CSOPORTÁBRÁZOLÁSOK

1. Általános fogalmak

1.1. Struktúrák

Egy halmazon műveleteknek nevezett bizonyos függvények (leképezések) megadásával algebrai struktúrákhoz jutunk. Tehát egy **algebrai struktúra** egy halmaz, és és azon néhány művelet együtt.

Egyszerű példák a következők, amelyeket ismertnek veszünk.

Vektortér: egy halmaz, rajta az összeadás és számmal való szorzás művelete, amelyek meghatározott tulajdonságokkal rendelkeznek.

Félcsoport: egy halmazon adott szorzás, amely meghatározott tulajdonsággal redelkezik.

Csoport: olyan félcsoport, amelyben van egy egységnek nevezett elem, és minden elemnek a szorzásra nézve van inverze (az elem és az inverz szorzata az egységelem).

Algebra: vektortér, amely egyben félcsoport is, a vektori műveletek és a szorzás meghatározott viszonyban áll egymással.

Egy algebrai struktúra **részstruktúrája** az alaphalmaz olyan részhalmaza, amelyből a műveletek nem vezetnek ki.

Részcsoport, részalgebra. Vektortér esetén lineáris altérről beszélünk.

Két azonos típusú algebrai struktúra között egy **homomorfizmus** olyan leképezés, amely megtartja a műveleteket. **Izomorfizmus** a bijektív homomorfizmus. Egy algebrai struktúrnak önmagába való homomorfizmusát, illetve izomorfizmusát **endomorfizmusnak**, illetve **automorfizmusnak** hívjuk.

Csoport-homomorfizmus, algebra-homomorfizmus. Vektorterek esetén lineáris leképezésekről beszélünk.

Topologikus struktúra azt jelenti, hogy egy halmazon megadjuk a folytonosság (és konvergencia) fogalmát. Ilyenkor **topologikus térről** beszélünk.

A legegyszerűbb, ismert topologikus struktúrát metrikával tudjuk definiálni.

Differenciálható struktúra azt jelenti, hogy egy halmazon megadjuk a differenciálhatóság fogalmát. Ilyenkor **differenciálható sokaságról** beszélünk.

A legegyszerűbb differenciálható struktúrát a véges dimenziós valós (vagy komplex) vektortéren a szokásos differenciálhatósággal definiáljuk.

Egy topologikus tér részstruktúrája egyszerűen egy részhalmaza, megszorítva rá a folytonosság fogalmát. Egy differenciálható sokaság részstruktúrája már bonyolultabb fogalom, semhogy itt egy-két szóval elintézzük. Vektorterek esetén azonban egyszerű: részstruktúra a lineáris altér.

Topologikus terek között a homomorfizmusok a folytonos leképezések (és nem használatos a homomorfizmus szó), az izomorfizmus elnevezés helyett pedig a **homeomorfizmus** használatos.

Differenciálható sokaságok között differenciálható leképezések és diffeomorfizmusok a szóhasználat.

Ha egy algebrai struktúrával topologikus, illetve differenciálható struktúrát is társítunk, megköveteljük, hogy a műveletek folytonosak, illetve differenciálhatók legyenek.

Például vektortéren az összeadás és a számmal szorzás legyen differenciálható. Ezt a legegyszerűbb, ismert formában norma bevezetésével oldjuk meg. Azonban épp a fizikában jelentös szerepet kapnak olyan esetek, amikor normából nem származtatatható az a differenciálhatósági fogalom, amelyet a feladat megkíván.

Topologikus csoport: olyan tolpológia a csoporton, hogy a csoportban a szorzás és az invertálás folytonos legyen.

Lie-csoport: olyan differenciálható struktúra a csoporton, hogy a csoportban a szorzás és az invertálás differenciálható legyen.

Igen fontos: **bármely struktúra automorfizmusai csoportot alkotnak a kompozícióra nézve**.

1.2. Csoportábrázolások

Legyen X valamely struktúra. Ennek **triviális részstruktúrája** egy olyan valódi résztruktúra (tehát nem az egész X), amelyet az X összes automorfizmusa invariánsan hagy.

Például egy vektortér triviális altere a nulla-elemből álló altér.

Egy topologikus teret **homogénnek** nevezünk, ha nincs triviális topologikus altere, azaz nincs olyan részhalmaza, amelyet minden automorfizmus (homeomorfizmus) invariánsan hagy.

Jelölje $\mathrm{Aut}(X)$ az X automorfizmusainak összességét.

Definíció. *Egy G csoportnak az X-en való* **ábrázolása** *egy*

$$A : G \to \mathrm{Aut}(X), \qquad g \mapsto A_g$$

csoport-homomorfizmus.

Az ábrázolás **hű***, ha A injektív leképezés.*

Az ábrázolás **irreducibilis***, ha X-nek csak a triviális részstruktúrái invariánsak minden A_g-re.*

Definíció. *Egy G csoportnak az X-en és Y-on való A, illetve B ábrázolása* **ekvivalens***, ha létezik $i : X \to Y$ izomorfizmus úgy, hogy*

$$i \circ A_g = B_g \circ i \qquad (g \in g).$$

Ha G topologikus csoport és X struktúrája tartalmaz topológiát is, akkor megköveteljük, hogy

$$G \times X \to X, \qquad (g, x) \mapsto A_g(x)$$

legyen folytonos; ekkor az ábrázolást **folytonosnak** mondjuk.

Ha G Lie-csoport és X struktúrája tartalmaz differenciálhatóságot is, akkor megköveteljük, hogy

$$G \times X \to X, \qquad (g, x) \mapsto A_g(x)$$

legyen differenciálható; ekkor az ábrázolást **differenciálhatónak** mondjuk. Megjegyezzük, ebben a vonatkozásban a differenciálhatóság mindig végtelenszer differenciálhatóságot jelent.

Ha $t \mapsto r(t)$ a G Lie-csoport **egyparaméteres részcsoportja**, azaz olyan $\mathbb{R} \to G$ differenciálható leképezés, amelyre $r(t + s) = r(t)r(s)$ teljesül, és A a G

ábrázolása az X struktúrán, akkor $t \mapsto A_{r(t)}$ a valós számok additív csoportjának ábrázolása X-en. Ha X-en értelmes a differenciálhatóság, és A differenciálható, akkor $\mathbb{R}$-nek a $t \mapsto A_{r(t)}$ ábrázolása is differenciálható.

Minthogy a Lie-csoportok elméletében alapvető szerepet játszanak az egyparaméteres részcsoportok, a Lie-csoportok differeciálható ábrázolásainak tanulmányozása mindig a valós számok additív csoportjának diferenciálható ábrázolásaival kezdődik.

1.3. Szemléltető példák

Vegyük a három dimenziós forgáscsoportot,

$$\mathrm{SO}(3) := \{R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{lineáris} \mid R^*R = I,\ \det R = 1\},$$

ahol * a mátrixok transzponálását jelenti, és I az identitás (egységmátrix). A meghatározás szerint tehát $R^* = R^{-1}$.

A háromszor hármas mátrixokon mint $\mathbb{R}^{3\times 3}$ elemein a szokásos euklideszi távolsággal mind topológiát (folytonosságot), mind differenciálhatóságot tudunk megadni. Minthogy a csoportművelet (mátrixszorzás) valós számok szorzásából és összeadásából tevődik össze, SO(3) topologikus csoportnak és Lie-csoportnak is tekinthető.

Vegyük SO(3)-nak az „önábrázolását” $\mathbb{R}^3$-on (azaz R-et ábrázolja R) úgy, hogy különféle struktúrákat veszünk figyelembe.

1. Tekintsük SO(3)-at egyszerűen csoportnak és $\mathbb{R}^3$-at vektortérnek. Az ábrázolás hű, és ireducibilis.

2. Tekintsük SO(3)-at topolgikus csoportnak és $\mathbb{R}^3$-at egyszerűen topologikus térnek (vegyük figyelembe csak a folytonosság fogalmát, „felejtkezzünk el” a vektori struktúráról). Az ábrázolás folytonos, hű, de korántsem irreducibilis: invariáns a nulla elem és minden gömbhéj, meg persze ilyenek tetszőleges uniója. A nulla elemre és bármely gömbhéjra leszűkítve az ábrázolás már irreducibilis lesz (nincs a gömbhéjaknak olyan részhalmaza, amelyet minden forgatás invariánsan hagyna); a nullán nem hű, a gömbhéjakon hű.

Tekintsük az s és $\hat{s}$ sugarú S, illetve $\hat{S}$ gömbhéjat, a rájuk leszűkített ábrázolásokat jelölje A, illetve $\hat{A}$. A $p(x) := \frac{s}{\hat{s}}x$ (nyújtás vagy zsugarítás) nyilvánvalóan homemorfizmus (oda-vissza folytonos bijekció) S és $\hat{S}$ között, és $p \circ A_R = \hat{A}_R \circ p$, vagyis az ábrázolások ekvivalensek.

3. Legyen továbbra is SO(3) topologikus csoport, és $\mathbb{R}^3$-at ne pusztán topologikus térnek tekinsük, hanem metrikus térnek a szokásos euklideszi távolsággal (vagyis ne csak a folytonosság számítson, hanem a távolság is). Ekkor a gömbhéjakon folytonos, hű, irreducibilis metrikus ábrázolások valósulnak meg. Azonban a nyújtás vagy zsugorítás már nem ad ekvivalenciát a különböző sugarú gömbhéjak között, mert nem tartja meg a távolságot (nem izomorfizmus a gömbhéjak mint metrikus terek között). Ettől még lehetnének A és $\hat{A}$ metrikusan ekvivalensek. Azonban egyszerű tény, hogy ha $f : S \to \hat{S}$ olyan függvény, amelyre $f \circ A_R = \hat{A}_R \circ f$ minden R forgatásra, akkor $f = p$. Ugyanis rögzítsünk egy x-et, és vegyük azokat az R-eket, amelyekre $Rx = x$; ekkor $f(x) = f(Rx) = R(f(x))$, ami azt jelenti, hogy $f(x)$ párhuzamos x-szel.

Tekinsünk ezután az önábrázolás helyett egy másikat, amely természetesen adódik. Az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezések (háromszor hármas mátrixok) összessége, $\mathbb{R}^{3\times 3}$, a szokásos műveletekkel vektortér, és ha még hozzá veszzük a szorzást (leképezések komopozícióját, azaz a mátrixok szorzatát), akkor algebra.

Egy ilyen M mátrixra és R forgatásra legyen $A_R(M) := RMR^{-1}$.

4. Tekintsük $\mathbb{R}^{3\times 3}$-at csupán vektortérnek. Ekkor a fenti formula lineáris ábrázolást határoz meg, amely hű, de nem irreducibilis. Ugyanis mind a szimmetrikus, mind az antiszimmetrikus mátrixok lineáris alteret alkotnak, és ezek invaránsak ere az ábrázolásra: ha $M^* = \pm M$, akkor $(A_R(M))^* = (RMR^*)^* = \pm RMR^* = \pm A_R(M)$. Ez a két altér kifeszíti $\mathbb{R}^{3\times 3}$-at (minden mátrix a szimmetrikus és antiszimetrikus részének az összege), és ezeknek az altereknek már nincs nem triviális invariáns altere, tehát ezekre leszűkítve az ábrázolások irreducuibilisek.

5. Az

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}$$

leképezés lineáris bijekció, amellyel a vektori önábrázolás ekvivalens az antiszimmerikus mátrixokon megvalósított ábrázolással.

