DISZTRIBÚCIÓK

1. Konvergencia és folytonosság

1.1.

Emlékeztetünk, hogy egy $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ folytonos függvény tartója, $\operatorname{Supp}\varphi$ a

$$\{x \in \mathbb{R}^N \mid \varphi(x) \neq 0\}$$

halmaz lezártja.

Definíció. *Jelölje $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ az $\mathbb{R}^N$-en értelmezett $\mathbb{K}$ értékű kompakt tartójú végtelenszer differenciálható függvények halmazát, azaz*

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \mid \operatorname{Supp}\varphi \ \textit{kompakt}\}.$$

Könnyen belátható, hogy ez lineáris altér $C^\infty(\mathbb{R}^N)$-ben. Valóban, ha φ és ψ ilyen függvények, $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor $\alpha\varphi$ is kompakt tartójú végtelenszer differenciálható , valamint $\operatorname{Supp}(\varphi+\psi) \subset \operatorname{Supp}\varphi \bigcup \operatorname{Supp}\psi$ miatt $\varphi+\psi$ tartója korlátos zárt halmaz, azaz kompakt, tehát az összeg is benne van $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-ben. A fenti tartalmazásnál általában egyenlőség nem írható. Előfordulhat ugyanis, hogy valamely $U \subset \operatorname{Supp}\varphi \bigcup \operatorname{Supp}\psi$ nyílt halmazon az összeg éppen nullát ad ($\varphi+\psi = 0$ U-n), s így $U \not\subset \operatorname{Supp}(\varphi+\psi)$.

A $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ halmaz nem üres. Az $N = 1$ esetben tudjuk, hogy az

$$\eta(t) := \begin{cases} e^{-1/t}, & \text{ha } t > 0; \\ 0, & \text{ha } t \leq 0 \end{cases}$$

függvény a 0 pontban jobbról és balról is végtelenszer differenciálható és itt mindegyik differenciálhányadosa 0. Ezért $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ és $\operatorname{Supp}\eta = \mathbb{R}_0^+$. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad t \mapsto \eta(a+t)\eta(a-t) = \eta(a^2 - t^2$. Ekkor $\operatorname{Supp}\varphi = [-a, a]$, ezért $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Tetszőleges N pozitív egészre, valamint $0 \leq r \leq R$ valós számokra definiáljuk az

$$\eta_{r,R}(x) := \frac{\eta(R^2 - |x|^2)}{\eta(R^2 - |x|^2) + \eta(|x|^2 - r^2)}$$

függvényt. A nevező sehol sem nulla, és végtelenszer differenciálható függvények összege, hányadosa is végtelenszer differenciálható . Mivel $\operatorname{Supp}\eta_{r,R} = \overline{G_R(0)}$, így $\eta_{r,R} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Vegyük észre, az így definiált $\eta_{r,R}$ a következő tulajdonságú:

$$\eta_{r,R}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } R \leq |x|; \\ 0 \text{ és } 1 \text{ között}, & \text{ha } r \leq |x| \leq R; \\ 1, & \text{ha } |x| \leq r. \end{cases}$$

Állítás. *Legyen K kompakt halmaz, és U nyílt halmaz $\mathbb{R}^N$-ben, mely tartalmazza K-t. Ekkor létezik olyan $\eta_{K,U} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, melyre*

$$\eta_{K,U}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \notin U; \\ 0 \text{ és } 1 \text{ között}, & \text{ha } x \in U \setminus K; \\ 1, & \text{ha } x \in K. \end{cases}$$

Bizonyítás K része a nyílt U halmaznak, ezért a K halmaz minden x pontjához megadható egy $r(x)$ sugarú, x középpontú gömb, amely benne van U-ban. Ha K minden x pontja körül vesszük a $\varrho(x) := r(x)/2$ sugarú gömböket, akkor ez a nyílt halmazrendszer lefedése K-nak. Létezik tehát véges sok x_i $(i = 1 \dots n)$, amelyre $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{\varrho(x_i)}(x_i)$. Legyen a $\xi_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ függvény olyan, hogy

$$\xi_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \notin G_{r(x_i)}(x_i); \\ 0 \text{ és } 1 \text{ között}, & \text{ha } x \in G_{r(x_i)}(x_i) \setminus G_{\varrho(x_i)}(x_i); \\ 1, & \text{ha } x \in G_{\varrho(x_i)}(x_i). \end{cases}$$

Ilyen lehet, például $\xi_i(x) := \eta_{\varrho(x_i),r(x_i)}(x - x_i)$. Legyen továbbá

$$\eta_{K,U} := 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - \xi_i).$$

Mivel $\xi_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, az ilyenek szorzata és összege is $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-beli lesz. Ha most valamely $x \in K$ esetén i olyan, hogy $\gamma_i(x) = 1$, akkor a fenti szorzat nulla, így $\eta_{K,U}(x) = 1$. Mivel minden $x \in K$ esetén van (legalább egy) ilyen i, ezért $\eta_{K,U}$ a K halmazon 1-et vesz fel. Az U halmazon kívül pedig ξ_i nulla (minden i esetén), ezért a fenti kifejezés is nulla. A harmadik esetben pedig nyilvánvalóan 0 és 1 közötti számot kapunk.

1.2.

Az eddigi tanulmányaink során a konvergenciát és a folytonosságot a „közelség” fogalma adta. Ehhez metrika (vektortéren norma) kellett. Véges dimenziós vektortéren minden norma egyenértékű, ezért ezektől függetlenül, konkrét norma megadása nélkül lehetett „közelségről” beszélni. Végtelen dimenzióban (pl. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ esetén) azonban nem hasonlítható össze minden norma. Sőt, végtelenszer differenciálható függvények esetében normával nem tudjuk kifejezni azt a közelségfogalmat, amelyet elvárunk: két függvény akkor van közel egymáshoz, ha bármely deriváltjuk „csak kicsit különbözik egymástól.” Így külön kell definiálnunk a konvergenciát és a folytonosságot.

Vezessük be az N változós **multipolinom** fogalmát; ezek a következő alakú végtelenszer differenciálható függvények: adott egy m természetes szám, és minden $k_1, \dots, k_N \in \mathbb{N}$, $k_1 + \dots + k_N \leq m$ esetén egy $c_{k_1 k_2 \dots k_N} \in \mathbb{C}$, és ezekkel

$$p(x) := \sum_{k_1+\ldots+k_N \leq m} c_{k_1 k_2 \dots\, k_N} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_N^{k_N} \qquad (x \in \mathbb{R}^N).$$

Az ilyen multipolinomot legfeljebb m-edfokúnak mondjuk, és m-ed fokú, ha van olyan $k_1, \dots, k_N$, $k_1 + \dots + k_N = m$, hogy $c_{k_1 k_2 \dots k_N} \neq 0$.

Ha p multipolinom, akkor x_k helyébe az x_k szerinti parciális differenciálást téve $(k = 1, \dots, N)$ kapjuk a $p(\mathrm{D})$-fel jelölt **multipolinomiális differenciálást**.

Definíció. *Azt mondjuk, hogy a* $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ *(*$n \in \mathbb{N}$*) sorozat* ***$\mathcal{D}$-értelemben*** *a* 0*-hoz tart (és úgy jelöljük, hogy* $(\mathcal{D})\lim_n \varphi_n = 0$*), ha*

(i) létezik egy K *kompakt halmaz, melyre minden* n *esetén* $\operatorname{Supp}\varphi_n \subset K$*,*

(ii) minden p *multipolinom esetén a* $p(\mathrm{D})\varphi_n$ *függvénysorozat egyenletesen konvergál a 0-hoz.*

Megjegyzés Azt mondjuk, hogy a $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat **$\mathcal{D}$-határértéke** $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ (röviden $(\mathcal{D})\lim_n \varphi_n = \psi$), ha $(\mathcal{D})\lim_n(\varphi_n - \psi) = 0$. Ez a definíció jó, azaz $(\mathcal{D})\lim_n \varphi_n$ egyértelmű. Ha ugyanis φ és ψ ugyanannak a φ_n sorozatnak a $\mathcal{D}$-határértéke, akkor a $p = 1$ multipolinomot véve az egyenletes konvergencia egyértelműségéből az következik, hogy $\varphi = \psi$.

Definíció. *(i) Az* $F\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ *lineáris leképezés* ***$\mathcal{D}$-folytonos*** *(vagy röviden* ***folytonos****), ha minden* $\mathcal{D}$*-értelemben* 0*-hoz tartó* φ_n *sorozat esetén*
$(\mathcal{D})\lim_n F\varphi_n = 0.$

(ii) A $T\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{K}$ *lineáris leképezés* ***$\mathcal{D}$-folytonos*** *(röviden:* ***folytonos****), ha minden* $\mathcal{D}$*-értelemben* 0*-hoz tartó* φ_n *sorozatra* $\lim_n T\varphi_n = 0.$

Megjegyzés Ha A folytonos és a φ_n sorozat $\mathcal{D}$-értelemben φ-hez tart, akkor A linearitása miatt $A\varphi_n$ $\mathcal{D}$-értelemben tart $A\varphi$-hez.

Definíció. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ ***duálisának*** *nevezzük az előbbi definíció (ii) pontjának megfelelő függvények halmazát:*

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^* := \{T\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{K} \mid T \text{ folytonos, lineáris}\}.$$

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ *elemeit* ***alapfüggvényeknek****,* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$ *elemeit* ***disztribúcióknak*** *nevezzük.*

A T disztribúciónak a φ alapfüggvényen felvett értékét a $(T \mid \varphi)$ szimbólummal jelöljük.

1.3.

Emlékeztetőül, az $\mathbb{R}^N$ (korlátos) Borel-halmazain adott $\mathbb{K}$ értékű m mérték Radon-mérték, ha variációja Borel-mérték, azaz minden kompakt halmaz $|m|$-mértéke véges. Az alapfüggvények kompakt tartójúak, korlátosak és mérhetők (a mérhetőség a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$–$\mathcal{B}(\mathbb{K})$-mérhetőséget jelenti, ami következik a folytonosságból), ezért létezik tetszőleges Radon-mérték szerinti integráljuk. Nyilvánvaló továbbá, hogy az

$$F_m\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{K}, \quad \varphi \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi dm$$

leképezés lineáris. Folytonos is, azaz F_m disztribúció, ami azon múlik, hogy ha veszünk egy $\mathcal{D}$-értelemben 0-hoz tartó φ_n sorozatot, akkor az intergál és a limesz felcserélhető a $\lim_n (F_m \mid \varphi_n)$ kifejezésben. Ez a Lebesgue-tétel szerint megtehető, mert létezik egy $|m|$-integrálható függvény, amely majorálja a sorozat elemeinek abszolút értékét. Ugyanis az egyenletes konvergencia miatt (a

$\mathcal{D}$-konvergencia definíciójában válasszuk a $p = 1$ multipolinomot!) tetszőleges $C > 0$ korlát esetén létezik egy n_C küszöbindex úgy, hogy minden ennél nagyobb n-re $|\varphi_n| \leq C\chi_K$, ahol K egy olyan kompakt halmaz, amely tartalmazza a $\mathcal{D}$-konvergens sorozat elemeinek tartóit.

Definíció. *F_m-et az m-hez rendelt disztribúciónak nevezzük.*

Állítás. *A $\{\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{K}$ Radon-mértékek$\} \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$, $m \mapsto F_m$ leképezés lineáris injekció.*

Bizonyítás A linearitás az integrálásnak a mérték szerinti linearitásából adódik. Az injektivitás megállapításához azt kell megmutatni, hogy ha $F_m = 0$, akkor $m = 0$. Ehhez elegendő belátni, hogy $m(K) = 0$ minden K kompakt halmazra. Legyen tehát $K \subset \mathbb{R}^N$ tetszőleges kompakt halmaz, s azt kell belátni, hogy χ_K-nak az m szerinti integrálja nulla. Közelítsük meg χ_K-t $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-beli függvényekkel! Legyen U_n $(n \in \mathbb{N})$ korlátos, nyílt halmazok K-ra húzódó sorozata, azaz $K \subset \ldots \subset U_{n+1} \subset U_n \subset \ldots \subset U_1$ és $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = K$. Mivel

$$0 = (F_m \mid \eta_{K,U_n}) = \int_{\mathbb{R}^N} \eta_{K,U_n} dm,$$

és az η_{K,U_n} sorozat monoton csökkenve pontonként tart χ_K-hez, ezért χ_{U_1} a χ_{U_n} integrálható majoránsa, tehát a Lebesgue-tétel szerint χ_K-nak az m szerinti integrálja nulla, azaz $m(K) = 0$.

1.4.

Legyen most $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ lokálisan Lebesgue-integrálható függvény, azaz minden kompakt halmazon integrálható . Ekkor $f\lambda$ Radon-mérték, mert variációja $|f\lambda| = |f|\lambda$. Ezért $R_f := F_{f\lambda}$ szintén disztribúció.

Definíció. *R_f-et az f-hez rendelt **reguláris** disztribúciónak nevezzük.*

Állítás. *Legyen f és g lokálisan integrálható . $R_f = R_g$ pontosan akkor, ha $f = g$ λ-majdnem mindenütt.*

Bizonyítás $R_f = R_g$ (azaz $F_{f\lambda} = F_{g\lambda}$) az előző állításban szereplő leképezés injektivitása miatt egyenértékű azzal, hogy $f\lambda = g\lambda$. Ez pedig pontosan akkor áll fenn, ha $f = g$ λ-majdnem mindenütt.

1.5.

