nyílt halmazra, melyre } x \in G\},$$

és bevezetjük a

$$\mathrm{Sharp}(\nu) := \{x \in M \mid \nu(\{x\}) \neq 0\}$$

halmazt, amelynek az elemei a $\nu$ **éles pontjai**.

**27.2.** Az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ $\sigma$-véges mértéktér esetén az $f : X \to \mathbb{K}$ mérhető függvénnyel való $M_f$ szorzás operátorát $L^2_\mu(X)$-ben a 21. fejezetben definiáltuk. $\mu \circ \overset{-1}{f}$ a $\mathbb{K}$ Borel-halmazain adott mérték.

## Állítás

$$\mathrm{Eig}(M_f) = \mathrm{Sharp}(\mu\circ \overset{-1}{f}), \qquad \mathrm{Sp}(M_f) = \mathrm{Supp}(\mu\circ \overset{-1}{f}),$$

*és a $\lambda$ sajátértékhez tartozó sajátaltér $L^2_\mu(\overset{-1}{f}(\{\lambda\})$.*

Bizonyítás Minden $\lambda \in \mathbb{K}$ és $\phi \in \mathrm{Dom}(M_f)$ esetén

$$f\phi = \lambda\phi \quad \mu-\text{m.m.} \qquad \text{pontosan akkor, ha} \qquad \chi_{\{f=\lambda\}}\phi = \phi \quad \mu-\text{m.m.}, \qquad (*)$$

ezért ha $\lambda \in \mathrm{Eig}(M_f)$, akkor igaz a sajátaltérre tett kijelentésünk.

Legyen $\lambda\in\mathbb{K}$ olyan, hogy $(\mu\circ \overset{-1}{f})(\{\lambda\})=0$. Ekkor csak a $\phi = 0$ $\mu$-m.m. fügvényre teljesül $(*)$, így $\lambda\notin\mathrm{Eig}(M_f)$.

Legyen $\lambda\in\mathbb{K}$ olyan, hogy $(\mu\circ \overset{-1}{f})(\{\lambda\})\neq0$. Ekkor létezik $E\in\mathcal{A}$, $E\subset\{f=\lambda\}$ úgy, hogy $+\infty>\mu(E)>0$; $\phi := \chi_E$ nem $\mu$-m.m. nulla, és teljesíti a $(*)$ egyenlőséget, tehát $\lambda\in\mathrm{Eig}(M_f)$.

Legyen $\lambda\notin\mathrm{Supp}(\mu\circ \overset{-1}{f})$. Ekkor van olyan $r>0$, hogy $(\mu\circ \overset{-1}{f})(G_r(\lambda))=0$, ami azzal egyenértékű, hogy $\mu(\{|f-\lambda|<r\})=0$. Minden $\phi\in\mathrm{Dom}(f)$ esetén

$$\|M_f\phi-\lambda\phi\|^2 = \int_X |f-\lambda|^2|\phi|^2 d\mu = \int_{[|f-\lambda|\geq r]} |f-\lambda|^2|\phi|^2 d\mu \geq$$

$$\geq \int_{[|f-\lambda|\geq r]} r^2|\phi|^2 d\mu = r^2\|\phi\|^2,$$

következésképpen $M_f-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ injektív, és inverze folytonos. Lévén $M_f$ normális, ez azt jelenti, hogy $\lambda\notin\mathrm{Sp}(M_f)$.

Legyen $\lambda\in\mathrm{Supp}(\mu\circ \overset{-1}{f}) \setminus \mathrm{Sharp}(\mu \circ \overset{-1}{f})$.

Ekkor minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $\mu(\{|f-\lambda|<1/n\})=(\mu\circ \overset{-1}{f})(G_{1/n}(\lambda))\neq0$. Továbbá létezik olyan $E_n \in \mathcal{A}$, hogy $E_n \subset \overset{-1}{f}(G_{1/n}(\lambda)$ és $0 < \mu(E_n) < \infty$. A

$$\phi_n := \frac{\chi_{E_n}}{\sqrt{\mu(E_n)}}$$

függvény benne van $\mathrm{Dom}(M_f)$-ben, $\|\phi_n\|=1$, és $\|M_f\phi_n-\lambda\phi_n\|^2\leq1/n^2$; következésképpen $\lambda$ általánosított sajátértéke $M_f$-nek, tehát $\lambda\in\mathrm{Sp}(M_f)$. ■

Érdemes a sajátértékekre vonatkozó állítást másként is megfogalmazni: $M_f$-nek pontosan akkor van sajátértéke, ha $f$ konstans egy nemnulla $\mu$-mértékű halmazon, és a sajátértéke ez a konstans érték.

**27.3. Feladatok**

1. Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{Sp}(M_f) \subset \overline{\mathrm{Ran} f}$.

2 Ha $X$ az $\mathbb{R}^N$ nyílt részhalmaza és $\mu$ a Lebesgue-mérték $X$-en, továbbá $f : X \to \mathbb{K}$ folytonos, akkor $\mathrm{Sp}(M_f) = \overline{\mathrm{Ran} f}$. Adjuk meg ennek alapján $L^2(\mathbb{R})$-ben az exponenciális függvénnyel, a szinusz függvénnyel, az identitással és az $1/\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ függvénnyel való szorzás operátorának a spektrumát!

3. Adjunk meg $L^2(\mathbb{R})$-ben egy olyan $S$ önadjungált operátort, amelyre $\mathrm{Eig}(S) = \mathbb{Z}$, $\mathrm{Sp}(S) = \mathbb{R}$!

4. Milyen a spektruma a szorzásoperátoroknak $l^2$-ben?

# 28. Fourier-transzformációk

**28.1.** Jelölje $C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ az $\mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ végtelenszer differenciálható függvények halmazát. Nyilvánvaló, hogy $C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ a pontonkénti műveletekkel komplex vektortér. Ennek különleges és fontos elemei az úgynevezett $N$ változós **multipolinomok**, amelyek a következő alakúak: adott egy $m$ természetes szám, és minden $k_1, \ldots, k_N \in \mathbb{N}$, $k_1 + \cdots + k_N \le m$ esetén egy $c_{k_1 k_2 \ldots k_N} \in \mathbb{C}$, és ezekkel

$$p(x) := \sum_{k_1 + \ldots + k_N \le m} c_{k_1 k_2 \ldots\, k_N} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_N^{k_N} \qquad (x \in \mathbb{R}^N). \qquad (*)$$

Az ilyen multipolinomot legfeljebb $m$-edfokúnak mondjuk, és $m$-ed fokú, ha van olyan $k_1, \ldots, k_N$, $k_1 + \cdots + k_N = m$, hogy $c_{k_1 k_2 \ldots k_N} \ne 0$.

**28.2.** A következő lineáris operátorokat vezetjük be $C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$-n.

1. $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ esetén

$$M_f : C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \quad \phi \mapsto f\phi;$$

ezt az $f$-**fel való szorzásnak** nevezzük.

2. A $(*)$ alakú multipolinom és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$p(\alpha D) : C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}),$$

$$\phi \mapsto \sum_{k_1 + \ldots + k_N \le m} c_{k_1 k_2 \ldots k_N} (\alpha \partial_1)^{k_1} (\alpha \partial_2)^{k_2} \ldots (\alpha \partial_N)^{k_N} \phi;$$

az ilyet **multipolinomiális differenciálásnak** nevezzük. Az $\alpha$ szerepe lényegtelen, hiszen adott $p$ és $\alpha$ esetén létezik egyértelműen egy $p_\alpha$ multipolinom úgy, hogy $p(\alpha D) = p_\alpha(D)$. Célszerűségi okokból formuláinkban $\alpha$=1 és $\alpha = \pm\, i$ fog megjelenni.

3. $a\in\mathbb{R}^N$ esetén

$$L_a : C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})\to C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}), \quad (L_a\phi)(x) := \phi(x-a) \quad (x\in\mathbb{R}^N);$$

ezt az $a$-**val való eltolásnak** nevezzük.

4. Legyen $u:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ végtelen sokszor differenciálható bijekció, amelynek az inverze is végtelenszer differencálható (vagyis $u$ $C^\infty$-diffeomorfizmus); ekkor

$$K_u : C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})\to C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}), \quad \phi \mapsto \phi\circ u^{-1};$$

ezt az $U$-**való belső transzformációnak** nevezzük.

**28.3.** Definíció *A $\phi\in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ függvényt* ***gyorsan csökkenőnek*** *nevezzük, ha minden $q, p$ $N$-változós multipolinom esetén $qp(D)\phi$ korlátos.*

Jelölje $S(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ az $\mathbb{R}^N\to\mathbb{C}$ gyorsan csökkenő függvények halmazát. Nyilvánvaló, hogy $S(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ lineáris altere $C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$-nek, és nem üres, mert például $x\mapsto e^{-|x|^2}$ benne van.

Állítás *$\phi\in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ akkor és csak akkor gyorsan csökkenő, ha ha minden $q, p$ multipolinom esetén $\lim_\infty qp(D)\phi=0$.*

Bizonyítás A feltétel nyilván elégséges. Szükséges is: minden $m\in\mathbb{N}$ esetén $(1+|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^2)^m$ multipolinom, amely $q$-val szorozva szintén multipolinom, következésképpen $(1+|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^2)^m qp(D)\phi$ korlátos, ami csak úgy lehet, hogy $qp(D)\phi$ a végtelenben nullához tart. ■

Egyszerű tény, hogy ha $q, p$ multipolinomok, $a\in\mathbb{R}^N$ és $A:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ lineáris bijekció, akkor $S(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ invariáns az $M_q$, $p(D)$, $L_a$ és $K_A$ operátorokra, azaz $M_q[S(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})]\subset S(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ stb., tehát ezeket az operátorokat (a leszűkítésükkel) tekinthetjük úgy is, mint $S(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \to S(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ lineáris leképezéseket.