6. Tekintsük $\mathbb{R}^{3\times 3}$-at algebrának. Ekkor az adott formula algebrai ábrázolást határoz meg, hiszen $A_R(MN) = A_R(M)A_R(N)$; ez az ábrázolás hű és irreducibilis. Valóban irreducibilis, hiszen szimetrikus (antiszimmetrikus) mátrixok szorzata általában nem szimmetrikus (nem antiszimmetrikus), tehát nincs nem triviális invariáns részalgebra.

7. Az olvasó gyakorolhatja magát abban, hogy mi mondható akkor, ha $\mathbb{R}^{3\times 3}$-at csak topologikus, illetve metrikus térnek tekintjük.

2. Lineáris ábrázolások

2.1. Alapvető ismeretek

A következő két állítás mindegyikére Schur-lemma néven szokás hivatkozni.

Állítás. *Legyen $A^{(1)}$ és $A^{(2)}$ a G csoport irreducibilis ábrázolása a $V^{(1)}$, illetve a $V^{(2)}$ vektortéren. Ha $T : V^{(1)} \to V^{(2)}$ olyan lineáris leképezés, amelyre*

$$A_g^{(2)}T = TA_g^{(1)} \qquad (g \in G)$$

teljesül, akkor $T = 0$ vagy T bijekció.

Bizonyítás Ha $x \in \mathrm{Ker}T$, azaz $T(x) = 0$, akkor $0 = A_g^{(2)}T(x) = TA_g^{(1)}(x)$, vagyis $A_g^{(1)}(x) \in \mathrm{Ker}T$, tehát $\mathrm{Ker}T$ invariáns $A^{(1)}$-re. Lévén $A^{(1)}$ irreducibilis, $\mathrm{Ker}T = V^{(1)}$ vagy $\mathrm{Ker}T = \{0\}$. Hasonlóképp, ha $y \in \mathrm{Ran}T$, azaz $y = T(x)$ valamely x-re, akkor $A_g^{(2)}(y) = A_g^{(2)}T(x) = TA_g^{(1)}(x)$, vagyis $A_g^{(2)}(y) \in \mathrm{Ran}T$, tehát $\mathrm{Ran}T$ invariáns $A_g^{(2)}$-re. Lévén $A_g^{(2)}$ irreducibilis, $\mathrm{Ran}T = \{0\}$ vagy $\mathrm{Ran}T = V^{(2)}$. □

Állítás. *Legyen A a G csoport irreducibilis ábrázolása egy véges dimenziós kompq-lex vektortéren. Ha $T : V \to V$ olyan lineáris leképezés, amelyre*

$$A_gT = TA_g \qquad (g \in G)$$

teljesül, akkor T az egység többszöröse, azaz $T = \lambda I$ valamely λ komplex számra.

Bizonyítás T-vel együtt $T-\lambda I$ is felcserélhető az ábrázolás minden elemével minden λ esetén. Az előző állítás szerint $T-\lambda I = 0$ vagy $T-\lambda I$ bijekció. Ez utóbbi azonban nem áll fen, ha λ a T sajátértéke (és ilyen biztos létezik, lévén komplex vektortérről szó). □

2.2. Lie-csoportok ábrázolása véges dimenziós vektortéren

Véges dimenziós vektortéren minden norma ekvivalens, így a folytonosság és a differenciálhatóság normától függetlenül értelmes fogalom.

A 1.2 alfejezet végén mondottak szerint Lie-csoportok véges dimenziós vektortéren megvalósított differenciálható, lineáris ábrázolásainak vizsgálatát a valós számok additív csoportjának ilyen ábrázolásaival kezdjük.

2.2.1. A valós számok additív csoportjának ábrázolásai

Legyen tehát E az $\mathbb{R}$ differenciálható lineáris ábrázolása a V véges dimenziós vektortéren, azaz $E_t : V \to V$ lineáris bijekció és $E_{t+s} = E_t E_s$ minden $t, s \in \mathbb{R}$ esetén.

Jelölje I a V identitását. A

$$Zx := \frac{d}{dt} E_t x|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{E_t - I}{t} x \qquad (x \in V)$$

formulával nyilvánvalóan $V \to V$ lineáris leképezést határoztunk meg. Ezzel

$$\frac{d}{dt} E_t x = \lim_{s\to 0} \frac{E_{t+s}x - E_t x}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{E_s x - x}{s} E_t = Z E_t x,$$

ahol felhasználtuk, hogy véges dimenziós vektortéren a lineáris leképezések folytonosak, ezért E_t kiemelhető a limesz alól.

Ez azt jelenti, hogy adott $x_0 \in V$ esetén az $\mathbb{R} \to V$, $t \mapsto E_t x_0$ függvény az

$$(x : \mathbb{R} \to V)? \qquad \dot{x} = Zx$$

differenciálegyenlet maximális megoldása az $x(0) = x_0$ kezdeti feltétellel, amely, mint ismeretes, $t \mapsto e^{tZ}x$ (ahol e^{tZ} a szokásos sorral van értelmezve).

Összefoglalva:

Állítás. *Ha E a valós egyenes additív csoportjának differenciálható lineáris ábrázolása a V véges dimenziós vektortéren, akkor létezik egyértelműen egy $Z : V \to V$ lineáris leképezés úgy, hogy $E_t = e^{tZ}$ $(t \in \mathbb{R})$.*

Világos, hogy a fordítottja is igaz: ha $Z : V \to V$ lineáris leképezés, akkor $t \mapsto e^{tZ}$ a valós egyenes additv csoportjának differenciálható lineáris ábrázolása.

2.2.2. Lie-csoportok ábrázolásai

Tekintsük most a G Lie-csoport L differenciálható lineáris ábrázolását a V véges dimenziós vektortéren. Legyen a a csoport Lie-algebrájának eleme, és $t \mapsto \exp(ta)$ az a-nak megfelelő egyparaméteres részcsoport. Ekkor $t \mapsto L_{\exp(ta)} =: E_{ta}$ az $\mathbb{R}$ differenciálható lineáris ábrázolása, tehát létezik egyértelműen egy Z_a lineáris leképezés úgy, hogy $E_{ta} = e^{tZ_a}$.

Egyszerű tény, hogy $Z_{\alpha a} = \alpha Z_a$ a Lie-algebra minden a elemére és α valós számra.

Az ismert
$$a+b=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(ta)\exp(tb)\right)|_{t=0}$$
összefüggést így is írhatjuk:
$$\exp(t(a+b))+\mathrm{Ordo}(t^2))=\exp(ta)\exp(tb).$$
Következésképpen
$$Z_{a+b}x=\lim_{t\to 0}\frac{E_{t(a+b)}-I}{t}x=\lim_{t\to 0}\frac{E_{t(a+b)+\mathrm{Ordo}(t^2)}-I}{t}x=$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{E_{ta}E_{tb}-\mathbf{1}}{t}x=(Z_a+Z_b)x.$$

Továbbá az ismert
$$[a,b]=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\exp(ta)\exp(tb)\exp(-ta)\exp(-tb)\right)\right)|_{t=0}$$
összefüggést így is írhatjuk:
$$\exp(t^2[a,b])+\mathrm{Ordo}(t^3))=\exp(ta)\exp(tb)\exp(-ta)\exp(-tb).$$
Következésképpen
$$Z_[a,b]x=\lim_{t^2\to 0}\frac{E_{t^2[a,b]}-I}{t^2}x=\lim_{t^2\to 0}\frac{E_{t^2[a,b]+\mathrm{Ordo}(t^3)}-I}{t^2}x=$$
$$=\lim_{t^2\to 0}\frac{E_{ta}E_{tb}E_{-ta}E_{-tb}}{t^2}=$$
$$=\lim_{t^2\to 0}\left(E_{ta}E_{tb}\left(\frac{E_{-ta}-I}{t}\right)\left(\frac{E_{-tb}-I}{t}\right)-\left(\frac{E_{-tb}-I}{t}\right)\left(\frac{E_{-ta}-I}{t}\right)\right)$$
$$=Z_aZ_b-Z_bZ_a=[Z_a,Z_b]$$

Összefoglalva:

Állítás. *Legyen L a G Lie-csoport differenciálható lineáris ábrázolása a V véges dimenziós vektortéren. Ekkor létezik egy $Z:\mathrm{La}(G)\to\mathrm{Lin}(V)$, $a\mapsto Z_a$ leképezés úgy, hogy*
(i) $Z_{\alpha a+\beta b}=\alpha Z_a+\beta Z_b$,
(ii) $Z_{[a,b]}=[Z_a,Z_b]$,
(iii) $L_{\exp(ta)}=e^{tZ_a}$
minden a,b Lie-algebrabeli elemre és α,β,t valós számra.

Z_a elnevezése: az a irányú egyparaméteres részcsoport **infinitezimális generátora** az ábrázolásban.

Eredményünk általánosítható Banach-térre, akkor azt kapjuk, hogy az infinitezimális generátorok korlátos lineáris operátorok.

3. Unitér ábrázolások

3.1. Alapvető ismeretek

Egy Hilbert-tér automorfizmusai az unitér operátorok – skalárszorzat-tartó lineáris bijekciók –, részobjektumai a zárt lineáris alterek a skalárszorzat leszűkítésével. Emlékeztetünk, hogy egy U operátor pontosan akkor unitér, ha $U^*=U^{-1}$.

A P operátort projektornak hívjuk, ha $P = P^* = P^2$; egy projektor értékkészlete zárt lineáris altér.

Állítás. *Legyen U a G csoport unitér ábrázolása a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren. Ekkor*

(i) ha $\mathbf{M}$ az ábrázolás invariáns altere, akkor $\mathbf{M}^\perp$ is az,

(ii) az $\mathbf{M}$ altér akkor és csak akkor invariáns az ábrázolásra, ha a megfelelő P projektor felcserélhető az ábrázolás minden elemével.

Bizonyítás (i) Minden $x \in \mathbf{M}$ és $y \in \mathbf{M}^\perp$ esetén $0 = \langle U_g x, y\rangle = \langle x, U_g^* y\rangle$ teljesül minden g-re, amiből $U_g^* = U_g^{-1} = U_{g^{-1}}$ miatt az is igaz, hogy $0 = \langle x, U_g y\rangle$ minden g-re. Ez épp azt jelenti, hogy $\mathbf{M}^\perp$ is invariáns az ábrázolásra.

(ii) Ha $\mathbf{M}$ invariáns az abrázolásra, akkor minden $x \in \mathcal{H}$ és $g \in G$ esetén $U_g P x \in M$, tehát $PU_g Px = U_g Px$, azaz minden g-re

$$PU_g P = U_g P.$$

Ennek az adjungálásával $PU_g^* P = PU_g^*$ adódik, amiből, ismét felhasználva, hogy minden g-re igaz lévén, azt kapjuk, hogy

$$PU_g P = PU_g$$

is teljesül minden g-re. Következésképpen $PU_g = U_g P$.

Ha viszont P felcserélhető az ábrázolással, akkor az $\mathbf{M}$ minden x elemére és minden g-re $PU_g x = U_g Px = U_g x$, és ez épp azt jelenti, hogy $\mathbf{M}$ invariáns az ábrázolásra. □

A következő két állítás mindegyikére is Schur-lemma néven szokás hivatkozni.

Állítás. *Legyen U a G csoport unitér ábrázolása. U akkor és csak irreducibilis, ha bármely T korlátos lineáris operátor, amelyre*

$$TU_g = U_g T \qquad (g \in G)$$

teljesül, az egység többszöröse.