Az iménti állítások eredményeként a Radon-mértékeket és a lokálisan integrálható függvényeket beágyaztuk a disztribúciók halmazába. Ez a beágyazás annyira „természetes”, hogy a továbbiakban időnként $(F_m \mid \varphi)$ helyett $(m \mid \varphi)$-t, $(R_f \mid \varphi)$ helyett pedig egyszerűen $(f \mid \varphi)$-t írunk.

2. Disztribúciók leszűkítése és kiterjesztése

2.1.

Legyen $U \subset \mathbb{R}^N$ nyílt halmaz. Ekkor

$$\mathcal{D}(U) := \left\{ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \;\middle|\; \operatorname{Supp}\varphi \subset U \right\}$$

a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ zárt lineáris altere.

Egy T disztribúciónak a $\mathcal{D}(U)$-ra vett leszűkítését a $T\big\|_U$ szimbólummal jelöljük. Világos, hogy $T\big\|_U \in \mathcal{D}(U)^*$. Megemlítjük, hogy itt is érvényes, amit korábban mint a Hahn–Banach-tétel egy következményét ismertünk meg: a $\mathcal{D}(U)$-n adott folytonos lineáris funkcionálnak van folytonos lineáris kiterjesztése $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-re.

Speciálisan sokat használjuk azt, hogy $T\big\|_U = 0$, ami tehát azt jelenti, hogy $(T \mid \varphi) = 0$ minden olyan φ alapfüggvény esetén, amelynek tartója U-ban van. Nyilvánvaló, hogy ha U és V nyílt, $V \subset U$ és $T\big\|_U = 0$, akkor $T\big\|_V = 0$.

Állítás. *Legyen T disztribúció és $U \subset \mathbb{R}^N$ nyílt halmaz. $T\big\|_U = 0$ pontosan akkor, ha minden $x \in U$ esetén létezik x-nek olyan $G(x) \subset U$ nyílt környezete, amelyen T nulla.*

Bizonyítás Az első irány nyilvánvalóan teljesül, mert ha $T\big\|_U = 0$, akkor T-nek az U tetszőleges nyílt részhalmazára vett leszűkítése is 0. Legyen $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ olyan, amelynek K tartója U-ban van. A 1.1 pontban definiált $\eta_{K,U}$ 1-et vesz fel K-n, amely φ tartója, tehát fennáll a

$$\varphi = \varphi\left(1 - \prod_{i=1}^{n}(1-\xi_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi\xi_i - \sum_{i,j} \varphi\xi_i\xi_j + \ldots$$

összefüggés. $\operatorname{Supp}\xi_i \subset G_{r(x_i)}(x_i) \subset U$, így $\varphi\xi_i,\ \varphi\xi_i\xi_j,\ \ldots$ tartója is U-ban van. Kihasználva T linearitását kapjuk, hogy

$$(T \mid \varphi) = \sum_i (T \mid \varphi\xi_i) + \sum_{i,j} (T \mid \varphi\xi_i\xi_j) + \ldots = 0.$$

Következmény. *Legyen U_i $(i \in I)$ nyílt halmazrendszer $\mathbb{R}^N$-ben, és a T disztribúció olyan, hogy minden $i \in I$ esetén $T\big\|_{U_i} = 0$. Ekkor $T\big\|_{\bigcup_{i\in I} U_i} = 0$.*

Definíció. *A T disztribúció **tartója** a következő halmaz:*

$$\operatorname{Supp} T := \left\{\, x \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; \text{minden } U \subset \mathbb{R}^N \text{ nyílt, } x \in U\colon\; T\big\|_U \neq 0 \,\right\}.$$

Állítás.

$$\begin{aligned}(\operatorname{Supp} T)^{\complement} = \left\{\, x \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; \textit{létezik } U \subset \mathbb{R}^N \textit{ nyílt}\,:\; x \in U,\ T\big\|_U = 0 \,\right\} = \\ = \bigcup \left\{\, U \textit{ nyílt} \;\middle|\; T\big\|_U = 0 \,\right\}.\end{aligned}$$

Bizonyítás Teljesen triviális, mert az első egyenlőség a tartó definíciójának tagadása, a második pedig az előző tételből nyilvánvalóan adódik.

Következmény. *Disztribúció a tartója komplementerére leszűkítve nulla.*

Állítás. *Ha a φ alapfüggvény és a T disztribúció tartója diszjunkt, akkor* $(T \mid \varphi) = 0$.

Bizonyítás Mivel $\operatorname{Supp}\varphi \subset (\operatorname{Supp} T)^{\complement}$, az előző két állításból adódik.

Állítás. *Legyen α nemnulla szám, T és S disztribúciók. Ekkor*

(i) $\operatorname{Supp}(\alpha T) = \operatorname{Supp} T$, *és*

(ii) $\operatorname{Supp}(T + S) \subset \operatorname{Supp} T \cup \operatorname{Supp} S$.

Bizonyítás Az első állítás teljesen nyilvánvaló. A másodikhoz elegendő belátni, hogy

$$(\operatorname{Supp} S)^{\circ} \cap (\operatorname{Supp} T)^{\circ} \subset (\operatorname{Supp}(T+S))^{\circ}.$$

Legyen $x \in (\operatorname{Supp} S)^{\circ} \cap (\operatorname{Supp} T)^{\circ}$. Ekkor létezik $U \subset \mathbb{R}^N$ nyílt halmaz úgy, hogy $x \in U$ és $T\|_U = 0$, $S\|_U = 0$. Innen adódik, hogy $(T+S)\|_U = 0$, amit bizonyítani akartunk.

Következmény. *A kompakt tartójú disztribúciók lineáris alteret alkotnak.*

2.2.

Legyen a T disztribúció és a φ végtelenszer differenciálható függvény tartójának metszete kompakt. Legyen továbbá U korlátos nyílt halmaz, mely tartalmazza a tartók metszetét. Ekkor $\overline{U}$ kompakt, és így létezik olyan ξ alapfüggvény, amely $\overline{U}$-n 1-et vesz fel. Ezzel definiálhatjuk T hatását a φ függvényre a következőképpen:

Definíció. *Legyen a T disztribúció és a φ végtelenszer differenciálható függvény tartójának metszete kompakt és ξ a fentieknek megfelelő. Ekkor*

$$(T \mid \varphi) := (T \mid \xi\varphi)\,.$$

Állítás. *A definíció jó, azaz U és ξ választásától független.*

Bizonyítás Először is a definíció értelmes, mert $\xi\varphi$ kompakt tartójú. Legyen a feltételeknek megfelelő U' és ξ' is. Ekkor

$$(T \mid \xi\varphi) - (T \mid \xi'\varphi) = (T \mid \varphi(\xi - \xi')) = 0,$$

hiszen $\xi - \xi'$ nulla a $\operatorname{Supp} T \cap \operatorname{Supp} \varphi$ halmazon.

2.3.

A fentiek szerint egy kompakt tartójú disztribúció egyértelműen kiterjeszthető $C^\infty(\mathbb{R}^N)$-re. Ez a kiterjesztés folytonos lineáris funkcionál $C^\infty(\mathbb{R}^N)$-en, ha ott a konvergenciát a következőképpen értelmezzük.

Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\varphi_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat **$\mathcal{E}$-értelemben** a 0-hoz tart (vagyis $(\mathcal{E})\lim_n \varphi_n = 0$), ha tetszőleges p multipolinom esetén a $p(\mathrm{D})\varphi_n$ függvénysorozat $\mathbb{R}^N$ minden kompakt részhalmazán egyenletesen konvergál a 0-hoz (másszóval, $p(\mathrm{D})\varphi_n$ lokálisan egyenletesen konvergál a nullához). A φ_n sorozat **$\mathcal{E}$-határértéke** φ, ha $(\mathcal{E})\lim_n(\varphi_n - \varphi) = 0$.*

Ezzel a konvergenciával ellátott $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ vektorteret $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$-nel, folytonos lineáris funkcionáljait $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)^*$-gal jelöljük, s hasonlóan értelmezzük rajta a tartó fogalmát.

Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, sőt $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ sűrű $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$-ben: ugyanis tetszőleges $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ esetén a $\varphi_n := \psi\eta_{n,n+1} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ sorozat $\mathcal{E}$-értelemben ψ-hez tart.

Továbbá, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-n a konvergenciafogalom erősebb, mint $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$-n: ha $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ $\mathcal{D}$-értelemben a nullához tart, akkor $\mathcal{E}$-értelemben is. Ezért a duálisaikra $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)^* \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$ áll fenn.

A 2.2 pontban beláttuk, hogy minden kompakt tartójú disztribúció $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)^*$-beli. Ennek fordítottja is igaz.

Állítás. *Legyen $T \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)^*$. Ekkor T kompakt tartójú disztribúció.*

Bizonyítás Mivel a tartó definíció szerint zárt, elegendő $\operatorname{Supp} T$ korlátosságát vizsgálni. Tegyük fel, hogy $\operatorname{Supp} T$ nem korlátos. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\operatorname{Supp} T$ nem része a $B_n(0)$ zárt gömbnek, azaz $\operatorname{Supp} T \bigcap B_n(0)^{\circ} \neq \emptyset$. Legyen $\varphi_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ olyan, hogy $\operatorname{Supp} T \bigcap B_n(0)^{\circ} \supset \operatorname{Supp} \varphi_n$ és $(T \mid \varphi_n) \neq 0$. Legyen $\psi_n := \varphi_n / (T \mid \varphi_n)$. Ekkor $(T \mid \psi_n) = 1$ minden n esetén, így $\lim_n (T \mid \psi_n) = 1$.

Legyen most K tetszőleges kompakt halmaz. Ekkor létezik olyan $m \in \mathbb{N}$ szám, hogy $K \subset B_m(0)$. Ennél nagyobb n indexekre ψ_n a K halmazon 0, ezért a ψ_n függvénysorozat K-n egyenletesen 0-hoz tart. Mivel K tetszőleges, ez éppen azt jelenti, hogy $(\mathcal{E}) \lim_n \psi_n = 0$. T folytonos, ezért $\lim_n (T \mid \psi_n) = 0$. Ellentmondásra jutottunk, tehát $\operatorname{Supp} T$ korlátos.

2.4.

Láttuk, hogy $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)^*$ pontosan a kompakt tartójú disztribúciókat tartalmazza, és a 2.2 pontban tetszőleges disztribúciót kiterjesztettünk $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$-nek egy $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-nél bővebb részhalmazára. Felmerül a kérdés, vajon bővíthető-e tovább egy adott disztribúció értelmezési tartománya. A válasz igen.

Definíció. *Legyen T disztribúció, $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$. Ha minden $\mathcal{E}$ értelemben ψ-hez tartó $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ sorozat esetén $(T \mid \varphi_n)$ konvergens, akkor értelmezzük T hatását ψ-n:*

$$(T \mid \psi) := \lim_n (T \mid \varphi_n).$$

A definíció független a φ_n sorozat megválasztásától. Legyen ugyanis φ_n' egy másik közelítő sorozat. Ekkor a $\varphi_1, \varphi_1', \varphi_2, \varphi_2', \ldots$ sorozat is $\mathcal{E}$-értelemben ψ-hez tart, így a feltétel szerint a megfelelő sorozat is konvergens. Emiatt a két határérték megegyezik.

3. Temperált disztribúciók

3.1.

A **gyorsan csökkenő** függvények azok a φ végtelenszer differenciálható függvények, amelyekre tetszőleges, rögzített p és q multipolinom esetén

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |p(x)(q(\mathrm{D})\varphi)(x)| < \infty,$$

azaz $p\, q(\mathrm{D})\varphi$ korlátos.

Jelölje $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ az ilyen függvények halmazát. Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ lineáris altere $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$-nek, és nem üres, mert például $x \mapsto e^{-|x|^2}$ benne van. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ pedig valódi lineáris altere $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$-nek.

A definíciós feltétel egyenértékű azzal, hogy $p\,q(\mathrm{D})\varphi$ a végtelenben a nullához tart. Ugyanis ez egyrészt maga után vonja a korlátosságot, másrészt $m{\in}\mathbb{N}$ esetén $(1{+}|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^2)^m$ multipolinom, amely q-val szorozva szintén multipolinom, következésképpen $(1{+}|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^2)^m qp(D)\varphi$ korlátos, ami csak úgy lehet, hogy $qp(D)\varphi$ a végtelenben nullához tart.

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$-en is bevezetünk egy konvergenciafogalmat:

Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozat **$\mathcal{S}$-értelemben** a 0-hoz tart (és úgy jelöljük, hogy $(\mathcal{S})\lim\limits_{n} \varphi_n = 0$), ha minden p és q multipolinom esetén a $p\,q(\mathrm{D})\varphi_n$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a 0-hoz.*

Állítás. *A $\mathcal{D}$-konvergencia erősebb az $\mathcal{S}$-konvergenciánál, és az $\mathcal{S}$-konvergencia erősebb az $\mathcal{E}$-konvergenciánál; továbbá $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ sűrű $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$-ben, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ sűrű $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$-ben*

Bizonyítás A konvergenciák összehasonlításához vegyünk egy φ_n sorozatot $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-ben, mely $\mathcal{D}$-értelemben tart 0-hoz. Mivel létezik egy kompakt halmaz, amely tartalmazza minden φ_n tartóját, és ezen a kompakt halmazon bármely multipolinom korlátos, látható, hogy φ_n $\mathcal{S}$-értelemben is konvergens a 0-hoz. Hasonlóan egyszerű, hogy egy $\mathcal{S}$-értelemben konvergens sorozat $\mathcal{E}$-értelemben is konvergens.

A 2.3 állítás alapján tudjuk, hogy $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ sűrű $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$-ben, tehát $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ is sűrű $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$-ben (az $\mathcal{E}$-konvergenciát tekintve). Csak azt kell megmutatnunk, hogy $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ sűrű $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$-ben (az $\mathcal{S}$-konvergenciát tekintve).