**28.4.** Állítás *$S(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ minden $1\le p\le\infty$ esetén lineáris altere $L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$-nek, és sűrű, ha $p \neq \infty$.*

Bizonyítás Ez triviális, ha $p=+\infty$. Ha $p<+\infty$ és $\phi\in S(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$, akkor bármely $m\in\mathbb{N}$ esetén létezik $\kappa_m>0$ úgy, hogy $|\phi|(1+|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^2)^m\le\kappa_m$, amiből

$$|\phi|^p\le\frac{\kappa_m^p}{(1+|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^2)^{mp}},$$

és a jobb oldali függvény integrálható, ha $2mp>N$.

$S(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ sűrű $L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$-ben, mert tartalmazza a kompakt tartójú végtelenszer differenciálható függvényeket, amelyek sűrű lineáris alteret alkotnak.

**28.5.** Definíció *$\phi \in S(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ esetén legyen*

$$(F_\pm \phi)(y) := \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{\pm i y \cdot x} \phi(x)\, dx \qquad (y \in \mathbb{R}^N),$$

*ahol $y \cdot x$ az $\mathbb{R}^N$-beli $y$ és $x$ szokásos skalárszorzatát jelöli.*
*$F_\pm \phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ a $\phi$* ***pozitív*** *illetve* ***negatív Fourier-transzformáltja****.*

Állítás *Minden $\phi \in S(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ esetén $F_\pm \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$.*

Bizonyítás A paraméteres integrál differenciálhatóságára vonatkozó tételt (Analízis V.B.11.4.) alkalmazzuk. Az integrandus minden rögzített $x$ mellett $y$-ban minden koordináta szerint differenciálható, és $\pm i x_k e^{\pm i y \cdot x} \phi(x)$ a $k$-ik parciális deriváltja, amely minden rögzített $y$ mellett $x$-ben integrálható, és $y$-tól független integrálható majoránsa $x \mapsto |x_k \phi(x)|$. Tehát $F_\pm \phi$ a változójának minden komponense szerint parciálisan differenciálható, és

$$\frac{\partial (F_\pm \phi)(y)}{\partial y_k} = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} (\pm i x_k) e^{\pm i y \cdot x} \phi(x)\, dx.$$

Ezek a parciális deriváltak, ugyanilyen indoklással, ugyancsak parciálisan differenciálhatók, és indukcióval beláthatjuk, hogy $F_\pm \phi$ akármilyen rendben, akármilyen sorrendben parciálisan differenciálható, azaz végtelenszer differenciálható.

**28.6.** Állítás *Legyenek $q, p$ $N$-változós multipolinomok, $a \in \mathbb{R}^N$ és $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ lineáris bijekció. Ekkor*

$$(1) p(\mp i D) \circ F_\pm = F_\pm \circ M_p, \qquad (2) M_q \circ F_\pm = F_\pm \circ q(\pm i D),$$

$$(3) L_a \circ F_\pm = F_\pm \circ M_{\exp(\mp i (a \cdot))}, \qquad (4) F_\pm \circ L_a = M_{\exp(\pm i (a \cdot))} \circ F_\pm,$$

$$(5) K_A \circ F_\pm = F_\pm \circ (|\det A| K_{A^{*-1}}), \quad (6) F_\pm \circ K_A = |\det A| K_{A^{*-1}} \circ F_\pm.$$

Bizonyítás Az elsőt a paraciális deriváltakra való fenti bizonyításból az integrálás linearitása alapján kapjuk. A harmadik, negyedik, ötodik és hatodik helyettesítéses integálással azonnal adódik, az Olvasóra bízzuk, számolja végig. A második bizonyításánál felhasználjuk a Fubini-tételt és a parciális integrálás tételét; elég a

$q{:=}\mathrm{pr}_k$ multipolinomra szorítkozni. Ha $\phi{\in}S(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$, akkor minden $y{\in}\mathbb{R}^N$ esetén

$$(F_\pm(\pm i\partial_k\phi))(y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy\cdot x}(\pm i\partial_k\phi)(x)dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{\pm iy\cdot x}(\pm i\partial_k\phi)(x)dx_k\right)dx_1\ldots dx_{k-1}dx_{k+1}\ldots dx_N =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}}(\pm i\frac{\partial(e^{\pm iy\cdot x})}{\partial x_k}\phi(x)dx_k\right)dx_1\ldots dx_{k-1}dx_{k+1}\ldots dx_N =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} y_k e^{\pm iy\cdot x}\phi(x)dx_k\right)dx_1\ldots dx_{k-1}dx_{k+1}\ldots dx_N =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}y_k\int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy\cdot x}\phi(x)dx = y_k(F_\pm\phi)(y) = (\mathrm{pr}_k F_\pm\phi)(y).$$

**28.7.** Állítás *Minden $\phi\in S(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$ esetén $F_\pm\phi\in S(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$.*

Bizonyítás Ha $q,p$ $N$-változós multipolinomok és $\phi{\in}S(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$, akkor az előbbi állítás első és második formulája szerint

$$qp(\mp iD)F_\pm\phi = F_\pm q(\pm iD)p\phi,$$

így minden $x{\in}\mathbb{R}^N$ esetén

$$|(qp(\mp iD)F_\pm\phi)(x)| = |(F_\pm(q(\pm iD)p\phi))(x)| \le \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|q(\pm iD)p\phi|,$$

azaz $qp(\mp iD)F_\pm\phi$ korlátos, így $F_\pm\phi{\in}S(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$.

**28.8** Állítás *Az $\eta:\mathbb{R}^N{\to}\mathbb{C}$, $x{\mapsto}e^{-|x|^2/2}$ függvény az $S(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$ eleme, és $F_\pm\eta{=}\eta$.*

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy $\eta$ végtelenszer differenciálható és gyorsan csökkenő.

Vegyük először az $N{=}1$ esetet. $\eta$ megoldása az $f'{+}\mathrm{id}_{\mathbb{R}}f{=}0$ lineáris differenciálegyenletnek, sőt ezen egyenlet minden megoldása $c\eta$ alakú, ahol $c{\in}\mathbb{C}$. Tehát $\pm iD\eta{\pm}i\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\eta{=}0$, következésképpen

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(F_\pm\eta) + D(F_\pm\eta) = F_\pm(\pm iD\eta{\pm}i\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\eta) = 0,$$

azaz $F_{\pm}\eta$ is ugyanannak a differenciálegyenletnek tesz eleget, ezért létezik $c{\in}\mathbb{C}$ úgy, hogy $F_{\pm}\eta{=}c\eta$. Azonban

$$c = c\eta(0){=}(F_{\pm}\eta)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi)}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}dx = 1,$$

tehát $F_{\pm}\eta{=}\eta$.

$N{\geq}2$ esetén a Fubini-tétel szerint

$$(F_{\pm}\eta)(y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy\cdot x}e^{-|x|^2/2}dx = \prod_{k=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{\pm iy_kx_k}e^{-x_k^2/2}dx_k =$$

$$= \prod_{k=1}^{N} e^{-y_k^2/2} = e^{-|y|^2/2}.$$

**28.9.** A továbbiakban fontos lesz az az egyszerű észrevétel, hogy ha $\phi, \psi \in S(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$, akkor

$$\mathbb{R}^N{\times}\mathbb{R}^N{\to}\mathbb{C}, \quad (x, y){\mapsto}e^{\pm ix\cdot y}\phi(x)\psi(y)$$

függvény integrálható a Lebesgue-mérték szerint, így a Fubini-tétel alapján

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}(F_{\pm}\phi)\psi = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \exp(\pm ix\cdot y)\phi(x)\psi(y)dxdy = \int\limits_{\mathbb{R}^N}\phi(F_{\pm}\psi). \qquad (*)$$

**Állítás** *$F_{\pm}{:}S(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}){\to}S(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ lineáris bijekció, és*

$$(F_{\pm})^{-1} = F_{\mp}.$$

Bizonyítás Legyen $\alpha{>}0$, és alkalmazzuk a $(*)$ összefügést tetszőleges $\phi$-re és a $\psi := K_{\alpha\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}}\eta$ függvényre. Ekkor 28.6. és 28.8. alapján azt kapjuk, hogy

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}(F_{\pm}\phi)(y)\exp(-|y|^2/2\alpha^2)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^N}\phi(x)\alpha^N\exp(-|\alpha x|^2/2)dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N}\phi(z/\alpha)\exp(-|z|^2/2)dz;$$

a második egyenlőség a $z := \alpha x$ helyettesítéssel adódik.

A fenti egyenlőség mindkét oldalán az integrandusnak van $\alpha$-tól független integrálható majoránsa, a bal oldalinak $F_\pm\phi$, a jobb oldalinak $y\mapsto\|\phi\|_\infty\cdot\exp(-|y|^2/2)$, így a Lebesgue tétel következménye szerint az $\alpha\to\infty$ határátmenettel azt kapjuk, hogy

$$\int_{\mathbb{R}^N}(F_\pm\phi)(y)dy=\int_{\mathbb{R}^N}\phi(0)\exp(-|z|^2/2)dz=\phi(0)(2\pi)^{N/2}.$$

A 28.6. alapján minden $x\in\mathbb{R}^N$ esetén

$$\begin{aligned}\phi(x)=(L_{-x}\phi)(0)=&\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N}(F_\pm L_{-x}\phi)(y)dy=\\ =&\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N}e^{\mp ix\cdot y}(F_\pm\phi)(y)dy=(F_\mp F_\pm\phi)(x),\end{aligned}$$

tehát $F_\mp F_\pm\phi=\phi$.

**Megjegyzés** A matematikai (és fizikai) irodalomban ki $F_+$-t, ki $F_-$-t hívja Fourier-transzformációnak, és akkor persze a másik a Fourier-transzformáció inverze. A mi elnevezésünk mind a két esetet magában foglalja.