Bizonyítás Adjungálva a fenti egyenlőséget és felhasználva azt, hogy $U_g^* = U_g^{-1} = U_{g^{-1}}$, meg azt, hogy ha g végigfutja a csoportot, akkor – és csak akkor – g^{-1} is végigfutja, azt kapjuk, hogy $T^* U_g = U_g T^*$ minden g-re. Következésképpen a $T_1 := \frac{T+T^*}{2}$ és $T_2 := \frac{T-T^*}{2i}$ önadjungált operátorok is felcserélhetők az ábrázolás összes elemével.

Legyen T_1 spektrálfelbontása a P_1 projektormérték. A T_1-gyel való felcserélhetőség egyenértékű azzal, hogy $P_1(E)U_g = U_g P_1(E)$ minden $g \in G$ és minden valós E Borel-halmaz esetén. Ez azt jelenti az előző állításunk szerint, hogy a $P_1(E)$ projektorok értékkészlete invariáns az ábrázolására.

Ha U irreducibilis, akkor $P_1(E) = 0$ vagy $P_1(E) = I$ minden E-re. Ez azt jelenti, hogy P_1 tartója egyetlen pont, azaz van olyan λ_1 valós szám, hogy $P_1(E) = 0$ ha $\lambda_1 \notin E$ és $P_1(E) = I$ ha $\lambda_1 \in E$. Következésképpen $T_1 = \lambda_1 I$, és hasonlóképpen $T_2 = \lambda_2 I$. Ezekből $T = \lambda I$, ahol $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$.

Ha viszont U csak az egység többszörösével cserélhető fel, akkor a projektorok közül csak a nullával és az identitással cserélhető fel, ami azt jelenti, hogy az ábrázolás irreducibilis. □

Állítás. *Legyen $U^{(1)}$ és $U^{(2)}$ a G csoport irrducibilis ábrázolása a $\mathcal{H}^{(1)}$, illetve a $\mathcal{H}^{(2)}$ Hilbert-téren. Ha $T : \mathcal{H}^{(1)} \to \mathcal{H}^{(2)}$ olyan lineáris leképezés, amelyre*

$$U_g^{(2)}T = TU_g^{(1)} \qquad (g \in G)$$

teljesül, akkor T egy unitér leképezés nem negatív számszorosa.

Bizonyítás Zárjuk ki a triviális $T = 0$ esetet. A fenti egyenlőség adjungálásával $T^*U_g^{(2)} = U_g^{(1)}T^*$ adódik, amelyet jobbról beszorozva T-vel, majd felhasználva az eredeti egyenlőséget azt kapjuk, hogy $T^*TU_g^{(1)} = U_g^{(1)}T^*T$. Hasonlóképp, balról szorozva T-vel arra jutunk, hogy $TT^*U_g^{(2)} = U_g^{(1)}TT^*$. Az előzőek alapján $T^*T = \lambda_1 I$ és $TT^* = \lambda_2 I$, amelyekből $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda^2$. Mivel T^*T pozitív önadjungált operátor ($\langle x, T^*Tx\rangle = \langle Tx, Tx\rangle > 0$), $\lambda^2 > 0$. Ezért $V := T/\lambda$ unitér, hiszen $V^*V = I$. □

Állítás. *A G topologikus csoport U unitér ábrázolása a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren akkor és csak akkor folytonos, ha a $g \mapsto U_g$ leképezés gyengén folytonos az egységelemben.*

Bizonyítás A folytonosság definíció szerint azt jelenti, hogy a $G \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $(g, x) \mapsto U_g x$ leképezés folytonos. Ekkor minden $x \in \mathcal{H}$ esetén a $G \to \mathcal{H}$, $g \mapsto U_g x$ hozzárendelés is folytonos, speciálisan az e egységelemre $\lim_{g\to e} \|U_g x - x\| = 0$, amiből a skalárszorzat Cauchy-egyenlőtlensége miatt minden $y \in \mathcal{H}$ esetén

$$\lim_{g\to e} \langle y, U_g x\rangle = \langle y, x\rangle$$

is teljesül, és ez a gyengén folytonosság.

Tegyük most fel a gyengén folytonosságot. Az

$$\|U_h x - U_g x\|^2 = \|U_h x\|^2 + \langle U_h x, U_g x\rangle + \langle U_g x, U_h x\rangle + \|U_g x\|^2$$

egyenlőség jobb oldalán az első és az utolsó tag $\|x\|^2$. A második tag

$$\langle x, U_h^* U_g x\rangle = \langle x, U_{h^{-1}} U_g x\rangle = \langle x, U_{h^{-1}g} x\rangle.$$

Ha h tart g-hez, akkor $h^{-1}g$ tart az e-hez, ezért a gyenge folytonosság miatt a második tag is, és hasonlóan a harmadik tag is tart $\|x\|^2$-hez, vagyis $\lim_{h\to g} \|U_h x - U_g\|^2 = 0$ minden x-re.

Továbbá

$$\|U_h y - U_g x\| \le \|U_h y - U_y x\| + \|U_h x - U_g x\| = \|y - x\| + \|U_h x - U_g x\|;$$

a jobb oldal nyilvánvalóan tart nullához, miközben y tart x-hez és h tart g-hez, így a bal oldal is, amivel bebizonyítottuk az ábrázolás folytonosságát. □

Állítás. *A G Lie-csoport U unitér ábrázolása egy Hilbert-téren akkor és csak akkor folytonos, ha $\lim_{g\to e} \|U_g z - z\| = 0$ egy sűrű lineáris altérben levő levő z-kre.*

Bizonyítás Legyen n természetes szám. Létezik a csoport egységelemének olyan $K(e)$ környezete, hogy minden $g \in K(e)$ és minden a sűrű altérben levő z-re $\|U_g z - z\| < \frac{1}{n}$. Továbbá ha x a Hilbert-tér eleme, akkor létezik olyan z_n elem a sűrű lineáris altérben hogy $\|z_n - x\| < \frac{1}{n}$. Tehát

$$\|U_g x - x\| \le \|U_g x - U_g z_n\| + \|U_g z_n - z_n\| + \|z_n - x\| \le \frac{3}{n}.$$

□

Megjegyzendő, hogy Lie-csoport helyett igaz az állítás „megfelelően jó” (Hausdorff-féle, második megszámlálható) topológiájú csoportra is.

3.2. Lie-csoportok folytonos unitér ábrázolásai

A fizikában Hilbert-tereken való unitér ábrázolások játszanak szerepet, de a differenciálhatóság helyett csak a folytonosság követelménye merül fel. Ezért a következőkben Lie-csoportok folytonos unitér ábrázolásait viszgáljuk komplex Hilbert-téren.

3.2.1. A valós számok additív csoportjának ábrázolásai

Állítás. *(Stone tétele) Legyen E az $\mathbb{R}$ folytonos unitér ábrázolása a $\mathcal{H}$ Hibert-téren, azaz $E_t : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ unitér leképezés és $E_{t+s} = E_t E_s$ minden $t, s \in \mathbb{R}$ esetén. Ekkor van egy egyértelműen meghatározott H önadjungált operátor úgy, hogy $E_t = e^{itH}$.*

Megjegyezzük először is, hogy H nem korlátos, ha a Hilbert-tér nem véges dimenziós, és ekkor e^{itH} nem az exponenciális sorával van értelmezve, hanem a spektráltétellel.

A Stone-tétel bizonyítása lényegében a véges dimenziós esetben megismert lépésekkel történik, csak meglehetős bonyodalmakkal. Nevezetesen, differenciálhatóság híján $\lim_{t\to 0} \frac{E_t - \mathbf{1}}{t} x$ nem biztos, hogy létezik; épp azt kell megtalálni, mely x-ekre létezik. Az ilyen x-ekre a határérték definiál egy iH-val jelölt lineáris operátort, H-ról meg kell mutatni, hogy önadjungált. Ezt a nehéz utat nem járjuk végig. A fordítottját mutatjuk meg egy kis többlet-tudás kíséretében.

Állítás. *Legyen H önadjungált operátor a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren. Ekkor*

(i) $t \mapsto e^{itH}$ a valós egyenes additív csoportjának folytonos unitér ábrázolása, és

(ii) $\lim_{t\to 0} \frac{e^{itH} - I}{t} x$ akkor és csak akkor létezik, ha $x \in \mathrm{Dom}(H)$, és ebben az esetben $\lim_{t\to 0} \frac{e^{itH} - I}{t} x = iHx$,

(iii) $\frac{d}{dt} e^{itH} x = iHe^{itH} x \qquad (x \in \mathrm{Dom}(H))$,

(iv) $e^{itH} H \subset He^{itH}$,

(v) A B korlátos lineáris operátorra $Be^{itH} = e^{itH} B \quad (t \in \mathbb{R})$ egyenértékű azzal, hogy $BH \subset HB$.

Bizonyítás A spektráltételt használjuk; legyen a P porojektormérték a H spekrálfelbontása.

(i) A projektokmérték szerinti integrálás multiplikatív tulajdonságából azonnal adódik, hogy $e^{i(t+s)H} = e^{itH} e^{isH}$.

Tudjuk, az ábrázolás folytonossága egyenértékű a gyenge folytonossággal a csoport egységeleménél, jelenleg a nullánál. Bármely $y, x \in \mathcal{H}$ esetén

$$\lim_{t\to 0} \langle y, e^{itH} y \rangle = \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} \langle y, P(d\lambda) x \rangle = \langle y, x \rangle,$$

ugyanis az azonosan 1 függvény majorálja az integrandust, ezért a limesz bevihető az integrál alá.

(ii) Ha $x \in \mathrm{Dom}(H)$, akkor

$$\left\| \frac{e^{itH} - I}{t} - iHx \right\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{e^{it\lambda} - 1}{t} - i\lambda \right|^2 \|P(d\lambda) x\|^2.$$

Alakítsuk át az integrandust

$$\left|\lambda \exp\left(\frac{it\lambda}{2}\right) \frac{\exp\left(\frac{it\lambda}{2}\right) - \exp\left(\frac{-it\lambda}{2}\right)}{2\frac{it\lambda}{2}} - \lambda\right|^2$$

alakba. Ezzel könnyen ellenőrizhető, hogy az integrandust az $\mathrm{id}^2_{\mathbb{R}}$ függvény egy számszorosa majorálja, mely, lévén x a H értelmezési tartományában„ integrálható. Így a $t \to 0$ határátmenet felcserélhető az integrálással; ekkor az integrandus a nullához tart, tehát a kérdéses limesz létezik és egyenlő iHx-szel.

Viszont, ha a kérdéses limesz létezik, akkor létezik

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{e^{itH}-I}{t}x\right\|^2 = \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{e^{it\lambda}-1}{t}\right|^2 \|P(d\lambda)x\|^2.$$

Mivel az integrandus limesze $\mathrm{id}^2_{\mathbb{R}}$, Fatou lemmájából következik, hogy $\mathrm{id}^2_{\mathbb{R}}$ integrálható a $\|P(\cdot)x\|^2$ mértékre, azaz x benne van a H értelmezési tartományában.

(iii)-(iv) Legyen $x \in \mathrm{Dom}(H)$. Ekkor

$$\frac{d}{dt}e^{itH}x = \lim_{s\to 0}\frac{e^{i(t+s)H} - e^{itH}}{s} = \lim_{s\to 0} e^{itH}\frac{e^{isH}-I}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{e^{isH}-I}{s}e^{itH}x.$$

a középső limesz létezik, ezért az összes többi is, és egyenlők egymással.