Legyen $n \in \mathbb{N}$; a $\gamma_n(x) := \eta_{1,2}(\frac{x}{n})$ függvény értéke 1, ha $|x| < n$, és 0, ha $|x| > 2n$, valamint $|\xi_n - 1| \leq 1$. Továbbá $\partial_k\gamma_n(x) = \partial_k\eta_{1,2}(x/n)\frac{1}{n}$, és így $|\partial_k\xi_n| \leq \sup|\partial_k\eta_{1,2}|\frac{1}{n}$.

Ezért, ha $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, a $\varphi_n := \psi\xi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ sorozat $\mathcal{S}$-értelemben ψ-hez tart, mert

$$p\,\partial_k(\psi\xi_n - \psi) = p\,(\partial_k\psi)(\xi_n - 1) + p\,\psi(\partial_k\xi_n).$$

Mivel minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik n_ε úgy, hogy $|p(x)\,(\partial_k\psi)(x)| < \varepsilon$, ha $|x| > n_\varepsilon$, a fenti jobb oldal első tagja kisebb ε-nál minden $n > n_\varepsilon$ esetén, vagyis ez a tag egyenletesen tart a nullához.

Mivel $p\,\psi$ korlátos, a második tag $\frac{1}{n}$ számszorosánál kisebb, ez is egyenletesen tart a nullához.

Definíció. *A gyorsan csökkenő függvények folytonos lineáris funkcionáljait **mérsékelt (temperált) disztribúcióknak** nevezzük:*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^* := \left\{\, T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{K} \;\middle|\; T \text{ lineáris és } \mathcal{S}\text{-folytonos} \right\}.$$

A 3.1 állításban mondottak alapján egy az $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$-n értelmezett $\mathcal{E}$-folytonos lineáris leképezésnek az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$-re való leszűkítése $\mathcal{S}$-folytonos, és az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$-en értelmezett $\mathcal{S}$-folytonos lineáris leképezésnek a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-re való leszűkítése $\mathcal{D}$-folytonos, tehát $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)^* \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^* \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$.

3.2.

Állítás. *Legyen m Radon-mérték, amelyhez létezik olyan k természetes szám, hogy $\dfrac{1}{(1+|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^k)}$ m-integrálható . Ekkor F_m temperált disztribúció.*

Bizonyítás Legyen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Mivel φ gyorsan csökkenő, $\varphi(1 + |\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^k)$ korlátos, egy felső korlátja legyen K. Ekkor $\dfrac{K}{1 + |\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^k}$ $|m|$-integrálható majoránsa φ-nek, ezért F_m kiterjeszthető $\mathcal{S}$-re:

$$(F_m \mid \varphi) := \int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, dm.$$

Következmény. *Ha f lokálisan integrálható , és $f/(1 + |\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^k)$ Lebesgue-integrálható valamely $k \in \mathbb{N}$ esetén, akkor az f-hez tartozó reguláris disztribúció temperált disztribúció.*

Állítás. *Ha $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ $(1 < p \leq \infty)$, akkor az f-hez tartozó reguláris disztribúció mérsékelt.*

Bizonyítás $f/(1+|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^k)$ akkor integrálható , ha $1/(1+|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^k) \in L^q(\mathbb{R}^N)$, ahol $1/p + 1/q = 1$. Ez teljesül, ha $qk \geq N + 1$, mert

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{1 + |\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^k} \right)^q = C \int_{\mathbb{R}^+} \frac{r^{N-1}}{(1 + r^k)^q} \, dr < C \int_{\mathbb{R}^+} \frac{r^{N-1}}{1 + r^{qk}} \, dr,$$

ahol C jelöli az N dimenziós egységgömb felszínét. □

Ezzel $L^p(\mathbb{R}^N)$-et is beágyaztuk $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$-ba.

3.3.

Láttuk, $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)^*$ elemei pontosan a kompakt tartójú disztribúciók, és a fentiekben megismerkedtünk néhány speciális típusú temperált disztribúcióval. Lehet általános jellemzést adni a temperált disztribúciókra is; ezt most bizonyítás nélkül közöljük.

Állítás. *$T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$ pontosan akkor temperált, ha létezik egy $C \in \mathbb{R}^+$ és egy $k \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ és minden k-nál nem nagyobb fokú p multipolinom esetén*

$$(T \mid \varphi) \leq C \sup(1 + |\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^k)|p(\mathrm{D})\varphi|.$$

3.4. Feladat

A lassan növekvő függvények (lásd később, a 5.9 pontban), például a multipolinomok meghatározta reguláris disztribúciók mérsékeltek. Az $x \mapsto e^x \sin e^x$ valós függvény nem lassan növekvő, mégis mérsékelt disztribúciót határoz meg. (Útmutatás: $e^x \sin e^x = -\frac{d}{dx}(\cos e^x)$ miatt parciálisan integrálhatunk.)

4. Disztribúciósorozatok

4.1.

A következőkben bizonyítás nélkül kimondjuk a Banach–Steinhaus-tétel disztribúciókra vonatkozó általánosítását.

Állítás (Banach–Steinhaus-tétel). *Legyen $T_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$ $(n \in \mathbb{N})$ disztribúciósorozat. Ha minden $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-re létezik a $\lim_n (T_n \mid \varphi)$ határérték, akkor a $T\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{K}$, $\varphi \mapsto \lim_n (T_n \mid \varphi)$ leképezés szintén disztribúció, azaz $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$.*

Másként fogalmazva, disztribúciósorozat „függvényenkénti" határértéke is disztribúció, azaz folytonos (triviálisan lineáris). Ezt a tételt jó tudni, azonban mi a következőkben, ha csak lehet, nem hivatkozunk rá, a konkrét esetekben igyekszünk külön-külön megmutatni, hogy az adott disztribúciósorozatok pontonkénti határértéke disztribúció.

Állítás (δ-konvergens sorozatok). *Legyen $\varrho\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_0^+$ Lebesgue-integrálható függvény, melynek integrálja 1. Legyen továbbá $n \in \mathbb{N}$ és $\alpha \in \mathbb{R}^+$ esetén*

$$\varrho_n(x) := n^N \varrho(nx), \qquad \textit{illetve} \quad \varrho_\alpha(x) := \frac{1}{\alpha^N}\varrho\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

Ekkor

$$\lim_n R_{\varrho_n} = F_\delta, \qquad \textit{illetve} \qquad \lim_{\alpha\to 0} R_{\varrho_\alpha} = F_\delta.$$

Bizonyítás A két határérték lényegében egyenértékű, mert az $\alpha := \frac{1}{n}$ helyettesítéssel egymásba átvihetők. Ezért elegendő csupán az első esetet vizsgálni. Az R_{ϱ_n} és a δ disztribúció hatásának a különbsége a φ alapfüggvényre:

$$|(R_{\varrho_n} \mid \varphi) - (\delta \mid \varphi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} \varrho_n \varphi \, d\lambda - \int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, d\delta \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} n^N \varrho(nx)\varphi(x)\, dx - \varphi(0) \right|.$$

Az $y := nx$ integrálási változót bevezetve $dy = n^N dx$, amiből az $\int \varrho = 1$ feltételt kihasználva kapjuk, hogy

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \varrho(y)\varphi\left(\frac{y}{n}\right) dy - \varphi(0) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} \varrho(y) \left[\varphi\left(\frac{y}{n}\right) - \varphi(0)\right] dy \right| \le$$
$$\le \int_{\mathbb{R}^N} \varrho(y) \left| \varphi\left(\frac{y}{n}\right) - \varphi(0) \right| dy.$$

Nyilvánvaló, hogy az integrandus 0-hoz tart, mert $\varphi(y/n)$ határértéke $\varphi(0)$. Tehát csak az a kérdés, hogy a limesz az integrállal felcserélhető-e. φ-ről tudjuk, hogy kompakt tartójú és folytonos. Innen a Weierstrass-tételből adódik, hogy létezik korlátja, amit C-vel jelölünk. Így

$$\varrho(y) \left| \varphi\left(\frac{y}{n}\right) - \varphi(0) \right| \le 2C\varrho(y).$$

A jobb oldalon álló függvény integrálható majoránsa a fenti integrál integrandusának, tehát a Lebesgue-tétel szerint a limesz és az integrál felcserélhető, így a fenti különbség a nullához tart, ahonnan éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

Megjegyzés Íme néhány szokásos példa a Dirac-delta megközelítésére:

(i) $N = 1$ dimenzióban $\varrho := \dfrac{1}{2}\chi_{[-1,1]}$; ekkor $\varrho_n(x) = \frac{n}{2}\chi_{[-1/n,1/n]}$.

(ii) $N = 1$ dimenzióban $\varrho(x) := \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}$; ekkor $\varrho_n(x) = \frac{n}{1+n^2x^2}$, $\varrho_\alpha(x)\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}$.

(iii) $N = 1$ dimenzióban $\varrho(x) := \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$; ekkor $\varrho_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}e^{-x^2/2\alpha}$.

(iv) $N > 1$ dimenzióban ha ϱ az előző három közül valamelyik, akkor $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_N) \mapsto \varrho(x_1)\ldots\varrho(x_N)$ szintén δ-konvergens sorozat.

4.2.

Legyen $f_n\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ lokálisan integrálható függvény. Az f_n függvénysorozat konvergenciája és az R_{f_n} reguláris disztribúciók sorozatának a konvergenciája két különböző fogalom. Vizsgáljuk meg a kétféle konvergencia közötti összefüggést a következő esetekben, ahol adott a lokálisan integrálható függvények f_n sorozata. (i) Az f_n sorozat majdnem mindenütt az f függvényhez tart, és f is lokálisan integrálható , valamint létezik egy g lokálisan integrálható függvény, amely majdnem mindenütt majorálja $|f_n|$-et. Ekkor a megfelelő reguláris disztribúciósorozat is konvergens, és határértéke éppen az f függvényhez tartozó reguláris disztribúció azaz $\lim\limits_n R_{f_n} = R_{\lim\limits_n f_n}$.

Ugyanis tetszőleges φ alapfüggvény esetén

$$\lim_n \left(R_{f_n} \mid \varphi\right) = \lim_n \int_{\mathbb{R}^N} f_n\varphi.$$

Ugyanakkor $|f_n\varphi| \le g|\varphi|$ és $\lim\limits_n f_n\varphi = f\varphi$ majdnem mindenütt. Így a Lebesgue-tétel szerint

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}^N} f_n\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \lim_n f_n\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} f\varphi.$$

(ii) Létezik az f_n függvénysorozat majdnem mindenütti f határértéke, amely lokálisan integrálható , továbbá a megfelelő disztribúciósorozat is konvergens, ám a határértéke mégsem egyenlő az f-hez tartózó reguláris disztribúcióval. Ilyenek például a δ-konvergens sorozatok, ahol $f = 0$.

(iii) Majdnem mindenütt létezik $\lim\limits_n f_n =: f$, f lokálisan integrálható , viszont a disztribúciósorozat nem konvergens. Ilyen például az $f_n := n^2\chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}$ sorozat.

(iv) Nem létezik a függvénysorozat majdnem mindenütti határértéke, de a disztribúciósorozat konvergens. Legyen ugyanis $f_n := \exp^{in}$. Nyilvánvaló, hogy nem létezik $\lim\limits_n f_n$, de

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} \exp^{in} \varphi \, d\lambda = 0,$$

mert az integrálok éppen a φ függvény Fourier-együtthatói egy (alkalmas m-re) $\operatorname{Supp}\varphi$-t tartalmazó $[-m\pi, m\pi]$ intervallumon négyzetesen integrálható függvények terében lévő azonos normájú ortogonális rendszer szerint kifejtve. Ezek az együtthatók viszont négyzetesen összegezhetők, következésképpen határértékük mindenképpen 0.

(v) Végezetül példát mutatunk arra, hogy az $f := \lim\limits_n f_n$ határérték majdnem mindenütt létezik, de az nem integrálható lokálisan, és az R_{f_n} disztribúciósorozat mégis konvergens. Legyen $f_n := \frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}\chi_{[-1/n,1/n]^\diamond}$. Ezek lokálisan integrálható függvények, és $\lim\limits_n f_n = \frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$ majdnem mindenütt, amely viszont nem integrálható lokálisan. Megmutatjuk, hogy minden $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ esetén létezik az $(R_{f_n} \mid \varphi)$ sorozat határértéke. Rögzített φ esetén létezik $L > 0$ úgy, hogy

φ tartója benne van a $[-L, L]$ intervallumban. Definíció szerint

$$(R_{f_n} \mid \varphi) = \int_{-L}^{-\frac{1}{n}} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \int_{\frac{1}{n}}^{L} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx =$$

$$= \int_{-L}^{-\frac{1}{n}} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx + \int_{\frac{1}{n}}^{L} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx.$$

Az $x \mapsto (\varphi(x) - \varphi(0))/x \quad (x \neq 0)$ függvény folytonos, a határértéke a nullában $\varphi'(0)$, ezért a függvény korlátos, és így integrálható is.

$$\left| \chi_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]^\diamond} \frac{\varphi - \varphi(0)}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}} \right| \leq \left| \frac{\varphi - \varphi(0)}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}} \right|$$

miatt a Lebesgue-tétel szerint a limesz és az integrál felcserélhető (tetszőleges φ esetén), tehát a disztribúciósorozat konvergens.