**28.10.** Állítás *Minden $\phi,\psi\in S(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$ esetén*

$$\langle F_\pm\phi,F_\pm\psi\rangle=\langle\phi,\psi\rangle,$$

*ahol $\langle.,.\rangle$ jelöli az $L^2(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$ Hilbert-tér skalárszorzatát.*

Bizonyítás Használjuk azt az egyszerű tényt, hogy $(F_\pm\phi)^*=F_\pm\phi^*$; ezzel az előző pont $(*)$ formulája alapján

$$\begin{aligned}\langle F_\pm\phi,\psi\rangle=&\int_{\mathbb{R}^N}(F_\pm\phi)^*\psi=\int_{\mathbb{R}^N}F_\pm\phi^*\psi=\int_{\mathbb{R}^N}\phi^*F_\pm\psi=\\ =&\langle\phi^*,(F_\pm\psi)\rangle.\end{aligned}$$

**28.11.** Állítás *(**Plancherel-tétel**) Létezik $\overline{F_\pm}:L^2(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})\to L^2(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$ unitér operátor, amely egyértelmű kiterjesztése $F_\pm$-nek.*

Bizonyítás Az előző állítás szerint $F_\pm:S(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})\to S(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$ izometrikus bijekció az $L^2(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$ tértől örökölt skalárszorzatra nézve.

A gyorsan csökkenő függvények sűrű lineáris alteret alkotnak $L^2(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$-ben, ezért $F_\pm$ egyértelműen kiterjeszthető izometrikus oprátorrá az egész Hilbert-térre (lásd a 17.10.5. feladatot). A kiterjesztett $\overline{F_\pm}$ izometrikus operátor értelmezési tartománya zárt, ezért értékkészlete is zárt (17.1.2 állítás); de az értékkészlet tartalmazza a sűrű $S(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ alteret, ezért az egész térrel egyezik meg. ∎

$\overline{F_\pm}$-t **Fourier–Plancherel-operátornak** nevezik, de gyakran ezt is egyszerűen Fourier-transzformációnak hívják; mi is ezt az elnevezést használjuk, sőt a továbbiakban a Fourier–Plancherel-operátort is egyszerűen $F_\pm$-szal jelöljük.

**28.12.** A négyzetesen integrálható függvények Fourier transzformáltját általában nem adhatjuk meg a 28.5. definícióban szereplő jól ismert képlettel (a szóban forgó integrál nem feltétlenül létezik), csak akkor, ha $\phi \in L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$.

Tudjuk, hogy véges mértékű halmazon négyzetesen integrálható függvény integrálható is. Ha $\phi \in L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ és $n \in \mathbb{N}$, akkor $\chi_{G_n(0)}\phi \in L^2(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$, tehát

$$(F_\pm(\chi_{G_n(0)}\phi))(y) = (2\pi)^{-N/2} \int\limits_{G_n(0)} e^{\pm iy\cdot x}\phi(x)dx.$$

A $(\chi_{G_n(0)}\phi)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergál $\phi$-hez az $L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ térben, így a Fourier transzformáció folytonossága miatt

$$F_\pm\phi = (L^2)\lim_n \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{G_n(0)} e^{\pm i(\cdot)\cdot x}\phi(x)dx.$$

Felhívjuk a figyelmet, hogy a szóban forgó limesz az $L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ térben, és nem pontonként értendő.

**28.12.** Módosíthatjuk és általánosíthatjuk a Fourier-transzformációt a következőképpen.

1) $C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ és $S(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ helyett vehetjük a $C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}^M)$ és $S(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}^M)$ tereket, amelyekre formálisan mindent ugyanúgy értelmezhetünk mint eddig, és minden érvényben marad, amit mondtunk.

Világos, hogy például $\phi$ pontosan akkor eleme $S(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}^M)$-nek, ha minden komponens-függvénye $S(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ eleme. $\phi$ Fourier-transzformáltja az a függvény, amelynek komponensei a $\phi$ konmponenseinek Fourier-transzformáltjai.

2) A Fourier-transzformáció 28.5-beli definíciójában a pontszorzás (az $\mathbb{R}^N$-beli skalárszorzás) helyett vehetünk egy

$$y \bullet x := -\sum_{k=1}^{n} y_k x_k + \sum_{k=n+1}^{N} y_k x_k.$$

pszeudoeuklideszi szorzást (például a Lorentz-szorzást, amely a relativitáselméletben szerepel)

Ekkor szóról-szóra minden elismételhető, amit mondtunk (külön figyelmet érdemel, hogy érvényben marad a 28.8. álllítás is).

Ha akármilyen más $\bullet$ pszeudoeklideszi szorzást veszünk, akkor létezik $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ a szokásos skalárszorzatra nézve szimmetrikus lineáris bijekció (azaz szimmetrikus $N \times N$-es mátrix, amelynek a determinánsa nem nulla) úgy, hogy

$$y \bullet x = y \cdot Ax = Ay \cdot x.$$

Ha 28.5-ben $y \cdot x$ helyet ezt az $y \bullet x$-et tesszük, és még egy megfelelő szorzót is alkalmazunk, akkor az

$$(F_\pm^A \phi)(y) := \frac{\sqrt{|\det A|}}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{\pm i Ay\cdot x} \phi(x)\, dx$$

Fourier-transzformációt kapjuk. Nyilvánvaló, hogy $F_\pm^A = \sqrt{|\det A|} K_{A^{-1}} F_\pm$, és ebből azt kapjuk a 28.6. (6) alapján, hogy

$$\left(F_\pm^A\right)^{-1} = F_\mp^A.$$

**28.13.** A gyorsan csökkenő függvények definíciójában a $p$ és $q$ multipolinomok helyett elég a projekció-szorzatokat vennünk, hizen minden multipolinom ilyenek lineáris kombinációja: ha minden projekció-szorzatra igaz a korlátosság, akkor igaz ilyenek számszorosára és összegére is.

Ez az észrevétel teszi lehetővé, hogy könnyen értelmezhessük a gyorsan csökkenő függvényeket egy akármilyen véges dimenziós vektortéren.

Legyen $V$ véges dimenziós valós vektortér. A $V^*$ duális tér $k_1, k_2$ elemének mint $V \to \mathbb{R}$ függvényeknek értelmes a pontonkénti szorzatuk, $k_1 k_2 : V \to \mathbb{R}$ (amely már nem lesz a duális eleme, mert nem lineáris).

Véges dimenziós vektortéren bármely két norma ekvivalens, tehát folytonosságról, differenciálhatóságról stb. beszélhetünk anélkül, hogy konkrét normát megadnánk.

Emlékeztetünk, hogy a $\phi \in C^\infty(V, \mathbb{C})$ függvényre $D^m\phi(x)$ (az $m$-ik deriváltja az $x$ helyen) $V^m \to \mathbb{C}$ szimmetrikus, $m$-lineáris leképezés, amelyet a következőkben $(v_1, \dots, v_m) \mapsto D^m_{v_1,\dots,v_m}\phi(x)$ formában írunk.

Definíció *A $\phi \in C^\infty(V, \mathbb{C})$ függvényt **gyorsan csökkenőnek** nevezzük, ha minden $n, m \in \mathbb{N}$ és $k_1, \dots, k_n \in V^*$ valamint $v_1, \dots, v_m \in V$ esetén*

$$(k_1 \dots k_n) D^m_{v_1,\dots v_m}\phi$$

*korlátos függvény.*

Uugyanúgy, mint 28.3-ban, beláthatjuk, hogy a fenti követelmény egyenértékű azzal, hogy a szóban forgó függvények a végtelenben a nullához tartanak. A gyorsan csökkenő függvények összességét $S(V, \mathbb{C})$-vel jelöljük.

Tudjuk, hogy véges dimenziós vektortér Borel-halmazain létezik eltolás-invariáns mérték, amely számszorzó erejéig egyértelmű (Analízis V.B.16.3.(iv)). Válasszunk egy ilyen $\mu$ mértéket $V$-n, és definiáljuk ezzel a $\phi \in S(V, \mathbb{C})$ Fourier-transzformáltját:

$$(F_{\pm,\mu}\phi) := \int_V e^{\pm i(k|x)}\phi(x)\, d\mu(x) \qquad (k \in V^*).$$

A 28.6. formulái értelemszerű változtatásokkal érvényben maradnak, és ebből megállapíthatjuk, hogy $F_{\pm,\mu}\phi \in S(V^*, \mathbb{C})$. A Fourier-transzformáció itt tehát **különböző vektorterek közötti** lineáris leképezés; így nem igaz – nem létezhet – egy 28.8-hoz hasonló állítás. Ezért sajnos csak úgy folytathatjuk, hogy veszünk egy olyan $K : V \to \mathbb{R}^N$ koordinátázást, amelyre $\mu \circ \overset{-1}{K} = \frac{\lambda_N}{(2\pi)^{N/2}}$. Azt találjuk, hogy a $\hat{K} : S(V, \mathbb{C}) \to S(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$, $\phi \mapsto \phi \circ K^{-1}$ és értelemszerűen a $\widehat{K^*} : S(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \to S(V^*, \mathbb{C})$, $\psi \mapsto \psi \circ K^{*-1}$ jelöléssel

$$\widehat{K^*} F_{\pm} \hat{K} = F_{\pm,\mu}.$$

Ebből arra jutunk, hogy ha $\mu^* := \dfrac{\lambda_N}{(2\pi)^N/2} \circ K^{*-1}$, akkor

$$(F_{\pm,\mu})^{-1} = F_{\mp,\mu^*}.$$

**28.14. Feladatok**

1. Próbáljuk megadni az

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{ha } |x| < 1, \\ \frac{1}{x} & \text{ha } |x| \geq 1 \end{cases}$$

négyzetesen integrálható függvény Fourier-transzformáltját!

2. Fogalmazzuk meg pontosan, milyen formulák érvényesek a 28.6. mintájára a $V \to \mathbb{C}$ gyorsan csökkenő függvényeken értelmezett Fourier-transzformációra (vegyük figyelembe, hogy $V^{**} = V$).

3. Igazoljuk, hogy $\phi \in C^\infty(V, \mathbb{C})$ pontosan akkor gyorsan csökkenő, ha minden $n, m \in \mathbb{N}_0$ esetén a $V \to \overset{n}{\otimes} V \otimes \overset{m}{\otimes} V^*$, $x \to \overset{n}{\otimes} x \otimes D^m\phi(x)$ függvény korlátos.

