KURUCZ ZOLTÁN–VÖRÖS ZOLTÁN

ANALÍZIS IX.
Disztribúciók

Tartalom

1. Konvergencia és folytonosság

1.1.

Az eddigi tanulmányaink során a konvergenciát és a folytonosságot a „közelség” fogalma adta. Ehhez metrika (vektortéren norma) kellett. Véges dimenziós vektortéren minden norma egyenértékű, ezért ezektől függetlenül, konkrét norma megadása nélkül lehetett „közelségről” beszélni. Végtelen dimenzióban azonban nem hasonlítható össze minden norma, ezért konkrétan meg kell adni egy normát, amely „illeszkedik” a szóban forgó vektortér milyenségéhez. Például tudjuk, hogy folytonos függvények egyenletes konvergens sorozatának a határértéke szintén folytonos fügvény, ezért az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények $C([a, b])$-vel jelölt vektortere esetén a $\|\varphi\| := \max_{x\in[a,b]} |\varphi(x)|$ normát használjuk. Hasonlóan, az n-szer folytonosan differenciálható függvények $C^n([a, b])$ terén a norma $\|\varphi\| := \sum_{k=0}^{n} \max_{x\in[a,b]} |\varphi^{(k)}(x)|$.

Végtelenszer differenciálható függvények esetében normával nem tudjuk kifejezni azt a közelségfogalmat, amelyet elvárunk: két függvény akkor van közel egymáshoz, ha bármely deriváltjuk „csak kicsit különbözik egymástól.” Így külön kell definiálnunk a konvergenciát és a folytonosságot.

Normált tér esetében ismert az átviteli elv, amely azt állítja, hogy a folytonosságot sorozatok konvergenciájával is megfogalmazhatjuk. Végtelenszer differenciálható függvények esetében definíciónak fogadjuk el az átviteli elvet: sorozatok konvergenciájának meghatározása után az átviteli elvben megfogalmazott módon definiáljuk a folytonosságot.

Végtelenszer differenciálható, $\mathbb{K}$ értékű (azaz valós vagy komplex) függvények különféle vektortereit és konvergencia-fogalmait vezetjük be.

Ehhez szükségünk lesz az N valós változós, komplex értékű **multipolinomokra**; ezek a következő alakú, $\mathbb{R}^N$-en végtelenszer differenciálható függvények: adott egy m természetes szám, és minden $k_1, \ldots, k_N \in\mathbb{N}$, $k_1 + \cdots + k_N \le m$ esetén egy $c_{k_1 k_2 \ldots k_N} \in\mathbb{C}$, és ezekkel

$$p(x) := \sum_{k_1+\ldots+k_N\le m} c_{k_1 k_2 \ldots\, k_N} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_N^{k_N} \qquad (x \in \mathbb{R}^N).$$

Az ilyen multipolinomot legfeljebb m-edfokúnak mondjuk, és m-ed fokú, ha van olyan $k_1, \ldots, k_N$, $k_1 + \cdots + k_N = m$, hogy $c_{k_1 k_2 \ldots k_N} \ne 0$.

Ha p multipolinom, akkor x_k helyébe az x_k szerinti parciális differenciálást téve $(k = 1, \ldots, N)$ kapjuk a $p(\mathrm{D})$-fel jelölt **multipolinomiális differenciálást**.

1.2.

Elsőnek az $\mathbb{R}^N$-en végtelenszer differenciálható függvényeket tekintjük.

Definíció. *Azt mondjuk, hogy a* $\varphi_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ $(n \in \mathbb{N})$ *sorozat* $\mathcal{E}$***-értelemben*** *a* 0*-hoz tart (vagyis* $(\mathcal{E}) \lim_n \varphi_n = 0$*), ha tetszőleges* p *multipolinom esetén a* $p(\mathrm{D})\varphi_n$ *függvénysorozat* $\mathbb{R}^N$ *minden kompakt részhalmazán egyenletesen konvergál a* 0*-hoz (más szóval,* $p(\mathrm{D})\varphi_n$ *lokálisan egyenletesen konvergál a nullához). A* φ_n *sorozat* $\mathcal{E}$***-határértéke*** φ*, ha* $(\mathcal{E}) \lim_n(\varphi_n - \varphi) = 0$*.*

Ezzel a konvergenciával ellátott $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ vektorteret $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$-nel jelöljük.

1.3.

Másodiknak a **gyorsan csökkenő** végtelenszer differenciálható függvényeket tekintjük. A φ végtelenszer differenciálható függvény gyorsan csökkenő, ha tetszőleges, rögzített p és q multipolinom esetén

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |q(x)(p(\mathrm{D})\varphi)(x)| < \infty,$$

azaz $q\,p(\mathrm{D})\varphi$ korlátos.

Jelölje $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ az ilyen függvények halmazát. Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ lineáris altere $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$-nek, és nem üres, mert például $x\mapsto e^{-|x|^2}$ benne van.

A definíciós feltétel egyenértékű azzal, hogy $q\,p(\mathrm{D})\varphi$ a végtelenben a nullához tart. Ugyanis ez egyrészt maga után vonja a korlátosságot, másrészt $m\in\mathbb{N}$ esetén $(1+|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^2)^m$ multipolinom, amely q-val szorozva szintén multipolinom, következésképpen $(1+|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^2)^m q\,p(D)\varphi$ korlátos, ami csak úgy lehet, hogy $q\,p(D)\varphi$ a végtelenben nullához tart.

Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat **$\mathcal{S}$-értelemben** a 0-hoz tart (és úgy jelöljük, hogy $(\mathcal{S})\lim\limits_n \varphi_n = 0$), ha minden p és q multipolinom esetén a $q\,p(\mathrm{D})\varphi_n$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a 0-hoz. A φ_n sorozat **$\mathcal{S}$-határértéke** φ, ha $(\mathcal{S})\lim_n(\varphi_n - \varphi) = 0$.*

Állítás. *Az $\mathcal{S}$-konvergencia erősebb az $\mathcal{E}$-konvergenciánál; továbbá $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ sűrű $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$-ben.*

Bizonyítás Világos, hogy $\mathcal{S}$-értelemben 0-hoz tartó sorozat $\mathcal{E}$-értelemben is nullához tart. Legyen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ és $\varphi_n(x) := \varphi(x-n)$ $(n \in \mathbb{N})$. Ez a sorozat $\mathcal{E}$-értelemben nullához tart, de $\mathcal{S}$-értelemben nem.

Legyen $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$. Ekkor $\varphi_n(x) := \psi(x)e^{-|x|^2/n} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ $(n \in \mathbb{N})$, és ez a sorozat egyenletesen konvergál ψ-hez minden kompakt részhalmazon. Továbbá minden $k = 1,\dots,N$ esetén $\big(\partial_k(\varphi_n - \psi)\big)(x) = (\partial_k\psi)(x)(1 - e^{-|x|^2/n}) + \frac{1}{n}\psi(x)2x_k e^{-|x|^2/n}$, ami mutatja, hogy az $n \mapsto \partial_k\varphi_n$ sorozat egyenletesen konvergál $\partial_k\psi$-hez minden kompakt részhalmazon. Ebből továbblépve tetszőleges $p(\mathrm{D})$-re is megkapjuk a kívánt eredményt: $(\mathcal{E})\lim\limits_n \varphi_n = \psi$.

1.4.

Harmadiknak a kompakt tartójú végtelenszer differenciálható függvényeket tekintjük, amelyek összességét $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-vel jelöljük.

Emlékeztetünk, hogy egy $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ folytonos függvény tartója, $\operatorname{Supp}\varphi$ a

$$\{x \in \mathbb{R}^N \mid \varphi(x) \neq 0\}$$

halmaz lezártja.

Könnyen belátható, hogy $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ lineáris altér $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$-ben. Valóban, az ilyen függvények gyorsan csökkenők, és ha $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor $\alpha\varphi$ is kompakt tartójú végtelenszer differenciálható , valamint $\operatorname{Supp}(\varphi + \psi) \subset \operatorname{Supp}\varphi \bigcup \operatorname{Supp}\psi$ miatt $\varphi + \psi$ tartója korlátos zárt halmaz, azaz kompakt, tehát az összeg is benne van $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-ben. A fenti tartalmazásnál általában egyenlőség nem írható. Előfordulhat ugyanis, hogy valamely $U \subset \operatorname{Supp}\varphi \bigcup \operatorname{Supp}\psi$ nyílt halmazon az összeg éppen nullát ad ($\varphi + \psi = 0$ U-n), s így $U \not\subset \operatorname{Supp}(\varphi + \psi)$.

Hasonlóan győződhetünk meg arról, hogy $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-beli függvények szorzata is $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-ben van.

A $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ halmaz nem üres. Ismert, hogy az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\eta(t) := \begin{cases} e^{-1/t^2}, & \text{ha } t > 0; \\ 0, & \text{ha } t \le 0 \end{cases}$$

függvény a 0 pontban jobbról és balról is végtelenszer differenciálható és itt mindegyik differenciálhányadosa 0. Ezért η mindenütt végtelenszer differenciálható .

Tetszőleges $0 \le r \le R$ valós számokra definiáljuk az

$$\eta_{r,R}(x) := \frac{\eta(R^2 - |x|^2)}{\eta(R^2 - |x|^2) + \eta(|x|^2 - r^2)} \qquad (x \in \mathbb{R}^N)$$

függvényt. A nevező sehol sem nulla, és végtelenszer differenciálható függvények összege, hányadosa is végtelenszer differenciálható . Mivel $\operatorname{Supp} \eta_{r,R} = \overline{G_R(0)}$, így $\eta_{r,R} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Vegyük észre, az így definiált $\eta_{r,R}$ a következő tulajdonságú:

$$\eta_{r,R}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } R \le |x|; \\ 0 \text{ és } 1 \text{ között}, & \text{ha } r \le |x| \le R; \\ 1, & \text{ha } |x| \le r. \end{cases}$$

Állítás. *Legyen K kompakt halmaz, és U nyílt halmaz $\mathbb{R}^N$-ben, mely tartalmazza K-t. Ekkor létezik olyan $\eta_{K,U} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, melyre*

$$\eta_{K,U}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \notin U; \\ 0 \text{ és } 1 \text{ között}, & \text{ha } x \in U \setminus K; \\ 1, & \text{ha } x \in K. \end{cases}$$

Bizonyítás K része a nyílt U halmaznak, ezért a K halmaz minden x pontjához megadható egy $R(x)$ sugarú, x középpontú gömb, amely benne van U-ban. Ha K minden x pontja körül vesszük az $r(x) := R(x)/2$ sugarú gömböket, akkor ez a nyílt halmazrendszer lefedése K-nak. Létezik tehát véges sok x_i $(i = 1 \ldots n)$, amelyre $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{r(x_i)}(x_i)$. Legyen $\xi_i(x) := \eta_{r(x_i),R(x_i)}(x - x_i)$; erre

$$\xi_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \notin G_{R(x_i)}(x_i); \\ 0 \text{ és } 1 \text{ között}, & \text{ha } x \in G_{R(x_i)}(x_i) \setminus G_{r(x_i)}(x_i); \\ 1, & \text{ha } x \in G_{r(x_i)}(x_i). \end{cases}$$

Ekkor

$$\eta_{K,U} := 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \xi_i)$$

a kívánt tulajdonságú függény. Ugyanis $\xi_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, az ilyenek szorzata és összege is $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-beli lesz. Továbbá, ha valamely $x \in K$ esetén i olyan, hogy $\xi_i(x) = 1$, akkor a fenti szorzat nulla, így $\eta_{K,U}(x) = 1$. Mivel minden $x \in K$ esetén van (legalább egy) ilyen i, ezért $\eta_{K,U}$ a K halmazon 1-et vesz fel. Az U halmazon kívül pedig ξ_i nulla (minden i esetén), ezért a fenti kifejezés is nulla. A harmadik esetben pedig nyilvánvalóan 0 és 1 közötti számot kapunk.

Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat* ***$\mathcal{D}$-értelemben*** *a 0-hoz tart (és úgy jelöljük, hogy $(\mathcal{D}) \lim\limits_n \varphi_n = 0$), ha*

(i) létezik egy K kompakt halmaz, melyre minden n esetén $\operatorname{Supp} \varphi_n \subset K$,

(ii) minden p multipolinom esetén a $p(\mathrm{D})\varphi_n$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a 0-hoz.

A φ_n sorozat ***$\mathcal{D}$-határértéke*** *φ, ha $(\mathcal{D}) \lim_n(\varphi_n - \varphi) = 0$*

Állítás. *A $\mathcal{D}$-konvergencia erősebb az $\mathcal{S}$-konvergenciánál (tehát az $\mathcal{E}$-konvergenciánál is); továbbá $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ sűrű $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$-ben is, $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$-ben is.*

Bizonyítás A konvergenciák összehasonlításához vegyünk egy φ_n $(n \in \mathbb{N})$ sorozatot $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-ben, mely $\mathcal{D}$-értelemben tart 0-hoz. Mivel létezik egy kompakt halmaz, amely tartalmazza minden φ_n tartóját, és ezen a kompakt halmazon bármely multipolinom korlátos, látható, hogy φ_n $\mathcal{S}$-értelemben is konvergens a 0-hoz. Legyen $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ és $\varphi_n(x) := \frac{1}{n}\varphi(x-n)$ $(n \in \mathbb{N})$. Ez a sorozat $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$-értelemben nullához tart, de $\mathcal{S}$-értelemben nem.

Legyen $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Ekkor $\varphi_n(x) := \psi(x)\eta_{1,2}(x/n) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ $(n \in \mathbb{N})$, és Minden q multipolinom és $k = 1, \ldots, N$ esetén

$$q(x)\big(\partial_k(\varphi_n - \psi)\big)(x) = q(x)(\partial_k\psi)(x)(1 - \eta_{1,2}(x/n)) + \frac{1}{n}q(x)\psi(x)(\partial_k\eta_{1,2})(x/n).$$

$|1 - \eta_{1,2}| \le 1$ és minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik n_ε úgy, hogy $|p(x)\,(\partial_k\psi)(x)| < \varepsilon$, ha $|x| > n_\varepsilon$, a fenti jobb oldal első tagja kisebb ε-nál minden $n > n_\varepsilon$ esetén, vagyis ez a tag egyenletesen tart a nullához.

$p\,\psi$ is, $\partial_k\eta_{1,2}$ is korlátos, ezért a második tag is egyenletesen tart a nullához.

Ebből továbblépve tetszőleges $p(\mathrm{D})$-re is megkapjuk a kívánt eredményt: $(\mathcal{S}) \lim\limits_n \varphi_n = \psi$.

Legyen most $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$. Ekkor $\varphi_n := \psi\eta_{n,n+1} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ $(n \in \mathbb{N})$. Minden K kompakt halmazhoz, akkor létezik olyan n_K, hogy minden $n > n_K$ esetén $\varphi_n(x) = \psi(x)$ ha $x \in K$, amiből nyilvánvaló, hogy $(\mathcal{E}) \lim\limits_n \varphi_n = \psi$.

Definíció. *(i) Az $F\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ lineáris leképezés* ***$\mathcal{D}$-folytonos*** *(vagy röviden* ***folytonos****), ha minden $\mathcal{D}$-értelemben 0-hoz tartó φ_n sorozatra $(\mathcal{D}) \lim\limits_n F\varphi_n = 0$.*

(ii) A $T\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{K}$ lineáris leképezés ***$\mathcal{D}$-folytonos*** *(röviden:* ***folytonos****), ha minden $\mathcal{D}$-értelemben 0-hoz tartó φ_n sorozatra $\lim\limits_n T\varphi_n = 0$.*

Megjegyzés Ha F folytonos és a φ_n sorozat $\mathcal{D}$-értelemben φ-hez tart, akkor F linearitása miatt $F\varphi_n$ $\mathcal{D}$-értelemben $F\varphi$-hez tart. Értelemszerűen ugyanez igaz T-re is.

Hasonlóan definiáljuk a folytonosságot az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ és $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{K}$ lineáris leképezésekre, valamint az $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ és $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{K}$ lineáris leképezésekre. Sőt értelemszerűen a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ stb. lineáris leképezésekre is.

2. Duálisok, disztribúciók

2.1.

Definíció. *(i)* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^* := \{T\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{K} \mid T$ *folytonos, lineáris*$\}$,

(ii) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^* := \{T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{K} \mid T$ *folytonos, lineáris*$\}$,

(iii) $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)^* := \{T\colon \mathcal{E}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{K} \mid T$ *folytonos, lineáris*$\}$
rendre a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$*, az* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *és az* $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ ***duálisa****.*

Idézzük fel, hogy $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$. Tehát például az $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ duálisának elemeit alkalmazhatjuk csak az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ elemeire. Mivel $(\mathcal{S})\lim_n \varphi_n = 0$ maga után vonja, hogy $(\mathcal{E})\lim_n \varphi_n = 0$, az $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)^*$ elemeinek $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$-re való leszűkítése az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$ eleme: ha $T \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)^*$, akkor $T|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$. Hasonlót mondhatunk $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ és $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ viszonylatában; ilyen értelemben tehát fennáll az $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)^* \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^* \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$ összefüggés.

Definíció. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ *elemeit* ***alapfüggvényeknek****,* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$ *elemeit* ***disztribúcióknak*** *nevezzük.*

A T disztribúciónak a φ alapfüggvényen felvett értékét a $(T \mid \varphi)$ szimbólummal jelöljük.

2.2.

Emlékeztetőül, az $\mathbb{R}^N$ (korlátos) Borel-halmazain adott $\mathbb{K}$ értékű m mérték Radon-mérték, ha variációja Borel-mérték, azaz minden kompakt halmaz $|m|$-mértéke véges. Az alapfüggvények kompakt tartójúak, korlátosak és mérhetők (a mérhetőség a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$–$\mathcal{B}(\mathbb{K})$-mérhetőséget jelenti, ami következik a folytonosságból), ezért létezik tetszőleges Radon-mérték szerinti integráljuk. Nyilvánvaló továbbá, hogy az

$$F_m\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{K}, \quad \varphi \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi dm$$

leképezés lineáris. Folytonos is, azaz F_m disztribúció, ami azon múlik, hogy ha veszünk egy $\mathcal{D}$-értelemben 0-hoz tartó φ_n sorozatot, akkor az intergál és a limesz felcserélhető a $\lim_n (F_m \mid \varphi_n)$ kifejezésben. Ez a Lebesgue-tétel szerint megtehető, mert létezik egy $|m|$-integrálható függvény, amely majorálja a sorozat elemeinek abszolút értékét. Ugyanis az egyenletes konvergencia miatt (a $\mathcal{D}$-konvergencia definíciójában válasszuk a $p = 1$ multipolinomot!) tetszőleges $C > 0$ korlát esetén létezik egy n_C küszöbindex úgy, hogy minden ennél nagyobb n-re $|\varphi_n| \le C\chi_K$, ahol K egy olyan kompakt halmaz, amely tartalmazza a $\mathcal{D}$-konvergens sorozat elemeinek tartóit.

Definíció. F_m*-et az* m*-hez rendelt disztribúciónak nevezzük.*

Állítás. *A* $\{\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{K}$ *Radon-mértékek*$\} \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$, $m \mapsto F_m$ *leképezés lineáris injekció.*

Bizonyítás A linearitás az integrálásnak a mérték szerinti linearitásából adódik. Az injektivitás megállapításához azt kell megmutatni, hogy ha $F_m = 0$, akkor

$m = 0$. Ehhez elegendő belátni, hogy $m(K) = 0$ minden K kompakt halmazra. Legyen tehát $K \subset \mathbb{R}^N$ tetszőleges kompakt halmaz, s azt kell megmutatni, hogy χ_K-nak az m szerinti integrálja nulla. Közelítsük meg χ_K-t $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-beli függvényekkel! Legyen U_n $(n \in \mathbb{N})$ korlátos, nyílt halmazok K-ra húzódó sorozata, azaz $K \subset \ldots \subset U_{n+1} \subset U_n \subset \ldots \subset U_1$ és $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = K$. Mivel

$$0 = (F_m \mid \eta_{K,U_n}) = \int_{\mathbb{R}^N} \eta_{K,U_n} dm,$$

és az η_{K,U_n} sorozat monoton csökkenve pontonként tart χ_K-hoz, tehát a Lebesgue-tétel szerint χ_K-nak az m szerinti integrálja nulla, azaz $m(K) = 0$.

2.3.

Legyen most $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ lokálisan Lebesgue-integrálható függvény, azaz minden kompakt halmazon integrálható . Ekkor $f\lambda$ Radon-mérték, mert variációja $|f\lambda| = |f|\lambda$. Ezért $R_f := F_{f\lambda}$ szintén disztribúció.

Definíció. *R_f-et az f-hez rendelt **reguláris** disztribúciónak nevezzük.*

Állítás. *Legyen f és g lokálisan integrálható . $R_f = R_g$ pontosan akkor, ha $f = g$ λ-majdnem mindenütt.*

Bizonyítás $R_f = R_g$ (azaz $F_{f\lambda} = F_{g\lambda}$) az előző állításban szereplő leképezés injektivitása miatt egyenértékű azzal, hogy $f\lambda = g\lambda$. Ez pedig pontosan akkor áll fenn, ha $f = g$ λ-majdnem mindenütt.

2.4.

Az iménti állítások eredményeként a Radon-mértékeket és a lokálisan integrálható függvényeket beágyaztuk a disztribúciók halmazába. Ez a beágyazás annyira „természetes”, hogy a továbbiakban időnként $(F_m \mid \varphi)$ helyett $(m \mid \varphi)$-t, $(R_f \mid \varphi)$ helyett pedig egyszerűen $(f \mid \varphi)$-t írunk.

3. Disztribúciók leszűkítése és kiterjesztése

3.1.

Legyen $U \subset \mathbb{R}^N$ nyílt halmaz. Ekkor

$$\mathcal{D}(U) := \left\{ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \;\middle|\; \operatorname{Supp}\varphi \subset U \right\}$$

a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ zárt lineáris altere.

Egy T disztribúciónak a $\mathcal{D}(U)$-ra vett leszűkítését a $T\big\|_U$ szimbólummal jelöljük. Világos, hogy $T\big\|_U \in \mathcal{D}(U)^*$. Megemlítjük, hogy itt is érvényes, amit korábban mint a Hahn–Banach-tétel egy következményét ismertünk meg: a $\mathcal{D}(U)$-n adott folytonos lineáris funkcionálnak van folytonos lineáris kiterjesztése $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-re.

Speciálisan sokat használjuk azt, hogy $T\big\|_U = 0$, ami tehát azt jelenti, hogy $(T \mid \varphi) = 0$ minden olyan φ alapfüggvény esetén, amelynek tartója U-ban van. Nyilvánvaló, hogy ha U és V nyílt, $V \subset U$ és $T\big\|_U = 0$, akkor $T\big\|_V = 0$.

Állítás. *Legyen T disztribúció és $U \subset \mathbb{R}^N$ nyílt halmaz. $T\|_U = 0$ pontosan akkor, ha minden $x \in U$ esetén létezik x-nek olyan $G(x) \subset U$ nyílt környezete, amelyen T nulla.*

Bizonyítás Az első irány nyilvánvalóan teljesül, mert ha $T\|_U = 0$, akkor T-nek az U tetszőleges nyílt részhalmazára vett leszűkítése is 0. Legyen $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ olyan, amelynek K tartója U-ban van. A 1.4 pontban definiált $\eta_{K,U}$ 1-et vesz fel K-n, amely φ tartója, tehát fennáll a

$$\varphi = \varphi\left(1 - \prod_{i=1}^{n}(1-\xi_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi\xi_i - \sum_{i,j} \varphi\xi_i\xi_j + \dots$$

összefüggés. $\operatorname{Supp}\xi_i \subset G_{r(x_i)}(x_i) \subset U$, így $\varphi\xi_i$, $\varphi\xi_i\xi_j$, $\dots$ tartója is U-ban van. Kihasználva T linearitását kapjuk, hogy

$$(T \mid \varphi) = \sum_i (T \mid \varphi\xi_i) - \sum_{i,j} (T \mid \varphi\xi_i\xi_j) + \dots = 0.$$

Következmény. *Legyen U_i $(i \in I)$ nyílt halmazrendszer $\mathbb{R}^N$-ben, és a T disztribúció olyan, hogy minden $i \in I$ esetén $T\|_{U_i} = 0$. Ekkor $T\|_{\bigcup\limits_{i\in I} U_i} = 0$.*

Definíció. *A T disztribúció **tartója** a következő halmaz:*

$$\operatorname{Supp} T := \left\{\, x \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; \text{minden } U \subset \mathbb{R}^N \text{ nyílt, } x \in U\!: \;\; T\|_U \neq 0 \,\right\}.$$

Szavakban: x akkor és csak akkor eleme a T tartójának, ha minden az x-et tartalmazó U nyílt halmaz esetén van olyan φ alapfüggvény, amelyre $\operatorname{Supp}\varphi \subset U$ és $(T \mid \varphi) \neq 0$ teljesül.