(v) Ha H felcserélhető B-vel, akkor H minden függvénye is felcserélhető B-vel. Viszont, ha B felcserélhető minden e^{itH}-vel, akkor $x \in \mathrm{Dom}(H)$ esetén

$$iBHx = \lim_{t\to 0}\frac{Be^{itH}-B}{t}x = \lim_{t\to 0}\frac{e^{itH}B - B}{t}x = iHBx.$$

Az utolsó egyenlőséget azért írhattuk fel, mert létezik a limesz, tehát Bx benne van H értelmezési tartományában. □

3.2.2. Lie-csopotok ábrázolásai

Lie-csoportok folytonos unitér ábrázolásaira a következőkben megfogalmazott eredményt is a véges dimenziós eset mintájára a Stone-tételnél mondott meglehetős bonyoddalmakkal fűszerezett lépésekkel kaphatjuk meg.

Állítás. *(Gårding-tétel) Legyen U a G Lie-csoport folytonos unitér ábrázolása a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren. Ekkor létezik egy $\mathrm{La}(G) \to \{$önadjungált operátorok$\}$, $a \mapsto H_a$ leképezés és egy mindenütt sűrű D lineáris altér úgy, hogy*

(i) $D \subset \mathrm{Dom}(H_a)$, D invariáns H_a-ra,

(ii $H_a|_D$ lényegében önadjungált (azaz $\overline{H_a|_D} = H_a$),

(iii) $H_{\alpha a+\beta b}|_D = \alpha H_a|_D + \beta H_b|_D$,

(iv) $H_{[a,b]}|_D = i[H_a, H_b]|_D$,

(v) $U_{\exp(ta)} = e^{itH_a}$

minden a, b Lie-algebrabeli elemre és α, β, t valós számra.

H_a elnevezése: az a irányú egyparaméteres részcsoport **infinitezimális generátora** az ábrázolásban; D pedig az ábrázolása **Gårding-tere**.

Megjegyzések (i) Egy összefüggő Lie-csoport minden eleme a Lie-algebrája egy bázis irányú egyparaméteres részcsoportokból vett elemek szorzata, ezért egy folytonos unitér ábrázolását egyértelműen meghatározzák egy bázisnak megfelelő infinitezimális generátorok.

(ii) Felmerül a kérdés: ha megadjuk egy összefüggő Lie-csoport Lie-algebrájának egy $a \mapsto H_a$ „ábrázolását”, amely teljesíti a Gårding-tételben rögzített tulajdonságokat, akkor azzal megadjuk-e a Lie-csoport unitér ábrázolását? Lokálisan izomorf Lie-csoportok Lie-algebrája izomorf, tehát a válasz általában nem. Viszont egyszeresen összefüggő csoportot már egyértelműen jellemez a Lie–algebrája; esetleg a Lie-algebra „ábrázolása" meghatározza az egyszeresen összefüggő csoport ábrázolását? Sajnos, a Gårding-féle tulajdonságokon túl egyéb feltételek is kellenek, amelyek egyáltalán nem látszanak természetesnek. Kivétel a véges dimenziós eset, amikor is az infinitezimális generátorok eleve korlátosak.

Állítás. *Legyen U a G összefüggő Lie-csoport folytonos unitér ábrázolása és H_k $(k = 1, \ldots, M)$ a csoport Lie-algebrája egy bázisának megfelelő infinitezimális generátorok. A B korlátos operátorra*

$$BU_g = U_g B \qquad (g \in G) \tag{$*$}$$

akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$BH_k \subset H_k B \qquad (k = 1, \ldots, M). \tag{$**$}$$

Bizonyítás A $(*)$ egyenlőségből a 3.2.1 állítás (v) pontja alapján következik a $(**)$ reláció; ehhez nem is kell az összefüggőség.

Ha $(**)$ igaz, akkor ugyancsak a 3.2.1 állítás (v) alapján B felcserélhető a megfelelő egyparaméteres részcsoportokat ábrázoló unitér operátorokkal. Mivel összefüggő csoport minden eleme bázis irányú egyparaméteres részcsoprtokból vett elemek szorzata, fennáll a $(*)$ egyenlőség. $\square$

Ebből következik a Schur-lemmának Lie-csoportokra vonatkozó igen fontos alakja:

Állítás. *Legyen U a G összefüggő Lie-csoport folytonos unitér ábrázolása és H_k $(k = 1, \ldots, M)$ a csoport Lie-algebrája egy bázisának megfelelő infinitezimális generátorok. U akkor és csak akkor irreducibilis, ha bármely B korlátos lineáris operátor, amelyre $(**)$ teljesül, az egység többszöröse.*

4. Unitér sugárábrázolások

4.1. Alapvető ismeretek

Kvantummechanikában egy fizikai rendszer eseményeit egy komplex Hilbert-tér projektoraival modellezzük. A projektorok önadjungált és idempotens operátorok, azaz a P projektorra $P = P^* = P^2$ teljesül. Elnevezésük onnan ered, hogy egy P értékkészlete zárt lineáris altér, és P erre az altérre merőlegesen vetíti a vektorokat. A $\mathcal{H}$ Hilbert-tér projektorainak összességét, $\mathrm{Pr}(\mathcal{H})$, úgynevezett **orto-σ-háló** struktúrával látjuk el, amit az események fizikai jelentése indokol.

A P esemény ellentettje $P^\perp$, a $\mathrm{Ran}(P)$ ortogonális kiegészítőjére való vetítés.

A P_n-ek $(n \in \mathbb{N})$ „és”eseménye $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} P_n$, a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ran}(P)$ zárt lineáris altérre való vetítés.

A P_n-ek ($n \in \mathbb{N}$) „vagy”eseménye $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} P_n$, a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ran}(P)$ generálta zárt lineáris altérre való vetítés.

A lehetetlen esemény a nulla projektor, a biztos esemény az egységoperátor, I.

A projektorháló részhálója olyan részhalmaz, amelyből a $^\perp$, $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}}$ és $\bigvee_{n\in\mathbb{N}}$ műveletek nem vezetnek ki.

$\mathrm{Pr}(\mathcal{H})$ automorfizmusai olyan $A : \mathrm{Pr}(\mathcal{H}) \to \mathrm{Pr}(\mathcal{H})$ bijekciók, amelyek megtartják a $^\perp$, $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}}$ és $\bigvee_{n\in\mathbb{N}}$ műveleteket.

Állítás. *(Wigner tétele) Legyen $\mathcal{H}$ és $\mathcal{H}'$ Hilbert-tér,* $\dim \mathcal{H} \neq 2$. *Ha $S : \mathrm{Pr}(\mathcal{H}) \to \mathrm{Pr}(\mathcal{H}')$ izomorfizmus, akkor létezik egységnyi számszorzó erejéig egyértelműen egy $V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ unitér vagy antiunitér leképezés úgy, hogy*

$$S(P) = VPV^{-1} \qquad (P \in \mathrm{Pr}(\mathcal{H}).$$

A továbbiakban a Hilbert-terek dimenziója mindig nagyobb, mint 2.

Wigner tétele automorfizmusra alkalmazva azt eredményezi, hogy $\mathrm{Pr}(\mathcal{H})$ triviális részhálója – amely minden automorfizmusra invariáns – $\{0, I\}$.

Egy csoportnak egy projektorhálón megvalósított ábrázolását **projektív ábrázolásnak** hívjuk.

Ha A a G csoport projektív ábrázolása $\mathrm{Pr}(\mathcal{H})$-n, akkor Wigner tétele értelmében minden A_g ábrázoló elemhez létezik U_g unitér vagy antiunitér operátor $\mathcal{H}$-n úgy, hogy

$$A_g(P) = U_g P U_g^{-1} \tag{1}$$

minden P projektorra.

Ebből azonnal látszik, hogy

– A pontosan akkor hű, ha U_g nem számszorosa U_h-nak $g \neq h$ esetén,

– A pontosan akkor ireducibilis, ha csak a nulla és az egész tér invariáns minden U_g-re.

4.2. Unitér kociklusok

Az $A_g \circ A_h = A_{gh}$ és (1) egyenlőségből azt kapjuk, hogy

$$U_g U_h = \omega(g, h) U_{gh}, \tag{2}$$

ahol $\omega(g, h)$ egységnyi abszolút értékű komplex szám.

Ebből azonnal látszik, hogy összefüggő Lie-csoport esetén minden U_g unitér. Ugyanis mind unitér, mind antiunitér operátor négyzete unitér. Egy Lie csoport egyparaméteres részcsoportjának minden eleme egy másiknak a négyzete, ezért egyparaméteres részcsoportok elemeit ábrázoló operátorok unitérek; ez igaz lesz bármely ábrázoló operátorra, mert összefüggő Lie-csoport minden eleme egyparaméteres részcsoportokból vett elemek szorzata.

Ezért a továbbiakban arra szorítkozunk, amikor minden U_g unitér.

A csoportszorzás asszociativitásából és az (2) egyenlőségből az következik, hogy

$$\omega(g, h)\omega(gh, f) = \omega(g, hf)\omega(h, f) \qquad (g, h, f \in G) \tag{3}$$

Mindig választhatjuk úgy, hogy $U_e = I$ legyen; ebből és a fenti egyenlőségből következik, hogy

$$\omega(e, g) = \omega(g, e) = 1 \qquad (g \in G). \tag{4}$$

Definíció. *Legyen G csoport. Egy $\omega : G \times G \to \mathbb{T}$ függvényt, amely rendelkezik a (3) és (4) tulajdonsággal, a csoport* **unitér kociklusának** *nevezzük. Az ω' és ω kociklus* **kohomológ**, *ha létezik $\tau : g \to \mathbb{T}$ függvény úgy, hgoy*

$$\omega(g,h) = \omega'(g,h)\frac{\tau(g)\tau(h)}{\tau(gh)} \qquad (g,h \in G). \tag{5}$$

A két kociklus **gyengén kohomológ**, *ha ω' és ω vagy ω' és ω^* kohomológ.*

Egyszerű meggyőződni arról, hogy a (gyenge) kohomológia *ekvivalencia-reláció* az unitér kociklusokon.

Állítás. *A G csoport bármely ω' unitér kociklus esetén van olyan vele kohomológ ω unitér kociklus, amelyre*

$$\omega\left(g,g^{-1}\right) = \omega\left(g^{-1},g\right) = 1 \qquad (g \in G) \tag{6}$$

Bizonyítás A (3) egyenlőségben a $h = g^{-1}$, $f = g$ szereposztással (4) következtében az adódik, hogy $\omega'\left(g,g^{-1}\right) = \omega'\left(g^{-1},g\right)$. A $\tau(g) := \sqrt{\omega'\left(g,g^{-1}\right)}$ függvénnyel létesítjük a kívánt kohomológiát. □

A (gyenge) kohomológia definícióját a következő eredmény indokolja, amely Wigner tételének egyenes következménye:

Állítás. *Legyen A és A' a G csoport ábrázolása $\mathrm{Pr}(\mathcal{H})$-n, illetve $\mathrm{Pr}(\mathcal{H}')$-n, és adjuk meg az U_g, illetve U'_g unitér vagy antiunitér reprezentánsokat, amelyekhez az ω, illetve ω' unitér kociklusok tartoznak. A két ábrázolás pontosan akkor ekvivalens, ha létezik egy $\tau : G \to \mathbb{T}$ ($\mathbb{T}$ az egységnyi abszolút értékű komplex számok halamaza) függvény és egy $V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ unitér vagy antiunitér leképezés úgy, hogy*

$$VU_g = \tau(g)U_gV \qquad (g \in G). \tag{7}$$

Következésképpen ω' és ω vagy ω' és ω^*, attól függően, V unitér vagy antiunitér, kohomológ egymással τ által.

Minthogy az ekvivalens ábárázolásokat azonosnak tekintjük, ilyenekhez pedig (gyengén) kohomológ kociklusok tartoznak, a továbbiakban a (6) tulajdonságot is megköveteljük egy unitér kociklustól.