4. Az eltolás-invariáns mérték számszorzó erejéig egyértelmű; a $V$ egy ilyen mértékének a rögzítése egyértelműen meghatározza a $V^*$ egy eltolás-invariáns mértékét úgy, hogy a pozitív és a negatív Fourier-transzofrmációk egymás inverzei legyenek. Mutassuk meg, hogy az előző pont jelölésével minden $c \in \mathbb{R}^+$ esetén $(c\mu)^* = \frac{1}{c}\mu^*$.

Alkalmazzuk ezt a $V = \mathbb{R}^N$ esetre az $(\mathbb{R}^N)^* \equiv \mathbb{R}^N$ azonosítással: mi lesz $\lambda^*$?

5. Mutassuk meg, hogy ha $\phi \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, akkor

$$\int_0^y F_\pm \phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\pm ix\cdot y} - 1}{\pm ix} \phi(x)\, dx$$

amit az abszolút folytonos függvények differencálására vonatkozó megállapodásunk szerint így is írhatunk:

$$(F_\pm \phi)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dy} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\pm ix\cdot y} - 1}{\pm ix} \phi(x)\, dx.$$

(Útmutatás: minden $y$-ra az $x \to \rho_y(x) := \dfrac{e^{\pm ix\cdot y} - 1}{\pm ix}$ függvény négyzetesen integrálható, ezért a jobb oldali integrál létezik, és egyenlő $\left\langle \rho_y^*, \phi \right\rangle$-vel. A bal oldali integrál pedig $\left\langle \chi_{[0,y]}, F_\pm \phi \right\rangle$. Elég tehát megmutatni, hogy az egyenlőség fennáll az $S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sűrű lináris altéren.)

# 29. Differenciáloperátorok $L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$-ben

**29.1.** Értelmeztük az $f$ mérhető függvénnyel szorzás $M_f$ oprátorát $L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$-ben, és a $p$ polinommal szorzás $M_p$ operátorát $S(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$-ben. A jelölés nem egyértelmű, hiszen a $p$ polinommal szorozhatunk $L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$-ben is. Persze, amíg csak a gyorsan csökkenő függvényekről beszéltünk, ez nem okozott zavart. Világos, hogy a gyorsan csökkenő függvényeken értelmezett szorzásoperátor a négyzetesen integrálható függvények értelmezett szorzásoperátornak a leszűkítése. Ezért a most következőkben $M_p$-n az $L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$-beli operátort értjük, és $M_p|_S$ jelöli az $S(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$-re vett leszűkítését.

**Állítás** *Minden $p$ multipolinomra* $\overline{M_p|_S} = M_p$ .

Bizonyítás $M_p|_S$ sűrűn van értelmezve, és $M_p|_S \subset M_p$, ezért $(M_p|_S)^* \supset M_p^* = M_{p^*}$, tehát az adjungáltja is sűrűn van értelmezve, így $(M_p|_S)^{**} \subset (M_p)^{**} = M_p$. A 16.11. állítás értelmében azt kell tehát csak megmutatnunk, hogy a legutóbbi összefüggésben egyenlőség áll.

Legyen $\phi \in \mathrm{Dom}(M_p)$. Ekkor minden $\psi \in \mathrm{Dom}(M_p^*) \subset \mathrm{Dom}(M_p|_S)^*$ esetén

$$\langle \phi, (M_p|_S)^* \psi \rangle = \left\langle \phi, M_p^* \psi \right\rangle = \langle M_p \phi, \psi \rangle.$$

Mivel $\psi$ egy sűrű lináris altér tetszőleges eleme, ez azt jelenti, hogy $\langle \phi | \circ (M_p|_S)^*$ folytonos egy sűrű altéren, tehát $\phi \in \mathrm{Dom}(M_p|_S)^{**}$, és ezt kellett bizonyítanunk.

**29.2.** A 28.6. (1) vagy (2) az $N = 1$ esetben azt adja, hogy

$$F_+ M_{\mathrm{id}_\mathbb{R}}|_S F_+^{-1} \subset P,$$

ahol $P$ a 20. fejezetben értelmezett differenciálás-operátor. Az előző eredményünk alapján, minthogy a lezárás bevihető az unitér transzformáció alá (lásd a 17.10.1. feladatot), $F_+ M_{\mathrm{id}_\mathbb{R}} F_+^{-1} \subset P$; a bal oldalon is, a jobb oldalon is önadjungált operátor áll, ezért szükségképpen egyenlőség teljesül (lásd 17.4.):

$$F_+ M_{\mathrm{id}_\mathbb{R}} F_+^{-1} = P.$$

Ennek alapján értelmezzük a differenciáloperátorokat $L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$-ben: ha $p$ multipolinom, akkor

$$p(-iD) := F_+ M_p F_+^{-1}.$$

Figyelem: itt a megállapodásunknak megfelelően $M_p$ és $F_+$ is a négyzetesen integrálható függvények Hilbert terén értelmezett operátor, ezért $p(-iD)$ is is ilyen. Az előzőeknek megfelelően mst $p(-iD)|_S$ jelölheti a gyorsan csökkenő függvényeken a korábban értelmezett differenciáloperátort. Természetesen $\overline{p(-iD)|_S} = p(-iD)$.

Az így értelmezett differenciáloperátorok $L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$-ben normálisak, és ha $p$ valós, akkor önadjungáltak. Értelmezési tartományuknak és a hozzárendelési utasításának a közvetlen leírása általában meglehetősen körülményes (ellentétben a $P$ operátor esetével).

A $p(-iD)$ értelmezési tartományának azok a négyzetesen integrálható függvények az elemei, amelyek negatív Fourier-transzformáltja benne van $M_p$ értelmezési tartományában (amely jól jellemezhető); a $p(-iD)$ hatása az értelmezési tartományának egy *megfelelően sokszor differenciálható* elemén valóban differenciálást jelent, más elemekre azonban általában csak a Fourier-transzformáción keresztül tudjuk megadni.

**29.3.** Egy speciális, sokat használt differenciáloperátor a **Laplace-operátor**, amelyet formálisan

$$\triangle := \sum_{k=1}^{N} \partial_k^2$$

alakban szokás felírni. A Laplace-operátort $L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$-ben pontosan a

$$\triangle := -F_+ M_{|\mathrm{id}^2_{\mathbb{R}^N}|} F_+^{-1}$$

formula határozza meg.

# V. KOMPAKT OPERÁTOROK

## 30. Kompakt halmazok metrikus terekben

**30.1.** Definíció *Egy metrikus tér egy részhalmazát* ***prekompaktnak****, vagy* ***teljesen korlátos****nak nevezzük, ha minden $\varepsilon>0$ esetén létezik véges sok $\varepsilon$-sugarú nyílt gömbbel való lefedése.*

Állítás *Prekompakt halmaz*

*(i) korlátos,*
*(ii) minden részhalmaza prekompakt,*
*(iii) lezártja prekompkat.*

Bizonyítás (i) és (ii) nyilvánvaló.

(iii) Legyen $K$ prekompakt halmaz az $M$ metrikus térben. Minden $\varepsilon > 0$ esetén van $x_1, \ldots, x_n$ eleme $M$-nek úgy, hogy $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} G_{\varepsilon/2}(x_k)$. Ekkor

$$\overline{K} \subset \overline{\bigcup_{k=1}^{n} G_{\varepsilon/2}(x_k)} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{G_{\varepsilon/2}(x_k)} \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_{\varepsilon}(x_k).$$

**30.2.** Kompakt halmaz prekompakt: ugyanis adott $\varepsilon > 0$ esetén a kompakt halmaz pontjai körüli $\varepsilon$ sugarú gömbök összessége lefedi a kompakt halmazt, ezért létezik közöttük véges sok is, amelyek lefedik.

A kompakt halmazok és a prekompakt halmazok kapcsolatát adja meg a következő állítás.

**Állítás** *Az $M$ metrikus tér $K$ részhalmazára a következők ekvivalensek:*

*(1) $K$ kompakt,*
*(2) $K$ prekompakt és teljes,*
*(3) $K$ minden végtelen részhalmazának van torlódási pontja $K$-ban,*
*(4) Minden $K$-beli sorozatnak van sűrűsödési helye $K$-ban.*

Bizonyítás (3)$\Leftrightarrow$(4) Nyilvánvaló.

(1)$\Rightarrow$(3) Ezt tudjuk korábbi tanulmányainkból (Analízis III.A.3.6.-B.2.3.)

(3)$\Rightarrow$(2) Ha $K$ minden végtelen részhalmazának van torlódási pontja $K$-ban, akkor $K$ teljes (Analízis III.B.4.9.4.)

Tegyük fel, hogy $K$ nem prekompakt. Ekkor létezik $\varepsilon>0$ úgy, hogy $K$ nem fedhető le véges sok $\varepsilon$-sugarú nyílt gömbbel. Legyen $x_1 \in K$ tetszőleges; ekkor $G_\varepsilon(x_1)$ nem fedi le $K$-t, tehát van $x_2 \in K \setminus G_\varepsilon(x_1)$; ekkor $d(x_1,x_2) \geq \varepsilon$. Mivel $G_\varepsilon(x_1) \cup G_\varepsilon(x_2)$ sem fedi le $K$-t, van olyan $x_3 \in K$, hogy $d(x_1,x_3) \geq \varepsilon$, $d(x_2,x_3) \geq \varepsilon$. Tovább folytatva, értelmezhető egy $K$-beli $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat úgy, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ és $k\in\{1,\ldots,n\}$ esetén $d(x_k,x_n)\geq\varepsilon$.

A kiindulási feltevés szerint a most értelmezett sorozat értékkészletének van torlódási pontja $K$-ban; legyen ez $x$. Viszont az $x$ körüli $\varepsilon/2$ sugarú nyílt gömbben legfeljebb egy tagja lehet a sorozatnak, hiszen bármely két elem távolsága $G_{\varepsilon/2}(x)$-ben kisebb $\varepsilon$-nál. Tehát $x$ nem lehet torlódási pontja az $\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ végtelen halmaznak. Ez az ellentmondás azt mondja, hogy $K$ prekompakt.