Sokszor kényelmesebb a tartó komplementerét tekinteni: x akkor és csak akkor nincs a T tartójában, ha van olyan az x-et tartalmazó nyílt halmaz, hogy minden olyan φ alapfüggvény esetén, amelyre $\operatorname{Supp}\varphi \subset U$, $(T \mid \varphi) = 0$ teljesül.

Ebből, valamint az előző kövekezményből kapjuk:

Állítás.

$$\begin{aligned}(\operatorname{Supp} T)^{\complement} &= \left\{\, x \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; \textit{létezik } U \subset \mathbb{R}^N \textit{ nyílt} : \; x \in U,\; T\|_U = 0 \,\right\} = \\ &= \bigcup \left\{\, U \textit{ nyílt} \;\middle|\; T\|_U = 0 \,\right\}.\end{aligned}$$

Következmény. *Disztribúció a tartója komplementerére leszűkítve nulla.*

Állítás. *Ha a φ alapfüggvény és a T disztribúció tartója diszjunkt, akkor $(T \mid \varphi) = 0$.*

Bizonyítás Mivel $\operatorname{Supp}\varphi \subset (\operatorname{Supp} T)^{\complement}$, az előző két állításból adódik.

Állítás. *Legyen α nemnulla szám, T és S disztribúciók. Ekkor*

(i) $\operatorname{Supp}(\alpha T) = \operatorname{Supp} T$, *és*

(ii) $\operatorname{Supp}(T + S) \subset \operatorname{Supp} T \cup \operatorname{Supp} S$.

Bizonyítás Az első állítás teljesen nyilvánvaló. A másodikhoz elegendő belátni, hogy
$$(\operatorname{Supp} S)^{\circ} \cap (\operatorname{Supp} T)^{\circ} \subset (\operatorname{Supp}(T+S))^{\circ}.$$
Legyen $x \in (\operatorname{Supp} S)^{\circ} \cap (\operatorname{Supp} T)^{\circ}$. Ekkor létezik $U \subset \mathbb{R}^N$ nyílt halmaz úgy, hogy $x \in U$ és $T\big\|_U = 0$, $S\big\|_U = 0$. Innen adódik, hogy $(T+S)\big\|_U = 0$, amit bizonyítani akartunk.

Következmény. *A kompakt tartójú disztribúciók lineáris alteret alkotnak.*

3.2.

Legyen a T disztribúció és a φ végtelenszer differenciálható függvény tartójának metszete kompakt. Legyen továbbá U korlátos nyílt halmaz, mely tartalmazza a tartók metszetét. Ekkor $\overline{U}$ kompakt, és így létezik olyan ξ alapfüggvény, amely $\overline{U}$-n 1-et vesz fel. Ezzel definiálhatjuk T hatását a φ függvényre a következőképpen:

Definíció. *Legyen a T disztribúció és a φ végtelenszer differenciálható függvény tartójának metszete kompakt és ξ a fentieknek megfelelő. Ekkor*
$$(T \mid \varphi) := (T \mid \xi\varphi)\,.$$

Állítás. *A definíció jó, azaz U és ξ választásától független.*

Bizonyítás Először is a definíció értelmes, mert $\xi\varphi$ kompakt tartójú. Legyen a feltételeknek megfelelő U' és ξ' is. Ekkor
$$(T \mid \xi\varphi) - (T \mid \xi'\varphi) = (T \mid \varphi(\xi - \xi')) = 0,$$
hiszen $\xi - \xi'$ nulla a $\operatorname{Supp} T \cap \operatorname{Supp}\varphi$ halmazon.

3.3.

Ha T kompakt tartójú, akkor bármely végtelenszer differenciálható φ-re alkalmazhatjuk a fenti gondolatmenetet $\operatorname{Supp} T \cap \operatorname{Supp}\varphi$ helyett $\operatorname{Supp} T$-re, vagyis U és ξ ugyanaz minden φ-re. Ezek szerint egy kompakt tartójú disztribúció egyértelműen kiterjeszthető $C^\infty(\mathbb{R}^N)$-re.

Állítás. *A T kompakt tartójú disztribúció fentiek szerinti kiterjesztése az $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)^*$ eleme.*

Bizonyítás A kiterjesztés nyilvánvalóan lineáris leképezés. Azt kell csak megmutatni, hogy $\mathcal{E}$-értelemben folytonos is.

Legyen $(\mathcal{E})\lim\limits_n \varphi_n = 0$. Ekkor $\xi\varphi_n$ tartója benne van az $\overline{U}$ kompakt halmazban minden n-re; továbbá $|\xi\varphi_n| \le |\varphi_n|$, és $\partial_k(\xi\varphi_n) = (\partial_k\xi)\varphi_n + \xi\partial_k\varphi_n$; mivel $\partial_k\xi$ korlátos $\overline{U}$-n, a jobb oldal mindkét tagja egyenletesen tart nullához $\overline{U}$-n az $\mathcal{E}$-konvergencia miatt; ebből továbblépve tetszőleges $p(\mathrm{D})$-re is kapjuk az egyenletes konvergenciát, azaz $(\mathcal{D})\lim\limits_n \xi\varphi_n = 0$. Következésképpen $\lim\limits_n (T \mid \xi\varphi_n) = 0$.

Az imént beláttuk, hogy minden kompakt tartójú disztribúció $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)^*$-beli. Ennek fordítottja is igaz.

Állítás. *Legyen $T \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)^*$. Ekkor T kompakt tartójú disztribúció.*

Bizonyítás Mivel a tartó definíció szerint zárt, elegendő $\operatorname{Supp} T$ korlátosságát vizsgálni. Tegyük fel, hogy $\operatorname{Supp} T$ nem korlátos. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\operatorname{Supp} T$ nem része a $B_n(0)$ zárt gömbnek, azaz $\operatorname{Supp} T \bigcap B_n(0)^{\circ} \neq \emptyset$. Legyen $\varphi_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ olyan, hogy $\operatorname{Supp} T \bigcap B_n(0)^{\circ} \supset \operatorname{Supp} \varphi_n$ és $(T \mid \varphi_n) \neq 0$. Legyen $\psi_n := \varphi_n / (T \mid \varphi_n)$. Ekkor $(T \mid \psi_n) = 1$ minden n esetén, így $\lim\limits_n (T \mid \psi_n) = 1$.

Legyen most K tetszőleges kompakt halmaz. Ekkor létezik olyan $m \in \mathbb{N}$ szám, hogy $K \subset B_m(0)$. Ennél nagyobb n indexekre ψ_n a K halmazon 0, ezért minden p multipolinomra a $p(\mathrm{D})\psi_n$ függvénysorozat K-n egyenletesen 0-hoz tart. Mivel K tetszőleges, ez éppen azt jelenti, hogy $(\mathcal{E}) \lim_n \psi_n = 0$. T folytonos, ezért $\lim\limits_n (T \mid \psi_n) = 0$. Ellentmondásra jutottunk, tehát $\operatorname{Supp} T$ korlátos.

3.4.

Láttuk, hogy $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)^*$ pontosan a kompakt tartójú disztribúciókat tartalmazza, és a 3.2 pontban tetszőleges disztribúciót kiterjesztettünk $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$-nek egy $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-nél bővebb részhalmazára. Felmerül a kérdés, vajon bővíthető-e tovább egy adott disztribúció értelmezési tartománya. A válasz igen.

Definíció. *Legyen T disztribúció, $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$. Ha minden $\mathcal{E}$ értelemben ψ-hez tartó $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ sorozat esetén $(T \mid \varphi_n)$ konvergens, akkor értelmezzük T hatását ψ-n:*

$$(T \mid \psi) := \lim_n (T \mid \varphi_n) .$$

A definíció független a φ_n sorozat megválasztásától. Legyen ugyanis φ_n' egy másik közelítő sorozat. Ekkor a $\varphi_1, \varphi_1', \varphi_2, \varphi_2', \ldots$ sorozat is $\mathcal{E}$-értelemben ψ-hez tart, így a feltétel szerint a megfelelő sorozat is konvergens. Emiatt a két határérték megegyezik.

4. Temperált disztribúciók

Definíció. *A gyorsan csökkenő függvények folytonos lineáris funkcionáljait, azaz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$ elemeit **mérsékelt (temperált) disztribúcióknak** nevezzük:*

A 1.3 állításban mondottak alapján egy az $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$-n értelmezett $\mathcal{E}$-folytonos lineáris leképezésnek az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$-re való leszűkítése $\mathcal{S}$-folytonos, és az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$-en értelmezett $\mathcal{S}$-folytonos lineáris leképezésnek a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-re való leszűkítése $\mathcal{D}$-folytonos, tehát $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)^* \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^* \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$.

4.1.

Állítás. *Legyen m Radon-mérték, amelyhez létezik olyan k természetes szám, hogy $\dfrac{1}{(1 + |\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^k)}$ m-integrálható . Ekkor F_m temperált disztribúció.*

Bizonyítás Legyen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Mivel φ gyorsan csökkenő, $\varphi(1 + |\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^k)$ korlátos, egy felső korlátja legyen K. Ekkor $\dfrac{K}{1 + |\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^k}$ $|m|$-integrálható majoránsa φ-nek, ezért F_m kiterjeszthető $\mathcal{S}$-re:

$$(F_m \mid \varphi) := \int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, dm.$$

Következmény. *Ha f lokálisan integrálható , és $f/(1+|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^k)$ Lebesgue-integrálható valamely $k\in\mathbb{N}$ esetén, akkor az f-hez tartozó reguláris disztribúció temperált disztribúció.*

Állítás. *Ha $f\in L^p(\mathbb{R}^N)$ $(1<p\le\infty)$, akkor az f-hez tartozó reguláris disztribúció mérsékelt.*

Bizonyítás $f/(1+|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^k)$ akkor integrálható , ha $1/(1+|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^k)\in L^q(\mathbb{R}^N)$, ahol $1/p+1/q=1$. Ez teljesül, ha $qk\ge N+1$, mert

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{1+|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^k}\right)^q = C\int_{\mathbb{R}^+}\frac{r^{N-1}}{(1+r^k)^q}\,dr < C\int_{\mathbb{R}^+}\frac{r^{N-1}}{1+r^{qk}}\,dr,$$

ahol C jelöli az N dimenziós egységgömb felszínét. □

Ezzel $L^p(\mathbb{R}^N)$-et is beágyaztuk $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$-ba.

4.2.

Láttuk, $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)^*$ elemei pontosan a kompakt tartójú disztribúciók, és a fentiekben megismerkedtünk néhány speciális típusú temperált disztribúcióval. Lehet általános jellemzést adni a temperált disztribúciókra is; ezt most bizonyítás nélkül közöljük.

Állítás. *$T\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$ pontosan akkor temperált, ha létezik egy $C\in\mathbb{R}^+$ és egy $k\in\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ és minden k-nál nem nagyobb fokú p multipolinom esetén*

$$(T\mid\varphi)\le C\sup(1+|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^k)|p(\mathrm{D})\varphi|.$$

4.3. Feladat

A lassan növekvő függvények (lásd később, a 6.2 pontban), például a multipolinomok meghatározta reguláris disztribúciók mérsékeltek. Az $x\mapsto e^x\sin e^x$ valós függvény nem lassan növekvő, mégis mérsékelt disztribúciót határoz meg. (útmutatás: $e^x\sin e^x=-\frac{d}{dx}(\cos e^x)$ miatt parciálisan integrálhatunk.)

5. Disztribúciósorozatok

5.1.

A következőkben bizonyítás nélkül kimondjuk a Banach–Steinhaus-tétel disztribúciókra vonatkozó általánosítását.

Állítás (Banach–Steinhaus-tétel)**.** *Ha a $T_n\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$ $(n\in\mathbb{N})$ disztribúciósorozat esetén minden $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-re létezik a $\lim_n(T_n\mid\varphi)$ határérték, akkor a $T\colon\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)\to\mathbb{K}$, $\varphi\mapsto\lim_n(T_n\mid\varphi)$ leképezés szintén disztribúció, azaz $T\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$.*

Másként fogalmazva, disztribúciósorozat „függvényenkénti" határértéke is disztribúció, azaz folytonos (triviálisan lineáris). Ezt a tételt jó tudni, azonban mi a következőkben, ha csak lehet, nem hivatkozunk rá, a konkrét esetekben igyekszünk külön-külön megmutatni, hogy az adott disztribúciósorozatok pontonkénti határértéke disztribúció.

Állítás (δ-konvergens sorozatok). *Legyen $\varrho\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_0^+$ Lebesgue-integrálható függvény, melynek integrálja 1. Legyen továbbá $n \in \mathbb{N}$ és $\alpha \in \mathbb{R}^+$ esetén*

$$\varrho_n(x) := n^N \varrho(nx), \quad \textit{illetve} \quad \varrho_\alpha(x) := \frac{1}{\alpha^N}\varrho\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

Ekkor

$$\lim_n R_{\varrho_n} = F_\delta, \qquad \textit{illetve} \qquad \lim_{\alpha\to 0} R_{\varrho_\alpha} = F_\delta.$$

Bizonyítás A két határérték lényegében egyenértékű, mert az $\alpha := \frac{1}{n}$ helyettesítéssel egymásba átvihetők. Ezért elegendő csupán az első esetet vizsgálni. Az R_{ϱ_n} és a δ disztribúció hatásának a különbsége a φ alapfüggvényre:

$$|\,(R_{\varrho_n} \mid \varphi) - (\delta \mid \varphi)\,| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} \varrho_n \varphi \, d\lambda - \int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, d\delta \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} n^N \varrho(nx)\varphi(x)\, dx - \varphi(0) \right|.$$

Az $y := nx$ integrálási változót bevezetve $dy = n^N dx$, amiből az $\int \varrho = 1$ feltételt kihasználva kapjuk, hogy

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \varrho(y)\varphi\left(\frac{y}{n}\right) dy - \varphi(0) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} \varrho(y) \left[\varphi\left(\frac{y}{n}\right) - \varphi(0)\right] dy \right| \le$$
$$\le \int_{\mathbb{R}^N} \varrho(y) \left| \varphi\left(\frac{y}{n}\right) - \varphi(0) \right| dy.$$

Nyilvánvaló, hogy az integrandus 0-hoz tart, mert $\varphi(y/n)$ határértéke $\varphi(0)$. Tehát csak az a kérdés, hogy a limesz az integrállal felcserélhető-e. φ-ről tudjuk, hogy kompakt tartójú és folytonos. Innen a Weierstrass-tételből adódik, hogy létezik korlátja, amit C-vel jelölünk. Így

$$\varrho(y) \left| \varphi\left(\frac{y}{n}\right) - \varphi(0) \right| \le 2C\varrho(y).$$

A jobb oldalon álló függvény integrálható majoránsa a fenti integrál integrandusának, tehát a Lebesgue-tétel szerint a limesz és az integrál felcserélhető, így a fenti különbség a nullához tart, ahonnan éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

Megjegyzés Íme néhány szokásos példa a Dirac-delta megközelítésére:

(i) $N = 1$ dimenzióban $\varrho := \dfrac{1}{2}\chi_{[-1,1]}$; ekkor $\varrho_n(x) = \frac{n}{2}\chi_{[-1/n,1/n]}$.

(ii) $N = 1$ dimenzióban $\varrho(x) := \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}$; ekkor $\varrho_n(x) = \frac{n}{1+n^2x^2}$, $\varrho_\alpha(x)\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}$.

(iii) $N = 1$ dimenzióban $\varrho(x) := \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$; ekkor $\varrho_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha}e^{-x^2/2\alpha^2}$.

(iv) $N > 1$ dimenzióban ha ϱ az előző három közül valamelyik, akkor $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_N) \mapsto \varrho(x_1)\ldots\varrho(x_N)$ szintén δ-konvergens sorozat.

5.2.

Legyen $f_n\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ lokálisan integrálható függvény. Az f_n függvénysorozat konvergenciája és az R_{f_n} reguláris disztribúciók sorozatának a konvergenciája két különböző fogalom. Vizsgáljuk meg a kétféle konvergencia közötti összefüggést a következő esetekben, ahol adott a lokálisan integrálható függvények f_n sorozata.

(i) Az f_n sorozat majdnem mindenütt az f függvényhez tart, és f is lokálisan integrálható , valamint létezik egy g lokálisan integrálható függvény, amely majdnem mindenütt majorálja $|f_n|$-et. Ekkor a megfelelő reguláris disztribúciósorozat is konvergens, és határértéke éppen az f függvényhez tartozó reguláris disztribúció azaz $\lim\limits_n R_{f_n} = R_{\lim\limits_n f_n}$.

Ugyanis tetszőleges φ alapfüggvény esetén

$$\lim_n (R_{f_n} \mid \varphi) = \lim_n \int_{\mathbb{R}^N} f_n\varphi.$$

Ugyanakkor $|f_n\varphi| \leq g|\varphi|$ és $\lim\limits_n f_n\varphi = f\varphi$ majdnem mindenütt. Így a Lebesgue-tétel szerint

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}^N} f_n\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \lim_n f_n\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} f\varphi.$$

(ii) Létezik az f_n függvénysorozat majdnem mindenütti f határértéke, amely lokálisan integrálható , továbbá a megfelelő disztribúciósorozat is konvergens, ám a határértéke mégsem egyenlő az f-hez tartózó reguláris disztribúcióval. Ilyenek például a δ-konvergens sorozatok, ahol $f = 0$.

(iii) Majdnem mindenütt létezik $\lim\limits_n f_n =: f$, f lokálisan integrálható , viszont a disztribúciósorozat nem konvergens. Ilyen például az $f_n := n^2\chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}$ sorozat.

(iv) Nem létezik a függvénysorozat majdnem mindenütti határértéke, de a disztribúciósorozat konvergens. Legyen ugyanis $f_n := \exp^{in}$. Nyilvánvaló, hogy nem létezik $\lim\limits_n f_n$, de

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} \exp^{in} \varphi \, d\lambda = 0,$$

mert az integrálok éppen a φ függvény Fourier-együtthatói egy (alkalmas m-re) $\operatorname{Supp}\varphi$-t tartalmazó $[-m\pi, m\pi]$ intervallumon négyzetesen integrálható függvények terében lévő azonos normájú ortogonális rendszer szerint kifejtve. Ezek az együtthatók viszont négyzetesen összegezhetők, következésképpen határértékük mindenképpen 0.

(v) Végezetül példát mutatunk arra, hogy az $f := \lim\limits_n f_n$ határérték majdnem mindenütt létezik, de az nem integrálható lokálisan, és az R_{f_n} disztribúciósorozat mégis konvergens. Legyen $f_n := \frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}\chi_{[-1/n,1/n]^\diamond}$. Ezek lokálisan integrálható függvények, és $\lim\limits_n f_n = \frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$ majdnem mindenütt, amely viszont nem integrálható lokálisan. Megmutatjuk, hogy minden $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ esetén létezik az $(R_{f_n} \mid \varphi)$ sorozat határértéke. Rögzített φ esetén létezik $L > 0$ úgy, hogy φ tartója benne van a $[-L, L]$ intervallumban. Definíció szerint

$$\begin{aligned}(R_{f_n} \mid \varphi) = \int_{-L}^{-\frac{1}{n}} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \int_{\frac{1}{n}}^{L} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \\ = \int_{-L}^{-\frac{1}{n}} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\, dx + \int_{\frac{1}{n}}^{L} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\, dx.\end{aligned}$$

Az $x \mapsto (\varphi(x) - \varphi(0))/x \quad (x \neq 0)$ függvény folytonos, a határértéke a nullában $\varphi'(0)$, ezért a függvény korlátos, és így integrálható is.

$$\left| \chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]^\diamond} \frac{\varphi - \varphi(0)}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}} \right| \leq \left| \frac{\varphi - \varphi(0)}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}} \right|$$

miatt a Lebesgue-tétel szerint a limesz és az integrál felcserélhető (tetszőleges φ esetén), tehát a disztribúciósorozat konvergens.

Bár a Banach–Steinhaus-tétel szerint a határérték is disztribúció, a 3.1. pontbeli ígéretünkhöz híven ezt külön is belátjuk. A határérték

$$P_{\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{K},\ \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx.$$

Vegyünk egy φ_n $\mathcal{D}(\mathbb{R})$-beli függvénysorozatot, amely $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ értelemben 0-hoz tart. Ekkor van olyan $L > 0$, hogy $\operatorname{Supp}\varphi_n \subset [-L, L]$ minden n-re. A függvénysorozat valós és képzetes részére a bizonyítás ugyanolyan, ezért feltehetjük, hogy φ_n valós értékű minden n esetén. A Lagrange-féle középértéktétel szerint létezik olyan n-től és x-től függő $\xi_n(x)$ szám a $]0, x[$ nyílt intervallumban, amelyre $\varphi_n(x) - \varphi_n(0) = \varphi_n'(\xi_n(x))x$. Ekkor

$$\left(P_{\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}} \;\middle|\; \varphi_n\right) = \int_{-L}^{L} \frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(0)}{x}\,dx = \int_{-L}^{L} \varphi_n'(\xi_n(x))\,dx.$$

A deriváltsorozat egyenletes konvergenciája miatt minden pozitív ε esetén van egy n_ε küszöbindex, melynél nagyobb n esetén $|\varphi_n'(\xi_n(x))| < \varepsilon$. Ezért ha $n > n_\varepsilon$, akkor

$$\left|\left(P_{\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}} \;\middle|\; \varphi_n\right)\right| < 2L\varepsilon,$$

azaz beláttuk a folytonosságot.

A $P_{\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}}$ nem reguláris disztribúciót az $\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$ függvény **főérték-integráljának** nevezzük.

5.3.

Legyen $r := |\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|$. Ha $m < N$ pozitív egész, akkor $\frac{1}{r^m}$ lokálisan integrálható. Ha $m \ge N$, $m = N + n$, ahol $n \ge 0$, akkor a főértékintegrál formulájának általánosításaként „depolarizálhatjuk" $\frac{1}{r^{N+n}}$-et, vagyis definiálhatunk vele egy disztribúciót természetes módon.

Jelölje $T_n(\varphi)$ a φ alapfüggvénynek a nulla körüli n-ik Taylor-polinomját. Ekkor

$$\frac{\varphi - T_n(\varphi)}{r^{N+n}} = \mathrm{Ordo}\left(\frac{1}{r^{N-1}}\right),$$

ezért integrálható. Tehát

$$\left(P_{\frac{1}{r^{N+n}}} \;\middle|\; \varphi\right) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varphi - T_n(\varphi)}{r^{N+n}}.$$

Ha $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ mérhető függvény és $f = \mathrm{Ordo}(r^k)$, azaz $f = f_0 r^k$, akkor $n > k$ esetén

$$\left(P_{\frac{f}{r^{N+n}}} \;\middle|\; \varphi\right) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f_0(\varphi - T_{n-k}(\varphi))}{r^{N+n-k}}.$$

5.4. Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy

$$P_{\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}} = \lim_{\alpha\to 0} R_{\frac{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2+\alpha^2}}.$$

2. Bebizonyítandó, hogy

$$\lim_{\alpha\to+0} R_{\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\pm i\alpha}} = P_{\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}} \mp i\pi\delta.$$

3. Igazoljuk, hogy a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\delta_k$ sor tetszőleges a_k együtthatók mellett konvergens a $\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ térben (δ_k a k egész számra koncentrált Dirac-mérték).

4. Adjuk meg konkrétan a $P_{\frac{1}{|\mathrm{id}_{\mathbb{R}}|}}$ és a $P_{\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2}}$ disztribúciókat!

5. $\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$ lokálisan integrálható az $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ halmazon, tehát a $\mathcal{D}(\mathbb{R}\setminus\{0\}^*$ reguláris eleme. Ennek kiterjesztése $P_{\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}}$. Azonban nem ez az egyetlen lehetőség : akármely $c\in\mathbb{R}$ esetén $P_{\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}} + c\delta$ is kiterjesztés (sőt akármely kiterjesztés ilyen alakú (lásd 6.10). Egy ilyen kiterjesztést „mellékérték-integrálként" kaphatunk meg a következőképpen. Legyen $a, b > 0$ és $f_n := \frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}\chi_{[-a/n,b/n]^\diamond}$. Mutassuk meg, hogy $\lim\limits_{n} R_{f_n} = P_{\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}} + (\ln\frac{a}{b})\delta$.

6. Operátorok

6.1.