Bár a Banach–Steinhaus-tétel szerint a határérték is disztribúció, a 3.1. pontbeli ígéretünkhöz híven ezt külön is belátjuk. A határérték

$$P_{\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{K},\ \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx.$$

Vegyünk egy φ_n $\mathcal{D}(\mathbb{R})$-beli függvénysorozatot, amely $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ értelemben 0-hoz tart. Ekkor van olyan $L > 0$, hogy $\operatorname{Supp} \varphi_n \subset [-L, L]$ minden n-re. A függvénysorozat valós és képzetes részére a bizonyítás ugyanolyan, ezért feltehetjük, hogy φ_n valós értékű minden n esetén. A Lagrange-féle középértéktétel szerint létezik olyan n-től és x-től függő $\xi_n(x)$ szám a $]0, x[$ nyílt intervallumban, amelyre $\varphi_n(x) - \varphi_n(0) = \varphi_n'(\xi_n(x))x$. Ekkor

$$\left(P_{\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}} \;\middle|\; \varphi_n\right) = \int_{-L}^{L} \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(0)}{x}\, dx = \int_{-L}^{L} \varphi_n'(\xi_n(x))\, dx.$$

A deriváltsorozat egyenletes konvergenciája miatt minden pozitív ε esetén van egy n_ε küszöbindex, melynél nagyobb n esetén $|\varphi_n'(\xi_n(x))| < \varepsilon$. Ezért ha $n > n_\varepsilon$, akkor

$$\left| \left(P_{\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}} \;\middle|\; \varphi_n\right) \right| < 2L\varepsilon,$$

azaz beláttuk a folytonosságot.

A $P_{\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}}$ nem reguláris disztribúciót az $\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$ függvény **főérték-integráljának** nevezzük.

4.3.

Legyen $r := |\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|$. Ha $m < N$ pozitív egész, akkor $\frac{1}{r^m}$ lokálisan integrálható. Ha $m \geq N$, $m = N + n$, ahol $n \geq 0$, akkor a főértékintegrál formulájának általánosításaként „depolarizálhatjuk" $\frac{1}{r^{N+n}}$-et, vagyis definiálhatunk vele egy disztribúciót természetes módon.

Jelölje $T_n(\varphi)$ a φ alapfüggvénynek a nulla körüli n-ik Taylor-polinomját. Ekkor

$$\frac{\varphi - T_n(\varphi)}{r^{N+n}} = \operatorname{Ordo}\left(\frac{1}{r^{N-1}}\right),$$

ezért integrálható. Tehát

$$\left(P_{\frac{1}{r^{N+n}}} \,\middle|\, \varphi\right) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varphi - T_n(\varphi)}{r^{N+n}}.$$

Ha $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ mérhető függvény és $f = \mathrm{Ordo}(r^k)$, azaz $f = f_0 r^k$, akkor $n > k$ esetén

$$\left(P_{\frac{f}{r^{N+n}}} \,\middle|\, \varphi\right) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f_0(\varphi - T_{n-k}(\varphi))}{r^{N+n-k}}.$$

4.4. Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy

$$P_{\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}} = \lim_{\alpha \to 0} R_{\frac{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2 + \alpha^2}}.$$

2. Bebizonyítandó, hogy

$$\lim_{\alpha \to +0} R_{\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \pm i\alpha}} = P_{\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}} \pm i\pi\delta.$$

3. Igazoljuk, hogy a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \delta_k$ sor tetszőleges a_k együtthatók mellett konvergens a $\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ térben (δ_k a k egész számra koncentrált Dirac-mérték).

4. Adjuk meg konkrétan a $P_{\frac{1}{|\mathrm{id}_{\mathbb{R}}|}}$ és a $P_{\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2}}$ disztribúciókat!

5. $\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$ lokálisan integrálható az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon, tehát a $\mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\}^*$ reguláris eleme. Ennek kiterjesztése $P_{\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}}$. Azonban nem ez az egyetlen lehetőség : akármely $c \in \mathbb{R}$ esetén $P_{\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}} + c\delta$ is kiterjesztés (sőt akármely kiterjesztés ilyen alakú (lásd 5.8). Egy ilyen kiterjesztést „mellékérték-integrálként" kaphatunk meg a következőképpen. Legyen $a, b > 0$ és $f_n := \frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}} \chi_{[-a/n, b/n]^{\circ}}$. Mutassuk meg, hogy $\lim\limits_{n} R_{f_n} = P_{\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}} + (\ln \frac{a}{b})\delta$.

5. Operátorok

5.1.

Legyen $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$, p multipolinom, $a \in \mathbb{R}^N$ és $A \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ lineáris bijekció. Tekintsük a következő transzformációkat:

(i) Az f-fel való **szorzás**: $M_f \colon \mathcal{E}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, $\quad \varphi \mapsto f\varphi$;
(ii) A **differenciálás**: $p(\mathrm{D}) \colon \mathcal{E}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, $\quad \varphi \mapsto p(\mathrm{D})\varphi$;
(iii) Az a-val való **balra tolás**: $L_a \colon \mathcal{E}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, $\quad \varphi \mapsto (x \mapsto \varphi(x-a))$;
(iv) Az A-val való **komponálás**: $K_A \colon \mathcal{E}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, $\quad \varphi \mapsto \varphi \circ A^{-1}$.

Egyszerű tény, hogy $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ invariáns ezekre a transzformációkra, vagyis leszűkítésük $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-re ismét $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-be képez.

Állítás. *A fenti transzformációk akár mint $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, akár mint $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ leképezések lineárisak és folytonosak.*

Bizonyítás A leképezések linearitása nyilvánvaló. A folytonosságot csak a fontosabb $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ esetben bizonyítjuk. Ehhez tekintsünk egy $\mathcal{D}$ értelemben 0-hoz tartó φ_n sorozatot, K pedig legyen olyan kompakt halmaz, amely tartalmazza mindegyik függvény tartóját.

(i) Elegendő $f\varphi_n$ k-adik parciális differenciálhányadosát vizsgálni.

$$\partial_k(f\varphi_n) = (\partial_k f)\varphi_n + f(\partial_k\varphi_n).$$

f végtelenszer differenciálható , ezért f és $\partial_k f$ korlátos K-n. Tudjuk továbbá, hogy a φ_n és a $\partial_k\varphi_n$ függvénysorozatok egyenletesen tartanak a 0-hoz. Ezért a fenti parciális derivált is egyenletesen tart a 0-hoz.

(ii) Ha q multipolinom, akkor $q(\mathrm{D})\,[p(\mathrm{D})\varphi_n] = (qp)(\mathrm{D})\varphi_n$, amiről viszont tudjuk, hogy egyenletesen konvergens.

(iii) Az összetett függvény differenciálási szabályából $\partial_k(L_a\varphi_n) = L_a(\partial_k\varphi_n)$ adódik, ahonnan triviális az egyenletes konvergencia.

(iv) Hasonlóképpen kapjuk, hogy $\partial_k(\varphi_n \circ A^{-1}) = \mathrm{D}\varphi_n \circ A^{-1}\cdot(A^{-1}e_k)$, ahol e_k a k-adik standard bázisvektor. $\partial_k\varphi_n$ egyenletes konvergenciája miatt készen is vagyunk.

Megjegyzés Az $a \mapsto L_a$ leképzés az $\mathbb{R}^N$ additív csoport lineáris ábrázolása $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-en, azaz L_a folytonos lineáris leképezés, és $L_{a+b} = L_a + L_b$.

Az $A \mapsto K_A$ leképezés pedig az $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ lineáris bijekciók csoportjának lineáris ábrázolása $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-en, azaz K_A folytonos lineáris leképezés, és $K_{AB} = K_A K_B$.

A fizikában így ábrázolódnak a téridőeltolások és a Galilei- vagy Lorentz-transzformációk.

Definíció. *Az $F\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ folytonos lineáris leképzés* ***transzponáltja****:*

$$F^*\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^* \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*, \quad T \mapsto T \circ F.$$

A definíció jó, mert $T \circ F$ is folytonos F folytonossága miatt.

Keressük meg a fent definiált négy speciális operátor transzponáltját! Legyen φ és ψ alapfüggvény, és azt vizsgáljuk, hogyan hat φ-re a transzponált az R_ψ helyen.

5.2.

$$\left(M_f^* R_\psi \mid \varphi\right) = (R_\psi \mid M_f\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} \psi f \varphi = (R_{f\psi} \mid \varphi) = \left(R_{M_f\psi} \mid \varphi\right).$$

Emlékezzünk, hogy a lokálisan integrálható függvényeket (és így az alapfüggvényeket is) beágyaztuk a disztribúciók halmazába. M_f transzponáltja ezeken az (azonosított) alapfüggvényeken úgy hat, mint maga M_f: $M_f^*\psi = M_f\psi$, ahol az első esetben a ψ-hez rendelt disztribúcióra hat M_f^*, a második esetben pedig egy alapfüggvényre hat M_f. Ennek alapján kiterjesztjük a szorzásoperátort tetszőleges disztribúcióra is a következőképp:

Definíció. *Legyen az f végtelenszer differenciálható függvénnyel való szorzás operátora a disztribúciókon:*

$$M_f\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^* \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*, \quad M_f := M_f^*.$$

Ekkor tehát

$$(M_f T \mid \varphi) = (T \mid M_f\varphi)$$

minden T disztribúcióra és φ alapfüggvényre.

5.3.

$$(\partial_k^* R_\psi \mid \varphi) = (R_\psi \mid \partial_k \varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} \psi \partial_k \varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \big(\partial_k(\psi\varphi) - (\partial_k \psi)\varphi\big) = -\left(R_{\partial_k \psi} \mid \varphi\right),$$

ugyanis az első egyenlőség jobb oldalán az első tag Fubini tétele értelmében úgy is számítható, hogy először a k-adik változó szerint integrálunk, aztán a többi szerint; ez az integrál nulla a Newton–Leibnitz-szabály miatt, hiszen a függvények eltűnnek a végtelenben.

Az előzőhöz hasonlóan most is kiterjeszthetjük a differenciálást tetszőleges disztribúcióra:

Definíció.

$$\partial_k : \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^* \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*, \quad \partial_k := -\partial_k^*.$$

Ekkor tehát

$$(\partial_k T \mid \varphi) = -\left(T \mid \partial_k \varphi\right)$$

minden T disztribúcióra és φ alapfüggvényre.

Fontos, hogy a parciális integrálás miatt megjelent egy mínusz előjel. Hasonlóan a páratlan rendű differenciálásnál is, ellenben a páros rendűnél nem. Tetszőleges p multipolinom esetén $(p(\mathrm{D})T \mid \varphi) = (T \mid p(-\mathrm{D})\varphi)$.

5.4.

$$(L_a^* R_\psi \mid \varphi) = (R_\psi \mid L_a \varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} \psi(x)\varphi(x-a)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \psi(z+a)\varphi(z)\,dz = \\ = \left(R_{L_{-a}\psi} \mid \varphi\right).$$

Itt a $z := x - a$ helyettesítéssel éltünk. Ezek alapján a következő a definíció:

Definíció.

$$L_a : \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^* \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*, \quad L_a := L_{-a}^*,$$

azaz

$$(L_a T \mid \varphi) = (T \mid L_{-a}\varphi)$$

minden T disztribúcióra és φ alapfüggvényre.

5.5.

$$\begin{aligned}(K_A^* R_\psi \mid \varphi) &= (R_\psi \mid K_A \varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} \psi(x)\varphi(A^{-1}x)\,dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \psi(Az)\varphi(z)\,|\det A|\,dz = \left(R_{|\det A| K_{A^{-1}}\psi} \;\middle|\; \varphi\right),\end{aligned}$$

a $z := A^{-1}x$ helyettesítést kihasználva. Most úgy szeretnénk definiálni a disztribúciókon K_A-t, hogy azt mondhassuk, hogy $K_A^* R_\psi = R_{K_A\psi}$, vagy röviden $K_A^* \psi = K_A \psi$, ahol ideiglenesen K_A^* jelöli a definiálandó operátort. Tudjuk, hogy

$$\begin{aligned} K_A^* \psi &= |\det A| K_{A^{-1}} \psi \\ K_{A^{-1}}^* \psi &= |\det A^{-1}| K_A \psi \\ |\det A| K_{A^{-1}}^* \psi &= K_A \psi. \end{aligned}$$

Ezek alapján a következő definíció lesz a megfelelő.

Definíció.

$$K_A : \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^* \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*, \quad K_A := |\det A| K^*_{A^{-1}},$$

azaz

$$(K_A T \mid \varphi) = |\det A| \, (T \mid K_{A^{-1}} \varphi)$$

minden T disztribúcióra és φ alapfüggvényre.

5.6.

Lássunk néhány példát!

(i) $N = 1$ esetén a $H := \chi_{\mathbb{R}^+}$ függvényt **Heaviside**-függvénynek szokás hívni. Ha vessző jelöli a differenciálást, akkor $R'_H = \delta$. Valóban,

$$(R'_H \mid \varphi) = -\,(R_H \mid \varphi') = -\int_0^\infty \varphi' = \varphi(0).$$

(ii) $(\partial_k \delta \mid \varphi) = -(\partial_k \varphi)(0)$.

(iii) Legyen G olyan nyílt halmaz, melynek $S := \overline{G} \setminus G$ pereme $N-1$ dimenziós részsokaság. Ekkor $\partial_k R_{\chi_G} = -n_k \lambda_S$, ahol n az S felület „kifelé" irányított normálvektorfüggvénye, λ_S pedig a felületi Lebesgue-mérték. Valóban, a Gauss-tétel alkalmazásával

$$(\partial_k R_{\chi_G} \mid \varphi) = -\,(R_{\chi_G} \mid \partial_k \varphi) = -\int_G \partial_k \varphi = -\int_S n_k \varphi \, d\lambda_S.$$

(iv) $M_f \delta = f(0)\delta, \;\; L_a \delta = \delta_a, \;\; K_A \delta = |\det A| \delta.$

5.7.