(2)$\Rightarrow$(1) Tegyük fel, hogy $K$ nem kompakt, és legyen $(N_i)_{i\in I}$ olyan nyílt lefedése $K$-nak, melynek nincs véges részlefedése. Mivel $K$ prekompakt halmaz, létezik $x_1,\ldots,x_{n_1}$ eleme $M$-nek úgy, hogy $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n_1} G_1(x_k)$. Ekkor $K\cap\overline{G_1(x_k)}$ $(1\leq k\leq n_1)$ olyan zárt halmazok $K$-ban, amelyek átmérője kisebb vagy egyenlő mint 1, és az egyesítésük $K$. Ezek közül legalább egy nem fedhető le az $(N_i)_{i\in I}$ rendszer véges sok elemével, legyen $K_1$ egy ilyen. Ekkor tehát $K_1\subset K$ és $\operatorname{diam}(K_1)\leq 1$.

$K_1$ is prekompakt, ezért létezik $y_1,\ldots,y_{n_2}$ eleme $M$-nek úgy, hogy $K_1 \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n_2} G_{1/2}(y_k)$. Ekkor $K_1\cap\overline{G_{1/2}(x_k)})$ $(1\leq k\leq n_2)$ olyan zárt halmazok $K_1$-ben, amelyek átmérője kisebb vagy egyenlő mint $\frac{1}{2}$, és az egyesítésük $K_1$. Ezek közül legalább egy nem fedhető le az $(N_i)_{i\in I}$ rendszer véges sok elemével, legyen $K_2$ egy ilyen. Ekkor tehát $K_2\subset K_1$ és $\operatorname{diam}(K_2)\leq\frac{1}{2}$.

Az eljárást folytatva, $K$-beli zárt halmazok olyan $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rendszerét kapjuk, amelyre teljesülnek a következők:

(i) $K_{n+1}\subset K_n$,

(ii) $\operatorname{diam}(K_n)\leq 1/n$,

(iii) $K_n$ nem fedhető le a $(N_i)_{i\in I}$ rendszer véges sok elemével.

Az (iii) tulajdonság szerint minden $n$-re $K_n\neq\emptyset$; legyen $a_n\in K_n$ tetszőleges. Ekkor (ii) szerint $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat $K$-ban. Mivel $K$ teljes, ez a sorozat konvergens $K$-ban, legyen $a \in K$ a határértéke. Nyilvánvaló, hogy $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Mivel $a$ eleme $K$-nak, létezik $i_0 \in I$ úgy, hogy $a \in N_{i_0}$. Az $N_{i_0}$ halmaz nyílt, ezért létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $G_{1/n_0}(a) \subset N_{i_0}$. Viszont (ii) miatt a $K_{n_0}$ minden $x$ elemére $d(x,a) < 1/n_0$, tehát

$$K_{n_0} \subset G_{1/n_0}(a) \subset N_{i_0},$$

ez pedig ellentmond (iii)-nek, tehát $K$ kompakt.

**Következmény** Egy teljes metrikus tér egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha prekompakt és zárt (ugyanis teljes metrikus tér zárt részhalmazai teljesek).

**30.3.** Definíció *Egy metrikus tér egy részhalmazát **relatív kompaktnak** nevezzük, ha a lezártja kompakt.*

Állítás *(i) Metrikus tér relatív kompakt részhalmaza prekompakt.*
*(ii) Teljes metrikus tér prekompakt részhalmaza relatív kompakt.*

Bizonyítás (i) Ha $K$ relatív kompakt halmaz egy metrikus térben, akkor $\overline{K}$ kompakt, így prekompakt, következésképpen $K$ is prekompakt.

(ii) Legyen $K$ egy teljes metrikus tér prekompakt részhalmaza. Ekkor $\overline{K}$ is prekompakt, emellett zárt, tehát az előbbi állítás következménye szerint $\overline{K}$ kompakt. ■

Tehát teljes metrikus térben a relatív kompakt halmazok megegyeznek a prekompakt halmazokkal.

Véges dimenziós vektortérben a korlátos, a prekompakt és a relatív kompakt halmazok ugyanazok.

**30.4.** Állítás *Az $M$ metrikus tér $K$ részhalmazára a következők ekvivalensek:*

*(1) $K$ relatív kompakt,*
*(2) $K$ minden végtelen részhalmazának van torlódási pontja $M$-ben,*
*(3) Minden $K$-beli sorozatnak van sűrűsödési helye $M$-ben.*

Bizonyítás (2)⇔(3) Nyilvánvaló.

(1)⇒(2) Nyilvánvaló.

(3)⇒(1) Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\overline{K}$-beli sorozat. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik $y_n \in K$ úgy, hogy $d(x_n, y_n) < 1/n$. Feltevésünk szerint az $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak létezik $a \in M$ sűrűsödési helye, melyre szükségképpen $a \in \overline{K}$ teljesül. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik $m > n$ úgy, hogy $d(y_m, a) < 1/n$. Ekkor

$$d(x_m, a) \le d(x_m, y_m) + d(y_m, a) < 2/n,$$

következésképpen $a$ sűrűsödési helye az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak is. A 30.2. állítás szerint így $\overline{K}$ kompakt.

# 31. Véges rangú operátorok

**31.1.** Definíció *Legyen* $\boldsymbol{E}$ *normált tér. Az* $A\in\mathcal{L}in(\boldsymbol{E})$ *operátort* ***véges rangúnak*** *nevezzük, ha* $\mathrm{Ran}(A)$ *véges dimenziós, és ekkor* $\mathrm{rk}(A) := \dim(\mathrm{Ran}(A))$ *az* $A$ ***rangja***. *Jelölje* $\mathcal{L}in^f(\boldsymbol{E})$ *az* $\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$ *véges rangú operátorok halmazát.*

Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{L}in^f(\boldsymbol{E})\subset\mathcal{L}in(\boldsymbol{E})$ lineáris altér, mert ha $A, B\in\mathcal{L}in^f(\boldsymbol{E})$ és $\lambda\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$, akkor $\mathrm{Ran}(A+B)=\mathrm{Ran}(A)+\mathrm{Ran}(B)$ és $\mathrm{Ran}(\lambda A)=\mathrm{Ran}(A)$, továbbá $\mathrm{Ran}(0A)=\{0\}$ miatt

$$\begin{aligned}\mathrm{rk}(A+B) &\le \mathrm{rk}(A)+\mathrm{rk}(B),\\ \mathrm{rk}(\lambda A) &= \mathrm{rk}(A),\\ \mathrm{rk}(0A) &= 0,\end{aligned}$$

így $A+B$, $\lambda A$, $0A\in\mathcal{L}in^f(\boldsymbol{E})$ .

Állítás *Ha* $A, B\in\mathcal{L}in(\boldsymbol{E})$ *és közülük legalább az egyik véges rangú, akkor* $AB$ *és* $BA$ *véges rangú, és*

$$\mathrm{rk}(BA)\le\min(\mathrm{rk}(A),\mathrm{rk}(B)),\quad \mathrm{rk}(BA)\le\min(\mathrm{rk}(A),\mathrm{rk}(B)).$$

Bizonyítás $\mathrm{Ran}(AB)=A[\mathrm{Ran}(B)]$ miatt az állítás nyilvánvaló. ■

A mondottak szerint $\mathcal{L}in^f(\boldsymbol{E})\subset\mathcal{L}in(E)$ **kétoldali ideál**, azaz lineáris altér, emellett $A\in\mathcal{L}in^f(\boldsymbol{E})$ és $T\in\mathcal{L}in(\boldsymbol{E})$ esetén $AT\in\mathcal{L}in^f(\boldsymbol{E})$ és $TA\in\mathcal{L}in^f(\boldsymbol{E})$.

**31.2.** Állítás *Ha* $\boldsymbol{H}$ *Hilbert-tér és* $A\in\mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ *véges rangú, akkor* $A^*$ *is véges rangú, és*

$$\mathrm{rk}(A^*)=\mathrm{rk}(A).$$

Bizonyítás Egyszerű tény, hogy minden $A\in\mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ esetén $A^*|_{\overline{\mathrm{Ran}(A)}}$ injektív és $A^*[\overline{\mathrm{Ran}(A)}]=\mathrm{Ran}(A^*)$ (lásd a 16.13.7. feladatot).

Ha $A$ véges rangú, akkor $\mathrm{Ran}(A)$ zárt, mert véges dimenziós altér; következésképpen $A^*|_{\mathrm{Ran}(A)}$ lineáris bijekció $\mathrm{Ran}(A)$ és $\mathrm{Ran}(A^*)$ között, ezért $A^*$ véges rangú, és rangja megegyezik $A$ rangjával.

**31.3. Feladatok**

1. Lássuk be, hogy a 31.1. definíció és természetszerű módosítással a 31.1. állítás különböző normált terek közötti folytonos lineáris leképezésekre is értelmes illetve igaz.

2. A véges rangú operátorok előállíthatók egy rangúak összegeként (lineáris kombinációjaként). Adjuk meg a 16.13.8. feladat alapján a véges rangú operátorok alakját Hilbert-térben.

3. Mik a véges rangú szorzásoperátorok $L^2(\mathbb{R})$-ben és $l^2$-ben?

# 32. Kompakt operátorok

**32.1.** Definíció *Legyen $\boldsymbol{E}$ normált tér. Az $A\in\mathcal{L}in(\boldsymbol{E})$ operátort* ***kompaktnak****, vagy* ***teljesen folytonosnak*** *nevezzük, ha minden $\boldsymbol{E}$-beli korlátos halmaz $A$ általi képe relatív kompakt. Jelölje $\mathcal{L}in^c(\boldsymbol{E})$ az $\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$ kompakt operátorok halmazát.*

Nyilvánvaló, hogy $A$ akkor és csak akkor kompakt, ha $A[G_1(0)]$ relatív kompakt.

A 30.4. állítás szerint $A$ pontosan akkor kompakt, ha minden $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\boldsymbol{E}$-beli korlátos sorozat esetén az $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak van sűrűsödési helye.

Ha $\boldsymbol{E}$ Banach-tér, akkor a 30.3. állítás szerint $A$ pontosan akkor kompakt, ha minden korlátos halmaz $A$ általi képe prekompakt.