Legyen $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$, p multipolinom, $a\in\mathbb{R}^N$ és $A\colon\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ lineáris bijekció. Tekintsük a következő transzformációkat:

(i) Az f-fel való **szorzás**: $M_f\colon \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)\to\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, $\quad\varphi\mapsto f\varphi$;

(ii) A **differenciálás**: $p(\mathrm{D})\colon \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)\to\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, $\quad\varphi\mapsto p(\mathrm{D})\varphi$;

(iii) Az a-val való **balra tolás**: $L_a\colon \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)\to\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, $\quad\varphi\mapsto(x\mapsto\varphi(x-a))$;

(iv) Az A-val való **komponálás**: $K_A\colon \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)\to\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, $\quad\varphi\mapsto\varphi\circ A^{-1}$.

Egyszerű tény, hogy $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ invariáns ezekre a transzformációkra, vagyis leszűkítésük $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-re ismét $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-be képez.

Állítás. *A fenti transzformációk akár mint $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)\to\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, akár mint $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)\to\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ leképezések lineárisak és folytonosak.*

Bizonyítás A leképezések linearitása nyilvánvaló. A folytonosságot csak a fontosabb $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)\to\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ esetben bizonyítjuk. Ehhez tekintsünk egy $\mathcal{D}$ értelemben 0-hoz tartó φ_n sorozatot, K pedig legyen olyan kompakt halmaz, amely tartalmazza mindegyik függvény tartóját.

(i) Elegendő $f\varphi_n$ k-adik parciális differenciálhányadosát vizsgálni.

$$\partial_k(f\varphi_n) = (\partial_k f)\varphi_n + f(\partial_k\varphi_n).$$

f végtelenszer differenciálható , ezért f és $\partial_k f$ korlátos K-n. Tudjuk továbbá, hogy a φ_n és a $\partial_k\varphi_n$ függvénysorozatok egyenletesen tartanak a 0-hoz. Ezért a fenti parciális derivált is egyenletesen tart a 0-hoz.

(ii) Ha q multipolinom, akkor $q(\mathrm{D})\,[p(\mathrm{D})\varphi_n] = (qp)(\mathrm{D})\varphi_n$, amiről viszont tudjuk, hogy egyenletesen konvergens.

(iii) Az összetett függvény differenciálási szabályából $\partial_k(L_a\varphi_n) = L_a(\partial_k\varphi_n)$ adódik, ahonnan triviális az egyenletes konvergencia.

(iv) Hasonlóképpen kapjuk, hogy $\partial_k(\varphi_n\circ A^{-1}) = \sum_i \partial_i\varphi_n\circ A^{-1}(A^{-1}_{ik})$. $\partial_i\varphi_n$ egyenletes konvergenciája miatt készen is vagyunk.

Megjegyzés Az $a\mapsto L_a$ leképzés az $\mathbb{R}^N$ additív csoport lineáris ábrázolása $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-en, azaz L_a folytonos lineáris leképezés, és $L_{a+b} = L_a + L_b$.

Az $A \mapsto K_A$ leképezés pedig az $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ lineáris bijekciók csoportjának lineáris ábrázolása $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-en, azaz K_A folytonos lineáris leképezés, és $K_{AB} = K_A K_B$.

A fizikában így ábrázolódnak a téridőeltolások és a Galilei- vagy Lorentz-transzformációk.

6.2.

A $p(\mathrm{D})$, L_a és K_A transzformációkra $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ is invariáns, M_f-re azonban nem minden végtelenszer differenciálható f esetén; akkor igen, ha például f multipolinom. Ennél többet is mondhatunk.

Definíció. *Jelölje $\Theta(\mathbb{R}^N)$ azon f végtelenszer differenciálható függvények halmazát, melyekre tetszőleges p multipolinom esetén létezik c_p pozitív szám és m_p természetes szám, hogy*

$$|p(\mathrm{D})f| \leq c_p(1 + |\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^{m_p}).$$

*Ezeket a függvényeket **lassan növekvő** függvényeknek hívjuk.*

Nyilván $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset \Theta(\mathbb{R}^N)$, és korábbi eredményünk alapján lassan növekvő függvényekhez tartozó reguláris disztribúciók mérsékeltek.

Állítás. *Ha $f \in \Theta(\mathbb{R}^N)$, akkor az f-fel való szorzásra $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ invariáns.*

Bizonyítás Ha $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, akkor $f\varphi$ nyilván végtelenszer differenciálható . Azt kell még megnéznünk, hogy p és q multipolinomok esetén $pq(\mathrm{D})(f\varphi)$ korlátos-e. $q(\mathrm{D})$ helyett elegendő ∂_i-t venni. Ekkor

$$|p\partial_i(f\varphi)| \leq |p(\partial_i f)\varphi| + |pf\partial_i\varphi|.$$

Mivel $\partial_i f$ és f polinommal felülbecsülhető, és φ gyorsan csökkenő, a jobb oldalon mindkét tag korlátos. Tehát $f\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

6.3.

Definíció. *Az $F\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ folytonos lineáris leképzés **transzponáltja**:*

$$F^*\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^* \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*, \quad T \mapsto T \circ F.$$

A definíció jó, mert $T \circ F$ is folytonos F folytonossága miatt.

A definíció konkrétabb formában: minden φ alapfüggvényre

$$(F^*T \mid \varphi) = (T \mid F\varphi)\,.$$

Állítás. *F^* lineáris, továbbá folytonos abban az értelemben, hogy ha $\lim_n T_n = 0$, akkor $\lim_n F^*T_n = 0$.*

Bizonyítás A lineáritás nyilvánvaló, a folytonosság: ha $\lim_n (T_n \mid \varphi) = 0$, akkor $\lim_n (F^*T_n \mid \varphi) = \lim_n (T_n \mid F\varphi) = 0$. □

Keressük meg a fent definiált négy speciális operátor transzponáltját! Legyen φ és ψ alapfüggvény, és azt vizsgáljuk, hogyan hat φ-re a transzponált az R_ψ helyen.

6.4.

$$\left(M_f^* R_\psi \mid \varphi\right) = (R_\psi \mid M_f\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} \psi f \varphi = (R_{f\psi} \mid \varphi) = \left(R_{M_f\psi} \mid \varphi\right).$$

Emlékezzünk, hogy a lokálisan integrálható függvényeket (és így az alapfüggvényeket is) beágyaztuk a disztribúciók halmazába. M_f transzponáltja ezeken az (azonosított) alapfüggvényeken úgy hat, mint maga M_f: $M_f^*\psi = M_f\psi$, ahol az első esetben a ψ-hez rendelt disztribúcióra hat M_f^*, a második esetben pedig egy alapfüggvényre hat M_f. Ennek alapján kiterjesztjük a szorzásoperátort tetszőleges disztribúcióra is a következőképp:

Definíció. *Legyen az f végtelenszer differenciálható függvénnyel való szorzás operátora a disztribúciókon:*

$$M_f\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^* \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*, \quad M_f := M_f^*.$$

Ekkor tehát

$$(M_f T \mid \varphi) = (T \mid M_f\varphi)$$

minden T disztribúcióra és φ alapfüggvényre. Ahogy alapfüggvényre $M_f\varphi = f\varphi$, disztribúciók esetén is egyszerűen a függvény és a disztribúció szorzatát írjuk, és így

$$(fT \mid \varphi) = (T \mid f\varphi).$$

Bizonyos disztribúciókat nem csak végtelenszer differenciálható függvényekkel szorozhatunk. Például egy m Radon-mértékkel meghatározott F_m disztribúciót m szerint lokálisan integrálható f függvénnyel is megszorozhatjuk: $fF_m := F_{fm}$. Általában, ha egy disztribúció csak az alapfüggvények n-szer folytonosan differenciálhatóságát használja ki, akkor n-szer folytonosan differenciálható függvénnyel is megszorozhatjuk.

6.5.

$$(\partial_k^* R_\psi \mid \varphi) = (R_\psi \mid \partial_k\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} \psi \partial_k \varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\partial_k(\psi\varphi) - (\partial_k\psi)\varphi\right) = -\left(R_{\partial_k\psi} \mid \varphi\right),$$

ugyanis az első egyenlőség jobb oldalán az első tag Fubini tétele értelmében úgy is számítható, hogy először a k-adik változó szerint integrálunk, aztán a többi szerint; ez az integrál nulla a Newton–Leibnitz-szabály miatt, hiszen a függvények eltűnnek a végtelenben.

Az előzőhöz hasonlóan most is kiterjeszthetjük a differenciálást tetszőleges disztribúcióra:

Definíció.

$$\partial_k\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^* \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*, \quad \partial_k := -\partial_k^*.$$

Ekkor tehát

$$(\partial_k T \mid \varphi) = -(T \mid \partial_k\varphi)$$

minden T disztribúcióra és φ alapfüggvényre.

Fontos, hogy a parciális integrálás miatt megjelent egy mínusz előjel. Hasonlóan a páratlan rendű differenciálásnál is, ellenben a páros rendűnél nem. Tetszőleges p multipolinom esetén $(p(\mathrm{D})T \mid \varphi) = (T \mid p(-\mathrm{D})\varphi)$.

6.6.

$$(L_a^* R_\psi \mid \varphi) = (R_\psi \mid L_a\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} \psi(x)\varphi(x-a)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \psi(z+a)\varphi(z)\,dz = \\ = \left(R_{L_{-a}\psi} \mid \varphi\right).$$

Itt a $z := x - a$ helyettesítéssel éltünk. Ezek alapján a következő a definíció:

Definíció.

$$L_a \colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^* \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*, \quad L_a := L_{-a}^*,$$

azaz

$$(L_a T \mid \varphi) = (T \mid L_{-a}\varphi)$$

minden T disztribúcióra és φ alapfüggvényre.

6.7.

$$\begin{aligned} (K_A^* R_\psi \mid \varphi) &= (R_\psi \mid K_A\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} \psi(x)\varphi(A^{-1}x)\,dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \psi(Az)\varphi(z)\,|\det A|\,dz = \left(R_{|\det A| K_{A^{-1}}\psi} \,\middle|\, \varphi\right), \end{aligned}$$

a $z := A^{-1}x$ helyettesítést kihasználva. Most úgy szeretnénk definiálni a disztribúciókon K_A-t, hogy azt mondhassuk, hogy $K_A^* R_\psi = R_{K_A\psi}$, vagy röviden $K_A^*\psi = K_A\psi$, ahol ideiglenesen K_A^* jelöli a definiálandó operátort. Tudjuk, hogy

$$\begin{aligned} K_A^*\psi &= |\det A| K_{A^{-1}}\psi \\ K_{A^{-1}}^*\psi &= |\det A^{-1}| K_A\psi \\ |\det A| K_{A^{-1}}^*\psi &= K_A\psi. \end{aligned}$$

Ezek alapján a következő definíció lesz a megfelelő.

Definíció.

$$K_A \colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^* \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*, \quad K_A := |\det A| K_{A^{-1}}^*,$$

azaz

$$(K_A T \mid \varphi) = |\det A|\,(T \mid K_{A^{-1}}\varphi)$$

minden T disztribúcióra és φ alapfüggvényre.

6.8.

Lássunk néhány példát!

(i) $N = 1$ esetén a $H := \chi_{\mathbb{R}^+}$ függvényt **Heaviside**-függvénynek szokás hívni. Ha vessző jelöli a differenciálást, akkor $R_H' = \delta$. Valóban,

$$(R_H' \mid \varphi) = -\,(R_H \mid \varphi') = -\int_0^\infty \varphi' = \varphi(0).$$

(ii) $(\partial_k \delta \mid \varphi) = -(\partial_k\varphi)(0)$.

(iii) Legyen G olyan nyílt halmaz, melynek $S := \overline{G} \setminus G$ pereme $N-1$ dimenziós részsokaság. Ekkor $\partial_k R_{\chi_G} = -n_k \lambda_S$, ahol n az S felület „kifelé" irányított normálvektorfüggvénye, λ_S pedig a felületi Lebesgue-mérték. Valóban, a Gauss-tétel alkalmazásával

$$(\partial_k R_{\chi_G} \mid \varphi) = -(R_{\chi_G} \mid \partial_k \varphi) = -\int_G \partial_k \varphi = -\int_S n_k \varphi \, d\lambda_S.$$

(iv) $M_f \delta = f(0)\delta$, $L_a \delta = \delta_a$, $K_A \delta = |\det A| \delta$.

6.9.

Állítás. *Ha f lokálisan integrálható és majdnem mindenütt differenciálható, továbbá $\partial_k f$ is lokálisan integrálható , akkor $\partial_k R_f = R_{\partial_k f}$.*

Bizonyítás Legyen U olyan nyílt halmaz, amely tartalmazza φ tartóját. Parciális integrálással azt kapjuk, hogy

$$(\partial_k R_f \mid \varphi) = -(R_f \mid \partial_k \varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} f \partial_k \varphi = \int_U f \partial_k \varphi = \int_U \partial_k f \varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \partial_k f \varphi = \\ = (R_{\partial_k f} \mid \varphi) .$$

6.10.

Mivel bármely φ alapfüggvényre és p multipolinomra $p(\mathrm{D})\varphi$ tartója része φ tartójának, az is igaz, hogy bármely T disztribúcióra $\operatorname{Supp} p(\mathrm{D})T \operatorname{Supp} T$.

Speciálisan, ha $p \neq 0$, akkor $\operatorname{Supp}(p(\mathrm{D})\delta_a) = \operatorname{Supp} \delta_a = \{a\}$. Ez utóbbinak a fordítottja is igaz, amit bizonyítás nélkül közlünk.

Állítás. *Legyen $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ és $\operatorname{Supp} T = \{a\}$. Ekkor létezik olyan p multipolinom, hogy*

$$T = p(D)\delta_a \ .$$

A tétel tehát azt állítja, hogy ha egy disztribúció tartója egyetlen pont, akkor a disztribúció előállítható úgy, mint az adott pontra koncentrált Dirac-delta különböző rendű deriváltjainak lineáris kombinációja.

6.11.

A disztribúciók deriváltjait az eredeti definíción kívül később többször felhasznált más módon is megkaphatjuk a következőképpen.

Egy φ alapfüggvény k-ik parciális deriváltja, a definíció szerint így is írható:

$$(\partial_k \varphi)(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(L_{-h_k}\varphi)(x) - \varphi(x)}{h} \qquad (x \in \mathbb{R}^N),$$

ahol $h_k := h e_k$, az $\mathbb{R}^N$ e_k standard bázisvektorának h-szorosa. A fenti határérték $\mathbb{R}^N$-ben pontonként érvényes. Most megmutatjuk, hogy $\mathcal{D}$-értelemben is hasonló határérték írható a parciális deriváltakra.

Állítás. *Legyen φ alapfüggvény és h_k mint az előbb. Ekkor*

$$\partial_k \varphi = (\mathcal{D}) \lim_{h \to 0} \frac{L_{-h_k}\varphi - \varphi}{h}.$$

Bizonyítás Azt kell tehát belátni, hogy

$$(\mathcal{D}) \lim_{h\to 0} \left(\frac{L_{-h_k}\varphi - \varphi}{h} - \partial_k \varphi \right) = 0.$$

Elegendő olyan h-kat tekinteni, melyre $|h| < 1$ teljesül. Ekkor a fenti limesz alatt szereplő függvény tartója biztosan benne van a $B_1(0) + \operatorname{Supp}\varphi$ halmazban, ahol $B_1(0)$ jelöli az egység sugarú zárt gömböt a 0 körül.

Vizsgáljuk előbb a valós esetet. A Lagrange-féle középértéktétel szerint minden x-hez létezik egy $\theta_h(x) \in (0,1)$ szám, melyre

$$\left(\frac{L_{-h_k}\varphi - \varphi}{h} - \partial_k \varphi \right)(x) = \partial_k\varphi(x + \theta_h(x)h_k) - \partial_k\varphi(x).$$

Heine tétele értelmében a kompakt halmazon folytonos $\partial_k\varphi$ függvény egyenletesen folytonos, azaz minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta_\varepsilon > 0$ úgy, hogy ha $|h| < \delta_\varepsilon$, akkor minden x pontban $|\partial_k\varphi(x + \theta_h(x)h_k) - \partial_k\varphi(x)| < \varepsilon$. Ebből pedig már látszik a kívánt egyenletes konvergencia. Hasonlóan belátható ez a deriváltakra is, mert

$$\partial_i \left(\frac{L_{-h_k}\varphi - \varphi}{h} - \partial_k \varphi \right) = \frac{L_{-h_k}\partial_i\varphi - \partial_i\varphi}{h} - \partial_i\partial_k\varphi,$$

emiatt a bizonyítás ugyanúgy megy, mint előbb, csak φ helyett $\partial_i\varphi$-vel.

Szétválasztva a valós és a képzetes részt a komplex eset visszavezethető az előzőre.

Állítás. *Legyen T disztribúció, h_k mint előbb. Ekkor*

$$\partial_k T = \lim_{h\to 0} \frac{L_{-h_k}T - T}{h}.$$

Bizonyítás Tetszőleges φ alapfüggvényre

$$\left(\frac{L_{-h_k}T - T}{h} \,\middle|\, \varphi \right) = \frac{1}{h}\left[(L_{-h_k}T \mid \varphi) - (T \mid \varphi) \right] = \left(T \,\middle|\, \frac{L_{h_k}\varphi - \varphi}{h} \right).$$

A 6.11 állítás szerint $h \to 0$ esetén a T melletti függvény $-\partial_k\varphi$-hez fog tartani $\mathcal{D}$ értelemben. Kihasználva T folytonosságát a fenti kifejezés határértéke

$$-(T \mid \partial_k\varphi) = (\partial_k T \mid \varphi).$$

6.12. Feladatok

1. Bizonyítsuk be:

(i) kompakt tartójú disztribúció bármely deriváltja is kompakt tartójú,

(ii) temperált disztribúció bármely deriváltja is temperált disztribúció.

2. Vizsgáljuk meg, hogyan hat M_f, ∂_k, L_a és K_A a b-re koncentrált Dirac-disztribúcióra!

3. Bizonyítsuk be a disztribúciókra vonatkozó Leibniz-szabályt: $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$ és f végtelenszer differenciálható függvény esetén $\partial_k(fT) = (\partial_k f)T + f\partial_k T$. Sőt ez igaz akkor is, ha f csak egyszer folytonosan differenciálható, és minden itt szereplő szorzat értelmes.

4. Mutassuk meg, hogy (a vessző a differenciálást jelöli)

(i) $\left(M_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}} P_{\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}}\right) = R_1$,
(ii) $\left(R_{\chi_{[a,b]}}\right)' = \delta_a - \delta_b$,
(iii) $\left(R_{\ln|\cdot|}\right)' = P_{\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}}$,
(iv) $P_{\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}}{}' = -P_{\frac{1}{\mathrm{id}^2_{\mathbb{R}}}}$.

5. Jelölje a disztribúciókon lévő tükrözést $J := K_{-\mathrm{id}_R}$. Ekkor minden T disztribúció és φ alapfüggvény esetén $(JT \mid \varphi) = (T \mid J\varphi)$. Lássuk be, hogy
(i) $\partial_k \circ J = -J \circ \partial_k$,
(ii) $\partial_k \circ L_a = L_a \circ \partial_k$.

6. Mutassuk meg, hogy $(\mathcal{D}) \lim\limits_{a\to 0} L_a\varphi = \varphi$ minden $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ esetén.

7. Lineáris differenciáloperátorok

7.1.

Definíció. *Legyen p multipolinom. A $p(\mathrm{D})$ állandó együtthatójú lineáris differenciáloperátor* ***alapmegoldásának*** *nevezzük az E disztribúciót, ha*

$$p(\mathrm{D})E = \delta.$$

A $p(\mathrm{D})$ differenciáloperátor alapmegoldása általában nem egyértelmű: ha E_0 olyan disztribúció, mely megoldása a homogén egyenletnek, azaz $p(\mathrm{D})E_0 = 0$, akkor nyilván $E+E_0$ is alapmegoldás. Fordítva pedig, ha E és E' alapmegoldások, akkor ezek egymástól csak egy fenti tulajdonságú E_0 disztribúcióban térnek el egymástól.

7.2.

$\mathbb{R}^N$-beli bármely valós p másodfokú multipolinom $p(x) = A(x,x) + bx + c$ alakra hozható, ahol $A\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris forma, $b \in (\mathbb{R}^N)^*$, és $c \in \mathbb{R}$. Mint ismeretes (lásd Analízis II.), tetszőleges A-ortogonális bázis esetén az A-nulla bázisvektorok z_A száma, az A-pozitív bázisvektorok p_A száma az A-negatív bázisvektorok n_A száma a bázistól független, csak az A bilineáris formára jellemző.

Definíció. *A $p(\mathrm{D})$ valós állandó együtthatós másodrendű lineáris differenciáloperátor*
(i) ***elliptikus****, ha $z_A = 0$ (azaz A nem degenerált), és $p_A = N$ vagy $n_A = N$;*
(ii) ***hiperbolikus****, ha $z_A = 0$, és $p_A = N-1$ vagy $n_A = N-1$;*
(iii) ***parabolikus****, ha A degenerált ($z_A \neq 0$), de $p_A = N-1$ vagy $n_A = N-1$.*

7.3.

Az

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}(\mathrm{D}) = \sum_{k=1}^{N} \partial_k^2 =: \triangle$$

elliptikus differenciáloperátort **Laplace-operátornak** hívjuk.

A következőkben az $N = 3$ esetet vizsgáljuk.

Legyen

$$Z(x) := -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x|} \qquad (x \in \mathbb{R}^3, x \neq 0).$$

Ekkor

$$\partial_k Z(x) = \frac{1}{4\pi}\frac{x_k}{|x|^3}, \qquad \partial_i\partial_k Z(x) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\delta_{ik}}{|x|^3} - \frac{3x_i x_k}{|x|^5}\right). \tag{1}$$

Ez utóbbiból $\triangle Z := \partial_k\partial_k Z = 0$; itt és a következőkben az Einstein-féle összegzési szabályt alkalmazzuk: az azonos indexekre összegezni kell 1-től háromig.

Állítás. *Z lokálisan integrálható, és* $\triangle R_Z = \delta$.

Bizonyítás Gömbi koordinátázással integrálva könnyen belátható, hogy Z lokálisan integrálható , azaz értelmes R_Z.

Tetszőleges φ alapfüggvény esetén a Laplace-operátor előjelváltás nélkül átvihető φ-re, mert a Laplace-operátor második deriváltakból áll.

$$(\triangle R_Z \mid \varphi) = (R_Z \mid \triangle\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} Z\triangle\varphi = \lim_{\alpha\to+0}\int_{\mathbb{R}^N\setminus G_\alpha(0)} Z\triangle\varphi.$$

$\triangle Z = 0$ miatt $Z\partial_k\partial_k\varphi = \partial_k(Z\partial_k\varphi) - \partial_k(\varphi\partial_k Z)$ Az így kapott divergenciákat a Gauss-tétel segítségével átalakíthatjuk felületi integrálokká. Jelölje $S_\alpha(0)$ a befelé irányított gömbfelületet, $\boldsymbol{\lambda}_{S_\alpha(0)}$ pedig a rajta levő vektori Lebesgue-mértéket. Ekkor a következőképpen folytathatjuk:

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_{G_\alpha(0)^\diamond} [\operatorname{div}(Z\operatorname{grad}\varphi) - \operatorname{div}(\varphi\operatorname{grad}Z)]\, d\lambda =$$

$$= \lim_{\alpha\to+0}\left[\int_{S_\alpha(0)} Z\left\langle \operatorname{grad}\varphi, d\boldsymbol{\lambda}_{S_\alpha(0)}\right\rangle - \int_{S_\alpha(0)} \varphi\left\langle \operatorname{grad}Z, d\boldsymbol{\lambda}_{S_\alpha(0)}\right\rangle\right].$$

Az első integrál 0-hoz tart, mert felülről becsülhető $(1/4\pi\alpha)\|\operatorname{grad}\varphi\|_\infty 4\pi\alpha^2$-tel. A második integrál $-\varphi(0)$-hoz tart, mert

$$\left|\int_{S_\alpha(0)}\varphi\left\langle \operatorname{grad}Z, d\boldsymbol{\lambda}_{S_\alpha(0)}\right\rangle + \varphi(0)\right| =$$

$$= \left|\int_{S_\alpha(0)}\left(\varphi\left\langle \operatorname{grad}Z, \mathbf{n}_{S_\alpha(0)}\right\rangle + \frac{1}{4\pi\alpha^2}\varphi(0)\right) d\lambda_{S_\alpha(0)}\right|,$$

ahol $\mathbf{n}_{S_\alpha(0)}$ a felület befelé irányított normálvektora (vektormezője), $\lambda_{S_\alpha(0)}$ pedig a gömbfelület skalármértéke. Kihasználva, hogy $\left\langle \operatorname{grad}Z, \mathbf{n}_{S_\alpha(0)}\right\rangle = -1/4\pi\alpha^2$, így folytathatjuk:

$$= \left|\frac{1}{4\pi\alpha^2}\int_{S_\alpha(0)}\big(\varphi - \varphi(0)\big)\, d\lambda_{S_\alpha(0)}\right| \le \frac{1}{\pi\alpha^2}\max_{S_\alpha(0)}\big(\varphi - \varphi(0)\big)\, 4\pi\alpha^2.$$

Ez φ folytonossága miatt 0-hoz tart. Ezzel beláttuk, hogy $(\triangle R_Z \mid \varphi) = \varphi(0)$.