Állítás. *Ha f lokálisan integrálható és majdnem mindenütt differenciálható, továbbá $\partial_k f$ is lokálisan integrálható , akkor $\partial_k R_f = R_{\partial_k f}$.*

Bizonyítás Legyen U olyan nyílt halmaz, amely tartalmazza φ tartóját. Parciális integrálással azt kapjuk, hogy

$$(\partial_k R_f \mid \varphi) = -\,(R_f \mid \partial_k \varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} f \partial_k \varphi = \int_U f \partial_k \varphi = \int_U \partial_k f \varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \partial_k f \varphi =$$
$$= (R_{\partial_k f} \mid \varphi)\,.$$

5.8.

Világos, hogy bármely T disztribúció és $p \neq 0$ multipolinom esetén $\operatorname{Supp} T = \operatorname{Supp} p(\mathrm{D})T$. Speciálisan, $\operatorname{Supp}(p(\mathrm{D})\delta_a) = \{a\}$. Ez utóbbinak a fordítottja is igaz, amit bizonyítás nélkül közlünk.

Állítás. *Legyen $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ és $\operatorname{Supp} T = \{a\}$. Ekkor létezik olyan p multipolinom, hogy*

$$T = p(D)\delta_a\ .$$

A tétel tehát azt állítja, hogy ha egy disztribúció tartója egyetlen pont, akkor a disztribúció előállítható úgy, mint az adott pontra koncentrált Dirac-delta különböző rendű deriváltjainak lineáris kombinációja.

5.9.

A fejezet elején bevezetett $p(\mathrm{D})$, L_a és K_A transzformációkra $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ is invariáns, M_f-re azonban nem minden végtelenszer differenciálható f esetén; akkor igen, ha például f multipolinom. Ennél többet is mondhatunk.

Definíció. *Jelölje $\Theta(\mathbb{R}^N)$ azon f végtelenszer differenciálható függvények halmazát, melyekre tetszőleges p multipolinom esetén létezik c_p pozitív szám és m_p természetes szám, hogy*

$$|p(\mathrm{D})f| \le c_p(1 + |\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^{m_p}).$$

*Ezeket a függvényeket **lassan növekvő** függvényeknek hívjuk.*

Nyilván $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset \Theta(\mathbb{R}^N)$.

Állítás. *Ha $f \in \Theta(\mathbb{R}^N)$, akkor az f-fel való szorzásra $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ invariáns.*

Bizonyítás Ha $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, akkor $f\varphi$ nyilván végtelenszer differenciálható . Azt kell még megnéznünk, hogy p és q multipolinomok esetén $pq(\mathrm{D})(f\varphi)$ korlátos-e. $q(\mathrm{D})$ helyett elegendő ∂_i-t venni. Ekkor

$$|p\partial_i(f\varphi)| \le |p(\partial_i f)\varphi| + |pf\partial_i\varphi|.$$

Mivel $\partial_i f$ és f polinommal felülbecsülhető, és φ gyorsan csökkenő, a jobb oldalon mindkét tag korlátos. Tehát $f\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Megjegyzés Eredményünk következménye, hogy a lassan növekvő függvényekhez tartozó reguláris disztribúciók mérsékeltek. Így $\Theta(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$ írható.

5.10. Feladatok

1. M_f, $p(\mathrm{D})$, L_a és K_A mint $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^* \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$ leképzések folytonos lineárisak.

2. Bizonyítsuk be:
(i) kompakt tartójú disztribúció bármely deriváltja is kompakt tartójú,
(ii) temperált disztribúció bármely deriváltja is temperált disztribúció.

3. Vizsgáljuk meg, hogyan hat M_f, ∂_k, L_a és K_A a b-re koncentrált Dirac-disztribúcióra!

4. Bizonyítsuk be a disztribúciókra vonatkozó Leibniz-szabályt: $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$ és f folytonosan differenciálható függvény esetén $\partial_j(M_f T) = M_{\partial_j f}T + M_f\partial_j T$.

5. Mutassuk meg, hogy (a vessző a differenciálást jelöli)
(i) $\left(M_{\mathrm{id}_\mathbb{R}} P_{\frac{1}{\mathrm{id}_\mathbb{R}}}\right) = R_1$, (ii) $\left(R_{\chi_{[a,b]}}\right)' = \delta_a - \delta_b$, (iii) $\left(R_{\ln|\cdot|}\right)' = P_{\frac{1}{\mathrm{id}_\mathbb{R}}}$, (iv) $P_{\frac{1}{\mathrm{id}_\mathbb{R}}}{}' = -P_{\frac{1}{\mathrm{id}^2_\mathbb{R}}}$.

6. Jelölje a disztribúciókon lévő tükrözést $J := K_{-\mathrm{id}_R}$. Ekkor minden T disztribúció és φ alapfüggvény esetén $(JT \mid \varphi) = (T \mid J\varphi)$. Lássuk be, hogy
(i) $\partial_k \circ J = -J \circ \partial_k$, (ii) $\partial_k \circ L_a = L_a \circ \partial_k$.

7. Mutassuk meg, hogy $(\mathcal{D}) \lim\limits_{a\to 0} L_a\varphi = \varphi$ minden $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ esetén.

6. Disztribúciók nevezetes differenciáloperátorai

6.1.

A φ alapfüggvény k-ik parciális deriváltja, a definíció szerint így is írható:

$$(\partial_k \varphi)(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(L_{-h_k}\varphi)(x) - \varphi(x)}{h} \qquad (x \in \mathbb{R}^N),$$

ahol $h_k := he_k$, az $\mathbb{R}^N$ e_k standard bázisvektorának h-szorosa. A fenti határérték $\mathbb{R}^N$-ben pontonként érvényes. Most megmutatjuk, hogy $\mathcal{D}$-értelemben is hasonló határérték írható a parciális deriváltakra.

Állítás. *Legyen φ alapfüggvény és h_k mint az előbb. Ekkor*

$$\partial_k \varphi = (\mathcal{D}) \lim_{h \to 0} \frac{L_{-h_k}\varphi - \varphi}{h}.$$

Bizonyítás Azt kell tehát belátni, hogy

$$(\mathcal{D}) \lim_{h \to 0} \left(\frac{L_{-h_k}\varphi - \varphi}{h} - \partial_k \varphi \right) = 0.$$

Elegendő olyan h-kat tekinteni, melyre $|h| < 1$ teljesül. Ekkor a fenti limesz alatt szereplő függvény tartója biztosan benne van a $B_1(0) + \operatorname{Supp} \varphi$ halmazban, ahol $B_1(0)$ jelöli az egység sugarú zárt gömböt a 0 körül.

Vizsgáljuk előbb a valós esetet. A Lagrange-féle középértéktétel szerint létezik egy $\theta_h \in (0, 1)$ szám, melyre

$$\frac{L_{-h_k}\varphi - \varphi}{h} - \partial_k \varphi = \partial_k \varphi(x + \theta_h h_k) - \partial_k \varphi(x).$$

Heine tétele értelmében a kompakt halmazon folytonos $\partial_k \varphi$ függvény egyenletesen folytonos, azaz minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta_\varepsilon > 0$ úgy, hogy ha $|h| < \delta_\varepsilon$, akkor minden x pontban $|\partial_k \varphi(x + \theta_h h_k) - \partial_k \varphi(x)| < \varepsilon$. Ebből pedig már látszik a kívánt egyenletes konvergencia. Hasonlóan belátható ez a deriváltakra is, mert

$$\partial_i \left(\frac{L_{-h_k}\varphi - \varphi}{h} - \partial_k \varphi \right) = \frac{L_{-h_k}\partial_i \varphi - \partial_i \varphi}{h} - \partial_i \partial_k \varphi,$$

emiatt a bizonyítás ugyanúgy megy, mint előbb, csak φ helyett $\partial_i \varphi$-vel.

Szétválasztva a valós és a képzetes részt a komplex eset visszavezethető az előzőre.

Állítás. *Legyen T disztribúció, h_k mint előbb. Ekkor*

$$\partial_k T = \lim_{h \to 0} \frac{L_{-h_k}T - T}{h}.$$

Bizonyítás Tetszőleges φ alapfüggvényre

$$\left(\frac{L_{-h_k}T - T}{h} \,\middle|\, \varphi \right) = \frac{1}{h} \left[(L_{-h_k}T \mid \varphi) - (T \mid \varphi) \right] = \left(T \,\middle|\, \frac{L_{h_k}\varphi - \varphi}{h} \right).$$

A 6.1 állítás szerint $h \to 0$ esetén a T melletti függvény $-\partial_k \varphi$-hez fog tartani $\mathcal{D}$ értelemben. Kihasználva T folytonosságát a fenti kifejezés határértéke

$$-(T \mid \partial_k \varphi) = (\partial_k T \mid \varphi).$$

6.2. Laplace-operátor

Legyen

$$Z(x) := -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x|} \qquad (x \in \mathbb{R}^3, x \neq 0).$$

Ekkor

$$\partial_k Z(x) = \frac{1}{4\pi}\frac{x_k}{|x|^3},\ quad \partial_i \partial_k Z(x) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\delta_{ik}}{|x|^3} - \frac{3x_i x_k}{|x|^5}\right). \tag{1}$$

Ez utóbbiból $\triangle Z := \partial_k \partial_k Z = 0$; itt és a következőkben az Einstein-féle összegzési szabályt alkalmazzuk: az azonos indexekre összegezni kell 1-től háromig.

Állítás. *Z lokálisan integrálható, és $\triangle R_Z = \delta$.*

Bizonyítás Gömbi koordinátázással integrálva könnyen belátható, hogy Z lokálisan integrálható , azaz értelmes R_Z.

Tetszőleges φ alapfüggvény esetén a Laplace-operátor előjelváltás nélkül átvihető φ-re, mert a Laplace-operátor második deriváltakból áll.

$$(\triangle R_Z \mid \varphi) = (R_Z \mid \triangle\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} Z\triangle\varphi = \lim_{\alpha\to+0}\int_{\mathbb{R}^N\setminus G_\alpha(0)} Z\triangle\varphi.$$

$\triangle Z = 0$ miatt $Z\partial_k\partial_k\varphi = \partial_k(Z\partial_k\varphi) - \partial_k(\varphi\partial_k Z)$ Az így kapott divergenciákat a Gauss-tétel segítségével átalakíthatjuk felületi integrálokká. Jelölje $S_\alpha(0)$ a befelé irányított gömbfelületet, $\boldsymbol{\lambda}_{S_\alpha(0)}$ pedig a rajta levő vektori Lebesgue-mértéket. Ekkor a következőképpen folytathatjuk:

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_{G_\alpha(0)^\diamond} [\mathrm{div}(Z\mathrm{grad}\varphi) - \mathrm{div}(\varphi\mathrm{grad}Z)]\, d\lambda =$$

$$= \lim_{\alpha\to+0}\left[\int_{S_\alpha(0)} Z\left\langle \mathrm{grad}\varphi, d\boldsymbol{\lambda}_{S_\alpha(0)}\right\rangle - \int_{S_\alpha(0)} \varphi\left\langle \mathrm{grad}Z, d\boldsymbol{\lambda}_{S_\alpha(0)}\right\rangle\right].$$

Az első integrál 0-hoz tart, mert felülről becsülhető $(1/4\pi\alpha)\|\mathrm{grad}\varphi\|_\infty 4\pi\alpha^2$-tel. A második integrál $-\varphi(0)$-hoz tart, mert

$$\left|\int_{S_\alpha(0)} \varphi\left\langle \mathrm{grad}Z, d\boldsymbol{\lambda}_{S_\alpha(0)}\right\rangle + \varphi(0)\right| =$$

$$= \left|\int_{S_\alpha(0)}\left(\varphi\left\langle \mathrm{grad}Z, \mathbf{n}_{S_\alpha(0)}\right\rangle + \frac{1}{4\pi\alpha^2}\varphi(0)\right) d\lambda_{S_\alpha(0)}\right|,$$

ahol $\mathbf{n}_{S_\alpha(0)}$ a felület befelé irányított normálvektora (vektormezeje), $\lambda_{S_\alpha(0)}$ pedig a gömbfelület skalármértéke. Kihasználva, hogy $\left\langle \mathrm{grad}Z, \mathbf{n}_{S_\alpha(0)}\right\rangle = -1/4\pi\alpha^2$, így folytathatjuk:

$$= \left|\frac{1}{4\pi\alpha^2}\int_{S_\alpha(0)} \big(\varphi - \varphi(0)\big)\, d\lambda_{S_\alpha(0)}\right| \leq \frac{1}{\pi\alpha^2}\max_{S_\alpha(0)}\big(\varphi - \varphi(0)\big)\, 4\pi\alpha^2.$$

Ez φ folytonossága miatt 0-hoz tart. Ezzel beláttuk, hogy $(\triangle R_Z \mid \varphi) = \varphi(0)$.

6.3. Diffúzióoperátor

Legyen

$$C\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \rightarrowtail \mathbb{R}, \quad (t,x)\mapsto \frac{H(t)}{(4\pi t)^{N/2}}e^{-|x|^2/4t},$$

ahol H a Heaviside-féle függvény. Egyszerű differenciálással adódik, hogy $(\partial_0 - \triangle)C = 0$ (a $\{0\}\times\mathbb{R}^N$ kivételével, ami nincs benn a C értelmezési tartományában), ahol ∂_0 a „nulladik" vagyis a $\mathbb{R}$-beli (fent t-vel jelölt) változó szerinti differenciálást jelenti.