Nyilvánvaló az is, hogy kompakt operátor tetszőleges altérre való leszűkítése szintén kompakt.

**32.2.** Állítás *Legyen $A\in\mathcal{L}in(\boldsymbol{E})$.*

*(1) Ha $A$ véges rangú, akkor kompakt.*

*(2) Ha $\boldsymbol{E}$ teljes, $A$ kompakt és* $\operatorname{Ran}(A)$ *zárt, akkor $A$ véges rangú.*

Bizonyítás (1) $A$ folytonos, ezért $A[G_1(0)]$ korlátos halmaz, amely a véges dimenziós $\operatorname{Ran}(A)$ része, így relatív kompakt.

(2) Ha $\operatorname{Ran}(A)$ zárt, akkor teljes, így a nyílt leképezés tétele szerint $A:\boldsymbol{E}\to\operatorname{Ran}(A)$ nyílt, következésképpen $A[G_1(0)]$ környezete a 0-nak $\operatorname{Ran}(A)$-ban, emellett relatív kompakt, azaz a lezártja kompakt, ezért $\operatorname{Ran}(A)$ véges dimenziós.

**32.3.** Állítás *$\mathcal{L}in^c(\boldsymbol{E})$ a $\mathcal{L}in(\boldsymbol{E})$ lineáris altere. Ha $\boldsymbol{E}$ teljes, akkor ez az altér zárt.*

Bizonyítás Triviális, hogy $A\in\mathcal{L}in^c(\boldsymbol{E})$ és $\lambda\in\mathbb{K}$ esetén $\lambda A\in\mathcal{L}in^c(\boldsymbol{E})$.

Legyen $A, B\in\mathcal{L}in^c(\boldsymbol{E})$, és $H\subset\boldsymbol{E}$ korlátos halmaz. Ekkor

$$(A+B)[H]\subset A[H]+B[H]\subset\overline{A[H]}+\overline{B[H]},$$

így $(A+B)[H]\subset\boldsymbol{E}$ relatív kompakt, mert két kompakt halmaz összege kompakt, tehát $A+B\in\mathcal{L}in^c(\boldsymbol{E})$.

Legyen $\boldsymbol{E}$ teljes és $T\in\mathcal{L}in(\boldsymbol{E})$ érintkezési pontja a $\mathcal{L}in^c(\boldsymbol{E})$ altérnek. Ekkkor minden $\varepsilon>0$ esetén létezik $S\in\mathcal{L}in^c(\boldsymbol{E})$ úgy, hogy $\|T-S\|<\varepsilon/3$. Mivel $S[G_1(0)]$ prekompakt, létezik $x_1,\dots,x_n$ eleme $G_1(0)$-nak úgy, hogy

$$S[G_1(0)]\subset\bigcup_{k=1}^n G_{\varepsilon/3}(Sx_k).$$

Legyen $x\in G_1(0)$. Ekkor létezik $k\in\{1,\dots,n\}$ úgy, hogy $\|Sx-Sx_k\|<\varepsilon/3$, tehát

$$\|Tx-Tx_k\|\le\|Tx-Sx\|+\|Sx-Sx_k\|+\|Sx_k-Tx_k\|<\varepsilon,$$

így

$$T[G_1(0)]\subset\bigcup_{k=1}^n G_\varepsilon(Tx_k),$$

ezért $T[G_1(0)]$ prekompakt, következésképpen relatív kompakt, azaz $T\in\mathcal{L}in^c(\boldsymbol{E})$, így $\mathcal{L}in^c(\boldsymbol{E})$ zárt $\mathcal{L}in(\boldsymbol{E})$-ben.

**32.4.** Állítás *Ha $A,B\in\mathcal{L}in(\boldsymbol{E})$ és közülük legalább az egyik kompakt, akkor $AB$ és $BA$ kompakt.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy $A$ kompakt, és legyen $H\subset\boldsymbol{E}$ korlátos halmaz.

Ekkor $\overline{A[H]}$ kompakt halmaz, így, mivel $B$ folytonos, $B\left[\overline{A[H]}\right]$ is kompakt halmaz, és $\overline{B[A[H]]}\subset B\left[\overline{A[H]}\right]$, következésképpen $B[A[H]]$ relatív kompakt, tehát $BA$ kompakt operátor.

$B$ folytonos, ezért $B[H]$ korlátos halmaz, következésképpen $A[B[H]]$ relatív kompakt, tehát $AB$ kompakt operátor. ■

Eredményeink szerint $\mathcal{L}in^c(\boldsymbol{E})$ is kétoldali ideál $\mathcal{L}in(\boldsymbol{E})$-ben, amely zárt, ha $\boldsymbol{E}$ teljes.

**32.5.** A 32.3. szerint az $\boldsymbol{E}$ Banach-tér esetén a kompakt operátorok olyan zárt lineáris alteret alkotnak $\mathcal{L}in(\boldsymbol{E})$-ben, amely tartalmazza a véges rangú operátorokat. Hilbert-tér esetén ennél több is mondható.

Állítás *Legyen $\boldsymbol{H}$ Hilbert-tér. Ekkor $\mathcal{L}in^f(\boldsymbol{H})$ sűrű $\mathcal{L}in^c(\boldsymbol{E})$-ben.*

Bizonyítás Megmutatjuk, hogy bármely $A\in\mathcal{L}in^c(\boldsymbol{E})$ minden $\varepsilon>0$ sugarú környezetében van véges rangú operátor.

$A[G_1(0)]$ prekompakt halmaz, ezért létezik $x_1,\dots,x_n$ eleme $G_1(0)$-nak úgy, hogy

$$A[B_1(0)]\subset\bigcup_{k=1}^n G_\varepsilon(Ax_k).$$

$\boldsymbol{M} := \mathrm{Span}\{Ax_1, \dots, Ax_n\}$ véges dimenziós (tehát zárt) altér, és ha $P_{\boldsymbol{M}}$ jelöli az $\boldsymbol{M}$-re vetítő ortogonális projektort, akkor $P_{\boldsymbol{M}}A$ véges rangú operátor. Minden $x{\in}B_1(0)$ esetén létezik $k{\in}\{1, \dots, n\}$ úgy, hogy $\|Ax{-}Ax_k\|{<}\varepsilon$, ezért

$$\|Ax{-}P_{\boldsymbol{M}}Ax\| = \|(\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}{-}P_M)(Ax{-}Ax_k)\| \leq \|\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}{-}P_{\boldsymbol{M}}\|\|Ax{-}Ax_k\| < \varepsilon,$$

hiszen $(\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}{-}P_{\boldsymbol{M}}){=}P_{\boldsymbol{M}^\perp}$ ortogonális projektor, így normája 1. Tehát

$$\|A{-}P_{\boldsymbol{M}}A\| \leq \varepsilon. \blacksquare$$

Következésképpen Hilbert-téren minden kompakt operátor előáll véges rangú operátorok sorozatának határértékeként.

**32.6.** Állítás *Ha $\boldsymbol{H}$ Hilbert-tér és $A{\in}\mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ kompakt operátor, akkor $A^*$ is kompakt.*

Bizonyítás Az előző eredmény szerint létezik véges rangú operátorok $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata úgy, hogy $\lim_n A_n = A$ normában. Mivel a $\mathcal{L}in(\boldsymbol{H}) \to \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ adjungálás izometrikus bijekció, $\lim_n A_n^* = A^*$ normában. A 31.2. állítás szerint minden $A_n^*$ véges rangú, így az előző állítás alapján $A^*$ is kompakt operátor.

**32.7. Feladatok**

1. Lássuk be, hogy a 32.1. definíció és természetszerű módosítással a 32.1-ben mondottak, valamint a 32.2., 32.3. és 32.4. állítás különböző normált terek közötti folytonos lineáris leképezésekre is értelmes illetve igaz.
2. Milyen alakúak a kompakt operátorok Hilbert-téren a 31.3.2. feladat és a 32.5. állítás alapján?
3. Milyen ortogonális projektorok kompaktak?
4. Mik a kompakt szorzásoperátorok $L^2(\mathbb{R})$-ben és $l^2$-ben?

# 33. Kompakt operátorok spektruma

Ebben a fejezetben $\boldsymbol{H}$ Hilbert-teret jelöl, és $A \in \mathcal{L}in^c(\boldsymbol{H})$ adott operátort.

**33.1.** Állítás *$\lambda{\in}\mathbb{K}\setminus\{0\}$ esetén* $\mathrm{Ker}(A{-}\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})$ *véges dimenziós. Ha $\boldsymbol{H}$ végtelen dimenziós, akkor* $0 \in \mathrm{Sp}(A)$.

Bizonyítás $\boldsymbol{N}{:=}\mathrm{Ker}(A{-}\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})$ zárt lineáris altér, és $A|_{\boldsymbol{N}}{=}\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{N}}$ kompakt operátor, melynek értékkészlete $\lambda{\neq}0$ miatt $\boldsymbol{N}$, így a 32.2. állítás szerint $\boldsymbol{N}$ véges dimenziós.

Tegyük fel, hogy $0{\in}\mathrm{Reg}(A)$. Ekkor $\mathrm{Ran}(A){=}\boldsymbol{H}$ (lásd a 22.2 végén mondottakat), így a 32.2. állítás szerint $\boldsymbol{H}$ véges dimenziós.

**33.2. Állítás** *$\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ esetén* $\mathrm{Ran}(A - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})$ *zárt lineáris altér.*

Bizonyítás $\boldsymbol{M} := \mathrm{Ker}(A - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{\perp}$ zárt lineáris altér, $S := (A - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})|_{\boldsymbol{M}}$ injektív lineáris leképezés, és $\mathrm{Ran}(S) = \mathrm{Ran}(A - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})$. Tegyük fel, hogy $S^{-1}$ nem folytonos. Ekkor a 22.11. állítás szerint $\inf\limits_{x \in \boldsymbol{M}, \|x\|=1} \|Sx\| = 0$, tehát létezik $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat $\boldsymbol{M}$-ben úgy, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|x_n\| = 1$ és $\lim\limits_n Sx_n = 0$. Mivel $A$ kompakt operátor, létezik $i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat úgy, hogy $(Ax_{i_k})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergens; legyen $y_0 \in \boldsymbol{M}$ a határértéke. Ekkor $\lim\limits_k Sx_{i_k} = 0$ miatt $y_0 = \lambda \lim\limits_k x_{i_k}$, így $\|y_0\| = |\lambda| \neq 0$, és emellett $Sy_0 = \lambda \lim\limits_k Sx_{i_k} = 0$, ami ellentmond annak, hogy $S$ injektív. Tehát $S^{-1}$ folytonos, így, mivel zárt operátor, $\mathrm{Dom}(S^{-1}) = \mathrm{Ran}(S)$ zárt.