7.4.

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$-en a

$$\partial_0 - \triangle$$

parabolikus differenciáloperátort **diffúzióoperátornak** hívjuk; itt ∂_0 a „nulladik", vagyis az $\mathbb{R}$-beli változó szerinti parciális differenciálást jelöli.

Legyen

$$C\colon (\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R},\qquad (t,x)\mapsto \frac{H(t)}{(4\pi t)^{N/2}}e^{-|x|^2/4t},$$

ahol H a Heaviside-féle függvény. Egyszerűen belátható, hogy $(\partial_0-\triangle)C=0$.

Állítás. *C lokálisan integrálható, és $(\partial_0-\triangle)R_C=\delta$,*

Bizonyítás Könnyű látni, hogy C – amely majdnem mindenütt értelmezve van – lokálisan integrálható . Ugyanis tetszőleges $K\subset\operatorname{Dom}C$ kompakt halmaz esetén létezik olyan t, amelyre $K\subset[-t,t]\times\mathbb{R}^N$. Mint ismeretes, rögzített $t>0$ esetén C az x változója szerint Gauss-görbe, ezért integrálható, és az integrál értéke 1; $t\le 0$ esetén a függvény 0. Ez a függvény pedig integrálható $[-t,t]$-n. A Fubini-tételből adódóan C integrálható $[-t,t]\times\mathbb{R}^N$-en, ezért lokálisan integrálható .

Legyen most $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{1+N})$. Ekkor

$$((\partial_0-\triangle)R_C\mid\varphi)=-\,(R_C\mid(\partial_0+\triangle)\varphi)=-\lim_{\alpha\to+0}\int_{[\alpha,\infty[\times\mathbb{R}^N}C(\partial_0+\triangle)\varphi.$$

Használjuk ki most is, hogy $C\partial_0\varphi=\partial_0(C\varphi)-(\partial_0C)\varphi$, valamint $C\triangle\varphi=(\triangle C)\varphi+\operatorname{div}(C\operatorname{grad}\varphi)-\operatorname{div}(\varphi\operatorname{grad}C)$. Az utolsó két tag „hely szerinti” integrálja 0. Vegyünk ugyanis egy r sugarú gömböt $\mathbb{R}^N$-ben. A Gauss-tétel miatt a gömbre vett integrál átalakítható a $C\operatorname{grad}\varphi$-nek, ill. $\varphi\operatorname{grad}C$-nek a gömbfelszínre vett integráljává. Mivel φ és $\operatorname{grad}\varphi$ kompakt tartójú, az $r\to\infty$ határesetben az integrál 0. A fenti formulát tehát így folytathatjuk:

$$\begin{aligned}&=\lim_{\alpha\to+0}\int_{[\alpha,\infty[\times\mathbb{R}^N}\big(-\partial_0(C\varphi)+\varphi(\partial_0-\triangle)C\big)=\\&\qquad=-\lim_{\alpha\to+0}\int_{\mathbb{R}^N}(C\varphi)\big|_{t=\alpha}^{t=\infty}=\lim_{\alpha\to+0}\int_{\mathbb{R}^N}C(\alpha,x)\varphi(\alpha,x)\,dx.\end{aligned}$$

Itt kihasználtuk, hogy $(\partial_0-\triangle)C=0$, majd az „idő szerint” integráltunk, végül $(C\varphi)(\infty)=0$, mivel φ kompakt tartójú. Azt kell már csak megmutatnunk, hogy ez a határérték éppen $\varphi(0,0)$. Becsüljük meg a különbségüket:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}C(\alpha,x)\varphi(\alpha,x)\,dx-\varphi(0,0)=\int_{\mathbb{R}^N}C(\alpha,x)\left(\varphi(\alpha,x)-\varphi(0,0)\right)\,dx=\\&\quad\int_{\mathbb{R}^N}C(\alpha,x)\left(\varphi(\alpha,x)-\varphi(0,x)\right)\,dx+\int_{\mathbb{R}^N}C(\alpha,x)\left(\varphi(0,x)-\varphi(0,0)\right)\,dx.\end{aligned}$$

Az első tag felülről így becsülhető:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}C(\alpha,x)\left(\varphi(\alpha,x)-\varphi(0,x)\right)\,dx\right|\le\max_{x\in\mathbb{R}^N}|\varphi(\alpha,x)-\varphi(0,x)|\int_{\mathbb{R}^N}C(\alpha,x)\,dx.$$

Mint ismeretes, az integrál minden α esetén 1. A kompakt halmazon folytonos φ függvény Heine tétele szerint egyenletesen folytonos, ezért ez a maximum 0-hoz tart.

A második tag:

$$\int_{\mathbb{R}^N}C(\alpha,x)\left(\varphi(0,x)-\varphi(0,0)\right)\,dx=\big(R_{C(\alpha,\cdot)}\bigm|\varphi(0,\cdot)\big)-\varphi(0,0).$$

Mivel $R_{C(\alpha,\cdot)}$ éppen egy δ-konvergens sorozat, a határérték 0 lesz. Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

Megjegyzés A fizikában a diffúzióoperátor $\partial_0 - k\triangle$ alakú, ahol k a diffúziós konstans. Ha t „idő" helyett bevezetjük a kt változót, akkor kapjuk az itteni formát.

7.5.

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$-en a

$$\Box := \partial_0^2 - \triangle$$

elliptikus differenciáloperátort **hullámoperátornak** hívjuk; itt is ∂_0 a „nulladik", vagyis az $\mathbb{R}$-beli változó szerinti parciális differenciálást jelöli.

A továbbiakban az $N = 3$ esetet vizsgáljuk.

Legyen továbbá

$$K_\pm : \mathcal{D}\big(\mathbb{R}^{(1+3)}\big) \to \mathbb{K}, \quad \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(\pm|x|, x)}{4\pi|x|}\, dx.$$

(K_+-t avanzsált, K_--t pedig retardált magnak szokás nevezni.) Mivel $\dfrac{1}{|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}|}$ lokálisan integrálható , az integrál értelmes minden φ alapfüggvényre. Az is egyszerű, hogy a fenti formula disztribúciót határoz meg: nyilvánvalóan lineáris, és ha φ_n $\mathcal{D}$ értelemben 0-hoz tartó sorozat, H pedig olyan kompakt halmaz, amely tartalmazza minden φ_n tartóját, akkor

$$|(K_\pm \mid \varphi_n)| = \left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi_n(\pm|x|, x)}{4\pi|x|}\, dx \right| \le \frac{\|\varphi_n\|_\infty}{4\pi} \int_H \frac{dx}{|x|},$$

és a jobb oldal nullához tart, miközben n tart a végtelenhez.

Egyszerű tény, hogy K_+ tartója $L^+ := \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \mid t^2 - |x|^2 = 0,\ t > 0\}$ (a jövőszerű fénykúp az aritmetikai relativisztikus téridőmodellben)„ K_--é pedig az $L^- := \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \mid t^2 - |x|^2 = 0,\ t < 0\}$ (múltszerű fénykúp).

Megmutatható, hogy ezek a disztribúciók a fénykúpok „felületi mértéke" szerinti integrálások. Ezek a felületi mértékek azonban nem a szokásos sokaságmértékek. Egy részsokaság felületi mértékét ebben a pszeudo-euklideszi vektortérben a részsokaság egy p paraméterezésével és a paramétertér λ Lebesgue-mértékével

$$\left(\sqrt{|\det((\mathrm{D}p)^*\mathrm{D}p)|}\lambda\right) \circ \overset{-1}{p}$$

formában definiáltuk feltéve, hogy a részsokaság minden v érintővektorának pszeudohossza ($|v| := \sqrt{|g(v,v)|}$) nem nulla. Ez azonban itt nem teljesül, emiatt a fénykúpokra az azonosan nulla mértéket kapnánk.

A fénykúpok felületi mértékét az $\alpha > 0$ esetre definiált

$$V_\alpha^+ := \{(t,x) \mid t^2 - |x|^2 = \alpha^2\ t > 0\}, \qquad V_\alpha^- := \{(t,x) \mid t^2 - |x|^2 = \alpha^2\ t < 0\}$$

időszerű „hiperboloidok" szokásos $\lambda_{V_\alpha^\pm}$ felületi mértékvel az $\alpha \to 0$ határértékkel a következőképpen: minden $E \subset \mathbb{R}^4$ korlátos, nyí lt Borel-halmazra értelmes

$$\lambda_{L^\pm}(E) := \lim_{\alpha \to 0} \frac{\lambda_{V_\alpha^\pm}(E \cap V_\alpha^\pm)}{\alpha}.$$

Az így meghatározott mérték tartója $L^{\pm}$, tehát lényegében $L^{\pm}$-en adott mérték lesz.

A következő állítást majd csak később, a Fourier-transzformáció segítségével fogjuk belátni.

Állítás. $\square K_{\pm} = \delta$.

Megjegyzés A fizikában a hullámoperátor $\partial_0^2 - c^2\triangle$ alakú, ahol c a fénysebesség. Ha a t „idő" helyett bevezetjük a ct változót, akkor kapjuk az itteni formát.

7.6. Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy $\triangle L_a R_Z = \delta_a \quad (a \in \mathbb{R}^3)$.

2. Legyen $m > 0$, $r := |\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}|$, valamint $E_{\pm}^{(m)} := -(1/4\pi)e^{\pm mr}/r$ az ún. Yukawa-féle potenciál. Bizonyítsuk be, hogy ez megoldása az ún. Helmholtz-egyenletnek, azaz $(\triangle - m^2)E_{\pm}^{(m)} = 0$ és $(\triangle - m^2)R_{E_{\pm}^{(m)}} = \delta$.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha $\triangle$ jelöli egy-, két- és N dimenziós Laplace-operátort is, akkor

$$\triangle|\mathrm{id}_{\mathbb{R}}| = 2\delta^1,$$

$$\triangle R_{\ln|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}|} = 2\pi\delta^2,$$

$$\triangle R_{\frac{1}{|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}^{N-2}}} = -(N-2)\sigma_N\delta^N,$$

ahol $\sigma_N := \dfrac{2\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ az $\mathbb{R}^N$-beli egységgömb felszíne, és a δ-kon az index azt mutatja, mely dimenzióról van szó.

4. Igazoljuk, hogy az

$$E_1(t,x) := \frac{H(t-|x|)}{2} \qquad ((t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}),$$

$$E_2(t,x) := \frac{H(t-|x|)}{2\pi\sqrt{t^2-|x|^2}} \qquad ((t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2, t \neq |x|)$$

lokálisan integrálható függvények, és

$$\square R_{E_1} = \delta^2, \qquad \square R_{E_2} = \delta^3.$$

8. Disztribúciók tenzorszorzata

8.1.

Állítás. *Legyen $\Phi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M)$ függvénysorozat, amely a szorzattérben $\mathcal{D}$ értelemben 0-hoz tart, $x_n \in \mathbb{R}^N$ tetszőleges sorozat ($n \in \mathbb{N}$). Ekkor $\mathcal{D}(\mathbb{R}^M)$-ben*

$$(\mathcal{D})\lim_n \Phi_n(x_n,\cdot) = 0.$$

Bizonyítás A Φ_n sorozat $\mathcal{D}$-konvergenciája miatt létezik $K_N \subset \mathbb{R}^N$ és $K_M \subset \mathbb{R}^M$ kompakt halmaz úgy, hogy $K_N \times K_M$ tartalmazza a Φ_n tartóját minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Egyszerű tény, hogy $\operatorname{Supp} \Phi_n(x_n, \cdot) \subset K_M$ minden n-re. A Φ_n sorozat egyenletes konvergenciájából pedig nyilvánvalóan következik $\Phi_n(x_n, \cdot)$ egyenletes konvergenciája, és hasonló áll fenn a deriváltakra is, hiszen $\Phi_n(x_n, \cdot)$ parciális deriváltjai a Φ_n parciális deriváltjaiból adódnak.

Következmény. *Tetszőleges $x \in \mathbb{R}^N$ esetén az*

$$l_x \colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^M), \quad \Phi \mapsto \Phi(x, \cdot)$$

leképezés folytonos, hiszen lineáris és a 0-ban folytonos.

8.2.

Legyen $f \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ és $g \colon \mathbb{R}^M \to \mathbb{K}$ lokálisan integrálható függvény. Ekkor az $f \otimes g \colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{K}, (x, y) \mapsto f(x)\, g(y)$ tenzorszorzat szintén lokálisan integrálható , hiszen a Fubini-tétel szerint minden téglán integrálható . értelmes tehát $R_f \otimes R_g := R_{f \otimes g} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M)^*$, melynek hatása egy $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M)$ függvényen:

$$(R_f \otimes R_g \mid \Phi) = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M} f(x) g(y) \Phi(x, y)\, dx\, dy =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \int_{\mathbb{R}^M} g(y) \Phi(x, y)\, dy\, dx,$$

ahol a Fubini-tételt használtuk fel. Ezek alapján könnyen érthetjük a következő definíciót.

Definíció. *Legyen $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$ és $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^M)^*$. T és S* ***tenzorszorzatán*** *a következő disztribúciót értjük:*

$$T \otimes S \colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M) \to \mathbb{K}, \quad (T \otimes S \mid \Phi) := (T \mid x \mapsto (S \mid \Phi(x, \cdot)))\, .$$

Állítás. *A definíció jó, azaz tényleg disztribúciót határoztunk meg.*

Bizonyítás A következőket kell belátnunk:
(i) $\Phi(x, \cdot)$ kompakt tartójú és végtelenszer differenciálható , ezért $(S \mid \Phi(x, \cdot))$ értelmes;
(ii) az $x \mapsto (S \mid \Phi(x, \cdot))$ hozzárendelés is kompakt tartójú és végtelenszer differenciálható ;
(iii) $T \otimes S$ lineáris és folytonos.

Az (i) megállapítás nyilvánvaló. A (ii) kifejezés nyilván kompakt tartójú , mert tartóját tartalmazza $\mathrm{pr}_{\mathbf{1}}[\operatorname{Supp} \Phi]$. Tekintsük a k-adik deriváltat!

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (S \mid \Phi(x, \cdot)) = \lim_{h \to 0} \frac{(S \mid \Phi(x + h_k, \cdot)) - (S \mid \Phi(x, \cdot))}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \left(S \,\middle|\, \frac{(L_{-h_k}\Phi)(x, \cdot) - \Phi(x, \cdot)}{h} \right) = \left(S \,\middle|\, (\mathcal{D}) \lim_{h \to 0} l_x \frac{L_{-h_k}\Phi - \Phi}{h} \right) =$$
$$= \left(S \,\middle|\, l_x(\mathcal{D}) \lim_{h \to 0} \frac{L_{-h_k}\Phi - \Phi}{h} \right) = (S \mid l_x \partial_k \Phi) = (S \mid (\partial_k \Phi)(x, \cdot))\, ,$$

ahol kihasználtuk először S, majd l_x folytonosságát. Ebből már következik, hogy $x \mapsto (S \mid \Phi(x,\cdot))$ függvény végtelenszer differenciálható , és – magától értetődő jelöléssel –

$$p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(S \mid \Phi(x,\cdot)) = (S \mid (p(\mathrm{D}_1)\Phi)(x,\cdot)) .$$

Már csak a (iii) maradt hátra. Linearitása magától értetődik. Folytonosságának vizsgálatához vegyünk egy $\mathcal{D}$ értelemben 0-hoz tartó Φ_n sorozatot $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$-en. T folytonossága miatt elég belátni, hogy a $\varphi_n := (x \mapsto (S \mid \Phi_n(x,\cdot)))$ sorozat $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-ben 0-hoz tart. Φ_n $\mathcal{D}$-konvergenciája miatt létezik olyan K kompakt halmaz, hogy $\operatorname{Supp}\varphi_n \subset \mathrm{pr}_{\mathbf{1}}[\operatorname{Supp}\Phi_n] \subset K$. Mivel $(p(\mathrm{D})\varphi_n)(x) = (S \mid (p(\mathrm{D}_1)\Phi_n)(x,\cdot))$, és $p(\mathrm{D}_1)\Phi_n$ is egyenletesen tart a nullához, elég belátnunk, hogy φ_n bármely deriváltjára ugyanúgy érvelhetünk. Tegyük fel, hogy φ_n nem tart egyenletesen a nullához. Ekkor létezik $\varepsilon > 0$ és $x_n \in \mathbb{R}^N$ $n \in \mathbb{N}$ sorozat úgy, hogy

$$|\varphi_n(x_n)| \geq \varepsilon. \tag{2}$$

A 8.1 állítás szerint $(\mathcal{D})\lim_n \Phi_n(x_n,\cdot) = 0$, ezért $\lim_n \varphi_n(x_n) = 0$ ami ellentmond a (2) egyenlőtlenségnek.

8.3.

Ha $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ és $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^M)$, akkor $\varphi \otimes \psi\colon (x,y) \mapsto \varphi(x)\psi(y)$ függvény a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M)$ eleme, és

$$(T \otimes S \mid \varphi \otimes \psi) = (T \mid \varphi)\,(S \mid \psi) . \tag{3}$$

Meg lehet mutatni, hogy a $\varphi \otimes \psi$ alakú függvények lineáris kombinációi, vagyis $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ sűrű lineáris alteret alkotnak $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M)$-ben. Ezt tudván elég volna a (3) összefüggéssel definiálni a disztribúciók tenzorszorzatát, hiszen könnyen látható, hogy a formula lineáris kiterjesztése folytonos lineáris leképezést határoz meg egy sűrű lineáris altéren, ahonnan egyértelműen kiterjeszthető az egész térre.

Ebből az is látszik, hogy T és S tenzorszorzatára

$$T \otimes S\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M) \to \mathbb{K}, \quad (T \otimes S \mid \Phi) := (S \mid y \mapsto (T \mid \Phi(\cdot,y)))$$

is fenn-áll.

8.4.

Legyen $J\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $(x,y) \mapsto (y,x)$; emlékeztetünk a K_J operátorra (lásd 6.7).

Állítás. *Ha* $T, S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$, *akkor* $T \otimes S = K_J(S \otimes T)$, *azaz a tenzorszorzás ilyen értelemben kommutatív.*

Bizonyítás Könnyű látni, hogy $\varphi \otimes \psi$ alakú függvényeken a két disztribúció azonos értékeket vesz fel; a folytonos lineáris leképezéseknek a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^N))$ sűrű altérről az egyértelmű kiterjesztése is megegyezik.

Állítás. $\operatorname{Supp}(T \otimes S) \subset \operatorname{Supp} T \times \operatorname{Supp} S$.

Bizonyítás Legyen $(x, y) \in (\operatorname{Supp} T \times \operatorname{Supp} S)^{\complement}$. Mivel a tartó zárt, létezik (x, y) körül egy $G(x) \times G(y)$ nyílt tégla a komplementerben. Ekkor $G(x) \cap \operatorname{Supp} T) \times (G(y) \cap \operatorname{Supp} S) = \emptyset$, ami csak úgy lehet, ha $G(x) \cap \operatorname{Supp} T) = \emptyset$ vagy $G(y) \cap \operatorname{Supp} S = \emptyset$. Ezért ha $\operatorname{Supp} \varphi \subset G(x)$ és $\operatorname{Supp} \psi \subset G(y)$, akkor $(T \otimes S \mid \varphi \otimes \psi) = 0$, így a 7.3. megjegyzés szerint $T \otimes S$ a $G(x) \times G(y)$ halmazon 0, azaz $(x, y) \notin \operatorname{Supp}(T \otimes S)$.

8.5. Feladatok

1. Legyen H a Heaviside-féle függvény. Ekkor az N-dimenziós Dirac-delta $\delta^{(N)} = \partial_1 \dots \partial_N (H \otimes \dots \otimes H)$.

2. Bizonyítsuk be: legyen $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $p \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ multipolinom, D_1 az első N változó szerinti differenciálás $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$-ben, $a \in \mathbb{R}^N$, $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$, $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^M)^*$. Ekkor
(i) $M_{f \otimes g}(T \otimes S) = (M_f T) \otimes (M_g S)$;
(ii) $p(\mathrm{D}_1)(T \otimes S) = (p(\mathrm{D})T) \otimes S$;
(iii) $L_{(a,0)}(T \otimes S) = (L_a T) \otimes S$.

3. Bizonyítsuk be, hogy a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^* \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^M)^* \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M)^*$, $\quad (T, S) \mapsto T \otimes S$ tenzorszorzás bilineáris és változónként folytonos leképzés.

4. Mutassuk meg, hogy mérsékelt disztribúciók tenzorszorzata is mérsékelt.

9. Disztribúciók konvolúciója

9.1.

Definíció. *Az $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ integrálható függvények **konvolúciója**:*

$$f * g \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}, \quad (f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y) g(y) \, dy. \tag{4}$$

Állítás. *Az $f * g$ függvény jól definiált, integrálható , továbbá $f * g = g * f$.*

Bizonyítás Az $(x, y) \mapsto f(y)g(x - y)$ függvény integrálható a Fubini-tétel szerint, mert az egyik sorrendben abszolút integrálható , hiszen az

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} |f(x - y)||g(y)| \, dx = \|f\|_1 \; |g(y)|$$

függvény integrálható , továbbá a 4 egyenlőségben szereplő integrált a $z := x - y$ helyettesítéssel

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(z) g(x - z) \, dz = (g * f)(x)$$

alakra hozhatjuk.

9.2.

Hasonlóan beláthatjuk, hogy ha f lokálisan integrálható és g integrálható, kompakt tartójú (azaz g egy kompakt halmazon kívül majdnem mindenütt nulla), akkor szintén értelmes f és g konvolúciója és ez lokálisan integrálható .

Ha $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, akkor

$$(R_{f*g} \mid \varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)\, dy \right) \varphi(x)\, dx = \\ = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(z)\varphi(y+z)\, dy\, dz,$$

ahol a Fubini-tétel alkalmazása után a $z := x - y$ helyettesítéssel éltünk. Vezessük be az összeadást:

$$A \colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, \quad (y,z) \mapsto y+z.$$

Ezzel a fenti kifejezés így írható:

$$(R_{f*g} \mid \varphi) = (R_{f\otimes g} \mid \varphi \circ A)\,.$$

Ezek alapján kimondhatjuk a következő definíciót:

Definíció. *A T és S disztribúciók* ***konvolválhatók (értelmes a konvolúciójuk)****, ha minden φ alapfüggvény esetén értelmes*

$$(T * S \mid \varphi) := (T \otimes S \mid \varphi \circ A)\,.$$

Ha tehát $f*g$ létezik és lokálisan integrálható , akkor a definíció szerint $R_f * R_g$ is létezik és $R_f * R_g = R_{f*g}$.

Megjegyzés $\operatorname{Supp}(\varphi \circ A) = \overset{-1}{A}(\operatorname{Supp}\varphi)$, ugyanis $(x,y) \in \overset{-1}{A}(\operatorname{Supp}\varphi)$ akkor és csak akkor, ha $A(x,y) = x+y \in \operatorname{Supp}\varphi$, és $(x,y) \in \operatorname{Supp}(\varphi \circ A)$ pontosan akkor, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan (x_n, y_n), hogy $|x_n - x| \leq \frac{1}{n}$, $|y_n - y| \leq \frac{1}{n}$, és $0 \neq \varphi(A(x_n, y_n)) = \varphi(x_n + y_n)$, ami egyenértékű azal, hogy $x + y \in \operatorname{Supp}\varphi$. Egyszerű tény, hogy $\overset{-1}{A}(\operatorname{Supp}\varphi) = (\operatorname{Supp}\varphi \times \{0\}) + \{\, (x,y) \mid x+y=0 \,\}$ egy „ferde sáv”, ezért ha $\varphi \neq 0$ $\varphi \circ A$ nem kompakt tartójú , a fenti definíció értelmességéről csak a 3.2 és a 3.4 definícióban meghatározott kiterjesztések figyelembevételével beszélhetünk.