4.3. Kommutátor-kociklusok

A továbbiakban *Lie-csoportok unitér kociklusaival* és azokból származtatott függvényeket vizsgálunk. Először is megadjuk az unitér kociklusok egy speciális tulajdonságát, amely, majd látjuk, mindig megkövetelhető az ábrázolások szempontjából.

Definíció. *Egy Lie-csoport ω unitér kociklusát* **lokálisan kanonikusnak** *nevezzük, ha differenciálható és $\omega(g,h) = 1$ valahányszor g és h ugyanannak az egyparaméteres részcsoportnak az egység egy környezetében levő eleme.*

Egy G Lie-csoport és ω lokálisan kanonikus unitér kociklusa esetén legyen G^ω az a csoport, a melynek alaphalmaza $G \times \mathbb{T}$, és a szorzás

$$(g,\lambda)(h,\mu) := (gh, \omega(g,h)\lambda\mu).$$

Könnyű belátni (3) alapján, hogy ez a szorzás asszociatív, $(e, 1)$ egységelem, és és (6) szerint $(g, \lambda)^{-1} = (g^{-1}, 1/\lambda)$.

$G \times \mathbb{T}$ nyilvánvalóan differenciálható sokaság, a szorzás és invertálás differenciálható művelet, tehát G^ω Lie-csoport.

Az is nyilvánvaló, hogy az egységelemének az érintőtere a G egysége érintőterének és $\mathbb{T}$ egysége érintőterének a Descartes-szorzata. $\mathbb{T}$ érintőtere 1-ben $i\mathbb{R}$, amely persze természetszerűleg azonosítható $\mathbb{R}$-rel a $-i$-vel való szorzás által, amit meg is teszünk. Mivel az érintőtérhez differenciálás útján jutunk, $\mathbb{T}$-vel kapcsolatban a differenciálást automatikusan összekapcsoljuk egy $-i$-vel való szorzással.

Tehát $\mathrm{La}(G^\omega)$ alaphalmaza az $\mathrm{La}(G) \times \mathbb{R}$ vektortér; most az érdekel minket, hogy mi ezen a kommutátor.

Legyen $(a, \alpha) \in \mathrm{La}(G) \times \mathbb{R}$. A kociklus lokális kanonikus volta miatt $t \mapsto (\exp(ta), e^{it\alpha}) =: \exp(t(a, \alpha))$ lokális egyparaméteres csoport G^ω-ban (a nulla egy környezetében értelmezve van és $\exp\big((t+s)(a, \alpha)\big) = \exp(t(a, \alpha)) \exp(s(a, \alpha))$; deriváltja a nullában (a, α).

Mint tudjuk, $[(a, \alpha)$ és (b, β) kommutátorát

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\exp(t(a, \alpha)) \exp(t(b, \beta)) \exp(-t(a, \alpha)) \exp(-t(b, \beta))\right) |_{t=0}$$

szolgáltatja.

Nézzük először a zárójelben levő első két elem szorzatát, majd a második kettőét:

$$(\exp(ta), e^{it\alpha})(\exp(tb), e^{it\beta}) = \Big(\exp(ta)(\exp(tb), \omega(\exp(ta)(\exp(tb))e^{it(\alpha+\beta)}\Big),$$

$$\begin{aligned}(\exp(-ta), e^{-it\alpha})(\exp(-tb), e^{-it\beta}) &= \\ &= \Big(\exp(-ta)(\exp(-tb), \omega(\exp(-ta)(\exp(-tb))e^{-it(\alpha+\beta)}\Big).\end{aligned}$$

Végül ezek szorzata, a rövidebb formula kedvéért most a $(ta) := \exp(ta)$ jelölést alkalmazva:

$$((ta)(tb)(-ta)(-tb), \omega((ta)(tb), (-ta)(-tb))\omega((ta), (tb))\omega((-ta), (-tb)))$$

lesz. Ennek t szerinti második deriváltja a $t = 0$ helyen az

$$[(a, \alpha), (b, \beta)] = \big([a, b], \kappa(a, b)\big)$$

eredményt adja, ahol a kommutátor tulajdonsága szerint κ a következő meghatározásban szereplő tulajdonságokkal rendelkezik.

Definíció. *Egy* $\kappa : \mathrm{La}(G) \times \mathrm{La}(G) \to \mathbb{R}$ *bilineáris, antiszimmetrikus és leképezést, amelyre*

$$\kappa([a, b], c) + \kappa([c, a], b) + \kappa([b, c], a) = 0$$

teljesül minden $a, b, c \in \mathrm{La}(G)$ *esetén, a csoport* **kommutátor kociklusának** *nevezzük.*

A κ' és κ kommutátor kociklus **kohomológ** *ha van olyan $\eta : \mathrm{La}(G) \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, hogy*

$$\kappa'(a,b) = \kappa(a,b) + \eta([a,b]).$$

A két kommutátor kociklus **gyengén kohomológ**, *ha κ' és κ vagy κ' és $-\kappa$ kohomnológ.*

A kohomológiára vonatkozó meghatározást az indokolja, hogy ha ω' és ω a Lie-csoport (gyengén) kohomológ unitér kociklusa, akkor a megfelelő kommutátor kociklusok (gyengén) kohomológok. Erről (5) alapján meglehetősen hosszadalmas de elemi számolással győződhetünk meg.

Jegyezzük meg: kohomológ unitér kociklusokhoz kohomológ kommutátor-kociklusok tartoznak, de nem kohomológ unitér kociklusokhoz is tartozhatnak kohomológ kommutátor-kociklusok, ha – és csak ebben az esetben – a két unitér kociklus „kohomológ az egység egy környezetében”.

4.4. Lie-csoportok sugárábrázolásai

Definíció. *Az (U, ω) párt a G csoport* **sugárábrázolásának** *hívjuk, ha ω a G unitér kociklusa és U a csoporton értelmezett olyan leképezés, mely a g elemhez egy U_g unitér operátort rendel oly módon, hogy* (2) *teljesül.*

Egy sugárábrázolás egy projektív ábrázolást valósít meg.

Egy projektorhálón az erős toplógiát (a pontonkénti konvergencia topológiáját) szokás megadni. Kérdés, hogy topologikus, illetve Lie-csoport projektív ábrázolásának folytonossága a sugárábrázolás milyen tulajdonságaiban tükröződik. A válasz:

Állítás. *Egy összefüggő Lie-csoport projektív ábrázolása akkor és csak akkor folytonos, ha van olyan őt előállító (U, ω) sugárábrázolás, hogy ω differenciálható a csoport egységelemének egy környezetében, és a $g \mapsto U_g$ hozzárendelés erősen folytonos.*

Állítás. *Egy Lie-csoport bármely olyan unitér kociklusa, amely differenciálható az egységelem egy környezetében kohomológ egy lokálisan kanonikussal.*

Erre utaltunk korábban: ha Lie-csoport folytonos sugárábrázolását tekintjük, mindig feltehetjük, és fel is tesszük, hogy az unitér kociklus lokálisan kanonikus.

Legyen (U, ω) a G Lie-csoport unitér sugárábrázolása. Emlékezzünk a G^ω csoportra. Az

$$U^\omega_{(g,\lambda)} := \lambda U_g \qquad ((g,\lambda) \in G \times \mathbb{T})$$

formulával könnyen ellenőrizhető módon a G^ω unitér ábrázolását adjuk meg. Az is látható, hogy (U, ω) akkor és csak akkor folytonos, ha U^ω folytonos. Ugyanis U^ω folytonossága egyenértékű azzal, hogy a Hilbert-tér minden x elemére a $(g, \lambda) \mapsto U^\omega_{(g,\lambda)} x = \lambda U_g x$ folytonos, ami egyenértékű azzal hogy $g \mapsto U_g x$ folytonos.

Ezért a Lie-csoportok folytonos unitér sugárábrázolásaira alkalmazhatók – megfelelő átírással – a folytonos unitér ábrázolásokra vonatkozó eredmények. Ezeket soroljuk most fel.

Állítás. *(Gårding-tétel) Legyen (U, ω) a G Lie-csoport folytonos unitér ábrázolása a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren. Ekkor létezik egy $\mathrm{La}(G) \to \{$önadjungált operátorok$\}$, $a \mapsto H_a$ leképezés és egy mindenütt sűrű D lineáris altér úgy, hogy*
(i) $D \subset \mathrm{Dom}(H_a)$, D invariáns H_a-ra,
(ii) $H_a|_D$ lényegében önadjungált (azaz $\overline{H_a|_D} = H_a$),
(iii) $H_{\alpha a+\beta b}|_D = \alpha H_a|_D + \beta H_b|_D$,
(iv) $H_{[a,b]}|_D + \kappa(a,b)I = i[H_a, H_b]|_D$,
(v) $U_{\exp(ta)} = e^{itH_a}$
minden a, b Lie-algebrabeli elemre és α, β, t valós számra.

H_a elnevezése: az a irányú egyparaméteres részcsoport **infinitezimális generátora** az ábrázolásban; D pedig az ábrázolása **Gårding-tere**.

Állítás. *Legyen (U, ω) a G összefüggő Lie-csoport folytonos unitér sugárábrázolása és H_k $(k = 1, \ldots, M)$ a csoport Lie-algebrája egy bázisának megfelelő infinitezimális generátorok. A B korlátos operátorra*

$$BU_g = U_g B \qquad (g \in G) \tag{8}$$

akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$BH_k \subset H_k B \qquad (k = 1, \ldots, M). \tag{9}$$

Állítás. *Legyen (U, ω) a G összefüggő Lie-csoport folytonos unitér sugárábrázolása és H_k $(k = 1, \ldots, M)$ a csoport Lie-algebrája egy bázisának megfelelő infinitezimális generátorok. U akkor és csak akkor irreducibilis, ha bármely B korlátos lineáris operátor, amelyre 9 teljesül, az egység többszöröse.*

Végezetül megadunk egy összefüggést, amelynek az analogonja nem szerepelt az unitér ábrázolásoknál, egyszerű átfogalmazásával azonban ott is érvényes.

Állítás. *A G összefüggő Lie-csoport (U, ω) és (U', ω') folytonos unitér sugárábrázolása a $\mathcal{H}$, illetve $\mathcal{H}'$ Hilbert-téren akkor és csak akkor ekvivalens, ha létezik*
(i) $V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ unitér vagy antiunitér leképezés,
(ii) $\eta : \mathrm{La}(G) \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés
oly módon, hogy minden $a \in \mathrm{La}(G)$ esetén

$$VH_aV^{-1} = H'_a + \eta(a)I \text{ ha } V \text{ unitér,}$$
$$VH_aV^{-1} = -H'_a + \eta(a)I \text{ ha } V \text{ antiunitér.}$$

Bizonyítás Ha ekvivelensek, akkor a 4.2 állítás alapján fenn állnak a mondott összefüggések.

Tegyük most fel, az egyszerűség kedvéért csak az unitér esetre, hogy fenn áll a fenti egyenlőség. Ekkor

$$Ve^{itH_a}V^{-1} = e^{it\eta(a)}e^{itH'_a}.$$

Legyen $\tau(\exp(a)) := e^{i\eta(a)}$, ami az egységelem egy környezetében definiálva van. Ekkor $VU_g = \tau(g)U_gV$ igaz, ha g benne van az egységelem egy környezetében. Mivel összefüggő Lie-csoportot generálja az egységelem egy környezete, igaz a kívánt összefüggés minden g-re. □

Megjegyzendő, elég ha a fenti egyenlőségek a Lie-algebra egy bázisának elemeire teljesülnek.