Állítás. *C lokálisn integrálható, és $(\partial_0 - \triangle)R_C = \delta$,*

Bizonyítás Könnyű látni, hogy C – amely majdnem mindenütt értelmezve van – lokálisan integrálható . Ugyanis tetszőleges $K\subset \operatorname{Dom} C$ kompakt halmaz esetén létezik olyan t, amelyre $K\subset[-t,t]\times\mathbb{R}^N$. Mint ismeretes, rögzített $t>0$ esetén C az x változója szerint Gauss-görbe, ezért integrálható, és az integrál értéke 1; $t\le 0$ esetén a függvény 0. Ez a függvény pedig integrálható $[-t,t]$-n. A Fubini-tételből adódóan C integrálható $[-t,t]\times\mathbb{R}^N$-en, ezért lokálisan integrálható .

Legyen most $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{1+N})$. Ekkor

$$((\partial_0 - \triangle)R_C \mid \varphi) = -\left(R_C \mid (\partial_0+\triangle)\varphi\right) = -\lim_{\alpha\to+0}\int_{[\alpha,\infty[\times\mathbb{R}^N} C(\partial_0+\triangle)\varphi.$$

Használjuk ki most is, hogy $C\partial_0\varphi = \partial_0(C\varphi) - (\partial_0 C)\varphi$, valamint $C\triangle\varphi = (\triangle C)\varphi + \operatorname{div}(C\operatorname{grad}\varphi) - \operatorname{div}(\varphi\operatorname{grad}C)$. Az utolsó két tag „hely szerinti" integrálja 0. Vegyünk ugyanis egy r sugarú gömböt $\mathbb{R}^N$-ben. A Gauss-tétel miatt a gömbre vett integrál átalakítható a $C\operatorname{grad}\varphi$-nek, ill. $\varphi\operatorname{grad}C$-nek a gömbfelszínre vett integráljává. Mivel φ és $\operatorname{grad}\varphi$ kompakt tartójú, az $r\to\infty$ határesetben az integrál 0. A fenti formulát tehát így folytathatjuk:

$$= \lim_{\alpha\to+0}\int_{[\alpha,\infty[\times\mathbb{R}^N}\big(-\partial_0(C\varphi)+\varphi(\partial_0-\triangle)C\big) =$$

$$= -\lim_{\alpha\to+0}\int_{\mathbb{R}^N}(C\varphi)\Big|_{t=\alpha}^{t=\infty} = \lim_{\alpha\to+0}\int_{\mathbb{R}^N} C(\alpha,x)\varphi(\alpha,x)\,dx.$$

Itt kihasználtuk, hogy $(\partial_0-\triangle)C = 0$, majd az „idő szerint" integráltunk, végül $(C\varphi)(\infty)=0$, mivel φ kompakt tartójú. Azt kell már csak megmutatnunk, hogy ez a határérték éppen $\varphi(0,0)$. Becsüljük meg a különbségüket:

$$\int_{\mathbb{R}^N} C(\alpha,x)\varphi(\alpha,x)\,dx - \varphi(0,0) = \int_{\mathbb{R}^N} C(\alpha,x)\left(\varphi(\alpha,x)-\varphi(0,0)\right)dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} C(\alpha,x)\left(\varphi(\alpha,x)-\varphi(0,x)\right)dx + \int_{\mathbb{R}^N} C(\alpha,x)\left(\varphi(0,x)-\varphi(0,0)\right)dx.$$

Az első tag felülről így becsülhető:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} C(\alpha,x)\left(\varphi(\alpha,x)-\varphi(0,x)\right)dx\right| \le \max_{x\in\mathbb{R}^N}|\varphi(\alpha,x)-\varphi(0,x)|\int_{\mathbb{R}^N} C(\alpha,x)\,dx.$$

Mint ismeretes, az integrál minden α esetén 1. A kompakt halmazon folytonos φ függvény Heine tétele szerint egyenletesen folytonos, ezért ez a maximum 0-hoz tart.

A második tag:

$$\int_{\mathbb{R}^N} C(\alpha, x)\,(\varphi(0,x) - \varphi(0,0))\,dx = \big(R_{C(\alpha,\cdot)} \mid \varphi(0,\cdot)\big) - \varphi(0,0).$$

Mivel $R_{C(\alpha,\cdot)}$ éppen egy δ-konvergens sorozat, a határérték 0 lesz. Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

Megjegyzés A fizikában a diffúzióoperátor $\partial_0 - k\triangle$ alakú, ahol k a diffúziós konstans. Ha t „idő" helyett bevezetjük a kt változót, akkor kapjuk az itteni formát.

6.4. Hullámoperátor

Legyen $g\colon \mathbb{R}^{(1+3)} \times \mathbb{R}^{(1+3)} \to \mathbb{R}$, $\big((t,x),(s,y)\big) \mapsto -ts + xy$ a standard Lorentz-forma az aritmetikai speciális relativisztikus téridőmodellben. Legyen továbbá

$$K_\pm\colon \mathcal{D}\big(\mathbb{R}^{(1+3)}\big) \to \mathbb{K}, \quad \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(\pm|x|, x)}{4\pi|x|}\,dx.$$

(K_+-t avanzsált, K_--t pedig retardált magnak szokás nevezni.) Mivel $\frac{1}{|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}|}$ lokálisan integrálható , az integrál értelmes minden φ alapfüggvényre. Az is egyszerű, hogy a fenti formula disztribúciót határoz meg: nyilvánvalóan lineáris, és ha φ_n $\mathcal{D}$ értelemben 0-hoz tartó sorozat, H pedig olyan kompakt halmaz, amely tartalmazza minden φ_n tartóját, akkor

$$|(K_\pm \mid \varphi_n)| = \left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi_n(\pm|x|, x)}{4\pi|x|}\,dx \right| \le \frac{\|\varphi_n\|_\infty}{4\pi} \int_H \frac{dx}{|x|},$$

és a jobb oldal nullához tart, miközben n tart a végtelenhez.

Nyilvánvaló, hogy K_+ tartója az $L^+ := \{x \mid g(x,x) = 0,\ x_0 > 0\}$ jövőszerű fénykúp, K_--é pedig az $L^- := \{x \mid g(x,x) = 0,\ x_0 < 0\}$ múltszerű fénykúp.

Megmutatható, hogy ezek a disztribúciók a fénykúpok „felületi mértéke" szerinti integrálások. Ezek a felületi mértékek azonban nem a szokásos sokaságmértékek. Egy részsokaság felületi mértékét ebben a pszeudo-euklideszi vektortérben a részsokaság egy p paraméterezésével és a paramétertér λ Lebesgue-mértékével

$$\Big(\sqrt{|\det((\mathrm{D}p)^*\mathrm{D}p)|}\lambda\Big) \circ \overset{-1}{p}$$

formában definiáltuk feltéve, hogy a részsokaság minden v érintővektorának pszeudohossza ($|v| := \sqrt{|g(v,v)|}$) nem nulla. Ez azonban itt nem teljesül, emiatt a fénykúpokra az azonosan nulla mértéket kapnánk.

A fénykúpok felületi mértékét az $\alpha > 0$ esetre definiált

$$V_\alpha^+ := \big\{\, x \;\big|\; g(x,x) = -\alpha^2 \ x_0 > 0 \,\big\}, \qquad V_\alpha^- := \big\{\, x \;\big|\; g(x,x) = -\alpha^2 \ x_0 < 0 \,\big\}$$

időszerű „hiperboloidok" szokásos $\lambda_{V_\alpha^\pm}$ felületi mértékvel az $\alpha \to 0$ határértékkel a következőképpen: minden $E \subset \mathbb{R}^4$ korlátos, nyí lt Borel-halmazra értelmes

$$\lambda_{L^\pm}(E) := \lim_{\alpha \to 0} \frac{\lambda_{V_\alpha^\pm}(E \cap V_\alpha^\pm)}{\alpha}.$$

Az így meghatározott mérték tartója $L^{\pm}$, tehát lényegében $L^{\pm}$-en adott mérték lesz.

A következő állítást majd csak később, a Fourier-transzformáció segítségével fogjuk belátni.

Állítás. *$\Box K_{\pm} = \delta$, ahol $\Box := \partial_0^2 - \triangle$ a d'Alambert-operátor.*

Megjegyzés A fizikában a hullámoperátor $\partial_0^2 - c^2\triangle$ alakú, ahol c a fénysebesség. Ha a t „idő" helyett bevezetjük a ct változót, akkor kapjuk az itteni formát.

6.5. Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy $\triangle L_a R_Z = \delta_a \quad (a \in \mathbb{R}^3)$.

2. $\partial_k R_Z = R_{\partial_k Z}$, és $\partial_k Z = -\frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{pr}_k}{r^3}$, ahol $r := |\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}|$.

3. Legyen $m > 0$, $r := |\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}|$, valamint $E_{\pm}^{(m)} := -(1/4\pi)e^{\pm mr}/r$ az ún. Yukawa-féle potenciál. Bizonyítsuk be, hogy ez megoldása az ún. Helmholtz-egyenletnek, azaz $(\triangle - m^2)E_{\pm}^{(m)} = 0$ és $(\triangle - m^2)R_{E_{\pm}^{(m)}} = \delta$.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha $\triangle$ jelöli egy-, két- és N dimenziós Laplace-operátort is, akkor

$$\triangle |\mathrm{id}\mathbb{R}| = 2\delta^1,$$

$$\triangle R_{\ln |\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}|} = 2\pi\delta^2,$$

$$\triangle R_{\frac{1}{|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}^{N-2}|}} = -(N-2)\sigma_N \delta^N,$$

ahol $\sigma_N := \dfrac{2\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ az $\mathbb{R}^N$-beli egységgömb felszíne, és a δ-kon az index azt mutatja, mely dimenzióról van szó.

5. Igazoljuk, hogy az

$$E_1(t,x) := \frac{H(t-|x|)}{2} \qquad ((t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}),$$

$$E_2(t,x) := \frac{H(t-|x|)}{2\pi\sqrt{t^2 - |x|^2}} \qquad ((t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$$

lokálisan integrálható függvények, és

$$\Box R_{E_1} = \delta^2, \qquad \Box R_{E_2} = \delta^3.$$

7. Disztribúciók tenzorszorzata

7.1.

Állítás. *Legyen $\Phi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M)$ függvénysorozat, amely a szorzattérben $\mathcal{D}$ értelemben 0-hoz tart, $x_n \in \mathbb{R}^N$ tetszőleges sorozat ($n \in \mathbb{N}$). Ekkor $\mathcal{D}(\mathbb{R}^M)$-ben*

$$(\mathcal{D}) \lim_n \Phi_n(x_n, \cdot) = 0.$$

Bizonyítás A Φ_n sorozat $\mathcal{D}$-konvergenciája miatt létezik $K_N \subset \mathbb{R}^N$ és $K_M \subset \mathbb{R}^M$ kompakt halmaz úgy, hogy $K_N \times K_M$ tartalmazza a Φ_n tartóját minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Egyszerű tény, hogy $\operatorname{Supp}\Phi_n(x_n,\cdot) \subset K_M$ minden n-re. A Φ_n sorozat egyenletes konvergenciájából pedig nyilvánvalóan következik $\Phi_n(x_n,\cdot)$ egyenletes konvergenciája, és hasonló áll fenn a deriváltakra is, hiszen $\Phi_n(x_n,\cdot)$ parciális deriváltjai a Φ_n parciális deriváltjaiból adódnak.

Következmény. *Tetszőleges $x \in \mathbb{R}^N$ esetén az*

$$l_x \colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^M), \quad \Phi \mapsto \Phi(x,\cdot)$$

leképezés folytonos, hiszen lineáris és a 0-ban folytonos.

7.2.

Legyen $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ és $g\colon \mathbb{R}^M \to \mathbb{K}$ lokálisan integrálható függvény. Ekkor az $f \otimes g\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{K}, (x,y) \mapsto f(x)\,g(y)$ tenzorszorzat szintén lokálisan integrálható , hiszen a Fubini-tétel szerint minden téglán integrálható . Értelmes tehát $R_f \otimes R_g := R_{f\otimes g} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M)^*$, melynek hatása egy $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M)$ függvényen:

$$\begin{aligned}(R_f \otimes R_g \mid \Phi) &= \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^M} f(x)g(y)\Phi(x,y)\,dx\,dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \int_{\mathbb{R}^M} g(y)\Phi(x,y)\,dy\,dx,\end{aligned}$$

ahol a Fubini-tételt használtuk fel. Ezek alapján könnyen érthetjük a következő definíciót.

Definíció. *Legyen $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$ és $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^M)^*$. T és S* ***tenzorszorzatán*** *a következő disztribúciót értjük:*

$$T \otimes S\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M) \to \mathbb{K}, \quad (T \otimes S \mid \Phi) := (T \mid x \mapsto (S \mid \Phi(x,\cdot)))\,.$$

Állítás. *A definíció jó, azaz tényleg disztribúciót határoztunk meg.*

Bizonyítás A következőket kell belátnunk:
(i) $\Phi(x,\cdot)$ kompakt tartójú és végtelenszer differenciálható , ezért $(S \mid \Phi(x,\cdot))$ értelmes;
(ii) az $x \mapsto (S \mid \Phi(x,\cdot))$ hozzárendelés is kompakt tartójú és végtelenszer differenciálható ;
(iii) $T \otimes S$ lineáris és folytonos.

Az (i) megállapítás nyilvánvaló. A (ii) kifejezés nyilván kompakt tartójú , mert tartóját tartalmazza $\mathrm{pr}_{\mathbf{1}}[\operatorname{Supp}\Phi]$. Tekintsük a k-adik deriváltat!