Állítás. *Ha T és S konvolválható, akkor a $T * S \colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{K}$, $\varphi \mapsto (T * S \mid \varphi)$ funkcionál disztribúció.*

Bizonyítás Tekintsük a $\xi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2N})$ valós értékű alapfüggvények $\mathcal{E}$ értelemben 1-hez tartó sorozatát, és legyen $K_n \colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{K}$, $\varphi \mapsto (T \otimes S \mid \xi_n(\varphi \circ A))$. K_n valóban értelmes minden φ-re, mert $M_{\xi_n}(T \otimes S)$ kompakt tartójú , φ-ben pedig nyilván lineáris. A folytonosságának belátásához vegyünk egy $\mathcal{D}$ értelemben 0-hoz tartó $\varphi_m \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ sorozatot. Ekkor minden n-re $\xi_n(\varphi_m \circ A)$ a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2N})$ térben tart 0-hoz, ezért $\lim_m (K_n \mid \varphi_m) = 0$ lévén $T \otimes S$ folytonos. Tehát K_n disztribúció (minden n-re). A K_n disztribúciósorozat pontonként konvergens (azaz minden $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-re $(K_n \mid \varphi)$ konvergens), így a Banach–Steinhaus-tétel szerint (5.1 állítás) a pontonként értelmezett határérték is disztribúció. Ez pedig éppen a $T * S$ konvolúció.

Állítás. *A konvolúció kommutatív.*

Bizonyítás Legyen T és S disztribúció. Ekkor

$$(T * S \mid \varphi) = (T \otimes S \mid \varphi \circ A) = (K_J(S \otimes T) \mid \varphi \circ A) = \\ = (S \otimes T \mid \varphi \circ A \circ J) = (S \otimes T \mid \varphi \circ A) = (S * T \mid \varphi)\,.$$

9.3.

T és S biztosan konvolválható, ha minden alapfüggvény esetén $\operatorname{Supp}(T \otimes S) \cap \operatorname{Supp}(\varphi \circ A)$ kompakt, ami teljesül, ha minden K kompakt halmazra $\operatorname{Supp}(T \otimes S) \cap \overset{-1}{A}(K)$ kompakt. Mivel $\operatorname{Supp}(T \otimes S) \subset \operatorname{Supp} T \times \operatorname{Supp} S$, a konvolúció létezésének elégséges feltétele, hogy

$$(\operatorname{Supp} T \times \operatorname{Supp} S) \cap \overset{-1}{A}(K)$$

kompakt tetszőleges K kompakt halmazra.

Állítás. *Adott K kompakt halmaz esetén* $(\operatorname{Supp} T \times \operatorname{Supp} S) \cap \overset{-1}{A}(K)$ *pontosan akkor kompakt, ha* $\operatorname{Supp} S \cap (K - \operatorname{Supp} T)$ *és* $\operatorname{Supp} T \cap (K - \operatorname{Supp} S)$ *kompakt.*

Bizonyítás A fenti halmazok nyilván zártak, ezért csak a korlátosságot kell vizsgálni. Legyen $B := (\operatorname{Supp} T \times \operatorname{Supp} S) \cap \overset{-1}{A}(K)$. Mivel

$$B = \{\, (x, y) \mid x \in \operatorname{Supp} T,\ y \in \operatorname{Supp} S,\ x + y \in K \,\},$$

könnyű látni, hogy

$$\operatorname{Supp} T \cap (K - \operatorname{Supp} S) = \{\, x \in \operatorname{Supp} T \mid \text{ létezik } y \in \operatorname{Supp} S \colon x \in -y + K \,\} = \\ = \operatorname{pr}_1[B],$$

és hasonlóan a másik esetben a második projekcióval. Ebből már látszik az ekvivalencia.

Következmény. *A konvolúció létezésének elégséges feltétele, hogy T és S közül az egyik kompakt tartójú legyen.*

Állítás. $\operatorname{Supp}(T * S) \subset \operatorname{Supp} T + \operatorname{Supp} S$.

Bizonyítás Legyen φ olyan alapfüggvény, amelynek tartója a jobb oldal komplementerében van. Azt kell belátni, hogy ekkor $(T * S \mid \varphi) = 0$. Ez definíció szerint $(T \otimes S \mid \varphi \circ A)$, ami nulla, hiszen

$$\operatorname{Supp}(T \otimes S) \cap \operatorname{Supp}(\varphi \circ A) \subset (\operatorname{Supp} T \times \operatorname{Supp} S) \cap \overset{-1}{A}(\operatorname{Supp} \varphi) \subset \\ \subset \overset{-1}{A}(A[\operatorname{Supp} T \times \operatorname{Supp} S] \cap \operatorname{Supp} \varphi) = \overset{-1}{A}((\operatorname{Supp} T + \operatorname{Supp} S) \cap \operatorname{Supp} \varphi) = \\ = \overset{-1}{A}(\emptyset) = \emptyset.$$

9.4.

Állítás. *Ha a T és S disztribúciók konvolúciója létezik, akkor minden p multipolinom esetén létezik $\big(p(\mathrm{D})T\big) * S$ és $T * \big(p(\mathrm{D})S\big)$, továbbá*

$$p(\mathrm{D})(T * S) = \big(p(\mathrm{D})T\big) * S = T * \big(p(\mathrm{D})S\big).$$

Bizonyítás Elég belátni a mondottakat a parciális deriváltakra. A derváltak konvolúciója nyilván értelmes, mert

$$\operatorname{Supp}((\partial_k T) \otimes S) = \operatorname{Supp}(\mathrm{D}_{1,k}(T \otimes S)) \subset \operatorname{Supp}(T \otimes S).$$

Legyen φ alapfüggvény. Ekkor

$$(\partial_k(T * S) \mid \varphi) = -(T * S \mid \partial_k\varphi) = -(T \otimes S \mid \partial_k\varphi \circ A)\,.$$

Mivel $\partial_k\varphi \circ A = \mathrm{D}_{1,k}(\varphi \circ A) = \mathrm{D}_{2,k}(\varphi \circ A)$, így folytathatjuk

$$(\mathrm{D}_{1,k}(T \otimes S) \mid \varphi \circ A) = ((\partial_k T) \otimes S \mid \varphi \circ A) = ((\partial_k T) * S \mid \varphi)\,,$$

illetve hasonlóan a másik deriváltra is.

Állítás. *Ha a T és S disztribúciók konvolúciója létezik és $a \in \mathbb{R}^N$, akkor létezik $(L_a T) * S$ és $T * (L_a S)$, és*

$$L_a(T * S) = (L_a T) * S = T * (L_a S).$$

Bizonyítás A konvolúciók létezése nyilvánvaló. Továbbá minden φ alapfüggvényre

$$\begin{aligned}((L_a T) * S \mid \varphi) &= ((L_a T) \otimes S \mid \varphi \circ A) = \big(L_{(a,0)}(T \otimes S) \,\big|\, \varphi \circ A\big) = \\ &= \big(T \otimes S \,\big|\, L_{(-a,0)}(\varphi \circ A)\big) = (T \otimes S \mid (L_{-a}\varphi) \circ A) = \\ &= (T * S \mid L_{-a}\varphi) = (L_a(T * S) \mid \varphi)\,.\end{aligned}$$

A másik egyenlőség is hasonlóan belátható.

9.5.

A konvolúciónak, mint „szorzásnak” az egységeleme a Dirac-delta:

$$\delta * T = T.$$

Valóban, lévén kompakt tartójú, a Dirac-delta konvolválható minden disztribúcióval, és

$$(\delta * T \mid \varphi) = (\delta \otimes T \mid \varphi \circ A) = (T \mid x \mapsto (\delta \mid \varphi(x + \cdot))) = (T \mid \varphi)\,.$$

Ezt felhasználva megmutathatjuk, hogy a konvolúció nem asszociatív: $N = 1$ esetén, ha H a Heaviside-függvény, akkor $1 * (\delta' * H) = 1 * (\delta * H') = 1 * (\delta * \delta) = 1$, viszont $(1 * \delta') * H = (1' * \delta) * H = 0$.

9.6.

A függvények konvolúciójának a fejezetünk elején szereplő formulája általánosítható függvény és mérték konvolúciójára.

Legyen f Borel-mérhető függvény és m Radon-mérték. Ha minden $x \in \mathbb{R}^N$ esetén az $y \mapsto f(x - y)$ integrálható $|m|$ szerint, akkor értelmezzük az

$$(m * f)(x) := (f * m)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y)dm(y) \qquad (x \in \mathbb{R}^N)$$

függvényt.

Állítás. *Ha f lokálisan integrálható, és $m * f$ is lokálisan integrálható, akkor*

$$R_{m*f} = F_m * \mathbb{R}_f.$$

Bizonyítás

$$(F_m \otimes R_f \mid \varphi \circ A) = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} f(z)\varphi(z+y)\,dm(y)\,dz =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\,dm(y) \right) \varphi(x)\,dx = (R_{m*f} \mid \varphi)\,,$$

ahol az integrálások sorrendjének megcserélhetőségére vonatkozó Fubini-tételt és az $x := z + y$ helyettesítést alkalmaztuk.

9.7. Feladatok

1. Legyen $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$ és $a \in \mathbb{R}^N$. Ekkor $\delta_a * T = L_a T$.
2. Legyen $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$ és p multipolinom. Ekkor $T * (p(\mathrm{D})\delta) = p(\mathrm{D})T$.
3. Igazoljuk, hogy $T * 1$ pontosan akkor értelmes, ha T kompakt tartójú .
4. Bizonyítsuk be, hogy rögzített T disztribúció esetén, ha S és S_n $(n \in \mathbb{N})$ kompakt tartójú disztribúciók, és $\lim_n S_n = S$, akkor $\lim_n T * S_n = T * S$.

10. Regularizálás

10.1.

Az m Radon-mérték és a ψ alapfüggvény konvolúcióját $(m * \psi)(x) = (F_m \mid L_x \tau \psi)$ alakba is írhatjuk, ahol L_x az x-szel való eltolás, és τ a tükrözés (lásd 6.7). Ennek alapján definiáljuk a T disztribúció és a ψ alapfüggvény esetén az

$$(T * \psi)(x) := (T \mid L_x \tau \psi) \qquad (x \in \mathbb{R}^N)$$

függvényt.

Állítás. *$T * \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, továbbá $T * R_\psi = R_{T*\psi}$.*

Bizonyítás T linearitása folytán

$$\partial_k (T * \psi)(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(T \mid L_{x+h_k}\tau\psi - L_x\tau\psi)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(T \,\middle|\, \frac{L_{x+h_k}\tau\psi - L_x\tau\psi}{h} \right),$$

T folytonossága és a 6.11 pont alapján pedig a limesz bevihető T mögé:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(L_{x+h_k}\tau\psi - L_x\tau\psi)(y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\psi(x + h_k - y) - \psi(x-y)}{h} =$$
$$= \partial_k \psi(x-h) = (L_x \tau \partial_k \psi)(y),$$

ezért

$$\partial_k (T * \psi) = T * \partial_k \psi,$$

amiből már következik végtelenszer differenciálhatóság.

Továbbá

$$\begin{aligned}
(T * R_\psi \mid \varphi) &= (T \otimes R_\psi \mid \varphi \circ A) = (R_\psi \otimes T \mid \varphi \circ A) = \\
&= \int \psi(y)((T \mid x \mapsto \varphi(x+y)dy) = \int (\left(T \,\middle|\, x \mapsto \int \psi(y)\varphi(x+y)dy \right) = \\
&= \int (\left(T \,\middle|\, x \mapsto \int \psi(x-z)\varphi(z)dz \right) = \int (\left(T \,\middle|\, x \mapsto \int \psi(x-z) \right) \varphi(z)dz = \\
&= \int (T \mid L_z \tau \psi)\, \varphi(z)dz = (R_{T*\psi} \mid \varphi)\,.
\end{aligned}$$

10.2.

Definíció. *Legyen $\varrho_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ úgy, hogy $\lim_n R_{\varrho_n} = \delta$, és legyen $\eta_{n,n+1}$ az 1.4 pontban megadott függvény. Ekkor az*

$$reg_n T := \eta_{n,n+1} T * \varrho_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot a T disztribúció **regularizálásának** *hívjuk.*

Állítás. $\lim_n R_{reg_n T} = T$.

Bizonyítás

$$\left(R_{\mathrm{reg}_n T} \mid \varphi\right) = (R_{T*\varrho_n} \mid \eta_{n,n+1}\varphi) = (T * R_{\varrho_n} \mid \eta_{n,n+1}\varphi)\,;$$

ha n elég nagy, akkor $\eta_{n,n+1}\varphi = \varphi$, és a 4. feladat alapján $\lim_n T * R_{\varrho_n} = T * \delta = T$. □

Eredményünk azt is mondja, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ (a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-beli függvényeknek megfelelő reguláris disztribúciók összessége) sűrű lineáris altér $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$-ban.

Érdemes megjegyezni, hogy ha T kompakt tartójú, akkor $\eta_{n,n+1}$ elhagyható a regularizációból. Ugyanis vehetünk kompakt tartójú ϱ_n-ket, és $\operatorname{Supp}(T * \varrho_n) \subset \operatorname{Supp} T + \operatorname{Supp} \varrho_n$ miatt, ha n elég nagy, akkor $\eta_{n,n+1} T * \varrho_n = T * \varrho_n$.

10.3.

Állítás. *Legyen az f folytonos függvény integrálható az m Radon-mérték szerint. Ekkor*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f dm = \lim_n (R_f \mid reg_n F_m)\,.$$

Bizonyítás

$$(R_f \mid \mathrm{reg}_n F_m) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\eta_{n,n+1}(x) \left(\int_{\mathbb{R}^N} \varrho_n(x-y)dm(y) \right) dx.$$

Megcserélhetjük az integrálások sorrendjét; bármely y esetén, ha n elég nagy, akkor $\eta_{n,n+1}(x)\varrho_n(x-y) = \varrho_n(x-y)$, tehát

$$\lim_n (R_f \mid \mathrm{reg}_n F_m) = \lim_n \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \varrho_n(x-y) f(x) dx \right) dm(y).$$

A belső integrál határértéke $f(y)$, ezért ha n elég nagy, akkor a belső integrál értékét $2|f(y)|$ majorálja, így a limesz bevihető az első integráljel alá, s ezzel eljutunk a bizonyítandó egyenlőséghez. □

Ennek alapján fogadjuk el a következő meghatározást.

Definíció. *A T disztribúció hatása az S disztribúción*

$$(T \mid S) := \lim_n (T \mid reg_n S),$$

ha a limesz létezik.

10.4.

Az előző fogalmak és eredmények egy fontos fizikai alkalmazását mutatjuk meg. Tudjuk, hogy $\mathbb{R}^3$-ban az $x \mapsto \frac{1}{|x|^4}$ függvény nem lokálisan integrálható. A depolarizálással hozzá rendelt disztribúció hatása a φ függvényen

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi - \varphi(0) - \partial_k\varphi(0)x_k}{r(x)^4} dx.$$

Polárkoordinátákban $(x_1, x_2, x_3) = r(\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$ (itt persze φ a polárszög, és nem a függvény!), és ezeknek a szögek szerinti integrálja nulla, tehát a fenti integrálban az utolsó tagot elhagyhatjuk.

Nevezzük el E-nek ezt a disztribúciót.

Állítás. *Legyen G egy nulla körüli gömb. Ekkor létezik*

$$(E \mid R_{\chi_G}) = \big(E \bigm| R_{\chi_{\overline{G}}}\big) = -\int_{G^\complement} \frac{1}{|x|^4} dx,$$

és

$$\left(E \,\middle|\, R_{\chi_{G^\complement}}\right) = \left(E \,\middle|\, R_{\chi_{\overline{G}^\complement}}\right) = \int_{G^\complement} \frac{1}{|x|^4} dx.$$

Bizonyítás Az R_{χ_G} regularizálása az

$$\eta_{n,n+1}(x) \int_G \varrho_n(x-y)dy = \eta_{n,n+1}(x) \int_{x+G} \varrho_n(z)dz \qquad (x \in \mathbb{R}^3)$$

függvénysorozat.

Legyen a G sugara r.

Ha $x \in G$, akkor létezik olyan n_G, hogy $\operatorname{Supp}\varrho_n \subset G_{r-|x|}(0) \subset (x+G)$ minden $n > n_G$ esetén, tehát a sorozat minden ilyen n-hez tartozó tagjára a fenti integrál értéke 1.

Ha $x \notin \overline{G}$, akkor létezik olyan n_G, hogy $\operatorname{Supp}\varrho_n \subset G_{|x|-r}(0) \subset (x+G)^\complement$ minden $n > n_G$ esetén, tehát a sorozat minden ilyen n-hez tartozó tagja 0.

Az E hatása a regularizáló függvényekre

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\eta_{n,n+1}(x)}{|x|^4} \left(\int_G \big(\varrho_n(x-y) - \varrho_n(-y)\big)dy \right) dx.$$

Az y szerinti második integrál értéke -1, ha $\operatorname{Supp}\varrho_n \subset G$. Az y szerinti első integrál értéke elég nagy n-kre 1, ha $x \in G$, és 0, ha $x \notin \overline{G}$. Mivel folytonos függvénynek a G-re vett Lebesgue-integrálja megegyezik a $\overline{G}$-re vett integrállal, az E hatása R_{χ_G}-n

$$-\lim_n \int_{G^\complement} \eta_{n,n+1}(x) \frac{1}{|x|^4} dx;$$

G komplementerén $x \mapsto \frac{1}{|x|^4}$ integrálható, és majorálja az integrandust, ezért a limesz bevihető az integráljel alá, és megkapjuk a kívánt eredményt.

Az $R_{\chi_{G^\diamond}}$ regularizálása az

$$\eta_{n,n+1}(x)\int_{G^\diamond}\varrho_n(x-y)dy = \eta_{n,n+1}(x)\left(1-\int_G \varrho_n(x-y)dy\right) \qquad (x\in\mathbb{R}^3)$$

függvénysorozat.

Az előzőhöz képest megfordul a helyzet: ez a függvénysorozat elég nagy n-ekre 0, ahol az előbbi 1 volt, és 1, ahol az 0 volt. Így azonnal megkapjuk a másik kívánt eredményt is.

Megjegyzés E szám szorzó erejéig egy ponttöltés elektromos energiájának a „sűrűsége”. Azonban nem integrálható ezért a szokásos keretek között az energia „végtelen”. Disztribúciók körében azonban a regularizálás segítségével tudjuk értelmezni az energiát; az $1=\chi_G+\chi_{G^\diamond}$ egyenlőség szerint $(E \mid R_1)=0$: az energia nulla. De ez a nulla olyan érdekesen jön ki, hogy az energia értéke bármely nulla körüli gömbön kívül pozitív, a gömbben ugyanakkora negatív, minél kisebba a gömb, ezek az értékek annál nagyobbak.

11. Fourier-transzformáció

11.1.

Bármely integrálható függvénynek értelmezhető a Fourier-transzformáltja, azonban a Fourier-transzformáció csak a gyorsan csökkenő függvényeken rendelkezik igazán jó tulajdonságokkal. A $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ **pozitív**, illetve **negatív Fourier-transzformáltja**

$$(F_\pm\varphi)(y)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy\cdot x}\varphi(x)\,dx \qquad (y\in\mathbb{R}^N),$$

ahol $\cdot$ az $\mathbb{R}^N$-beli skaláris szorzatot jelöli (a matematikai irodalomban hol a pozitív, hol a negatív előjellel fogadják el a definíciót, mi mindkettőt tekintjük).

A paraméteres integrálok differenciálhatóságára vonatkozó tétel alkalmazásával egyszerűen beláthatjuk hogy $F_\pm\varphi$ végtelenszer differenciálható. Ugyanis az integrandus minden rögzített x mellett y-ban minden koordináta szerint differenciálható, és $\pm ix_k e^{\pm iy\cdot x}\varphi(x)$ a k-ik parciális deriváltja, amely minden rögzített y mellett x-ben integrálható, és y-tól független integrálható majoránsa $x\mapsto|x_k\varphi(x)|$. Tehát $F_\pm\varphi$ a változójának minden komponense szerint parciálisan differenciálható, és

$$\frac{\partial(F_\pm\varphi)(y)}{\partial y_k}=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N}(\pm ix_k)e^{\pm iy\cdot x}\varphi(x)\,dx.$$

Ezek a parciális deriváltak, ugyanilyen indoklással, ugyancsak parciálisan differenciálhatók, és indukcióval beláthatjuk, hogy $F_\pm\varphi$ akármilyen rendben, akármilyen sorrendben parciálisan differenciálható, azaz végtelenszer differenciálható.

Egyszerűen bizonyítható, hogy tetszőleges p és q multipolinom, $a\in\mathbb{R}^N$ és $A:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ lineáris bijekció esetén

$$\begin{aligned} p(\mp i\mathrm{D})\circ F_\pm &= F_\pm\circ M_p, & M_q\circ F_\pm &= F_\pm\circ q(\pm i\mathrm{D}),\\ L_a\circ F_\pm &= F_\pm\circ M_{\exp(\mp i\,a\bullet)}, & F_\pm\circ L_a &= M_{\exp(\pm i\,a\bullet)}\circ F_\pm,\\ K_A\circ F_\pm &= F_\pm\circ(|\det A|K_{A^{*-1}}), & F_\pm\circ K_A &= |\det A|K_{A^{*-1}}\circ F_\pm, \end{aligned}$$

ahol $a\bullet$ jelöli az $y\mapsto a\cdot y$ függvényt, és hasonló értelmű lesz a továbbiakban a $\bullet x$ jelölés.

Állítás. *Minden* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *esetén* $F_\pm\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Bizonyítás Ha q, p N-változós multipolinomok és $\varphi{\in}\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, akkor az előbbi első és második formula szerint

$$qp(\mp iD)F_\pm\varphi = F_\pm q(\pm iD)p\varphi,$$

így minden $x{\in}\mathbb{R}^N$ esetén

$$|(qp(\mp iD)F_\pm\varphi)(x)| = |(F_\pm(q(\pm iD)p\varphi))(x)| \le \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N}|q(\pm iD)p\varphi|,$$

azaz $qp(\mp iD)F_\pm\varphi$ korlátos, így $F_\pm\varphi{\in}\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

11.2.

Állítás. *A* $\eta : \mathbb{R}^N{\to}\mathbb{C}$, $x{\mapsto}e^{-|x|^2/2}$ *függvény az* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *eleme, és* $F_\pm\eta{=}\eta$.

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy η végtelenszer differenciálható és gyorsan csökkenő.

Vegyük elôször az $N{=}1$ esetet. η megoldása az $f'{+}\mathrm{id}_\mathbb{R}f{=}0$ lineáris differenciálegyenletnek, sőt ezen egyenlet minden megoldása η-nak számszorosa. Tehát $\pm iD\eta{\pm}i\mathrm{id}_\mathbb{R}\eta{=}0$, következésképpen

$$\mathrm{id}_\mathbb{R}(F_\pm\eta) + D(F_\pm\eta) = F_\pm(\pm iD\eta{\pm}i\mathrm{id}_\mathbb{R}\eta) = 0,$$

azaz $F_\pm\eta$ is ugyananannak a differenciálegyenletnek tesz eleget, ezért létezik egy c komplex szám úgy, hogy $F_\pm\eta{=}c\eta$. Azonban

$$c = c\eta(0){=}(F_\pm\eta)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi)}}\int_\mathbb{R} e^{-x^2/2}dx = 1,$$

tehát $F_\pm\eta{=}\eta$.

$N{\ge}2$ esetén a Fubini-tétel szerint

$$(F_\pm\eta)(y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy\cdot x}e^{-|x|^2/2}dx = \prod_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy_kx_k}e^{-x_k^2/2}dx_k =$$
$$= \prod_{k=1}^N e^{-y_k^2/2} = e^{-|y|^2/2}.$$

□

Szükségünk lesz $\alpha > 0$ esetén az $x \mapsto \eta(\alpha x)$ Fourier-transzformáltjára:

$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy\cdot x}e^{-|\alpha x|^2/2}dx = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy\cdot z/\alpha}e^{-|z|^2/2}\frac{1}{\alpha^N}dz =$$
$$= \frac{1}{\alpha^N}\eta\left(\frac{y}{\alpha}\right).$$

Tudjuk, hogy a $\varrho_\alpha := \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\frac{1}{\alpha^N}e^{-|\cdot|^2/2\alpha^2}$ függvények (mint reguláris disztribúciók) sorozata a Dirac-deltához tart, miközben α tart a nullához. Az előzőek szerint

$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}F_\pm\eta(\alpha\bullet) = \varrho_\alpha. \qquad (*)$$

A továbbiakban fontos lesz az az egyszerű észrevétel, hogy ha $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, akkor

$$\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}, \quad (x,y) \mapsto e^{\pm ix\cdot y}\varphi(x)\psi(y)$$

függvény integrálható a Lebesgue-mérték szerint, így a Fubini-tétel alapján

$$\int_{\mathbb{R}^N} (F_\pm\varphi)\psi = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \exp(\pm ix\cdot y)\varphi(x)\psi(y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(F_\pm\psi). \quad (**)$$

A $(*)$ és $(**)$ formulák szerint

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi\varrho_\alpha = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi\left(F_\pm\eta(\alpha\bullet)\right) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} (F_\pm\varphi)\eta(\alpha\bullet).$$

Az $\alpha \to 0$ határértékben ezt kapjuk:

$$\varphi(0) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} (F_\pm\varphi).$$

Állítás. *$F_\pm$:$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ lineáris bijekció, és*

$$(F_\pm)^{-1} = F_\mp.$$

Bizonyítás Legutóbbi egyenlőségünk és az eltolás és a Fourier-transzformáció kapcsolata szerint minden $x\in\mathbb{R}^N$ esetén

$$\begin{aligned}\varphi(x) = (L_{-x}\varphi)(0) &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} (F_\pm L_{-x}\varphi)(y)dy = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\mp ix\cdot y}(F_\pm\varphi)(y)dy = (F_\mp F_\pm\varphi)(x),\end{aligned}$$

tehát $F_\mp F_\pm\varphi = \varphi$.