5. Topologikus ábrázolások

Topologikus csoportoknak topologikus téren megvalósított folytonos ábrázolásainak vizsgálata még az ábrázoláselméleti általános fogalmak bevezetése előtt létrejött, ezért önálló, sajátos elnevezések születtek meg vele kapcsolatban, amelyeket megemlítünk, hogy aki találkozik velük, tudja, mit jelentenek az ábrázoláselmélet vonatkozásában.

A G topologikus csoportnak a T topologikus téren megvalósított C folytonos ábrázolásáról azt szokás mondani, hogy (G, T, C) **topologikus transzformációcsoport**, és többnyire C-t el is hagyják a jelölésből, azaz $C_g(x)$ helyett csak gx-et írnak $g \in G$ és $x \in T$ esetén.

Effektívnek mondják a topologikus transzformációcsoportot, ha az ábrázolás hű.

Tranzítívnak mondják a topologikus transzformációcsoportot, ha nincs T-nek az ábrázolásra invariáns valódi részhalmaza.

Tranzitív ábrázolás nyilvánvalóan irreducibilis; és homogén topologikus téren az irreducibilis ábrázolás tranzitív.

Azt mondjuk, hogy a topologikus tér x és y eleme ugyanazon a pályán van, ha létezik $h \in G$ úgy, hogy $y = C_h(x)$. Egyszerű tény, hogy „ugyanazon a pályán lenni” ekvivalencia-reláció; egy ekvivalencia-osztályt hívunk az **ábrázolás pályájának**. Az x elem ekvivalencia-osztálya, más néven az x-en áthaladó pálya

$$C_G(x) := \{C_g(x) \mid g \in G\}.$$

Tranzitív az ábrázolás, ha csak egyetlen pályája van.

Legyen P az ábrázolás pályája és lássuk el a relatív topológiával (vagyis a T-ből származó folytonosság-fogalommal úgy, hogy figyelmen kívül hagyjuk a P-n kívüli elemeket). Ekkor $g \mapsto C_g|_P$ tranzitív ábrázolás.

Adott x elem esetén

$$G_x^C := \{g \in G \mid C_g(x) = x\},$$

amely láthatóan a G részcsoportja, az ábrázolásnak az x-hez tartozó **izotrópiacsoportja**.

Ha x és y ugyanazon a pályán van, akkor G_x^C és G_y^C konjugált részcsoportok. Valóban, ekkor $y = C_h(x)$ valamely $h \in G$ esetén, ezért ha $C_g(y) = y$, akkor $C_g C_h(x) = C_h(x)$, azaz $C_h^{-1} C_g C_h(x) = x$ vagyis $C_{h^{-1}gh}(x) = x$, amiből azonnal adódik, hogy $h^{-1} G_x^C h = G_y^C$.

Emlékeztetünk, hogy ha K a G részcsoprtja, akkor azt mondjuk hogy a h és g csoportelem a K szerinti azonos bal oldali mellékosztályban van, ha $h^{-1}g \in K$. „Azonos mellékosztályban lenni” ekvivalencia-reláció, egy ekvivelencia-osztályt bal oldali mellékosztáynak hívunk. Az f csoportelem mellékosztálya fK. A mellékosztályok halmazát G/K jelöli.

A g csoportelem esetén definiáljuk az

$$C_g^K : G/K \to G/K, \quad fK \mapsto (gf)K$$

leképezést. Először is állapítsuk meg, hogy a definició jó: ha $fK = hK$, azaz $f^{-1}h \in K$, akkor $(gf)K = (gh)K$, hiszen $(gf)^{-1}(gh) = f^{-1}g^{-1}gh = f^{-1}h$.

Aztán vegyük észre azt, hogy C_g^K bijekció. Valóban, épp az előzőek alapján injekció, mert ha $(gf)K = (gh)K$, akkor $f^{-1}h \in K$, azaz $fK = hK$; ráképezés is, mert $(gf)K = C_g^K(g^{-1}f)K$.

Továbbá $C^K_{gh}(fK) = (ghf)K$, és $C^K_g(C^K_h(fK) = C^K_g(hfK) = (ghf)K$, azaz

$$C^K_{gh} = C^K_g \circ C^K_h \qquad (g, h \in G).$$

Állítás. *Legyen K a G zárt részcsoportja. Lássuk el G/K-t a hányados topológiával. Ekkor $g \to C^K_g$ a G csoport folytonos tranzitív topologikus ábrázolása (más szóval, $(G, G/K, C^K)$ tranzitív topologikus transzformációcsoport).*

Bizonyítás Az előző észrevételek alapján csak azt kell megmutatni, hogy C^K_g homeomorfizmus (oda-vissza folytonos) minden g-re, és $(g, fK) \mapsto (gf)K$ folytonos.

Jelölje $\Phi : G \to G/K$ az $f \mapsto fK$ leképezést. A hányados topológia azt jelenti, hogy $N \subset G/K$ akkor és csak akkor nyílt, ha $\overset{-1}{\Phi}(N) \subset G$ nyílt.

A szorzás (a topologikus csoport definíciója szerint) folytonos G-ben, ezért $L_g : G \to G,\ \ h \mapsto gh$ is folytonos.

Felhasználjuk majd a nyilvánvaló $C^K_g \circ \Phi = \Phi \circ L_g$ összefüggést.

Topologikus terek között egy leképezés folytonos, ha nyílt halmaz ősképe nyílt.

Legyen $N \subset G/K$ nyílt. Kérdés, $\left(C^K_g\right)^{-1}(N)$ nyílt-e. A válasz igen a következők alapján:

$$\Phi^{-1}\left(\left(C^K_g\right)^{-1}(N)\right) = \left(C^K_g \circ \Phi\right)^{-1}(N) = (\Phi \circ L_g)^{-1}(N) = L^{-1}_g\left(\Phi^{-1}(N)\right).$$

C^K_g tehát folytonos minden g-re, így $\left(C^K_g\right)^{-1} = C^K_{g^{-1}}$ is folytonos.

Jelölje most M a $G \times G \to G$ szorzást (amely folytonos), és $S : G \times G/K \to G/K$, a $(g, x) \mapsto C^K_g(x)$ leképezést. Ezekre

$$S \circ (\mathrm{id}_G \times \Phi) = \Phi \circ M$$

áll fönn, és az előbbi gondolatmenethez hasonóan kapjuk, hogy S folytonos. $\square$

Fordítva is igaz megfelelően jó topológiák esetén: minden tranzitív ábrázolás ekvivalens egy zárt részcsoport által az előzek szerint megadott ábrázolással.

Állítás. *Legyen C a G lokálisan kompakt, Hausdorff-féle második megszámlálható topológiájú csoport folytonos tranzitív ábrázolása a T lokálisan kompakt, Hausdorff-féle topologikus téren. Ekkor van olyan $K \subset G$ zárt részcsoport, hogy C ekvivalens C^K-vel.*

Bizonyítás (Részlet) Emlékeztetünk, az ekvivalencia azt jelenti, hogy létezik $\varphi : G/K \to T$ homeomorfizmus, amellyel $\varphi \circ C^K_g = C_g \circ \varphi$ minden g-re.

Megadjuk K-t és φ-t.

Legyen z a T tetszőleges rögzített eleme, és $K := G^C_z$ (izotrópiacsoport). Az $\alpha : G \to T,\ \ g \mapsto C_g(z)$ leképezés a K szerinti bal oldali mellékosztályokon állandó, ($\alpha(f) = \alpha(h)$ ha $fK = hK$), ezért létezik egy $\varphi : G/K \to T$ leképezés úgy, hogy $\alpha = \varphi \circ \Phi$. Egyszerű számolás mutatja, hogy $\alpha \circ L_g = C_g \circ \alpha$ minden g-re. Ezért

$$\varphi \circ C^K_g \circ \Phi = \varphi \circ \Phi \circ L_g = C_g \circ \varphi \circ \Phi,$$

amiből, lévén Φ ráképezés,

$$\varphi \circ C^K_g = C_g \circ \varphi \qquad (g \in G).$$

Az ábrázolás folytonossága következtében α folytonos. Ebből és Φ-nek a hányados topológia definíciójából következő tulajdonsága alapján, mint korábban is, megmutathatjuk, hogy a T bármely nyílt részhalmazának φ általi ősképe nyílt, azaz φ folytonos. Az is egyszerű tény, hogy φ bijekció.

Az egyetlen, amit még meg kell mutatni, hogy φ inverze is folytonos. Ehhez kellenek a topológiákra kirótt feltételek, és ez az, amit itt most nem bizonyítunk. □

Példaként: az SO(3)-nak egy gömbhéjon megvalósított önábrázolása tranzitív; a gömbhéj egy z eleméhez tartozó izotrópia-csoport a z körüli forgatásokból álló részcsoport.

6. Differenciálható ábrázolások

6.1. Általános fogalmak

Lie-csoportok differenciálható sokaságon megvalósított differenciálható ábrázolásainak vizsgálata is még az ábrázoláselméleti általános fogalmak bevezetése előtt létrejött, és a topologikus esettel párhuzamban kialakultak a sajátos elnevezések.

A G Lie-csoportnak az M differenciálható sokaságon megvalósított D differenciálható ábrázolásáról azt szokás mondani, hogy (G, M, D) **Lie-transzformáció-csoport**, és többnyire D-t el is hagyják a jelölésből, azaz $D_g(x)$ helyett csak gx-et írnak $g \in G$ és $x \in M$ esetén.

Az **effektív**, **tranzítív**, **pálya**, **izotrópia-csoport** ugyanazt jelenti, mint a topologikus esetben.

Az ábrázolás P pályáját ellátva a relatív differenciálható struktúrával, $g \mapsto D_g|_P$ tranzitív ábrázolás lesz.

A topologikus esettel párhuzamban igazak maradnak a következő állítások (csak sokkal körülményesebben bizonyíthatók), ahol D^K-t a korábban bevezetett formulák határozzák meg.

Állítás. *Legyen K a G zárt részcsoportja. Ekkor G/K ellátható differenciálható struktúrával, és $g \to D_g^K$ a G csoport differenciálható tranzitív ábrázolása.*

Állítás. *Legyen D a G Lie-csoport tranzitív differenciálható ábrázolása az M sokaságon. Ekkor van olyan $K \subset G$ zárt részcsoport, hogy D ekvivalens D^K-val.*

6.2. Lie-csoportok differenciálható ábrázolásai

6.2.1. A valós számok additív csoportjának ábrázolása

Legyen $\mathbb{R}$-nek egy $t \mapsto E_t$ differenciálható ábrázolása M-en. Zárjuk ki azt a triviális esetet, amikor E konstans leképezés.

Adott $x_0 \in M$ esetén $\{E_t(x_0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ egy görbe M-ben, amely áthalad x_0-on, és

$$Z(x_0) := \frac{d}{dt} E_t(x_0)|_{t=0}$$

a görbe érintője x_0-ban, azaz a sokaság x_0-beli érintőterének az eleme. Ezt a vektort minden pontban megadhatjuk, így jutunk az $x \mapsto Z(x)$ **vektormezőhöz** M-en, vagyis egy olyan differenciálható leképezéshez, amely a sokaság minden pontjához hozzárendel a pont feletti érintőtérben egy vektort. Ezt a vektormezőt az ábrázolás **infinitezimális generátorának** hívjuk.

Egyszerű tény, hogy $t \mapsto E_t(x_0)$ az

$$(x : \mathbb{R} \to M)? \qquad \dot{x} = Z(x)$$

differenciálegyenlet maximális megoldása az x_0 kezdeti feltéltellel.

Tehát a valós számok additív csoportjának differenciálható ábrázolása meghatároz egy vektormezőt, amelyből az ábrázolás visszakapható.