**33.3. Állítás** *Minden $\varepsilon > 0$ esetén $E_\varepsilon := \{\lambda \in \mathrm{Eig}(A) \mid |\lambda| > \varepsilon\}$ véges halmaz.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy valamely $\varepsilon > 0$ esetén $E_\varepsilon$ végtelen. Ekkor létezik $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ injektív sorozat $E_\varepsilon$-ban. Legyen $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \neq e_n \in \mathrm{Ker}(A - \lambda_n \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})$ (azaz $e_n$ az $A$-nak $\lambda_n$ sajátértékű sajátvektora), és $\boldsymbol{M}_n$ az $\{e_1, \dots, e_n\}$ halmaz lineáris burka. Ekkor

(a) $\boldsymbol{M}_n$ valódi altere $\boldsymbol{M}_{n+1}$-nek,

(b) $A[\boldsymbol{M}_n] \subset \boldsymbol{M}_n$,

(c) $(A - \lambda_{n+1} \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})[\boldsymbol{M}_{n+1}] \subset \boldsymbol{M}_n$.

Ugyanis (b) és (c) nyilvánvaló, és az is hogy $\boldsymbol{M}_n \subset \boldsymbol{M}_{n+1}$. Mivel a $\lambda_n$ sajátértékek különbözők, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ lineárisan független, így $\boldsymbol{M}_n \neq \boldsymbol{M}_{n+1}$.

Minden $n$-re létezik $y_{n+1} \in \boldsymbol{M}_{n+1} \cap \boldsymbol{M}_n^{\perp}$ úgy, hogy $\|y_{n+1}\| = 1$. Ekkor minden $x \in \boldsymbol{M}_n$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$\|\alpha y_{n+1} - x\|^2 = |\alpha|^2 \|y_{n+1}\|^2 + \|x\|^2 \geq |\alpha|^2.$$

Ha $m \leq n$, akkor

$$z := Ay_m - (A - \lambda_{n+1} \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}) y_{n+1} \in \boldsymbol{M}_n,$$

így

$$\|Ay_{n+1} - Ay_m\| = \|\lambda_{n+1} y_{n+1} - z\| = |\lambda_{n+1}| \geq \varepsilon. \qquad (*)$$

Következésképpen az $(Ay_n)_{n \geq 2}$ sorozatnak nincs sűrűsödési helye, holott $(y_n)_{n \geq 2}$ korlátos sorozat, ez pedig ellentmont $A$ kompaktságának.

**33.4. Állítás** *Ha $0 \neq \lambda \in \mathrm{Eig}(A)$, akkor* $\mathrm{Ran}(A - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}) \neq \boldsymbol{H}$.

Bizonyítás Tegyük fel, hogy $\mathrm{Ran}(A - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}) = \boldsymbol{H}$. Az $\boldsymbol{M}_n := \mathrm{Ker}((A - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^n)$ ($n \in \mathbb{N}$) zárt lineáris alterekre az előbbi bizonyításban felsorolt (a)-(b)-(c) tulajdonságok teljesülnek a $\lambda_{n+1} := \lambda$ definícióval.

Ugyanis (b) és (c) nyilvánvaló, és az is hogy $\boldsymbol{M}_n \subset \boldsymbol{M}_{n+1}$. Mivel $\lambda$ sajátértéke $A$-nak, létezik $0 \neq x_1 \in \boldsymbol{M}_1$, és mivel $A - \lambda \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ szürjektív, létezik $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\boldsymbol{H}$-ban úgy, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $(A-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})x_{n+1}=x_n$. Ekkor

$$(A-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^n x_{n+1}=x_1\neq 0 \quad \text{és} \quad (A-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{n+1}x_{n+1}=0,$$

azaz $x_{n+1}\in\boldsymbol{M}_{n+1}\setminus\boldsymbol{M}_n$. Tehát $\boldsymbol{M}_n \neq \boldsymbol{M}_{n+1}$.

Ezután ugyanúgy érvelhetünk, mint az előbb, csak a $(*)$ összefüggésben nincs, és nem is kell $\varepsilon$.

**33.5.** Állítás $\lambda\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$ *esetén a következő alterek véges és azonos dimenziósak:*

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Ker}(A-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}), & \mathrm{Ran}(A-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{\perp}, \\ \mathrm{Ker}(A^*-\lambda^*\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}), & \mathrm{Ran}(A^*-\lambda^*\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{\perp}. \end{array}$$

Bizonyítás Legyen $S{:=}A-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$, és tegyük fel, hogy

$$\dim\mathrm{Ker}(S) > \dim\mathrm{Ran}(S)^{\perp}$$

Mivel $\mathrm{Ker}(S)$ véges dimenziós, létezik $L{:}\mathrm{Ker}(S)\to\mathrm{Ran}(S)^{\perp}$ lineáris szürjekció, mely nem injekció. $F{:=}A+L\circ P_{\mathrm{Ker}(S)}$ kompakt operátor (egy kompakt és egy véges rangú összege) és $F-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}=S+L\circ P_{\mathrm{Ker}(S)}$. Ezért $\{0\}\neq\mathrm{Ker}(L)\subset\mathrm{Ker}(F-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})$, tehát $\lambda\in\mathrm{Eig}(F)$. A 33.4. állítást alkalmazva az $F$ kompakt operátorra azt kapjuk, hogy $\mathrm{Ran}(F-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})\neq\boldsymbol{H}$. Azonban,

$$(F-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})[\mathrm{Ker}(S)^{\perp}] = S[\mathrm{Ker}(S)^{\perp}] = \mathrm{Ran}(S),$$

és

$$(F-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})[\mathrm{Ker}(S)] = L[\mathrm{Ker}(S)] = \mathrm{Ran}(S)^{\perp},$$

így $\mathrm{Ran}(F-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})=\boldsymbol{H}$, ami ellentmondás, tehát

$$\dim\mathrm{Ker}(S) \leq \dim\mathrm{Ran}(S)^{\perp}.$$

Alkalmazzuk ezt az eredményt az $A^*$ kompakt operátorra:

$$\dim\mathrm{Ker}(S^*) \leq \dim\mathrm{Ran}(S^*)^{\perp}.$$

Azonban

$$\dim\mathrm{Ran}(S^*)^{\perp} = \dim\mathrm{Ker}(S) \leq \dim\mathrm{Ran}(S)^{\perp} = \dim\mathrm{Ker}(S^*),$$

ez pedig csak úgy lehetséges, ha ezen négy altér dimenziója megegyezik.

**33.6.** Állítás $\mathrm{Sp}(A)$ *legfeljebb megszámlálható halmaz, melynek csak a* $0{\in}\mathbb{K}$ *lehet torlódási pontja. A spektrum minden nemnulla eleme sajátérték, és a megfelelő sajátalterek véges dimenziósak.*

Bizonyítás Ha $\lambda{\neq}0$ nem sajátértéke $A$-nak, akkor $A{-}\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ injektív, így a 33.5. állítás alapján szürjektív, és ekkor inverze, lévén zárt operátor, folytonos, következésképpen $\lambda{\in}\mathrm{Reg}(A)$. Tehát $\mathrm{Sp}(A)\backslash\{0\}{\subset}\mathrm{Eig}(A)$. A 33.3. állítás szerint

$$\mathrm{Sp}(A)\backslash\{0\} = \mathrm{Eig}(A)\backslash\{0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_{1/n}$$

legfeljebb megszámlálható halmaz, melynek csak a 0 lehet torlódási pontja, így $\mathrm{Sp}(A)$ is ugyanilyen tulajdonságú. A nem nulla sajátértékekhez tartozó sajátalterek a 33.1. állítás szerint véges dimenziósak.

**33.7.** A most következőket arra az esetre fogalmazzuk meg, amikor az $A$ kompakt operátor spektruma megszámlálható. Hasonló (meg egyszerűbben bizonyítható) formulák érvényesek, ha a spektrum véges. Idézzük fel az $|x\rangle\langle y|$ jelölést a 16.13.8. feladatból.

Állítás *Létezik olyan* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *számsorozat, hogy* $\lim\limits_n \alpha_n = 0$, *továbbá* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ortonormált rendszerek úgy, hogy*

$$A = (u)\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n |v_n\rangle\langle e_n|. \qquad (*)$$

Bizonyítás Az $A^*A$ operátor kompakt és pozitív önadjungált. Ezért a nullát kivéve a spektruma megszámlálható sok, nullához torlódó pozitív sajátértékből áll, és minden megfelelő sajátaltér véges dimenziós. Ugyanez igaz az $|A| = \sqrt{A^*A}$ operátorra. Legyen $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az a $|A|$ nemnulla sajátértékeiből álló sorozat úgy, minden sajátértéket annyiszor veszünk, amennyi a multiplicitása (a sajátaltér dimenziója). Legyen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $|A|$ sajátvektoraiból álló ortonormált rendszer, amely által kifeszített zárt lineáris altér tartalmaz minden nemnulla sajátértékű sajátalteret. Vegyünk egy olyan izometrikus operátort, amellyel az $A = V|A|$ (lásd 18.6.), és legyen $v_n := Ve_n$.