11.3.

Állítás. *Az $F_\pm : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ leképezés $\mathcal{S}$-folytonos.*

Bizonyítás Legyen φ_n 0-hoz tartó függvények sorozata az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ térben. Azt kell belátnunk, hogy tetszőleges p, q multipolinomokkal $pq(\pm i\mathrm{D})F_\pm\varphi_n$ egyenletesen tart 0-hoz. Mivel

$$pq(\pm i\mathrm{D})F_\pm\varphi_n = F_\pm p(\mp i\mathrm{D})q\varphi_n = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm i\bullet x}(p(\mp i\mathrm{D})q\varphi_n)(x\, dx\ ,$$

véve a bal oldali és a jobb oldali kifejezések abszolút értékét és kihasználva a háromszög-egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}|pq(\pm iD)F_\pm\varphi_n| &= \left| \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm i\bullet x}(p(\mp iD)q\varphi_n)(x)\, dx \right| \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} |p(\mp iD)q\varphi_n|\ .\end{aligned}$$

Minthogy a $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ sorozat a nullához tart $\mathcal{S}$-értelemben, $|p(\mp iD)q\varphi_n|$ egyenletesen tart 0-hoz, így a Lebesgue-tétel szerint a fenti egyenlőtlenség jobb oldalán álló integrál is 0-hoz tart. Ezzel állításunkat beláttuk.

11.4.

A fentiek alapján értelmezhető a Fourier-transzformációk transzponáltja mint azok az $F_\pm^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^* \longmapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$ leképezések, melyre

$$\left(F_\pm^* T \,\middle|\, \varphi\right) = (T \mid F_\pm \varphi) \qquad \text{ahol} \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N),\ T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^* \ .$$

Legyen most $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Ekkor

$$\begin{aligned}\left(F_\pm^* R_\psi \,\middle|\, \varphi\right) = (R_\psi \mid F_\pm \varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} \psi(y)\,(F_\pm\varphi)\,(y)\,dy = \\ \int_{\mathbb{R}^N} \psi(y) \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy\cdot x}\varphi(x)\,dx\,dy = \\ \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm ix\cdot y}\psi(y)\,dy \right) \varphi(x)\,dx = \left(R_{F_\pm\psi} \,\middle|\, \varphi\right) \ .\end{aligned}$$

Ezek alapján kiterjesztjük a Fourier-transzformációkat a temperált disztribúciókra:

Definíció.

$$F_\pm : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^* \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*, \qquad F_\pm := F_\pm^* . \tag{5}$$

Tehát

$$(F_\pm T \mid \varphi) = (T \mid F_\pm \varphi)$$

minden és $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ és $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ esetén .

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy a disztribúciókon értelmezett Fourier-transzformációkra és a szorzás, a differenciálás stb. operátorokra érvényben maradnak a (11.1) pontban felsorolt tulajdonságok.

11.5.

Állítás. *Legyen* m *véges variációjú Radon-mérték, azaz* $|\mathrm{m}|(\mathbb{R}^N) < \infty$. *Ekkor* m *mint disztribúció* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$ *eleme, továbbá* $F_\pm \mathrm{m}$ *reguláris disztribúció, és mint ilyen folytonos függvény,*

$$(F_\pm \mathrm{m})(y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy\cdot x}\,\mathrm{dm}(x) \ .$$

Bizonyítás Először is jegyezzük meg, hogy a fenti integrál értelmes és mint az y függvénye folytonos. Legyen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Ekkor definíció szerint

$$\begin{aligned}(F_\pm \mathrm{m} \mid \varphi) = (\mathrm{m} \mid F_\pm\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^N} (F_\pm\varphi)(x)\,\mathrm{dm}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy\cdot x}\varphi(y)\,dy \right) \mathrm{dm}(x) \\ = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy\cdot x}\,\mathrm{dm}(x) \right) \varphi(y)\,dy &= \int_{\mathbb{R}^N} (F_\pm \mathrm{m})(y)\varphi(y)\,dy \ .\end{aligned}$$

A fentiekben az integrálokat minden további nélkül megcserélhettük, mert $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ és $|e^{\pm ix\cdot y}| = 1$, tehát az integrálok abszolút értékben léteznek és így a Fubini-tétel értelmében egyenlők.

Állítás. *Legyen* m *kompakt tartójú Radon-mérték. Ekkor* $F_\pm \mathrm{m} \in \Theta(\mathbb{R}^N)$.

Bizonyítás m Fourier-transzformáltja

$$(F_\pm \mathrm{m})(y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy\cdot x} d\mathrm{m}(x) \ ;$$

ez y szerint differenciálható a paraméteres integrálokról szóló tétel szerint, és

$$(\mp i\partial_k F_\pm \mathrm{m})(y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_K x_k e^{\pm iy\cdot x}\, d\mathrm{m}(x) \ ,$$

és az integrál alkalmas konstanssal majorálható. Ebbből látszik, hogy $F_\pm \mathrm{m}$ végtelenszer differenciálható és akárhanyadik deriváltja egy konstanssal majorálható, tehát a $\Theta(\mathbb{R}^N)$ eleme.

11.6.

Emlékezzünk, hogy kompakt tartójú disztribúció bármely végtelenszer differenciálható függvényre is alkalmazható, ezért a legutóbbi eredményünket így írhatjuk:

$$(F_\pm \mathrm{m})(y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \left(\mathrm{m} \,\middle|\, e^{\pm iy\bullet}\right) .$$

Ennek általánosítása:

Állítás. *Legyen* $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$ *és* $\operatorname{Supp} T$ *kompakt. Ekkor* $F_\pm T$ *reguláris disztribúció és mint ilyen a* $\Theta(\mathbb{R}^N)$ *eleme, amelyet a*

$$(F_\pm T)(y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \left(T \,\middle|\, e^{\pm iy\bullet}\right)$$

formula ad meg.

Ez az állítás úgyszólván hasznosíthatatlan az alkalmazásokban, elvi jelentősége sincs, ezért elhagyjuk a bizonyítását, amelyet az előzőekre alapozva a T regularizálásával lehet megadni.

11.7.

A fenti eredmények alkalmazásaképpen számítsuk ki néhány disztribúció Fourier-transzformáltját. Vegyük először a 0-ra koncentrált Dirac- deltát. Az előző tétel szerint

$$(F_\pm \delta)(y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy\cdot x}\, d\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \ .$$

Nyilvánvaló, hogy az a pontra koncentrált Dirac-delta Fourier-transzformáltja is hasonlóképpen számolható:

$$(F_\pm \delta_a)(y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy\cdot x}\, d\delta_a(x) = \frac{e^{\pm iy\cdot a}}{(2\pi)^{N/2}} \ .$$

Legyen most $N = 1$, és vizsgáljuk a $[-a, a]$ intervallum karakterisztikus függvénye által meghatározott reguláris disztribúciót! Nyilvánvaló, hogy $\chi_{[-a,a]}\lambda$ Radon-mérték, így az előző tétel értelmében a Fourier-transzformáltja

$$\left(F_\pm\left(\chi_{[-a,a]}\lambda\right)\right)(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{\pm iyx}\chi_{[-a,a]}(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}e^{\pm iyx}\,dx=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{\pm iyx}}{\pm iy}\Bigg|_{x=-a}^{x=a}=\frac{e^{\pm iya}-e^{\mp iya}}{\pm iy}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(ay)}{y},$$

ahol az $y=0$ helyen az ismert határértéket kell venni.

11.8.

Most vegyük $\mathbb{R}^3$-ban a 0 középpontú, R sugarú gömb felületi Lebesgue-mértékét, $\lambda_{S_R(0)}$-t. Ez mint disztribúció $S(\mathbb{R}^3)^*$ eleme, azaz alkalmazható az előző tétel, és

$$\left(F_\pm\lambda_{S_R(0)}\right)(y)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3}e^{\pm iyx}\,d\lambda_{S_{R(0)}}(x)\ .$$

Az integrál kiszámításához gömbi polárkoordinátákra térünk át, mégpedig úgy, hogy minden rögzített nemnulla y-hoz választunk két, az y-ra és egymásra is merőleges vektort, és x-et ezáltal fejezzük ki. Tehát

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3}e^{\pm iyx}\,d\lambda_{S_R(0)}(x)=$$
$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\pm i|y|R\cos\vartheta}R^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{2\pi R}{\mp i|y|}e^{\pm i|y|R\cos\vartheta}\Bigg|_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi}=\frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}}\frac{R}{|y|}\frac{e^{\mp i|y|R}-e^{\pm i|y|R}}{\pm 2i}\ .$$

Innen kapjuk, hogy

$$\left(F_\pm\lambda_{S_R(0)}\right)(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{R\sin(R|y|)}{|y|}\ .$$

11.9.

Állítás. *Legyen* m *kompakt tartójú Radon-mérték és* $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. *Ekkor* $F_\pm(m*\varphi)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, *továbbá*

$$F_\pm(m*\varphi)=(2\pi)^{N/2}(F_\pm f)\cdot(F_\pm\varphi)\ .$$

Bizonyítás Tudjuk, hogy $F_\pm(\varphi)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ és $F_\pm(\mathrm{m})\in\Theta(\mathbb{R}^N)$, tehát 6.2 alapján elég az álllításban szereplő egyenlőséget megmutatni.

$$F_\pm(m*\varphi)(y)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N}e^{\pm iyx}(m*\varphi)(x)\,dx$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N}e^{\pm iyx}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(x-z)\,\mathrm{dm}(z)\,dx\ .$$

Ez az integrál az $x-z=:u$ helyettesítéssel átalakítható, és így

$$F_{\pm}(m*\varphi)(y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy(u+z)}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(u)\,\mathrm{dm}(z)\,du =$$
$$= (2\pi)^{N/2}\left(\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iyz}\,\mathrm{dm}(z)\right)\left(\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iyu}\varphi(u)\,du\right)$$
$$= (2\pi)^{N/2}F_{\pm}(\mathrm{m})F_{\pm}(\varphi)\ ,$$

amit bizonyítani akartunk.

11.10.

Az előbbi eredmény általánosabban is igaz, nevezetesen a disztribúciók körében; ezt csak kimondjuk bizonyítás nélkül.

Állítás. *Legyen T kompakt tartójú disztribúció és S temperált disztribúció. Ekkor $T*S\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$, továbbá*

$$F_{\pm}(T*S) = (2\pi)^{N/2}(F_{\pm}T)\,(F_{\pm}S)\ .$$

11.11.

Az alábbiakban értelmezzük a gyorsan csökkenő függvények részleges Fourier-transzformáltját. Ehhez $\mathbb{R}^N$-et $\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^K$ alakban állítjuk elő.

Definíció. *A $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^K)$ függvénynek az első M változója szerinti* ***parciális*** *Fourier-transzformáltja*

$$\left(\left(F_{\pm}^{(M)}\otimes\mathrm{id}_{S(\mathbb{R}^K)}\right)\varphi\right)(p,v) := \frac{1}{(2\pi)^{M/2}}\int_{\mathbb{R}^M} e^{\pm ipu}\varphi(u,v)\,du\ .$$

Hasonlóképpen értelmezhető $\mathrm{id}_{S(R^M)}\otimes F_{\pm}^{(K)}$ is.

Ugyanúgy, ahogy a Fourier-transzformácóra megmutattuk, beláthatjuk, hogy $F_{\pm}^{(M)}\otimes\mathrm{id}_{S(\mathbb{R}^K)}:\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ folytonos lineáris bijekció, az inverze $F_{\mp}^{(M)}\otimes\mathrm{id}_{S(\mathbb{R}^K)}$. Ezért a transzponáltján keresztül a (5) definícióhoz hasonlóan értelmezhetjük a parciális Fourier-transzformációkat a temperált disztribúciókon is.

11.12.

A parciális Fourier-transzformációk segítségével bebizonyíthatjuk a hullámegyenlet alapmegoldására vonatkozó 7.5 állítást.

Vegyük tehát a

$$(\partial_0^2-\triangle)K=\delta^{(4)}$$

egyenletet, és tegyük fel, hogy az alapmegoldás mérsékelt disztribúció, azaz $T\in S(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)^*$. Ekkor a fenti egyenletre alkalmazható az $\mathrm{id}_{S(\mathbb{R})}\otimes F_{\pm}^{(3)}$ parciális Fourier-transzformáció, és az eredmény

$$(\partial_0^2+|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}|^2)\hat{K}=\delta^{(1)}\otimes\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\ ,$$

ahol a rövidítés kedvéért $\hat{K}$-val jelöltük K parciális Fourier-transzformáltját. A fenti egyenletnek a

$$\hat{K}_+(t,p) := \frac{H(t)}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\sin|p|t}{|p|} \ ,$$

illetve a

$$\hat{K}_-(t,p) := \frac{H(-t)}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\sin|p|(-t)}{|p|} \ ,$$

függvénynek megfelelő reguláris disztribúció a megoldása; $\hat{K}_+$-t retardált, $\hat{K}_-$-t avanzsált megoldásnak nevezzük. A következőképpen ellenőrizhetjük, hogy például $\hat{K}_+$ valóban megoldás:

$$\partial_0 \hat{K}_+(t,p) = \delta^{(1)} \otimes \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\sin|p|t}{|p|} + \frac{H(t)}{(2\pi)^{3/2}} \cos|p|t = \frac{H(t)}{(2\pi)^{3/2}} \cos|p|t \ ,$$

illetve

$$\begin{aligned} \partial_0^2 \hat{K}_+(t,p) = \delta^{(1)} \otimes \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \cos|p|t - \frac{H(t)}{(2\pi)^{3/2}} |p| \sin|p|t \\ = \delta^{(1)} \otimes \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} - \frac{H(t)}{(2\pi)^{3/2}} |p| \sin|p|t \ . \end{aligned}$$

Ugyanakkor

$$\left(|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}|^2 \hat{K}_+\right)(t,p) = |p|^2 \frac{H(t)}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\sin|p|t}{|p|} \ .$$

Az inverz Fourier-transzformációval $K_+ = (\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \otimes F_{\mp}^{(3)})\hat{K}_+$. Így tehát egy $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ függvényre

$$(K_+|\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{K}_+(t,p) e^{\mp ipx}\, dp \right) \varphi(t,x)\, dt\, dx \ .$$

Külön ki szeretnénk hangsúlyozni, hogy a fenti integrálformula formális (mert semmi nem garantálja azt, hogy a p szerinti integrál létezik), csak azt jelenti, hogy az adott függvénynek mint disztribúciónak a p változó szerinti Fourier-transzformáltját kell venni.

Most használjuk fel a szóban forgó függvény konkrét alakját :

$$\hat{K}_+(t,p) = \frac{H(t)}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\sin|p|t}{|p|} \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}t}{\sqrt{\frac{2}{\pi}}t} = \frac{H(t)}{4\pi t} \sqrt{\frac{2}{\pi}} t \frac{\sin|p|t}{|p|} \ .$$

Emlékeztetünk arra, hogy a fenti egyenlőségben felbukkanó $\sqrt{\frac{2}{\pi}} t \frac{\sin|p|t}{|p|}$ kifejezés éppen a t sugarú gömbhéj Lebesgue-mértékének Fourier-transzformáltja. Ezt, és a Heaviside-függvény tulajdonságait felhasználva kapjuk, hogy

$$(K_+|\varphi) = \int_0^\infty \frac{1}{4\pi t} \int_{S_t(0)} \varphi(t,x)\, d\lambda_{S_t(0)}(x)\, dt = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(|x|,x)}{4\pi|x|}\, dx \ ,$$

ami éppen a bizonyítandó volt.

Avanzsált megoldás esetén a bizonyítás menete teljesen hasonló.

A Fourier-tanszformáció segítségével azt is megmutathatjuk, mennyire nem egyértelmű a Laplace-operátor alapmegoldása (lásd a következő fejezetet).

Állítás. *Legyen T temperált disztribúció, azaz $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$ úgy, hogy $\triangle T = 0$. Ekkor T multipolinom.*

Bizonyítás Fourier-transzformáljuk a $\triangle T = 0$ egyenlőséget. Ekkor kapjuk, hogy

$$0 = F_\pm(\triangle T) = -|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^2(F_\pm T) \ ,$$

ahonnan következik, hogy $\mathrm{Supp}(F_\pm T) \subset \{0\}$. Ezért (lásd a 6.10 állítást) van olyan p multipolinom, hogy

$$F_\pm T = p(\pm iD)\delta \ ,$$

amiből inverz Fourier-transzformáció után

$$T = \text{konstans } p \ ,$$

ami éppen a bizonyítandó volt.

11.13.

A Fourier-transzformációt értelmezhetjük úgy is, hogy skalárszorzat helyett az exponenciálisban Lorentz-szorzatot veszünk, amit a relativitáselmélet követel meg. Az $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3) = \mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ egyenlőséget tekintve, ha az 1, illetve a 3 indexszel utalunk az eddig tárgyalt megfelelő Fourier-transzformációkra, akkor a Lorentz-szorzásos Fourier-transzformáció

$$F^1_\pm \otimes F^3_\mp .$$

Erre lényegében minden eddigi érvényben marad, csak arra kell ügyelni, hogy egy p multipolinommal való szorzást nem egyszerűen $p(\pm i\mathrm{D})$-be vagy $p(\mp i\mathrm{D})$-be visz át: a más előjelet ad az $\mathbb{R}$ („idő") szerinti parciális deriváltnak, mint az $\mathbb{R}^3$ („tér") szerinti parciális deriváltaknak.

12. Lineáris differenciálegyenletek

12.1.

Állítás. *Tekintsük a $p(\mathrm{D})$ differenciáloperátort, és legyen T disztribúció, amely konvolválható a differenciáloperátor egy E alapmegoldásával. Ekkor az*

$$\left(U \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*\right)? \qquad p(\mathrm{D})U = T$$

differenciálegyenletnek az $E * T$ konvolúció megoldása.

A megoldás egyértelmű a következő értelemben: ha U_1 és U_2 olyan megoldás, hogy a különbségük E-vel konvolválható, akkor $U_1 = U_2$.

Bizonyítás $E * T$ megoldás, mert $p(\mathrm{D})(E * T) = (p(\mathrm{D})E) * T = \delta * T = T$. Tegyük most fel, hogy U_1 és U_2 megoldások, és $U_0 := U_1 - U_2$ konvolválható E-vel. Ekkor egyrészt

$$p(\mathrm{D})(U_0 * E) = U_0 * (p(\mathrm{D})E) = U_0 * \delta = U_0,$$

másrészt viszont

$$p(\mathrm{D})(U_0 * E) = (p(\mathrm{D})U_0) * E = 0 * E = 0,$$

azaz $U_0 = 0$.

13. A potenciálegyenlet

13.1.

Az elektrosztatika klasszikus feladata szerint a $\varrho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ töltéssűrűség keltette potenciált a

$$(u \in C^2(\mathbb{R}^3))? \qquad \triangle u = -\varrho$$

Laplace-egyenlet határozza meg.

Könnyen átfogalmazhatjuk a problémát disztribúciókra. Legyen $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^*$ a „töltéseloszlás”, és tekintsük az

$$(U \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^*)? \qquad \triangle U = -T \tag{6}$$

általánosított Laplace-féle differenciálegyenletet. Az 7.3 állítás alapján tudjuk, hogy $Z = -\frac{1}{4\pi|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}|}$ lokálisan integrálható függvény meghatározta disztribúció a Lapalce-operátor alapmegoldása.

A 9.6 állítást alkalmazva azonnal kapjuk a következő eredményt:

Állítás. *Legyen az $m\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ Radon-mérték olyan, hogy minden $x \in \mathbb{R}^3$ esetén $\dfrac{1}{|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} - x|}$ integrálható $|m|$ szerint, és az*

$$x \mapsto V(x) := (-Z * m)(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{dm(y)}{|x-y|} \tag{7}$$

függvény lokálisan integrálható. Ekkor az m-nek megfelelő disztribúció konvolválható a fenti alapmegoldással, és a $T = m$ esetben a (6) differenciálegyenlet megoldása a (7) függvénynek megfelelő reguláris disztribúció.

13.2.

Néhány példa:

(i) Ha m abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre és ϱ sűrűségfüggvényét valamely $a > 0, b > 0, \alpha > 0$ esetén az $\frac{a}{b+|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}|^{2+\alpha}}$ függvény majorálja, akkor létezik a kérdéses konvolúció.

(ii) Konstans töltéseloszlás esetén a konvolúció nem létezik.

(iii) Legyen adott egy F felület. $\sigma : F \to \mathbb{R}$ felületi töltéssűrűség esetén $m := \sigma\lambda_F$, ahol λ_F a felület Lebesgue-mértéke $\mathbb{R}^3$-ban. A megfelelő feltételek teljesülése esetén

$$V(x) = \frac{1}{4\pi}\int_F \frac{\sigma(y)d\lambda_F(y)}{|x-y|}$$

a töltések keltette potenciál.

Nevezetesen végtelen sík felület és konstans σ esetén a fenti integrál és így a kérdéses konvolúció nem létezik: ily módon nem értelmes a töltések keltette potenciál.

(iv) Az elektromos térerősség a potenciál negatív gradiense. Gömbi koordinátákkal könnyen megmutatható, hogy $\partial_k Z(x) = \frac{1}{4\pi}\frac{x_k}{|x|^3}$ (lásd (1)) lokálisan integrálható, ezért 6.9 alapján

$$E_k = -\partial_k R_V = -\partial_k(R_Z * F_m) = -(\partial_k R_Z) * F_m = -R_{\partial_k Z} * F_m,$$

azaz

$$E_k(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(x-y)_k}{|x-y|^3} dm(y).$$

13.3.

Az elektoromos dipóleloszlást $\mathbf{P}\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ vektor-mértékkel írhatjuk le. A hozzá tartozó látszólagos töltéseloszlás $-\mathrm{div}\mathbf{P} = -\partial_i P_i$, ami azt jelenti, hogy az általa létrehozott potenciál $Z * \mathrm{div}\mathbf{P}$ (feltéve, hogy a konvolúció létezik). Ha Z konvolválható $\mathbf{P}$-vel is, akkor $Z * (\partial_i P_i) = (\partial_i Z) * P_i$, tehát

$$V(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x-y)_i\, dP_i(y)}{4\pi|x-y|^3} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x-y)}{4\pi|x-y|^3}\, d\mathbf{P}(y).$$

Speciálisan a $p\delta_y$ pontdipólus esetén $V(x) = \frac{(x-y)p}{|x-y|^3}$.

Az elektromos térerősség

$$E_k = -\partial_k R_V = -\partial_k\left(R_{\partial_i Z} * P_i\right) = (\partial_k R_{\partial_i Z}) * P_i = (\partial_k \partial_i R_Z) * P_i.$$

Itt kiírtuk a függvényhez tartozó reguláris disztribúciókra az R jelet, mert a függvény-deriváltak – nevezetesen $\partial_i\partial_k Z$ (lásd 1) nem lokálisan integrálható, tehát $\partial_i R_{\partial_k Z}$ nem egyenlő ennek a függvénynek megfelelő – mert nincs ilyen – disztribúcióval; más szóval, itt az elektromos térerősség formulájában szereplő disztribúció már nem reguláris.

Vizsgáljuk meg ezt a nem reguláris disztribúciót!

$$(\partial_i\partial_k R_Z \mid \varphi) = -\left(\partial_k R_Z \mid \partial_i\varphi\right) = -\int_{\mathbb{R}^3} (\partial_k Z)(\partial_i\varphi) = -\lim_{r\to 0}\int_{G_r(0)^\diamond} (\partial_k Z)(\partial_i\varphi) =$$
$$= \lim_{r\to 0}\int_{G_r(0)^\diamond} (\partial_i\partial_k Z)\varphi - \lim_{r\to 0}\int_{S_r(0)} n_i(\partial_k Z)\varphi\, d\lambda_{S_r}$$

ahol a $-(\partial_k Z)(\partial_i\varphi) = (\partial_i\partial_k Z)\varphi - \partial_i((\partial_k Z)\varphi)$ öszefüggést, valamint Gauss tételét alkalmaztuk; n az r sugarú gömbhéj a „befelé irányított" normálvektora.