Emlékezzünk a véges dimenziós vektortéren megvalósított differenciálható lineáris ábrázolásokra. Ott a vektormezőt egy lineáris leképezés adta meg. Ott igaz volt, hogy bármely lineáris leképezés egy ábrázolás infinitezimális generátora.

Kérdés, vajon itt is teljesül-e, hogy egy tetszőleges vektormező az általa meghatározott differenciálegyenlettel megadja az $\mathbb{R}$ ábrázolását. A válasz nem. Ismert ugyanis a diffferecitálegyenletek elméletéből, hogy maximális megoldások értelmezési tartománya nem szükségképpen az összes valós szám. Egyszerű példa: a sokaság $\mathbb{R}^+$ és $Z(x) = \frac{1}{2x}$; az x_0 kezdeti feltételű maximális megoldás csak a $t > -x_0$ értékekre van értelmezve.

6.2.2. Lie-csoportok ábrázolásai

Tekintsük most a G Lie-csoport D differenciálható ábrázolását az M sokaságon. Legyen a a csoport Lie-algebrájának eleme, és $t \mapsto \exp(ta)$ az a-nak megfelelő egyparaméteres részcsoport. Ekkor $t \mapsto D_{\exp(ta)} =: E_{ta}$ az $\mathbb{R}$ differenciálható ábrázolása, tehát létezik egyértelműen egy Z_a vektormező úgy, hogy $E_{ta}x_0$ a Z_a vektormező meghatározta differencfiálegyenletnek az x_0 kezdeti feltételű maximális megoldása.

Nem bizonyítjuk (több diferenciálgeometriai tudást igényelne) a következő eredményt, amely teljes párhuzmaban áll az eddig megismertekkel.

Állítás. *Legyen D a G Lie-csoport differenciálható ábrázolása az M sokaságon. Ekkor létezik egy $Z : \mathrm{La}(G) \to \{$vektormezők M-en$\}$, $a \mapsto Z_a$ leképezés úgy, hogy minden a, b Lie-algebrabeli elemre és α, β valós számra.*

(i) $Z_{\alpha a+\beta b} = \alpha Z_a + \beta Z_b$,

(ii) $Z_{[a,b]} = -[Z_a, Z_b]$,

(iii) $t \mapsto D_{\exp(ta)}x_0$ *az* $(x : \mathbb{R} \to M)?$ $\dot{x} = Z(x)$ *differenciálegyenlet maximális megoldása az x_0 kezdeti feltéltellel.*

Z_a elnevezése: az a irányú egyparaméteres részcsoport **infinitezimális generátora** az ábrázolásban.

A vektormezők kommutátoráról azért mindenképpen szólnunk kell. Természetesen koordináták nélkül definiálható, de aki sokaságok elméletében kevésbé jártas, koordinátás alakban alkothat képet magának róla. Tehát koordinátákban

$$[Z_a, Z_b]^k = Z_a^k \partial_i Z_b^i - Z_b^k \partial_i Z_a^i \qquad \text{(Einstein-összegzés).}$$

Állítás. *Egy összefüggő Lie-csoportnak a D és D' differenciálható ábrázolása az M, illetve az M' sokaságon akkor és csak akkor ekvivalens, ha létezik $F : M \to M'$ diffeomorfizmus úgy, hogy*

$$\mathrm{D}F(x)Z_a(x) = Z'_a(F(x)) \qquad (x \in M)$$

a csoport Lie-algebrájának minden a elemére.

Bizonyítás Ha az ábrázolások ekvivalensek, akkor van olyan F diffeomorfizmus, hogy

$$F(D_{\exp(ta)}(x)) = D'_{\exp(ta)}(F(x)). \qquad (10)$$

Ebből t szerinti differenciálással azonnal adódik a kívánt egenlőség. Ehhez nem is kell a csoport összefüggősége.

Tegyük most fel, hogy létezik olyan F diffeomorfizmus, amellyel teljesül az állításbeli egyenlőség. Ha az $x : \mathbb{R} \to M$ függvényre $\dot{x} = Z_a(x)$ teljesül, akkor $F(x)^{\cdot} = \mathrm{D}F(x)\dot{x} = \mathrm{D}F(x)Z_a(X) = Z'_a(F(x))$. Minthogy az

$$(x : \mathbb{R} \to M)? \qquad \dot{x} = Z_a(x), \quad x(0) = x_0$$

kezdeti-érték probléma megoldása $t \mapsto D_{\exp(ta)}(x_0)$, a mondottak szerint $t \mapsto F(D_{\exp(ta)}(x_0))$ az

$$(x' : \mathbb{R} \to M')? \qquad \dot{x}' = Z_a(x'), \quad x'(0) = F(x_0)$$

kezdeti-érték probléma megoldása, amely más részről $t \mapsto D'_{\exp(ta)}(F(x_0))$; a megoldások egyértelműsége miatt (10) teljesül. Minthogy az összefüggő Lie-csoport minden eleme egyparaméteres részcsoportokból vett elemek szorzata, (6.2.2) $\exp(ta)$ helyett minden csoportelemre is igaz. □

Megjegyzendő, elég ha az állításban szereplő egyenlőség a Lie-algebra egy bázisának elemeire teljesül.

7. Szimplektikus ábrázolások

7.1. Általános fogalmak

Egy sokaságon megadhatunk – bizonyos fizikai követelmények miatt – valamely egyéb struktúrát is, és az ábrázolásoktól elvárjuk, hogy ezt a struktúrát is tartsa meg. Speciális esetként most a szimplektikus sokaságokat tekintjük. Róluk rövid áttekitést adunk.

A G Lie-csoportnak az (M, ω) szimplektikus sokaságon megvalósított (D, ω) szimplektikus ábrázolása olyan D differenciálható ábrázolása, amelyre $D_g^*\omega = \pm\omega$ teljesül.

A továbbiakban mindig feltesszük, hogy G *összefüggő* és M *egyszeresen összefüggő*. Az első feltételből az következik, hogy $D_g^*\omega = \omega$, a második feltételből pedig az, hogy minden zárt differenciál-forma egzakt, vagyis egy másik differenciál-formának a külső deriváltja (Poincaré-lemma).

Ha ω-ról „elfeledkezünk", akkor differenciálható ábrázolás áll elő, ezért az ezekre megismert fogalmakat alkalmazhatjuk itt is: tranzitiváts, pálya, stb. Egy lényeges különbség van, persze: az (M, ω') és (M', ω') szimplektikus sokaságon megvalósított D és D' ábrázolás akkor ekvivales, ha létezik $F : M \to M'$ szimplektikus vagy antiszimmetrikus diffeomorfimzus úgy, hogy $F \circ D_g = D'_g \circ F$ minden g-re; ez az egyenlőség azt jelenti, hogy D és D' mint differenciálható ábrázolások ekvivalensek, de itt F-re még $F^*\omega' = \pm\omega$ is kell, hogy teljesüljön.

7.2. A valós számok additív csoportjának ábrázolása

Legyen $t \mapsto E_t$ az $\mathbb{R}$ szimplektikus ábrázolása, azaz differenciálható ábrázolás, amnelyre $E_t^*\omega = \omega$ teljesül minden t esetén.

Kifejtve:

$$\omega(E_t(x))(\mathrm{D}E_t(x)\mathbf{x}, \mathrm{D}E_t(x)\boldsymbol{y}) = \pm\omega(x)(\mathbf{x}, \boldsymbol{y})$$

minden $x \in M$, $\mathbf{x}, \boldsymbol{y} \in T_x(M)$ esetén, és $\mathrm{D}E_t$ az E_t deriváltja. Koordinátákban

$$\omega(E_t(\cdot))_{jl}\partial_i E_t^j \partial_k E_t^l = \pm\omega_{ik}.$$

Vegyük ennek az egyenlőségnek a t szerinti differenciálhányadosát a $t = 0$ helyen. Emlékezzünk, hogy

$$\frac{d}{dt}E_t^j|_{t=0} = Z^j$$

(infinitezimális generátor), továbbá vegyük figyelembe, hogy $E_0(x) = x$, és így $\partial_i E_0^j = \delta_i^j$; eredményül azt kapjuk, hogy

$$\partial_m\omega_{jl}Z^m\delta_i^j\delta_k^l + \omega_{jl}\partial_i Z^j\delta_k^l + \omega_{jl}\delta_i^j\partial_k Z^l =$$
$$= \partial_m\omega_{ik}Z^m + \omega_{jk}\partial_i Z^j + \omega_{il}\partial_k Z^l = 0,$$

amely megfelelően átindexezve és figyelembe véve ω zártságát így fest:

$$\partial_i\omega_{mk}Z^m + \partial_k\omega_{im}Z^m + \omega_{mk}\partial_i Z^m + \omega_{im}\partial_k Z^m = \partial_i(\omega_{mk}Z^m) - \partial_k(\omega_{mi}Z^m) = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy az $\omega_{mk}Z^m$ egy-formának a külső deriváltja nulla. Tehát (feltettük, hogy a sokaság egyszeresen összefüggő) van egy differenciálható függvény, amellyel $\partial_k f = \omega_{mk}Z^m$.

Összefoglalva, koordinátamentesen:

Állítás. *Ha Z az $\mathbb{R}$ szimplektikus ábrázolásának infinitezimális generátora, akkor $d\omega(Z,\cdot)\ [= dj_\omega(Z)]\ = 0$, ezért létezik egy f differenciálható függvény úgy, hogy $\omega(Z,\cdot)\ [= j_\omega(Z)]\ = df$.*

Még egy fogalmat, a Z szerinti L_Z Lie-deriváltat behozva eredményünk így is megfogalmazható: ha $t \mapsto E_t$ a valós számok additív csoportjának differenciálható ábrázolása, Z ennek az infinitezimális generátora, és $E_t^*\omega = \omega$, akkor $L_Z\omega = 0$. A fordítottját is be lehet bizonyítani (nem lesz rá szükségünk): ha $L_Z\omega = 0$, akkor $E_t^*\omega = \omega$.

7.3. Lie-csoportok ábrázolásai

A Lie-csoport Lie-algebrájának minden a eleméhez létezik a Z_a infinitezimális generátor (lásd a 6.2.2 állítást). Az 7.2 állítás szerint pedig egy $H_a : M \to \mathbb{R}$ úgynevezet **generátorfüggvény**, amellyel

$$\omega(Z_a,\cdot) = dH_a.$$

Nyilván, H_a csak egy konstans erejéig van meghatározva. Ezt felhasználhatjuk arra, hogy az $a \mapsto H_a$ leképezést lineárisnak válasszuk. Valóban, ha $a_1, \ldots, a_n$ a Lie-elgebra egy bázisa, akkor H_{a_k}-t tetszőlegesen véve, a $\sum_k \alpha_k a_k$-hoz rendeljük $\sum_k \alpha_k H_{a_k}$-t. Végül is tehát

$$H_{\alpha a+\beta b} = \alpha H_a + \beta H_b.$$

Minthogy a Melléklet (13) egyenlősége és a 6.2.2 állítás szerint

$$dH_{[a,b]} = \omega(Z_{[a,b]},\cdot) = -\omega([Z_a, Z_b],\cdot) = d\{H_a, H_b\}$$

teljesül, az igaz, hogy

$$H_{[a,b]} = \{H_a, H_b\} + \kappa(a,b),$$

ahol $\kappa(a,b)$ egyértelműen meghatározott valós szám. Nyilvánvaló, hogy $(a,b) \mapsto \kappa(a,b)$ kommutátor-kociklus.