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_k}(S \mid \Phi(x,\cdot)) = \lim_{h\to 0} \frac{(S \mid \Phi(x+h_k,\cdot)) - (S \mid \Phi(x,\cdot))}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\left(S \,\middle|\, \frac{(L_{-h_k}\Phi)(x,\cdot) - \Phi(x,\cdot)}{h}\right) = \left(S \,\middle|\, (\mathcal{D})\lim_{h\to 0} l_x \frac{L_{-h_k}\Phi - \Phi}{h}\right) = \\ &\qquad = \left(S \,\middle|\, l_x(\mathcal{D})\lim_{h\to 0}\frac{L_{-h_k}\Phi - \Phi}{h}\right) = (S \mid l_x \partial_k \Phi) = (S \mid (\partial_k\Phi)(x,\cdot))\,,\end{aligned}$$

ahol kihasználtuk először S, majd l_x folytonosságát. Ebből már következik, hogy $x \mapsto (S \mid \Phi(x,\cdot))$ függvény végtelenszer differenciálható , és – magától értetődő jelöléssel –

$$p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(S \mid \Phi(x,\cdot)) = (S \mid (p(\mathrm{D}_1)\Phi)(x,\cdot))\,.$$

Már csak a (iii) maradt hátra. Linearitása magától értetődik. Folytonosságának vizsgálatához tekintsünk egy $\mathcal{D}$ értelemben 0-hoz tartó Φ_n sorozatot $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$-en. T folytonossága miatt elegendő belátni, hogy a $\varphi_n := (x \mapsto (S \mid \Phi_n(x,\cdot)))$ sorozat $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-ben 0-hoz tart. Φ_n $\mathcal{D}$-konvergenciája miatt létezik olyan K kompakt halmaz, hogy $\operatorname{Supp}\varphi_n \subset \mathrm{pr}_{\mathbf{1}}[\operatorname{Supp}\Phi_n] \subset K$. Mivel $(p(\mathrm{D})\varphi_n)(x) = (S \mid (p(\mathrm{D}_1)\Phi_n)(x,\cdot))$, és $p(\mathrm{D}_1)\Phi_n$ is egyenletesen tart a nullához, elég belátnunk, hogy φ_n bármely deriváltjára ugyanúgy érvelhetünk. Tegyük fel, hogy φ_n nem tart egyenletesen a nullához. Ekkor létezik $\varepsilon > 0$ és $x_n \in \mathbb{R}^N$ $n \in \mathbb{N}$ sorozat úgy, hogy

$$|\varphi_n(x_n)| \geq \varepsilon. \tag{2}$$

A 7.1 állítás szerint $(\mathcal{D})\lim_n \Phi_n(x_n,\cdot) = 0$, ezért $\lim_n \varphi_n(x_n) = 0$ ami ellentmond a (2) egyenlőtlenségnek.

7.3.

Ha $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ és $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^M)$, akkor $\varphi \otimes \psi \colon (x,y) \mapsto \varphi(x)\psi(y)$ függvény a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M)$ eleme, és

$$(T \otimes S \mid \varphi \otimes \psi) = (T \mid \varphi)\,(S \mid \psi)\,. \tag{3}$$

Meg lehet mutatni, hogy a $\varphi \otimes \psi$ alakú függvények lineáris kombinációi, vagyis $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ sűrű lineáris alteret alkotnak $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M)$-ben. Ezt tudván elég volna a (3) összefüggéssel definiálni a disztribúciók tenzorszorzatát, hiszen könnyen látható, hogy a formula lineáris kiterjesztése folytonos lineáris leképezést határoz meg egy sűrű lineáris altéren, ahonnan egyértelműen kiterjeszthető az egész térre.

Ebből az is látszik, hogy T és S tenzorszorzatára

$$T \otimes S \colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M) \to \mathbb{K}, \quad (T \otimes S \mid \Phi) := (S \mid y \mapsto (T \mid \Phi(\cdot,y)))$$

is fenn-áll.

7.4.

Legyen $J \colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $(x,y) \mapsto (y,x)$; emlékeztetünk a K_J operátorra (lásd 5.5).

Állítás. *Ha $T, S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$, akkor $T \otimes S = K_J(S \otimes T)$, azaz a tenzorszorzás ilyen értelemben kommutatív.*

Bizonyítás Könnyű látni, hogy $\varphi \otimes \psi$ alakú függvényeken a két disztribúció azonos értékeket vesz fel; a folytonos lineáris leképezéseknek a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^N))$ sűrű altérről az egyértelmű kiterjesztése is megegyezik.

Állítás. $\operatorname{Supp}(T \otimes S) \subset \operatorname{Supp} T \times \operatorname{Supp} S$.

Bizonyítás Legyen $(x, y) \in (\operatorname{Supp} T \times \operatorname{Supp} S)^{\complement}$. Mivel a tartó zárt, létezik (x, y) körül egy $G(x) \times G(y)$ nyílt tégla a komplementerben. Ekkor $G(x) \cap \operatorname{Supp} T) \times (G(y) \cap \operatorname{Supp} S) = \emptyset$, ami csak úgy lehet, ha $G(x) \cap \operatorname{Supp} T) = \emptyset$ vagy $G(y) \cap \operatorname{Supp} S = \emptyset$. Ezért ha $\operatorname{Supp} \varphi \subset G(x)$ és $\operatorname{Supp} \psi \subset G(y)$, akkor $(T \otimes S \mid \varphi \otimes \psi) = 0$, így a 7.3. megjegyzés szerint $T \otimes S$ a $G(x) \times G(y)$ halmazon 0, azaz $(x, y) \notin \operatorname{Supp}(T \otimes S)$.

7.5. Feladatok

1. Legyen H a Heaviside-féle függvény. Ekkor az N-dimenziós Dirac-delta $\delta^{(N)} = \partial_1 \ldots \partial_N (H \otimes \ldots \otimes H)$.

2. Bizonyítsuk be: legyen $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $p \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ multipolinom, D_1 az első N változó szerinti differenciálás $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$-ben, $a \in \mathbb{R}^N$, $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$, $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^M)^*$. Ekkor
(i) $M_{f \otimes g}(T \otimes S) = (M_f T) \otimes (M_g S)$;
(ii) $p(\mathrm{D}_1)(T \otimes S) = (p(\mathrm{D})T) \otimes S$;
(iii) $L_{(a,0)}(T \otimes S) = (L_a T) \otimes S$.

3. Bizonyítsuk be, hogy a a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^* \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^M)^* \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M)^*$, $\quad (T, S) \mapsto T \otimes S$ tenzorszorzás bilineáris és változónként folytonos leképzés.

4. Mutassuk meg, hogy mérsékelt disztribúciók tenzorszorzata is mérsékelt.

8. Disztribúciók konvolúciója

8.1.

Definíció. *Az $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ integrálható függvények **konvolúciója**:*

$$f * g \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, \quad (f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y) g(y)\, dy. \tag{4}$$

Állítás. *Az $f * g$ függvény jól definiált, integrálható , továbbá $f * g = g * f$.*

Bizonyítás Az $(x, y) \mapsto f(y)g(x - y)$ függvény integrálható a Fubini-tétel szerint, mert az egyik sorrendben abszolút integrálható , hiszen az

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} |f(x - y)||g(y)|\, dx = \|f\|_1 \; |g(y)|$$

függvény integrálható , továbbá a 4 egyenlőségben szereplő integrált a $z := x - y$ helyettesítéssel

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(z) g(x - z)\, dz = (g * f)(x)$$

alakra hozhatjuk.

8.2.

Hasonlóan beláthatjuk, hogy ha f lokálisan integrálható és g intregrálható, kompakt tartójú (azaz g egy kompakt halmazon kívül majdnem mindenütt nulla), akkor szintén értelmes f és g konvolúciója és ez lokálisan integrálható .

Ha $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, akkor

$$(R_{f*g} \mid \varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)\,dy \right) \varphi(x)\,dx =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(z)\varphi(y+z)\,dy\,dz,$$

ahol a Fubini-tétel alkalmazása után a $z := x - y$ helyettesítéssel éltünk. Vezessük be az összeadást:

$$A \colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, \quad (y,z) \mapsto y+z.$$

Ezzel a fenti kifejezés így írható:

$$(R_{f*g} \mid \varphi) = (R_{f\otimes g} \mid \varphi \circ A)\,.$$

Ezek alapján kimondhatjuk a következő definíciót:

Definíció. *A T és S disztribúciók* ***konvolválhatók (értelmes a konvolúciójuk)****, ha minden φ alapfüggvény esetén értelmes*

$$(T * S \mid \varphi) := (T \otimes S \mid \varphi \circ A)\,.$$

Megjegyzés $\mathrm{Supp}\,(\varphi \circ A) = \overset{-1}{A}(\mathrm{Supp}\,\varphi)$, ugyanis $(x,y) \in \overset{-1}{A}(\mathrm{Supp}\,\varphi)$ akkor és csak akkor, ha $A(x,y) = x+y \in \mathrm{Supp}\,\varphi$, és $(x,y) \in \mathrm{Supp}\,(\varphi \circ A)$ pontosan akkor, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan (x_n, y_n), hogy $|x_n - x| \le \frac{1}{n}$, $|y_n - y| \le \frac{1}{n}$, és $0 \ne \varphi(A(x_n,y_n)) = \varphi(x_n + y_n)$, ami egyenértékű azal, hogy $x+y \in \mathrm{Supp}\,\varphi$. Egyszerű tény, hogy $\overset{-1}{A}(\mathrm{Supp}\,\varphi) = (\mathrm{Supp}\,\varphi \times \{0\}) + \{\,(x,y) \mid x+y=0\,\}$ egy „ferde sáv”, ezért ha $\varphi \ne 0$ $\varphi \circ A$ nem kompakt tartójú , a fenti definíció értelmességéről csak a 2.2 és a 2.4 definícióban meghatározott kiterjesztések figyelembevételével beszélhetünk.

Állítás. *Ha T és S konvolválható, akkor a $T * S \colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{K}$, $\varphi \mapsto (T * S \mid \varphi)$ funkcionál disztribúció.*

Bizonyítás Tekintsük a $\xi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2N})$ valós értékű alapfüggvények $\mathcal{E}$ értelemben 1-hez tartó sorozatát, és legyen $K_n \colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{K}$, $\varphi \mapsto (T \otimes S \mid \xi_n(\varphi \circ A))$. K_n valóban értelmes minden φ-re, mert $M_{\xi_n}(T \otimes S)$ kompakt tartójú , φ-ben pedig nyilván lineáris. A folytonosságának belátásához vegyünk egy $\mathcal{D}$ értelemben 0-hoz tartó $\varphi_m \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ sorozatot. Ekkor minden n-re $\xi_n(\varphi_m \circ A)$ a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2N})$ térben tart 0-hoz, ezért $\lim_m (K_n \mid \varphi_m) = 0$ lévén $T \otimes S$ folytonos. Tehát K_n disztribúció (minden n-re). A K_n disztribúciósorozat pontonként konvergens (azaz minden $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$-re $(K_n \mid \varphi)$ konvergens), így a Banach–Steinhaus-tétel szerint (4.1 állítás) a pontonként értelmezett határérték is disztribúció. Ez pedig éppen a $T * S$ konvolúció.

Állítás. *A konvolúció kommutatív.*

Bizonyítás Legyen T és S disztribúció. Ekkor

$$(T * S \mid \varphi) = (T \otimes S \mid \varphi \circ A) = (K_J(S \otimes T) \mid \varphi \circ A) =$$
$$= (S \otimes T \mid \varphi \circ A \circ J) = (S \otimes T \mid \varphi \circ A) = (S * T \mid \varphi)\,.$$

8.3.

T és S biztosan konvolválható, ha minden alapfüggvény esetén $\operatorname{Supp}(T \otimes S) \cap \operatorname{Supp}(\varphi \circ A)$ kompakt, ami teljesül, ha minden K kompakt halmazra $\operatorname{Supp}(T \otimes S) \cap \overset{-1}{A}(K)$ kompakt. Mivel $\operatorname{Supp}(T \otimes S) \subset \operatorname{Supp} T \times \operatorname{Supp} S$, a konvolúció létezésének elégséges feltétele, hogy

$$(\operatorname{Supp} T \times \operatorname{Supp} S) \cap \overset{-1}{A}(K)$$

kompakt tetszőleges K kompakt halmazra.

Állítás. *Adott K kompakt halmaz esetén* $(\operatorname{Supp} T \times \operatorname{Supp} S) \cap \overset{-1}{A}(K)$ *pontosan akkor kompakt, ha* $\operatorname{Supp} S \cap (K - \operatorname{Supp} T)$ *és* $\operatorname{Supp} T \cap (K - \operatorname{Supp} S)$ *kompakt.*

Bizonyítás A fenti halmazok nyilván zártak, ezért csak a korlátosságot kell vizsgálni. Legyen $B := (\operatorname{Supp} T \times \operatorname{Supp} S) \cap \overset{-1}{A}(K)$. Mivel

$$B = \{\, (x, y) \mid x \in \operatorname{Supp} T,\ y \in \operatorname{Supp} S,\ x + y \in K \,\},$$

könnyű látni, hogy

$$\operatorname{Supp} T \cap (K - \operatorname{Supp} S) = \{\, x \in \operatorname{Supp} T \mid \text{ létezik } y \in \operatorname{Supp} S\colon x \in -y + K \,\} = \\ = \operatorname{pr}_1[B],$$

és hasonlóan a másik esetben a második projekcióval. Ebből már látszik az ekvivalencia.