$\partial_i\partial_k Z$ konkrét alakjából – $\frac{x_k}{|x|} = -n_k$ – polárkoordinátákkal azonnal látjuk, hogy $\int_{G_r(0)^\diamond} \partial_i\partial_k Z = 0$, ezért a fenti jobb oldal első tagjának az értéke nem változik, ha az integrandusból levonunk $\partial_i\partial_k Z\varphi(0)$-t. Viszont a $\varphi = \varphi(0) + \sum_k \partial_k\varphi(\xi(x))x_k$ Taylor-formulából azt következtethetjük, hogy $\partial_i\partial_k Z(\varphi - \varphi(0))$ integrálható az egész $\mathbb{R}^3$-on, ezért a szóban forgó tag határértéke

$$\int_{\mathbb{R}^3} \partial_i\partial_k Z(\varphi - \varphi(0)),$$

ami a 5.3 pontban említett depolarizáció.

Továbbá Z konkrét alakjával

$$\int_{S_r} n_i\partial_k Z\varphi\, d\lambda_{S_r(0)} = \frac{1}{4\pi}\int_{S_1(0)} \frac{n_i n_k}{r^2}\varphi(rn)r^2\, d\lambda_{S_1(0)}.$$

Ennek limesze, miközben r tart a nullához,

$$\frac{1}{3}\delta_{ik}\varphi(0).$$

Végül is tehát:

$$\partial_i\partial_k R_Z = \mathrm{depol}\partial_i\partial_k Z + \frac{1}{3}\delta_{ik}\delta,$$

ahol a jobb oldal második tagja a Kronecker-delta és a Dirac-delta együttese.

13.4. Feladatok

1. Legyen $G \subset \mathbb{R}^3$ összefüggő, korlátos, nyílt halmaz, amelynek $S := \partial G$ határa differenciálható felület. Legyen $\mathbf{p} : \overline{G} \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható függvény, amellyel a dipóluseloszlás $\mathbf{P} := \mathbf{p}\lambda_G$. Mutassuk meg, hogy a látszólagos töltéseloszlás $-\mathrm{div}\mathbf{P} = (\mathrm{div}\mathbf{p})\lambda_G + \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\lambda}_{\partial G}$ (Útmutatás: $(-\partial_k(p_k\lambda_G \mid \varphi) = -(p_k\lambda_G \mid \partial_k\varphi)$, alakítsuk át a jobb oldali kifejezést két taggá, amelyekből az egyik teljes divergencia, alkalmazzuk Gauss-tételét, és azt, hogy $\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\lambda}_{\partial G} = n_k p_k \lambda_{\partial G}$, ahol n_k a felület normálisának k-ik komponense).

2. A pontdipólust a fizikában úgy szemléltetik, hogy egyre nagyobb, azonos nagyságú pozitív és negatív ponttöltést hoznak egyre közelebb egymáshoz. Legyen $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$; mutassuk meg, hogy $\lim_{e\to\infty}(e\delta_{\mathbf{p}/e} - e\delta) = -\mathrm{div}(\mathbf{p}\delta)$. (Útmutatás: legyen $a := 1/e$.)

3. Tekintsük az $\mathbf{A}$ mágneses vektorpotenciált és az $\mathbf{i}$ áramot is függvények helyett disztribúcióknak: jelölje komponenseiket $A_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^*$, illetve $i_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^*$ $(k = 1, 2, 3)$. A fentiek értelmében, ha $\mathbf{i}$ konvolválható Z-nel, akkor a $\triangle\mathbf{A} = \mathbf{i}$ egyenlet megoldása $Z * \mathbf{i}$ (Ampère-törvény).

A G irányított görbén mint vezetben folyó i nagyságú egyenáramot az $\mathbf{i} = i\boldsymbol{\lambda}_G$ írja le, ahol $\boldsymbol{\lambda}_G$ a görbe vektori Lebesgue-mértéke. Adjuk meg egy köráram által gerjesztett mágneses mező vektorpotenciálját!

4. Adjuk meg az $\mathbf{M}\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ vektor-mérték által meghatározott mágneses momentumeloszlás mágneses mezőjének vektorpotenciálját. (A látszólagos áram $\mathrm{rot}\mathbf{M}$.)

5. A pontmágnest a fizikában úgy is előállítják, hogy egyre kisebb sugarú, egyre erősebb köráramot vesznek. Legyen $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3$; mutassuk meg, hogy a rá merőleges síkban a talppontja körüli r sugarú G_r körvonalban „pozitív irányban” folyó $\frac{|\mathbf{m}|}{r^2}$ erősségű áramra $\lim_{r\to 0}\frac{|\mathbf{m}|}{r^2}\boldsymbol{\lambda}_{G_r} = \mathrm{rot}(\mathbf{m}\delta)$.

14. A diffúzióegyenlet

14.1.

Valamely anyagnak egy (végtelen kiterjedésű) közegben levő u koncentrációját, ha adott az anyag $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ forrása, a

$$(u\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R})? \qquad (\partial_0 - \triangle)u = f$$

diferenciálegyenlet határozza meg. Ez az egyenlet egyszerűen értelmezhető a disztribúciók körében is, és megoldása a forrásnak az alapmegoldással vett konvolúciója.

A gyakorlatban azonban sokszor úgy merül fel a probléma, hogy a forrás nem ismert „ősidők óta", csak egy meghatározott „kezdeti" időponttól kezdve, és adva van a kezdeti koncentráció. Vagyis az $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ forrás és $u_0 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ kezdeti koncentráció esetén az

$$(u\colon \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R})? \qquad (\partial_0 - \triangle)u = f, \qquad u(0,\cdot) = u_0$$

kezdetiérték-probléma megoldását keressük. Klasszikus keretek között az u-tól megfelelően sokszori differenciálhatóságot kell megkövetelni.

Ha át akarjuk fogalmazni a problémát disztribúciókra, első látásra nagy nehézségbe ütközünk: nincs értelme annak, hogy egy disztribúció egy üres belsejű halmazon ($\{0\}\times\mathbb{R}^N$-en) adott értéket vesz fel. Ez a nehézség azonban áthidalható.

Tekintsük a szóban forgó függvényeknek a következő iterjesztését:

$$\begin{aligned} \hat{u} \quad &: \quad \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \quad (t,x) \mapsto \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0, \\ u(t,x), & \text{ha } t \geq 0; \end{cases} \\ \hat{f} \quad &: \quad \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \quad \text{hasonlóan.} \end{aligned}$$

Jelöljük az egydimenziós delta-disztribúciót $\delta^{(1)}$-gyel.

Állítás. *Ha $\hat{f}$ és u_0 lokálisan integrálható , akkor a fenti kezdetiérték-problémával egyenértékű a következő disztribúcióegyenlet*

$$(\partial_0 - \triangle)\hat{u} = \hat{f} + \delta^{(1)} \otimes u_0,$$

ahol megintcsak nem különböztettük meg a függvényeket és az azoknak megfelelő disztribúciókat.

Bizonyítás A bal oldal hatása egy φ alapfüggvényen:

$$\begin{aligned} ((\partial_0 - \triangle)\hat{u} \mid \varphi) = (\hat{u} \mid (-\partial_0 - \triangle)\varphi) = -\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N} \hat{u}(\partial_0 + \triangle)\varphi = \\ = -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u(\partial_0 + \triangle)\varphi = -\lim_{\alpha\to+0} \int_\alpha^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u(\partial_0 + \triangle)\varphi. \end{aligned}$$

A $u\partial_0\varphi = \partial_0(u\varphi) - (\partial_0 u)\varphi$ és $u\triangle\varphi = (\triangle u)\varphi + \mathrm{div}(u\mathrm{grad}\varphi) - \mathrm{div}(\varphi\mathrm{grad}u)$ egyenlőségeket kihasználva, valamint azt, hogy az utolsó két tag a Gauss-tétellel átalakítva az integrálásnál eltűnik (lásd a 7.4 állítást), a következőket kapjuk:

$$\lim_{\alpha\to+0}\left[-\int_{\mathbb{R}^N} u\varphi|_\alpha^\infty + \int_\alpha^\infty \int_{\mathbb{R}^N} ((\partial_0 - \triangle)u)\,\varphi\right].$$

Mivel φ kompakt tartójú , a felső határon 0 adódik. Továbbá $u(\alpha,\cdot)\varphi(\alpha,\cdot)$ minden α esetén integrálható , és u folytonossága miatt az integrálok felülről korlátosak. A Lebesgue-tétel szerint ezért a limesz bevihető az első integráljel mögé.

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(0,\cdot)\varphi(0,\cdot) + \int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^N} ((\partial_0 - \triangle)u)\varphi = \left(\delta^{(1)} \otimes u(0,\cdot) \,\Big|\, \varphi\right) + ((\partial_0 - \triangle)u \mid \varphi)\,.$$

(Itt az utolsó tagban a deriváltfüggvényhez tartozó reguláris disztribúció szerepel, míg a disztribúcióegyenlet bal oldalán az $\hat{u}$ disztribúció értelmű deriváltja!) Mivel ez tetszőleges φ-re fennáll, írhatjuk, hogy

$$(\partial_0 - \triangle)\hat{u} = (\partial_0 - \triangle)u + \delta^{(1)} \otimes u(0,\cdot),$$

ahol a jobb oldal első tagját „kalappal" kell érteni, azaz nullával kiterjeszteni $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^N$-re. Tehát $\hat{u}$ pontosan akkor elégíti ki a disztribúcióegyenletet, ha $(\partial_0 - \triangle)u = f$ és $u(0,\cdot) = u_0$.

14.2.

A 12.1 pontban láttuk, hogy ha $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)^*$ és $U_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$ adottak, akkor az

$$(U \in \mathcal{D}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)^*)? \qquad (\partial_0 - \triangle)U = F + \delta^{(1)} \otimes U_0$$

diffúzióegyenlet megoldása

$$U = C * (F + \delta^{(1)} \otimes U_0),$$

ahol

$$C(t,x) := \frac{H(t)}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

feltéve természetesen, hogy a kérdéses konvolúció létezik. A létezés feltételeiről szól a következő állítás.

Állítás. *Legyen $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ mérhető függvény, mely az $\mathbb{R}^-\times\mathbb{R}^N$ halmazon 0, és minden pozitív t esetén korlátosa $[0,t]\times\mathbb{R}^N$ halmazon. Legyen továbbá $u_0\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ korlátos mérhető függvény. Ekkor az alábbi konvolúciók léteznek, és reguláris disztribúciók:*

$$C * f =: V, \qquad \textit{illetve} \qquad C * (\delta^{(1)} \otimes u_0) =: V_0,$$

ahol

$$V(t,x) = H(t)\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(\tau,\xi)}{(4\pi(t-\tau))^{N/2}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}\, d\xi\, d\tau,$$

és

$$V_0(t,x) = H(t)\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u_0(\xi)}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}\, d\xi.$$

Bizonyítás Az f és az u_0 függvény tulajdonságai alapján nyilvánvaló, hogy V és V_0 jól értelmezett (vagyis a kérdéses integrálok léteznek). A

$$K(t) := \max_{0\le\tau<t,\xi\in\mathbb{R}^N} |f(\tau,\xi)|$$

jelöléssel

$$|V(t,x)| \le K(t)\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \frac{e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}}{(4\pi(t-\tau))^{N/2}}\, d\xi\, d\tau = K(t)t$$

minden $t > 0$ és x esetén, ugyanis a második (az $\mathbb{R}^N$-re vett) integrál értéke 1. Minthogy $t \mapsto K(t)$ monoton növő függvény, ebből következik, hogy V lokálisan integrálható. Továbbá V_0 is lokálisan integrálható , mert

$$|V_0(t,x)| \le \max_{\mathbb{R}^N} |u_0| \int_{\mathbb{R}^N} \frac{e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{N/2}}\, d\xi = \max_{\mathbb{R}^N} |u_0|.$$

A $C * f$ disztribúció létezik, ha minden φ alapfüggvényre

$$(C * f \mid \varphi) = (C \otimes f \mid \varphi \circ A) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{1+N}\times\mathbb{R}^{1+N}} C(\alpha,\omega) f(\tau,\xi)\varphi(\alpha+\tau,\omega+\xi)\, d\alpha\, d\omega\, d\tau\, d\xi$$

értelmes, vagyis a jobb oldali integrál létezik. Vezessük be a $t := \alpha+\tau$, és $x := \omega+\xi$ helyettesítést. Ekkor kapjuk, hogy a fenti integrál

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{1+N}\times\mathbb{R}^{1+N}} C(t-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi)\varphi(t,x)\, d\tau\, d\xi\, dt\, dx$$

integrállal egyenértékű. Minthogy

$$V(t,x) = \int_{\mathbb{R}^{1+N}} C(t-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi)\, d\tau\, d\xi,$$

és φ kompakt tartójú, Fubini tételét alkalmazva láthatjuk, hogy az integrál értelmes. Ezzel az első konvolúció vizsgálatát befejeztük.

A $C * (\delta^{(1)} \otimes u_0)$ disztribúció létezik, ha minden φ alapfüggvényre

$$\Big(C * (\delta^{(1)} \otimes u_0) \,\Big|\, \varphi\Big) = \Big(C \otimes (\delta^{(1)} \otimes u_0) \,\Big|\, \varphi \circ A\Big) = \\ = \int_{\mathbb{R}^{1+N}\times\mathbb{R}^N} u_0(\xi) C(\alpha,\omega)\varphi(\alpha+0, \omega+\xi)\, d\alpha\, d\xi\, d\omega$$

értelmes. Ez teljesen hasonló az előző integrálhoz, csak a τ szerinti integrállal nem kell foglalkoznunk. Tehát helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\Big(C * (\delta^{(1)} \otimes u_0) \,\Big|\, \varphi\Big) = \int_{\mathbb{R}^{1+N}\times\mathbb{R}^N} u_0(\xi) C(t, x-\xi)\varphi(t,x)\, d\xi\, dt\, dx = \\ = \int_{\mathbb{R}^{1+N}\times\mathbb{R}^N} u_0(\xi) C(t, x-\xi)\, d\xi\, \varphi(t,x)\, dt\, dx = \int_{\mathbb{R}^{1+N}} V_0(t,x)\varphi(t,x)\, dx\, dt.$$

Ezzel az állítást sikerült bebizonyítanunk.

Állítás. *Minden $x \in \mathbb{R}^N$ esetén $\lim_{t\to+0} V(t,x) = 0$, és ha u_0 folytonos függvény, akkor $\lim_{t\to+0} V_0(t,x) = u_0(x)$.*

Bizonyítás Az előző bizonyításban beláttuk, hogy $|V(t,x)| \le K(t)t$, ahol K monoton növő nemnegatív függvény; ezért a kérdéses határérték valóban 0. A másik esettel kapcsolatban pedig vegyük észre, hogy

$$V_0(t,x) = \left(C(t, x-\cdot) \mid u_0\right),$$

valamint azt, hogy $C(t,\cdot)$ éppen a t paraméter szerinti δ-konvergens sorozat; emiatt kapjuk, hogy a keresett határérték $(\delta_x \mid u_0) = u_0(x)$, amit be akartunk bizonyítani.

15. A hullámegyenlet

15.1.

Egy hullám terjedését valamely (végtelen kiterjedésű) közegben ha adott a hullám $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ forrása

$$(u\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R})? \qquad \Box u = f$$

diferenciálegyenlet határozza meg. Ez az egyenlet egyszerűen értelmezhető a disztribúciók körében is, és megoldása a forrásnak egy alapmegoldással vett konvolúciója.

A gyakorlatban azonban itt is kezdeti érték probléma vetődik fel: adott az $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ hullámforrás és a hullám $u_0 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ kezdeti kezdeti értéke, valamint az időderiváltjának az $u_1 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ kezdeti értéke, és ezekkel

$$(u\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R})? \qquad \Box u = f$$

differenciálegyenlet írja le az

$$u(0,\cdot) = u_0 \qquad \partial_0 u(0,\cdot) = u_1.$$

Klasszikus keretek között az u-tól megfelelően sokszori differenciálhatóságot kell megkövetelni.

Ha át akarjuk fogalmazni a problémát disztribúciókra, ugyanolyan problémával állunk szemközt, és azt hasonlóan hidalhatjuk át mint a diffúzióegyenletnél.

Terjesszük ki u-t és f-et az egész $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$-en értelmezett $\hat{u}$, illetve $\hat{f}$ függvénnyé, mint az előző fejezetben.

Állítás. *Ha $\hat{f}$, u_0 és u_1 lokálisan integrálható , akkor a fenti kezdetiérték-problémával egyenértékű a következő disztribúcióegyenlet*

$$(\partial_0^2 - \triangle)\hat{u} = \hat{f} + \delta^{(1)} \otimes u_1 + \dot{\delta}^{(1)} \otimes u_0,$$

ahol megintcsak nem különböztettük meg a függvényeket és az azoknak megfelelő disztribúciókat.

Bizonyítás A bal oldal hatása egy φ alapfüggvényen:

$$\big((\partial_0^2 - \triangle)\hat{u} \,\big|\, \varphi\big) = \big(\hat{u} \,\big|\, (\partial_0^2 - \triangle)\varphi\big) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N} \hat{u}(\partial_0^2 - \triangle)\varphi =$$
$$= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u(\partial_0^2 - \triangle)\varphi = \lim_{\alpha\to+0} \int_\alpha^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u(\partial_0^2 - \triangle)\varphi.$$

Kihasználva, hogy $u\partial_0^2\varphi = (\partial_0^2 u)\varphi + \partial_0(u\partial_0\varphi) - \partial_0(\varphi\partial_0 u)$, valamint $u\triangle\varphi = (\triangle u)\varphi + \operatorname{div}(u\operatorname{grad}\varphi) - \operatorname{div}(\varphi\operatorname{grad} u)$ utolsó két tagja a Gauss-tétellel átalakítva az integrálásnál eltűnik (lásd a 7.4 állítást), a következőket kapjuk:

$$\lim_{\alpha\to+0}\left[\int_{\mathbb{R}^N} u\partial_0\varphi|_\alpha^\infty - \int_{\mathbb{R}^N} \varphi\partial_0 u|_\alpha^\infty + \int_\alpha^\infty \int_{\mathbb{R}^N} ((\partial_0 - \triangle)u)\,\varphi\right].$$

Ezután ugyanúgy érvelve, mint az előző fejezetben, megkapjuk a kívánt eredményt.

15.2.

A továbbiakban az $N = 3$ esetre korlátozódunk. Ha $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)^*$ és $U_0, U_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^*$ adottak, akkor az

$$(U \in \mathcal{D}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)^*)? \qquad (\partial_0^2 - \triangle)U = F + \delta^{(1)} \otimes U_1 + \dot{\delta}^{(1)} \otimes U_0$$

hullámegyenlet megoldása 12.1 szerint

$$U = Z_+ * (F + \delta^{(1)} \otimes U_1 + \dot{\delta}^{(1)} \otimes U_0)$$

abban az esetben, ha a konvolúció létezik. A létezés feltételeiről mond többet a következő tétel.

Állítás. *Legyen* $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *lokálisan integrálható ,* $u_0, u_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *lokálisan integrálható , továbbá* $f\big|_{\mathbb{R}^-\times\mathbb{R}^3} = 0$*. Ekkor a következő konvolúciók értelmesek és a következőképpen adhatók meg:*

$$K_+ * f =: V, \quad K_+ * (\delta^{(1)} \otimes u_1) =: V_1 \quad \textit{és} \quad K_+ * (\dot{\delta}^{(1)} \otimes u_0) = \partial_0 V_0,$$

ahol

$$\begin{aligned} V(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(t-|\xi|, x-\xi)}{4\pi|\xi|}\,d\xi, \\ V_1(t,x) &= \frac{H(t)}{4\pi t}\int_{S_t(x)} u_1\,d\lambda_{S_t(x)}, \\ V_0(t,x) &= \frac{H(t)}{4\pi t}\int_{S_t(x)} u_0\,d\lambda_{S_t(x)}, \end{aligned}$$

és H továbbra is a Heaviside-féle függvényt jelöli, $S_t(x)$ pedig az x középpontú t sugarú gömbhéj $\mathbb{R}^3$-ban.

Bizonyítás Nézzük az első konvolúciót. Tudjuk, hogy K_+ tartója a jövőszerű fénykúp. Nyilvánvaló, hogy f tartója az $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^3$ pozitív félsíkban van. Innen adódik, hogy

$$(\operatorname{Supp} K_+) \cap (K - \operatorname{Supp} f) \qquad \text{és} \qquad (\operatorname{Supp} f) \cap (K - \operatorname{Supp} K_+)$$

kompakt minden $K \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ kompakt halmaz esetén. Ezért a konvolúció létezik (lásd a 9.3 állítást).

Tehát definíció szerint minden φ alapfüggvényre

$$(K_+ * f \mid \varphi) = (K_+ \otimes f \mid \varphi\circ A) = \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3} \frac{f(\tau,\xi)\varphi(\tau+|\omega|, \xi+\omega)}{4\pi|\omega|}\,d\tau\,d\xi\,d\omega.$$

Végezzük el a $\xi+\omega =: x$ és $\tau + |\omega| =: t$ helyettesítéseket. Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(K_+ * f \mid \varphi) &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(t-|\omega|, x-\omega)}{4\pi|\omega|}\,d\omega\,\varphi(t,x)\,dt\,dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3} V(t,x)\varphi(t,x)\,dt\,dx.\end{aligned}$$

Vegyük most a második konvolúciót. Ennek a létezése az előzőhöz hasonló érvek alapján nyilvánvaló. Továbbá

$$\begin{aligned}\Big(K_+ * (\delta^{(1)}\otimes u_1)\,\Big|\,\varphi\Big) &= \Big(K_+ \otimes (\delta^{(1)}\otimes u_1)\,\Big|\,\varphi\circ A\Big) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{u_1(\xi)\varphi(|\omega|, \xi+\omega)}{4\pi|\omega|}\,d\xi\,d\omega.\end{aligned}$$

Itt is a $\xi+\omega =: x$ helyettesítéssel adódik, hogy

$$\begin{aligned}\Big(K_+ * (\delta^{(1)}\otimes u_1)\,\Big|\,\varphi\Big) &= \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{u_1(x-\omega)\varphi(|\omega|, x)}{4\pi|\omega|}\,dx\,d\omega = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3}\int_0^\infty\int_{S_t(x)} \frac{1}{4\pi t}\,u_1\big|_{S_t(x)}\,d\lambda_{S_t(x)}\varphi(t,x)\,dt\,dx.\end{aligned}$$

Itt közben felhasználtuk az alábbi összefüggést:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(z)\,dz = \int_0^\infty \int_{S_r(0)} f\big|_{S_r(0)}\, d\lambda_{S_r(0)}\, dr.$$

Látható, hogy pozitív t-re éppen a bizonyítandó V_1 függvényt kaptuk.

A harmadik konvolúcióra mondottak az előzőből és az ismert

$$K_+ * (\dot{\delta}^{(1)} \otimes u_0) = \partial_0(K_+ * \delta^{(1)} \otimes u_0)$$

összefüggésből adódnak.

Megjegyzés A tárgyalt disztribúciók közül az első kettő reguláris, a harmadik nem feltétlenül az: $\partial_0 V_0$ a V_0 disztribúció-deriváltját jelöli. Természetesen ez is reguláris, ha V_0 mint függvény differenciálható. Ez teljesül, ha u_0 folytonosan differenciálható. Ugyanis ekkor az $F\colon S_1(x) \to S_t(x)$, $\quad \xi \mapsto x+(\xi-x)t$ bijekcióval integrálhelyettesítést végezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{H(t)}{4\pi t}\int_{S_t(x)} u_0\, d\lambda_{S_t(x)} = \frac{H(t)\,t}{4\pi}\int_{S_1(x)} u_0((\xi-x)t+x)\,d\xi,$$

amely viszont már differenciálható t szerint.

15.3.

Tekintsük az aritmetikai speciális relativisztikus téridőmodellt, és legyen $C \subset \mathbb{R}^4$ az e töltésű részecske világvonala.