Ha H_a helyett a $\hat{H}_a := H_a + \eta(a)$ függvényt vesszük, ahol $\eta(a)$ konstans, akkor

$$\begin{aligned}\{\hat{H}_a, \hat{H}_b\} + \widehat{\kappa}(a,b) = \hat{H}_{[a,b]} = H_{[a,b]} + \eta([a,b]) = \{H_a, H_b\} + \kappa(a,b) + \eta([a,b]) = \\ = \{\hat{H}_a, \hat{H}_b\} + \kappa(a,b) + \eta([a,b]),\end{aligned}$$

tehát $\widehat{\kappa}$ és κ kohomológ.

Ez ezt jelenti, hogy a generátorfüggvények megválasztásának szabadságát a kohomológia-osztályok korlátozzák.

Az 6.2.2 állítás és a Melléklet 8.1 állítása alapján nyilvánvalóan igaz:

Állítás. *Legyen a G Lie-csoport D és D' szimplektikus ábrázolása (M,ω)-n, illetve (M',ω')-n. Ezek az ábrázolások akkor és csak akkor ekvivalensek, ha létezik $F : M \to M'$ diffemorfizmus, $F^*\omega' = \pm\omega$ és egy $\eta : \mathrm{La}(G) \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés úgy, hogy minden $a \in \mathrm{La}(G)$ esetén*

$$H_a = H'_a + \eta(a) \qquad \text{ha} \quad F^*\omega = \omega',$$

$$H'_a = -H'_a + \eta(a) \qquad \text{ha} \quad F^*\omega = -\omega'.$$

Következésképpen az ábrázolásokhoz tartozó κ' és κ, illetve κ' és $-\kappa$ kohomológok.

Megjegyzendő, elég ha az állításban szereplő egyenlőségek a Lie-algebra egy bázisának elemeire teljesülnek.

MELLÉKLET

8. Szimplektikus sokaságok

8.1. Alapismeretek

Egy szimplektikus sokaság egy (M,ω) pár, ahol M diferenciálható sokaság, és ω egy olyan zárt két-forma M-en, amelynek a magja nulla.

Ez azt jelenti, hogy minden $x \in M$ esetén $\omega(x) : T_x(M) \times T_x(M) \to \mathbb{R}$ nem elfajuló antiszimetrikus bilineáris leképzés, az $x \to \omega(x)$ hozzárendelés differenciálható, és a külső deriváltja (antiszimmetrikus deriváltja) nulla.

Fontos: páratlan dimenziós vektortéren nem létezik nem elfajuló antiszimmetrikus bilináris lekpezés, ezért szimplektikus sokaság mindig páros dimenziós.

A koordinátás alakokat is megadjuk, mert azok könnyen kezelhetők, és nem kell tudni a sokaságok elméletének – egyébként fontos – általános formuláit. Az indexek 1-től a sokaság dimenziójáig futnak, az azonos (fent és lent levő) indexekre automatikusan összegezni kell.

Két-forma (antiszimmetrikus):

$$\omega \ \sim \ \omega_{ik} = -\omega_{ki}.$$

Zártság (külső dervált):

$$d\omega = 0 \ \sim \ \partial_j \omega_{ik} + \partial_i \omega_{kj} + \partial_k \omega_{ji} = 0,$$

Magja nulla (nem elfajuló):

$$X \mapsto \omega(X, \cdot) =: j_\omega(X) \ \sim X^i \mapsto \omega_{ik} X^i$$

lineáris bijekció a vektormezőkről a kovektormezőkre (egy-formákra).

Ezzel definiálható egy ω^{-1}-gyel jelölt antiszimmetrikus, bilineáris forma a kovektormezőkön:

$$\omega^{-1}(\Phi, \Psi) := \omega\big(j_\omega^{-1}(\Phi), j_\omega^{-1}(\Psi)\big),$$

$$\omega^{-1} \ \sim \ \omega^{ik}, \qquad \omega_{ik}\omega^{kl} = \delta_i^l.$$

Következésképpen igaz a később sokat használt formula egy $f : M \to \mathbb{R}$ függvényre:

$$j_\omega^{-1}(df) \ \sim \ \omega^{ik}\partial_i f.$$

Továbbá az $\omega_{ik}\omega^{kl} = \delta_i^l$ differenciálásából

$$(\partial_j \omega_{ik})\omega^{kl} + \omega_{ik}\partial_j \omega^{kl} = 0,$$

amelyet beszorozva $\omega^{nj}\omega^{mi}$-vel, majd az indexexeket ciklikusan permutálva és felhasználva ω zártságát azt kapjuk, hogy

$$\omega^{nj}\partial_j \omega^{ml} + \omega^{mj}\partial_j \omega^{ln} + \omega^{lj}\partial_j \omega^{nm} = 0. \tag{11}$$

Végül egy fontos fogalom: legyen (M, ω) és (M', ω') szimplektikus sokaság. Azt mondjuk, hogy egy $F : M \to M'$ differenciálható leképezés **szimplektikus**, illetve **antiszimplektikus**, ha $F^*\omega' = \omega$, illetve $F^*\omega' = -\omega$. Kifejtve:

$$\omega'(F(x))(\mathrm{D}F(x)\mathbf{x}, \mathrm{D}F(x)\boldsymbol{y}) = \pm\omega(x)(\mathbf{x}, \boldsymbol{y})$$

minden $x \in M$, $\mathbf{x}, \boldsymbol{y} \in T_x(M)$ esetén, és $\mathrm{D}F$ az F deriváltja. Koordinátákban

$$\omega'(F(\cdot))_{jl}\partial_i F^j \partial_k F^l = \pm\omega_{ik}.$$

A következő állítást nem bizonyítjuk be, mert korodinátákban meglehetősen körülményes, a sokaságok elméletének idevágó formuláit pedig ugyancsak hosszadalmas volna tárgyalni.

Állítás. *Legyen (M, ω) és (M', ω') szimplektikus sokaság és $F : M \to M'$ szimplektikus, illetve antiszimplektikus diffomorfizmus, azaz $F^*\omega' = \pm\omega$. Ha $f : M \to \mathbb{R}$ és $f' : M' \to \mathbb{R}$ differenciálható függvények, $X := j_\omega(df)$ és $X' := j_{\omega'}(df')$, akkor*

$$DF \circ X = X' \circ F \quad \textit{akkor és csak akkor, ha} \quad d(f' \circ F) = \pm df.$$

8.2. Példák

A legegyszerűbb szimplektikus sokaság: legyen V vektortér, és a sokaság $V \times V^*$. Ekkor minden pontban az érintőtér $V \times V^*$, és a szimplektikus forma minden pontban ugyanaz az

$$\omega : (V \times V^*) \times (V \times V^*) \to \mathbb{R}, \quad \big((\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}), (\boldsymbol{q}', \boldsymbol{p}')\big) \to (\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{q}') - (\boldsymbol{p}' \mid \boldsymbol{q})$$

leképezés. Lévén konstans, a külső deriváltja nulla, és a következő formula szembeötlően mutatja, hogy nem elfajuló.

Ezt a **kanonikus** szimplektikus formát jól kezelhetően blokk-mátrix alakban adhatjuk meg:

$$\omega = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \omega^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

ahol $\mathbf{1}$ jelöli mind a V, mind a V^* identitását. Koordinátás alakja ugyanilyen mátrixszal reprezentálható, csak ott $\mathbf{1}$ a $\dim(V) \times \dim(V)$-s egységmátrixot jelöli.

A másik, szintén elég egyszerű, és fontos példa: legyen adott $s > 0$ esetére a sokaság az s sugarú gömbhéj $\mathbb{R}^3$-ban, $S_s := \{\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{s}| = s\}$. Az $\boldsymbol{s}$ pontban az érintőtér az $\boldsymbol{s}$-re merőleges sík, $T_{\boldsymbol{n}}(S_s) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{s} \cdot \mathbf{x} = 0\}$. A szimplektikus forma

$$\omega_s(\boldsymbol{s})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \frac{1}{s^2}(\boldsymbol{sxy}) \qquad (\boldsymbol{s} \in S_s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in T_{\boldsymbol{s}}(S_s)),$$

ahol az egyenlőség jobb oldalán a zárójelben álló mennyiség a vektorok hármasszorzata. Az $\frac{1}{s^2}$ szorzó későbbi alkalmazások kedvéért szerepel. Mivel ez kétforma egy két dimenziós sokaságon, a külső deriváltja nulla (három-forma itt csak a nulla lehet), és nem elfajuló, mert ha adott $\boldsymbol{s}$ esetén $\omega_s(\boldsymbol{s})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ minden $\boldsymbol{x}$-re, akkor $\boldsymbol{y} = 0$; ezt úgy láthatjuk be, hogy van olyan $\boldsymbol{x}$, amelyre $\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ (vektoriális szorzat).

A gömbhéj szokásos (ϑ, φ) koordinátáiban ez a szimplektikus forma egyetlen függvénnyel reprezentálható, hiszen $\omega_{11} = \omega_{22} = 0$ és $-\omega_{21} = \omega_{12}$.

Az

$$\boldsymbol{s} = s(\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$$

pontban a koordinátavonalak érintői a ϑ szerinti, illetve a φ szerinti parciális deriváltak,

$$\mathbf{x}_1 = s(\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta), \qquad \mathbf{x}_2 = s(-\sin\vartheta\sin\varphi, qsin\vartheta\cos\varphi, 0),$$

és így $\omega_{12}(\vartheta, \varphi) = s\sin\vartheta$.

Ennek megfelelően $\omega^{12}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{s\sin\vartheta}$.

Ez a példa bármely három dimenziós, irányított euklideszi vektortérre általánosítható.

8.3. Poisson-zárójel

Az $f : M \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény deriváltja kovektormező (egy-forma):

$$df \ \sim \ \partial_i f.$$

Az $f, g : M \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényeknek a **Poisson-zárójele**

$$\{f, g\} := \omega^{-1}(df, dg) \ \sim \ \omega^{ik}\partial_i f \partial_k g.$$

(11) és ω zártságának felhasználásával elég egyszerűen bebizonyítható, hogy ([,] a vektormezők kommutátora)

$$j_\omega^{-1}(d\{f,g\}) = -\left[j_\omega^{-1}(df), j_\omega^{-1}(dg)\right] \sim \\ \omega^{ml}\partial_m(\omega^{ik}\partial_i f\partial_k g) = \omega^{ik}\partial_i f\partial_k(\omega^{ml}\partial_m g - \omega^{ki}\partial_k g\partial_i(\omega^{ml}\partial_m f. \quad (12)$$

Ez az egyenlőség, az $X := j_\omega^{-1}(df)$ és $Y := j_\omega^{-1}(dg)$ jelöléssel átírva

$$d\{f,g\} = -j_\omega([X,Y]) = -\omega([X,Y],\cdot) \quad (13)$$

áttekinthetőbb alakot ölt.

Világos, hogy a Poisson-zárójel bilineáris és antiszimmetrikus, és (12) alapján kissé hosszadalmas számításokkal (a sokaságok elméletének egyéb ismert, de itt nem ismertetett fogalmaival sokkal egyszerűbben) bebizonyítható, hogy teljesíti a Jacobi-azonosságot:

$$\{\{f,g\},h\} + \{\{h,f\},g\} + \{\{g,h\},f\} = 0.$$

A kanonikus szimlektikus forma esetén, a változót $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$-vel jelölve, $df = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}}, \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}}\right)$, és

$$\{f,g\} = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}}, \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}}\right)\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{q}} \\ \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{p}}\end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}}\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{p}} - \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}}\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{q}},$$

ami jól ismert a klasszikus mechanika Hamilton-formalizmusából.