Egyszerű tény, hogy minden $x \in \boldsymbol{H}$ esetén

$$|A|x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n \langle e_n, x\rangle,$$

így

$$Ax = V\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n\langle e_n, x\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n v_n \langle e_n, x\rangle,$$

tehát a $(*)$ összefügés igaz *erős* (pontonkénti) összegzéssel. A sor normában is konvergens, mert minden $N$ pozitiív egész számra és a Hilbert-tér minden $x$ egységvektorára

$$\left\|\left(A - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n |v_n\rangle\langle e_n|\right) x\right\| = \left\|\sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n v_n \langle e_n, x\rangle\right\| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n;$$

mivel itt a jobb oldalon egy konvergens sor "hátsó szelete" áll, amely "elég kicsi, ha $N$ elég nagy", ugyanez igaz a bal oldalnak $x$-ben vett szuprémumára is.

**33.8. Feladatok**

1. Ha eddig nem tudtuk volna, a 27. fejezet és 33.6. alapján adjuk meg, mik a kompakt szorzásoperátorok $L^2(\mathbb{R})$-ben.

2. Bizonyítsuk be, hogy 33.6. megfordítása is igaz, vagyis $A \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ kompakt, ha $\mathrm{Sp}(A)$ legfeljebb megszámlálható halmaz, melynek csak a $0{\in}\mathbb{K}$ lehet torlódási pontja, és a spektrum minden nemnulla eleme sajátérték, a megfelelő sajátalterek véges dimenziósak.(Útmutatás: $\{\lambda \in \mathrm{Eig}(A) \mid |\lambda| \geq \frac{1}{n}\}$ véges halmaz, a megfelelő sajátalterek véges dimenziósak; legyen $P_n$ az általuk kifeszített véges dimenziós (tehát zárt) altér ortogonális projektora. Ekkor $\lim_n P_n A = A$.

# 34. Integrálegyenletek

**34.1.** A kompakt operátorok egy nagyon fontos típusa fordul elő az integrálegyenletek elméletében, melyről az alábbiakban lesz szó.

Állítás *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ $\sigma$-véges mértéktér, és $K{\in}L^2_{\mu\otimes\mu}(X{\times}X)$. Ekkor a $\widehat{K}{:}L^2_\mu(X){\to}L^2_\mu(X)$, $\quad \psi{\mapsto}\widehat{K}\psi$,*

$$(\widehat{K}\psi)(x) := \int_X K(x,y)\psi(y)d\mu(y) \qquad (x{\in}X)$$

*formulákkal jól értelmezett leképezés kompakt operátor, amelyre $\|\widehat{K}\| \leq \|K\|$ teljesül.*

Bizonyítás A 15. fejezet alapján ($K^*$ helyett $K$-t írva) a leképezés jól értelmezett, nyilvánvalóan lineáris, és folytonos is és a normájára igaz a fenti becslés, hiszen minden $\phi{\in}L^2_\mu(X)$ esetén

$$\left\|\left\langle \phi, \widehat{K}\psi \right\rangle\right\| \leq \|K\| \, \|\phi\| \, \|\psi\|.$$

Ugyancsak a 15. fejezet eredményei szerint $L^2_{\mu\otimes\mu}(X\times X)$-ben az $\alpha\otimes\beta$ alakú függvények ($\alpha,\beta\in L^2_\mu(X)$) lineáris kombinációi sűrűn vannak. Egyszerű tény, hogy egy ilyen tenzorszorzat alakú függvényhez a fentiek szerint tartozó operátor rangja egy, ezért a lineáris kombinációknak megfelelő operátorok véges rangúak. Tehát létezik tenzorszorzatok lineáris kombinációinak olyan $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, mely konvergál $K$-hoz az $L^2_{\mu\otimes\mu}(X\times X)$ térben, azaz $\lim_n \|K-K_n\|=0$. Ekkor $(\widehat{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $L^2_\mu(X)$-beli véges rangú operátorok sorozata, mely $\|\widehat{K}-\widehat{K}_n\|\le\|K-K_n\|$ miatt operátor-normában konvergál $\widehat{K}$-hoz, s így ez kompakt.

**34.2.** Állítás ***(Fredholm-alternatíva)*** *Használjuk az előző jelöléseket. Ha $\lambda\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$, akkor a*

$$(\psi \in L^2_\mu(X))? \qquad \widehat{K}\psi - \lambda\psi = \phi$$

*egyenletnek*

– *vagy minden $\phi\in L^2_\mu(X)$ esetén egyetlen megoldása van,*

– *vagy van olyan $\phi\in L^2_\mu(X)$, amelyre végtelen sok megoldása van, és van olyan, amelyre egy sincs.*

Bizonyítás Jelölje $I$ az $L^2_\mu(X)$ identitását.

Ha $0\neq\lambda\notin\mathrm{Eig}(\widehat{K})$, akkor $\lambda\notin\mathrm{Sp}(\widehat{K})$, így $\widehat{K}-\lambda I$ folytonos bijekció.

Ha $0\neq\lambda\in\mathrm{Eig}(\widehat{K})$, akkor a 33.1. állítás szerint $\mathrm{Ker}(\widehat{K}-\lambda I)$ véges, nem nulla dimenziós altér, így végtelen számosságú, ezért $\phi\in\mathrm{Ran}(\widehat{K}-\lambda I)$ esetén az egyenletnek végtelen sok megoldása van, $\phi\notin\mathrm{Ran}(\widehat{K}-\lambda I)$ esetén egy sem.

# 35. Magoperátorok

**35.1.** Ebben a fejezetben a kvantumstatisztika sűrűségoperátorának („sűrűségmátrixának”) pontos matematikai tárgyalását adjuk.

**1.** Definíció *Az $A$ kompakt operátort* ***magoperátornak*** *hívjuk, ha $|A|$ sajátértékei, multiplicitással számolva, összegezhetők.*

Más szóval, az $A$ kompakt operátor magoperátor, ha a 33.7-beli $(*)$ alakjában $\sum_{n\in\mathbb{N}}|\alpha_n|<\infty$.

**2.** Definíció *Az $A$ kompakt operátort* ***nyomoperátornak*** *hívjuk, ha tetszőleges $(x_i)_{i\in I}$ teljes ortonormált rendszer esetén létezik*

$$\mathrm{Tr}(A) := \sum_{i\in I} \langle x_i, Ax_i\rangle,$$

*amely független az ortonormált rendszertől, és amelyet az $A$* ***nyomának*** *nevezünk.*

**35.2.** Állítás *Legyen $A=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n |v_n\rangle\langle e_n|$ magoperátor és $L\in\mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$. Ekkor $LA$ és $AL$ nyomoperátor, és*

$$\mathrm{Tr}(LA) = \mathrm{Tr}(AL) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n\langle e_n, Lv_n\rangle.$$

Bizonyítás Ha $(x_i)_{i\in I}$ teljes ortonormált rendszer, akkor

$$\sum_{i\in I} \langle x_i, LAx_i\rangle = \sum_{i\in I}\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n\langle x_i, Lv_n\rangle\langle e_n, x_i\rangle.$$

A jobb oldali kettős összeg fordított sorrendű összegszésben abszolút konvergens, hiszen az

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \sum_{i\in I} |\langle x_i, Lv_n\rangle|\,|\langle e_n, x_i\rangle|$$

formulában a második összeg az $l^2(I)$-beli Cuachy-egyenlőtlenség folytán nem nagyobb, mint

$$\sqrt{\sum_{i\in I} |\langle x_i, Lv_n\rangle|^2}\sqrt{\sum_{i\in I} |\langle e_n, x_i\rangle|^2},$$

amely viszont a $\boldsymbol{H}$-beli Parseval-egyenlőség szerint $\|Lv_n\|\,\|e_n\|$, és ez nem nagyobb $\|L\|$-nál.

Tehát az összeg az eredeti sorrendben is létezik, és megegyezik a fordított sorrendű összeggel:

$$\sum_{i\in I} \langle x_i, LAx_i\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \sum_{i\in I} \langle x_i, Lv_n\rangle\langle e_n, x_i\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n\langle e_n, Lv_n\rangle$$

(itt ismét a Parseval-egyenlőséget használtuk fel).

Teljesen hasonlóan látható be, hogy $\mathrm{Tr}(AL)$ is létezik, és ugyanezzel az összeggel egyenlő. ■

**Következmény** Vegyük $L$-nek az identitást, hogy megállapítsuk: minden magoperátor nyomoperátor.

**Megjegyzés** Bebizonyítható ennek a fordítottja is: minden nyomoperátor magoperátor.

**35.3.** Nem folytonos operátor és magoperátor szorzata nem feltétlenül nyomoperátor. Az előzőhöz hasonlóan – csak még egyszerűbben, mert véges összegzést cserélünk fel végtelennel, ami minden feltétel nélkül megtehető – bizonyíthatjuk be a következőt.

Állítás *Legyen* $A = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n |v_n\rangle\langle e_n|$ *(véges rangú operátor) és* $L$ *olyan operátor, hogy* $v_n \in \mathrm{Dom}(L)$ $(n = 1, \ldots, N)$. *Ekkor* $LA$ *véges rangú, nyomoperátor, és*

$$\mathrm{Tr}(LA) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \langle e_n, Lv_n \rangle.$$

Érdemes megjegyezni, hogy $\mathrm{Tr}(AL)$ biztosan nem létezik, ha $L$ értelmezési tartománya nem az egész Hilbert-tér. Ekkor ugyanis választható olyan teljes ortonormált rendszer, amelynek legalább egy tagja nincs benne a $\mathrm{Dom}(L)$-ben, így a nyom definíciójában szereplő összegnek nincs értelme.

**35.4.** A kvantumstatisztika sűrűségoperátora olyan $W$ pozitív önadjungált magoperátor, amelynek a nyoma 1. Ez valójában egy valószínűségi mértéket határoz meg. A fizikai mennyiségek öndjungált operátorok; az $L$ fizikai mennyiség várható értéke az adott sűrűségoperátorra vonatkozóan $\mathrm{Tr}(LW)$ – természetesen csak akkor, ha ez a nyom létezik.

**35.4. Feladatok**

1. A véges rangú operátorok magoperátorok. Mutassuk meg közvetlenül – nem hivatkozva a 35.2. következményére –, hogy a véges rangú operátorok nyomoperátorok.

2. Bizonyítsuk be, hogy pozitív önadjungált nyomoperátor magoperátor.