Ekkor a részecske négyesárama $e\boldsymbol{\lambda}_C$, ahol $\boldsymbol{\lambda}_C$ a C irányított görbe vektori Lebesgue-mértéke. Azaz, ha $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ a világvonal sajátidő-paraméterezése, akkor

$$(\boldsymbol{\lambda}_C \mid \varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(r(s))\dot{r}(s)ds.$$

A részecske által keltett elektromágneses mező vektorpotenciálja $A := K_+ * e\boldsymbol{\lambda}_C$, feltéve, hogy ez a konvolúció létezik.

$$(K_+ * \boldsymbol{\lambda}_C \mid \varphi) = (K_+ \otimes \boldsymbol{\lambda}_C \mid \varphi \circ A) = \\ = \frac{1}{4\pi}\int_R \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi\big(r(s)+(|\xi|,\xi)\big)}{|\xi|}\dot{r}(s)\,d\xi\,ds.$$

Célszerű ezek után az $r = (r_0, r_1, r_2, r_3) =: (r_0, \mathbf{r})$ jelöléssel élni. Az $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, $(s,\xi) \mapsto r(s) + (|\xi|,\xi) = (r_0(s)+|\xi|, \mathbf{r}(s)+\xi)$ függvény az $\mathbb{R}\times\{0\}$ halmazt kivéve differenciálható, és Jacobi-determinánsa

$$\dot{r}_0(s) + \frac{\mathbf{r}(s)\cdot\xi}{|\xi|},$$

ahol a pont az $\mathbb{R}^3$-beli skalárszorzatot jelöli. A determináns pozitív, tekintve, hogy $(\dot{r}_0)^2 - \sum_k (\dot{r}_k)^2 = 1$. Tehát a szóban forgó függvény a mondott halmazt kivéve injektív, de egy pillantás meggyőz minket arról, hogy ott is. A $(t,\mathbf{x}) \mapsto$

$(s(t,\mathbf{x}),\xi(t,\mathbf{x}))$ formában jelölt inverzére $\xi(t,\mathbf{x})=\mathbf{x}-\mathbf{r}(s(t,\mathbf{x}))$ és $|\mathbf{x}-\mathbf{r}(s(t,\mathbf{x}))|=t-r_0(s(t,\mathbf{x}))$ teljesül. Az inverz általi integrálhelyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$(K_+ * \boldsymbol{\lambda}_C \mid \varphi) = \\ = \frac{1}{4\pi}\int_R\int_{\mathbb{R}^3}\varphi(t,\mathbf{x})\frac{\dot{r}(s(t,\mathbf{x}))}{r_0(s)|\mathbf{x}-\mathbf{r}(s(t,\mathbf{x}))|-\mathbf{r}(s(t,\mathbf{x}))\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{r}(s(t,\mathbf{x})))}\,d\mathbf{x}\,dt.$$

Áttérve az elegáns négyes jelölésre, az $x:=(t,\mathbf{x})$ és $R(x):=x-r(s(x))$ bevezetésével arra jutunk, hogy vektorpotenciál

$$A(x)=\frac{e}{4\pi}\frac{\dot{r}(s(x))}{\dot{r}(s(x))\cdot R(x)},$$

ahol most a pont a Lorentz-szorzást jelöli.

A téridőn értelmezett $x\mapsto s(x)$ függvényt retardált sajátidő-függvénynek szokás nevezni: $s(x)$ a részecskének az a sajátidő-pillanata, amelyre $x-s(x)$ jövőfényszerű, tehát $r(s(x))$ múltszerű (retardált) x-hez képest.

15.4. Feladatok

1. Milyen világvonal esetén nem létezik a konvolúció? (Vizsgáljunk meg az egyenletesen gyorsuló világvonalat, amelyet $s\mapsto(\sinh s,\cosh s,0,0)$ ír le.)

2. Milyen feltételeket kell kiróni az f-re, u_0-ra és u_1-re, ha a 15.2 állításhoz hasonlót akarunk megfogalmazni a K_- avanzsált maggal?

16. Elliptikus differenciáloperátorok

16.1.

Az eddigiekben a differenciáloperátor állandó együtthatójú polinom volt, és az egész $\mathbb{R}^N$-en, illetve $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$-en tekintettünk velük differenciálegyenleteket; ez utóbbi esetben a differenciálegyenlet értelmezési tartományának határa, amelyen meg kelett adnunk a keresett függvény illetve bizonyos deriváltjának az értékét („kezdeti feltételek"), sík volt. Ezért a klasszikus feladatokat át tudtuk fogalmazni disztribúciókra.

Most általánosabban, függvényegyütthatójú differenciáloperátorok egy speciális csoportjával adunk meg differenciálegyenleteket, amelyek értelmezési tartományának a határa nem sík, és azon vannak előírva úgynevezett peremfeltételek; ezek a feladatok nem fogalmazhatók át disztribúciókra.

16.2.

Tekintsünk egy $G\subset\mathbb{R}^N$ összefüggő, korlátos, nyílt halmazt, melynek $S:=\partial G$ határa $N-1$ dimenziós részsokaság, és legyen $X:=C^2(G)\cap C^1(\overline{G})$. Az, hogy egy függvény a zárt $\overline{G}$ halmazon folytonosan differenciálható , azt jelenti, hogy létezik egy U nyílt halmaz, amely tartalmazza $\overline{G}$-t, és egy U-n értelmezett folytonosan differenciálható függvény, melynek $\overline{G}$-ra vett leszűkítése éppen a kérdéses függvény.

Definíció. *Legyenek* $p \in C^1(G)$ *és* $q \in C(\overline{G})$ *adott függvények, melyekre* $0 < p$ *és* $0 \leq q$ *teljesül, és legyen*

$$L\colon X \to C(G), \qquad Lu := -\mathrm{div}(p\mathrm{grad}u) + qu.$$

Megjegyzés $p = 1$ és $q = 0$ esetén $L = -\triangle$, a Laplace-operátor negatívja.

Állítás (Green-formulák)**.** *Legyenek* u *és* v *az* X *halmaz elemei,* $Lu, Lv \in L^2(G)$. *Ekkor fennállnak a következő azonosságok:*

$$\int_G uLv = \int_G p(\mathrm{grad}u)\cdot(\mathrm{grad}v) - \int_S up\mathrm{D}_n v\, d\lambda_S + \int_G quv, \tag{I.}$$

$$\int_G (uLv - vLu) = -\int_S p(u\mathrm{D}_n v - v\mathrm{D}_n u)\, d\lambda_S, \tag{II.}$$

ahol D_n az S-re normális irányú deriválás.

Bizonyítás Az $u(-\mathrm{div}(p\mathrm{grad}v)) = -\mathrm{div}(up\mathrm{grad}v) + p(\mathrm{grad}u)\cdot(\mathrm{grad}v)$ azonosság és a Gauss-tétel felhasználásával:

$$\int_G [u(-\mathrm{div}(p\mathrm{grad}v)) + uqv] = \int_G p(\mathrm{grad}u)\cdot(\mathrm{grad}v) -$$
$$-\int_S (up\mathrm{grad}v)\cdot d\boldsymbol{\lambda}_S + \int_G quv = \int_G p(\mathrm{grad}u)\cdot(\mathrm{grad}v) - \int_S up\mathrm{D}_n v\, d\lambda_S + \int_G quv,$$

ami a bizonyítandó volt.

A második Green-formula az elsőből egyszerűen kapható.

16.3.

A továbbiakban peremfeltételeket rovunk ki az X-ben lévő függvényekre, majd megvizsgáljuk, hogy ezekkel a feltételekkel mi az, amit többletként el tudunk mondani az L operátorról.

Definíció. *Legyen* $\alpha, \beta \in C(S)$, *azaz* G *határán folytonos függvények, melyekre* $\alpha, \beta \geq 0$, *és* $\alpha + \beta > 0$ *fennáll, és*

$$X_0 := \left\{\, u \in X \;\middle|\; Lu \in L^2(G),\ \alpha u + \beta \mathrm{D}_n u = 0 \,\right\},$$

valamint $L_0 := L\big|_{X_0}$.

Állítás. L_0 *sűrűn értelmezett lineáris operátor* $L^2(G)$*-ben.*

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy X_0 lineáris altér, továbbá tartalmazza a G-ben kompakt tartójú végtelenszer differenciálható függvényeket, amelyek sűrűn vannak $L^2(G)$-ben.

Állítás. *Az* $L_0 : L^2(G) \rightarrowtail L^2(G)$ *operátor szimmetrikus, továbbá* $\langle u, L_0 u\rangle \geq 0$ *minden* $u \in X_0$ *esetén.*

Bizonyítás Legyenek u és v az X_0 halmaz elemei, és számítsuk ki a $\langle v, L_0 u\rangle - \langle L_0 v, u\rangle$ értéket. A második Green-azonosság alkalmazásával:

$$\langle v, L_0 u\rangle - \langle L_0 v, u\rangle = \int_G v^*(Lu) - \int_G (Lv^*)u = -\int_S p(v^*\mathrm{D}_n u - u\mathrm{D}_n v^*)\, d\lambda_S =$$
$$= \int_{\{\beta\neq 0\}} p(v^*\frac{\alpha}{\beta}u - u\frac{\alpha}{\beta}v^*)\, d\lambda_S - \int_{\{\beta=0\}} p(v^*\mathrm{D}_n u - u\mathrm{D}_n v^*)\, d\lambda_S,$$

ahol $\{\beta = 0\} := \{\, x \in S \mid \beta(x) = 0 \,\}$ és $\{\beta \neq 0\}$ hasonlóan van definiálva. Mivel p és q valós, $(Lv)^* = Lv^*$. Kihasználtuk továbbá az $\alpha u + \beta \mathrm{D}_n u = 0$ és az $\alpha v + \beta \mathrm{D}_n v = 0$ határfeltételeket, s emiatt az első integrál 0. A második esetben pedig $\beta = 0$ miatt $\alpha \neq 0$, s így a határfeltételekből az következik, hogy a $\{\beta = 0\}$ halmazon u és v nulla. Ezzel a tétel első részét beláttuk.

Vegyük most az $\langle u, L_0 u\rangle$ skaláris szorzatot. Az első Green-formula alapján ez

$$\int_G u^* L_0 u = \int_G \left(p|\mathrm{grad} u|^2 + q|u|^2\right) - \int_S u^* p \mathrm{D}_n u \, d\lambda_S.$$

Az első integrál nyilvánvalóan nem-negatív, a második az előbb is használt átalakítás szerint az

$$\int_{\{\beta\neq 0\}} p\frac{\alpha}{\beta}|u|^2 \, d\lambda_S \geq 0$$

integrállal egyenlő.

Következmények.

(i) Az L_0 operátor sajátértékei valósak, mert L_0 szimmetrikus, és nemnegatívak, mert L_0 pozitív szemidefinit. A sajátfüggvények pedig vehetők valósnak. Legyen ugyanis $Lu = \lambda u$. Ekkor $Lu^* = (Lu)^* = \lambda u^*$, azaz u^* is sajátvektor λ sajátértékkel. Ekkor viszont választhatjuk helyettük az

$$\frac{u + u^*}{2} \qquad \textit{és} \qquad \frac{u - u^*}{2i}$$

valós sajátfüggvényeket.

(ii) L_0-nak legfeljebb megszámlálható sok sajátértéke van, s a különböző sajátértékekhez tartozó sajátalterek ortogonálisak.

Állítás. *A 0 az L_0 operátornak akkor és csak akkor sajátértéke, ha $q = 0$ és $\alpha = 0$, és ebben az esetben a 0-hoz tartozó sajátaltér egydimenziós, amely a konstans függvények összessége.*

Bizonyítás Alkalmazzuk az

$$\langle u, L_0 u\rangle = \int_G p|\mathrm{grad} u|^2 + \int_G q|u|^2 + \int_{\{\beta\neq 0\}} p\frac{\alpha}{\beta}|u|^2 \, d\lambda_S$$

összefüggést. Tegyük fel, hogy $u \neq 0$ és $L_0 u = 0$. Ekkor $\langle u, L_0 u\rangle = 0$, ahonnan is következik, hogy a fenti összeg mindhárom tagja nulla. Az elsőből kapjuk, hogy $|\mathrm{grad} u|^2 = 0$ majdnem mindenütt, s mivel u folytonosan differenciálható , $u = \mathrm{const}$ adódik. A másodikból kapjuk, hogy $q|u|^2 = 0$ majdnem mindenütt, de mivel $u = \mathrm{const} \neq 0$, és q folytonos, $q = 0$ áll fenn. A harmadik tagból pedig hasonlóan kapjuk, hogy $\alpha = 0$.

Viszont, tegyük fel, hogy $\alpha = 0$ és $q = 0$. Ekkor egy konstans u függvény kielégíti a határfeltételeket, és $L_0 u = -\mathrm{div}(p \mathrm{grad} u) + qu = 0$, azaz a 0 sajátérték.

16.4.

Bizonyítás nélkül közöljük a következő eredményt.

Állítás. *Legyen $\beta = 0$ vagy $\beta = 1$ (ezzel ekvivalens $\beta > 0$), és p, q, valamint α sima függvények. Ekkor* *(i) L_0 lényegében önadjungált,*

(ii) sajátalterei kifeszítik $L^2(G)$-t,

(iii) minden sajátértéke véges multiplicitású (sajátalterei véges dimenziósak),

(iv) a sajátértékeknek nincs torlódási pontja.

Megjegyzés Ha $p = 1$, akkor $\overline{L}_0$ a G tartományba zárt, q potenciálú mezőben levő kvantummechanikai részecske Hamilton-operátora. Szokásosan a $\beta = 0$ esetnek megfelelő peremfeltételt róják ki, de ez nem szükségszerű. A peremfeltétel a „doboz" határának fizikai tulajdonságát hivatott visszatükrözni.

Definíció. *Legyen $f \in C(G)$. Az*

$$(u \in X_0)? \qquad L_0 u = f$$

*parciális differenciálegyenletet **klasszikus harmadik peremérték-feladatnak** nevezzük. $\beta = 0$ esetben **első peremérték-feladatról** vagy **Dirichlet-feladatról**, $\alpha = 0$ esetben **második peremérték-feladatról** vagy **Neumann-feladatról** beszélünk.*

Állítás. *Tegyük fel, hogy L_0-nak a nulla nem sajátértéke, valamint teljesülnek a 16.4 állítás feltételei. Ekkor a klasszikus harmadik peremérték-probléma megoldása egyértelmű, ha létezik.*

Bizonyítás A 16.4 állítás értelmében kifejthetjük u-t L_0 sajátvektorai szerint $u = \sum_n c_n u_n$ alakban, ahol az u_n-ek teljesítik az $L_0 u_n = \lambda_n u_n$ sajátértékegyenletet, és teljes ortonornált rendszert alkotnak. Az f függvényt is kifejtjük az u_n sajátfüggvények szerint: $f = \sum_n \varphi_n u_n$. A c_n-ek és φ_n-ek négyzetesen összegezhetők. Nem biztos, hogy az u-t megadó fenti sor a szokásos értelemben differenciálható , azaz hogy benne van L_0 értelmezési tartományában. L_0 azonban lényegében önadjungált, ezért u biztosan benne van L_0 lezártjának értelmezési tartományában, ha $c_n \lambda_n$ $(n \in \mathbb{N})$ négyzetesen összegezhető; ekkor az önadjungált $\overline{L}_0$ bevihető az összegzés mögé:

$$\overline{L}_0 u = \sum_n c_n L_0 u_n = \sum_n c_n \lambda_n u_n = \sum_n \varphi_n u_n = f.$$

Ez az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha $c_n \lambda_n = \varphi_n$, azaz $c_n = \varphi_n / \lambda_n$. Az a kérdés, adott φ_n-ek és λ_n-ek esetén mikor lesznek az ilyen c_n-ek négyzetesen összegezhetők. A válasz: az adott feltétel esetén mindig. Ugyanis a sajátértékeknek a nulla nem torlódási pontja, ezért a legkisebb abszolútértékű, jelöljük ennek az indexét $n = 0$-val, nem nulla. Emiatt $\varphi_n / \lambda_n \leq \varphi_n / \lambda_0$, ami viszont négyzetesen összegezhető. Ebből következik, hogy az általánosított, $\overline{L}_0$-ra vonatkozó problémának egyértelmű megoldása van. Ha pedig ez az összeg X_0-nak eleme, akkor ez megoldása a klasszikus problémának is.

Megjegyzések

(i) A $\lambda_0 = 0$ esetet külön kell vizsgálnunk. Ha $\varphi_0 = 0$, akkor c_0 tetszőleges lehet, így végtelen sok, konstans erejéig különböző megoldás lehet. Ha $\varphi_0 \neq 0$, akkor nincs megoldás az adott peremfeltétel mellett.

(ii) Az $L_0 u - \lambda u = f$ peremérték-feladatnak pontosan akkor van egyértelmű megoldása, ha λ nem sajátértéke L_0-nak. Ellenkező esetben a megoldások affin teret alkotnak L_0-nak a λ sajátértékhez tartozó sajátaltere felett, ha f ortogonális erre az altérre, egyébként nincs megoldás.

16.5.

Gyengíthető az a követelmény, hogy S legyen $N-1$ dimenziós részsokaság. Minden igaz marad, ha S „bizonyos értelemben csekély számú" pontot kivéve részsokaság. Az idézőjelbe tett fogalmat lehet, azonban meglehetősen körülményes pontosan definiálni. Megemlítjük, hogy vehető például G-nek egy tégla.

16.6. Feladatok

1. Adjuk meg kockába, illetve a gömbbe zárt szabad ($q = 0$) részecske energiájának sajátértékeit a $\beta = 0$ és az $\alpha = 0$ által meghatározott peremfeltétel mellett.
2. Bizonyítsuk be a 16.4 megjegyzésének (ii) pontját.

17. Parabolikus és hiperbolikus egyenletek

17.1.

értelmezzük az előző szakaszban definiált L hatását az $\mathbb{R}^+ \times G$-n értelmezett függvényeken mint a második változóban ható, „térszerű" differenciálást. Legyen ezentúl $Y := C^2(\mathbb{R}^+ \times G) \cap C^1(\mathbb{R}_0^+ \times \overline{G})$. A peremfeltételek „időfüggetlenek", azokat a korábbihoz hasonlóan rójuk ki. Legyen $\alpha, \beta \in C(S)$, melyekre $\alpha, \beta \geq 0$, és $\alpha + \beta > 0$, és

$$Y_0 :=$$
$$= \left\{ u{\in}Y \;\middle|\; (Lu)(t,\cdot) \in L^2(G),\; \alpha(x)u(t,x){+}\beta(x)\mathrm{D}_n u(t,x){=}0,\; (t{\in}\mathbb{R}^+, x{\in}S) \right\}.$$

A peremfeltétellel leszűkített L_0 differenciálás a korábbival megegyezik. Tegyük fel, hogy teljesülnek rá a 16.4 állítás feltételei, továbbá sajátérték-problémáját most is megoldottnak tekintjük: a λ_n sajátértékekhez tartozó u_n sajátvektorok teljes ortonormált rendszert alkotnak $L^2(G)$-n.

Definíció. *Legyen $f \in C(\mathbb{R}^+ \times G)$ és $u_0 \in C(G)$ adott függvény, és u_0 elégítse ki a peremfeltételt. Az*

$$(u \in Y_0)? \qquad (\partial_0 + L_0)u = f, \qquad u(0,\cdot) = u_0$$

*parciális differenciálegyenletet **klasszikus parabolikus vegyes feladatnak** nevezzük. $\beta = 0$, ill. $\alpha = 0$ esetben **első**, illetve **második peremfeltételes vegyes feladatról** beszélünk.*

Megjegyzés A vegyes jelző arra utal, hogy peremfeltétel is, kezdeti feltétel is van előírva.

17.2.

Megadjuk a fenti differenciálegyenletnek egy formális megoldását.

Fejtsük sorba minden $t \in \mathbb{R}_0^+$ esetén $u(t,\cdot)$-t és $f(t,\cdot)$-t az L_0 operátor sajátfüggvényei szerint:

$$u(t,\cdot) = \sum_n c_n(t)u_n, \qquad f(t,\cdot) = \sum_n \varphi_n(t)u_n.$$

u-ra formálisan alkalmazva a $(\partial_0 + L_0)$ operációt kapjuk, hogy

$$(\partial_0 + L_0)u = (\partial_0 + L_0)\sum_n c_n u_n = \sum_n (\dot{c}_n u_n + \lambda_n c_n u_n) = \sum_n \varphi_n u_n,$$

ahonnan $\dot{c}_n = -\lambda_n c_n + \varphi_n$ adódik. Ennek megoldása a $c_n(0) = \langle u_n, u_0\rangle =: a_n$ kezdeti feltétel mellett

$$c_n(t) = a_n e^{-\lambda_n t} + \int_0^t \varphi_n(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)}\, d\tau.$$

Hangsúlyozzuk, hogy ez csupán a formális megoldás, a lépések jogosságát (a nem korlátos operátor és az „idő" szerinti differenciálás bevihető-e a végtelen összeg mögé) minden egyes esetben külön meg kell vizsgálni! Mindazonáltal bizonyos feltételek esetén állítható, hogy a formális és a tényleges megoldás megegyezik. Egy ilyen feltételt ad a következő, bizonyítás nélkül kimondott állítás.

Állítás. *Ha $u_0 \in \operatorname{Dom} \overline{L}_0$, és $f = 0$, akkor van megoldás, és ez megegyezik a formális megoldással.*

17.3.

érdekes alkalmazás a forrásmentes hővezetés leírása: itt $L = -\triangle$, $f = 0$; G egy testet szimbolizál.

(i) Ha a test fala (határa) hőszigetelő, hő nem áramlik ki; mivel a hőáram a hőmérséklet gradiensével arányos, ekkor a peremfeltétel $\mathrm{D}_n u\big|_S = 0$. Ebben az esetben a 16.3 szerint a $-\triangle$-nak a nulla a sajátértéke, a sajátaltér a konstans függvények összessége. Mivel a sajátértéke pozitív, az

$$u(t,\cdot) = \sum_n c_n(0) e^{-\lambda_n t} u_n$$

megoldás $t \to \infty$ esetén a $c_0(0)$ konstans függvényhez tart, ami jól ismert tapasztalati tény: hőszigetelt testen a hőmérséklet eloszlása az idő múlásával egyenletes lesz.

(ii) Ha a test „hőtartályban" van, azaz egy állandó hőmérsékletű környezetben, akkor a peremfeltétel $u\big|_S = c = \text{const}$. Ez nem olyan peremfeltétel, mint amit tárgyaltunk, de a feladatot vissza lehet vezetni a megismertre: az $\hat{u} := u - c$ függvényre $\triangle\hat{u} = 0$ és $\hat{u}|_S = 0$. Ekkor a $-\triangle$-nak nincs nulla sajátértéke, ezért $\lim\limits_{t\to\infty} \hat{u}(t) = 0$, azaz $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = c$, ami ismét jól ismert tapasztalati tény: hőtartályban levő testen a hőmérséklet eloszlása az idő múlásával egyenletesen a külső hőmérséklet lesz.

Definíció. *Legyen $f \in C(\mathbb{R}^+ \times G)$ és $u_0, u_1 \in C(G)$ adott függvény, függvény, és u_0 elégítse ki a peremfeltételt. Az*

$$(u \in Y_0)? \qquad (\partial_0^2 + L_0)u = f, \qquad u(0,\cdot) = u_0 \qquad \partial_0 u(0,\cdot) = u_1$$

parciális differenciálegyenletet ***klasszikus hiperbolikus vegyes feladatnak*** *nevezzük. $\beta = 0$, illetve $\alpha = 0$ esetben* ***első****, illetve* ***második peremfeltételes vegyes feladatról*** *beszélünk.*

17.4.

Most is megadunk egy formális megoldást az előzőhöz teljesen hasonlóan és az ott tett megjegyzések figyelembevételével:

$$(\partial_0^2 + L_0)u = (\partial_0^2 + L_0)\sum_n c_n u_n = \sum_n (\ddot{c}_n u_n + \lambda_n c_n u_n) = \sum_n \varphi_n u_n,$$

ahonnan $\ddot{c}_n + \lambda_n c_n = \varphi_n$ adódik. Ennek a közönséges differenciálegyenletnek a megoldása a

$$c_n(0) = \langle u_n, u_0 \rangle =: a_n, \qquad \dot{c}_n(0) = \langle u_n, u_1 \rangle =: b_n$$

kezdeti feltételek mellett:

$$u(t,x) = \sum_n \left[a_n \cos\sqrt{\lambda_n}t + b_n \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}t}{\sqrt{\lambda_n}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t \varphi_n(\tau) \sin\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)\, d\tau \right] u_n.$$

Állítás. *Ha $u_0 \in \operatorname{Dom} \overline{L}_0$, és minden pozitív t esetén $f(t,\cdot)$ négyzetesen integrálható , és az $\mathbb{R}^+ \to L^2(G)$, $\quad t \mapsto f(t,\cdot)$ leképzés folytonos, akkor van megoldás, és ez megegyezik a formális megoldással.*

17.5. Feladat

Legyen $N = 1$, $G = (0,1)$, s oldjuk meg a $\partial_0^2 u = a^2 \partial_1^2 u$ klasszikus vegyes feladatot $(a > 0)$ az $u(0,x) = 0$, $\partial_0 u(0,x) = \sin(2\pi x)$ kezdeti és az $u(t,0) = u(t,1) = 0$ peremfeltétellel.