Következmény. *A konvolúció létezésének elégséges feltétele, hogy T és S közül egyik kompakt tartójú legyen.*

Állítás. $\operatorname{Supp}(T * S) \subset \operatorname{Supp} T + \operatorname{Supp} S$.

Bizonyítás Legyen φ olyan alapfüggvény, amelynek tartója a jobb oldal komplementerében van. Azt kell belátni, hogy ekkor $(T * S \mid \varphi) = 0$. Ez definíció szerint $(T \otimes S \mid \varphi \circ A)$, ami nulla, hiszen

$$\operatorname{Supp}(T \otimes S) \cap \operatorname{Supp}(\varphi \circ A) \subset (\operatorname{Supp} T \times \operatorname{Supp} S) \cap \overset{-1}{A}(\operatorname{Supp} \varphi) \subset \\ \subset \overset{-1}{A}\,(A[\operatorname{Supp} T \times \operatorname{Supp} S] \cap \operatorname{Supp} \varphi) = \overset{-1}{A}\,((\operatorname{Supp} T + \operatorname{Supp} S) \cap \operatorname{Supp} \varphi) = \\ = \overset{-1}{A}(\emptyset) = \emptyset.$$

8.4.

Állítás. *Ha a T és S disztribúciók konvolúciója létezik, akkor minden p multipolinom esetén létezik $\big(p(\mathrm{D})T\big) * S$ és $T * \big(p(\mathrm{D})S\big)$, továbbá*

$$p(\mathrm{D})(T * S) = \big(p(\mathrm{D})T\big) * S = T * \big(p(\mathrm{D})S\big).$$

Bizonyítás Elég belátni a mondottakat a parciális deriváltakra. A derváltak konvolúciója nyilván értelmes, mert

$$\operatorname{Supp}((\partial_k T) \otimes S) = \operatorname{Supp}(\mathrm{D}_{1,k}(T \otimes S)) \subset \operatorname{Supp}(T \otimes S).$$

Legyen φ alapfüggvény. Ekkor

$$(\partial_k(T*S)\mid\varphi) = -(T*S\mid\partial_k\varphi) = -(T\otimes S\mid\partial_k\varphi\circ A)\,.$$

Mivel $\partial_k\varphi\circ A = \mathrm{D}_{1,k}(\varphi\circ A) = \mathrm{D}_{2,k}(\varphi\circ A)$, így folytathatjuk

$$(\mathrm{D}_{1,k}(T\otimes S)\mid\varphi\circ A) = ((\partial_k T)\otimes S\mid\varphi\circ A) = ((\partial_k T)*S\mid\varphi)\,,$$

illetve hasonlóan a másik deriváltra is.

Állítás. *Ha a T és S disztribúciók konvolúciója létezik és $a\in\mathbb{R}^N$, akkor létezik $(L_aT)*S$ és $T*(L_aS)$, és*

$$L_a(T*S) = (L_aT)*S = T*(L_a*S).$$

Bizonyítás A konvolúciók létezése nyilvánvaló. Továbbá minden φ alapfüggvényre

$$\begin{aligned}((L_aT)*S\mid\varphi) &= ((L_aT)\otimes S\mid\varphi\circ A) = \big(L_{(a,0)}(T\otimes S)\,\big|\,\varphi\circ A\big) = \\ &= \big(T\otimes S\,\big|\,L_{(-a,0)}(\varphi\circ A)\big) = (T\otimes S\mid(L_{-a}\varphi)\circ A) = \\ &= (T*S\mid L_{-a}\varphi) = (L_a(T*S)\mid\varphi)\,.\end{aligned}$$

A másik egyenlőség is hasonlóan belátható.

8.5.

A konvolúciónak, mint „szorzásnak" az egységeleme a Dirac-delta:

$$\delta*T = T.$$

Valóban, lévén kompakt tartójú, a Dirac-delta konvolválható minden disztribúcióval, és

$$(\delta*T\mid\varphi) = (\delta\otimes T\mid\varphi\circ A) = (T\mid x\mapsto(\delta\mid\varphi(x+\cdot))) = (T\mid\varphi)\,.$$

Ezt felhasználva megmutathatjuk, hogy a konvolúció nem asszociatív: $N=1$ esetén, ha H a Heaviside-függvény, akkor $1*(\delta'*H) = 1*(\delta*H') = 1*(\delta*\delta) = 1$, viszont $(1*\delta')*H = (1'*\delta)*H = 0$.

8.6.

Fejezetünk elején a függvények konvolúciójának formulája általánosítható függvény és mérték konvlúciójára.

Legyen f Borel-mérhető függvény és m Radon-mérték. Ha minden $x\in\mathbb{R}^N$ esetén az $y\mapsto f(x-y)$ integrálható $|m|$ szerint, akkor értelmezzük az

$$(f*m)(x) := \int \mathbb{R}^N f(x-y)dm(y) \quad (x\in\mathbb{R}^N)$$

függvényt.

Állítás. *Ha f lokálisan integrálható, és $f*m$ is lokálisan integrálható, akkor*

$$R_{f*m} = R_f * F_m.$$

Bizonyítás

$$(R_f \otimes F_m \mid \varphi \circ A) = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} f(z)\varphi(z+y)\, dm(y)\, dz =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\, dm(y) \right) \varphi(x)\, dx = (R * f * m \mid \varphi)\,,$$

ahol az integrálások sorrendjének megcserélhetőségére vonatkozó Fubini-tételt és az $x := z + y$ helyettesítést alkalmaztuk.

8.7. Feladatok

1. Legyen $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$ és $a \in \mathbb{R}^N$. Ekkor $\delta_a * T = L_a T$.

2. Legyen $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$ és p multipolinom. Ekkor $T * (p(\mathrm{D})\delta) = p(\mathrm{D})T$.

3. Igazoljuk, hogy $T * 1$ pontosan akkor értelmes, ha T kompakt tartójú .

4. Bizonyítsuk be, hogy rögzített T disztribúció esetén, ha S és S_n $(n \in \mathbb{N})$ kompakt tartójú disztribúciók, és $\lim_n S_n = S$, akkor $\lim_n T * S_n = T * S$.

5. Az f lokálisan integrálható és a φ alapfüggvény konvolúcióját így is írhatjuk: $(f * \varphi)(x) = (R_f \mid L_x \tau\varphi)$, ahol L_x az x-szel való eltolás, és $\tau := K_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}}$ (lásd 5.5). Ennek alapján definiáljuk a T disztribúció és a φ alapfüggvény esetén az $x \mapsto (T * \varphi)(x) := (T \mid L_x \tau\varphi)$ függvényt. Mutassuk meg, hogy $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, továbbá $T * R_\varphi = R_{T*\varphi}$.

6. Az előző két feladat alapján mutassuk meg, hogy $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ sűrű $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$-ban. (Útmutatás: legyen $\varrho_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ úgy, hogy $\lim_n R_{\varrho_n} = \delta$, és tekintsük az $\eta_{n,n+1} T * \varrho_n$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatot.)

9. Fourier-transzformáció

9.1.

Bármely integrálható függvénynek értelmezhető a Fourier-transzformáltja, azonban a Fourier-transzformáció csak a gyorsan csökkenő függvényeken rendelkezik igazán jó tulajdonságokkal. A $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ **pozitív**, illetve **negatív Fourier-transzformáltja**

$$(F_\pm \varphi)(y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy\cdot x} \varphi(x)\, dx \qquad (y \in \mathbb{R}^N),$$

ahol $\cdot$ az $\mathbb{R}^N$-beli skaláris szorzatot jelöli (a matematikai irodalomban hol a pozitív, hol a negatív előjellel fogadják el a definíciót, mi mindkettőt tekintjük).

A paraméteres integrálok differenciálhatóságára vonatkozó tétel alkalmazásával egyszerűen beláthatjuk hogy $F_\pm\varphi$ végtelenszer differenciálható. Ugyanis az integrandus minden rögzített x mellett y-ban minden koordináta szerint differenciálható, és $\pm ix_k e^{\pm iy\cdot x}\varphi(x)$ a k-ik parciális deriváltja, amely minden rögzített y mellett x-ben integrálható, és y-tól független integrálható majoránsa $x \mapsto |x_k \varphi(x)|$. Tehát $F_\pm\varphi$ a változójának minden komponense szerint parciálisan differenciálható, és

$$\frac{\partial (F_\pm\varphi)(y)}{\partial y_k} = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} (\pm ix_k) e^{\pm iy\cdot x} \varphi(x)\, dx.$$

Ezek a parciális deriváltak, ugyanilyen indoklással, ugyancsak parciálisan differenciálhatók, és indukcióval beláthatjuk, hogy $F_\pm\varphi$ akármilyen rendben, akármilyen sorrendben parciálisan differenciálható, azaz végtelenszer differenciálható.

Egyszerűen bizonyítható, hogy tetszőleges p és q multipolinom, $a\in\mathbb{R}^N$ és $A:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ lineáris bijekció esetén

$$\begin{aligned} p(\mp i\mathrm{D})\circ F_\pm &= F_\pm\circ M_p, & M_q\circ F_\pm &= F_\pm\circ q(\pm i\mathrm{D}),\\ L_a\circ F_\pm &= F_\pm\circ M_{\exp(\mp i\,a\bullet)}, & F_\pm\circ L_a &= M_{\exp(\pm i\,a\bullet)}\circ F_\pm,\\ K_A\circ F_\pm &= F_\pm\circ(|\det A|K_{A^{*-1}}), & F_\pm\circ K_A &= |\det A|K_{A^{*-1}}\circ F_\pm. \end{aligned}$$

Állítás. *Minden $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ esetén $F_\pm\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.*

Bizonyítás Ha q,p N-változós multipolinomok és $\varphi{\in}\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, akkor az előbbi első és második formula szerint

$$qp(\mp iD)F_\pm\varphi = F_\pm q(\pm iD)p\varphi,$$

így minden $x{\in}\mathbb{R}^N$ esetén

$$|(qp(\mp iD)F_\pm\varphi)(x)| = |(F_\pm(q(\pm iD)p\varphi))(x)| \le \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N}|q(\pm iD)p\varphi|,$$

azaz $qp(\mp iD)F_\pm\varphi$ korlátos, így $F_\pm\varphi{\in}\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

9.2.

Állítás. *Az $\eta:\mathbb{R}^N{\to}\mathbb{C}$, $x{\mapsto}e^{-|x|^2/2}$ függvény az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ eleme, és $F_\pm\eta{=}\eta$.*

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy η végtelenszer differenciálható és gyorsan csökkenô.

Vegyük elôször az $N{=}1$ esetet. η megoldása az $f'{+}\mathrm{id}_\mathbb{R}f{=}0$ lineáris differenciálegyenletnek, sőt ezen egyenlet minden megoldása $c\eta$ alakú, ahol $c{\in}\mathbb{C}$. Tehát $\pm iD\eta{\pm}i\mathrm{id}_\mathbb{R}\eta{=}0$, következésképpen

$$\mathrm{id}_\mathbb{R}(F_\pm\eta) + D(F_\pm\eta) = F_\pm(\pm iD\eta{\pm}i\mathrm{id}_\mathbb{R}\eta) = 0,$$

azaz $F_\pm\eta$ is ugyanannak a differenciálegyenletnek tesz eleget, ezért létezik $c{\in}\mathbb{C}$ úgy, hogy $F_\pm\eta{=}c\eta$. Azonban

$$c = c\eta(0){=}(F_\pm\eta)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi)}}\int_\mathbb{R} e^{-x^2/2}dx = 1,$$

tehát $F_\pm\eta{=}\eta$.

$N{\ge}2$ esetén a Fubini-tétel szerint

$$\begin{aligned}(F_\pm\eta)(y) ={}&\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy\cdot x}e^{-|x|^2/2}dx = \prod_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy_kx_k}e^{-x_k^2/2}dx_k =\\ &= \prod_{k=1}^N e^{-y_k^2/2} = e^{-|y|^2/2}.\end{aligned}$$

A továbbiakban fontos lesz az az egyszerű észrevétel, hogy ha $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, akkor

$$\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}, \quad (x,y) \mapsto e^{\pm i x \cdot y} \varphi(x)\psi(y)$$

függvény integrálható a Lebesgue-mérték szerint, így a Fubini-tétel alapján

$$\int_{\mathbb{R}^N} (F_\pm \varphi)\psi = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \exp(\pm i x \cdot y)\varphi(x)\psi(y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(F_\pm \psi).$$

Állítás. $F_\pm : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *lineáris bijekció, és*

$$(F_\pm)^{-1} = F_\mp.$$

Bizonyítás Legyen $\alpha > 0$, és alkalmazzuk a $(*)$ összefügést tetszőleges φ-re és a $\psi(y) := \exp(-|y|^2/2\alpha^2)$ függvényre. Ekkor

$$\int_{\mathbb{R}^N} (F_\pm \varphi)(y) \exp(-|y|^2/2\alpha^2)dy = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\alpha^N \exp(-|\alpha x|^2/2)dx =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(z/\alpha) \exp(-|z|^2/2)dz;$$

a második egyenlőség a $z := \alpha x$ helyettesítéssel adódik.

A fenti egyenlôség mindkét oldalán az integrandusnak van α-tól független integrálható majoránsa, a jobb oldalinak $y \mapsto \|\varphi\|_\infty \cdot \exp(-|y|^2/2)$, a bal oldalinak $F_\pm \varphi$, így a Lebesgue tétel következménye szerint az $\alpha \to \infty$ határátmenettel azt kapjuk, hogy

$$\int_{\mathbb{R}^N} (F_\pm \varphi)(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(0) \exp(-|z|^2/2)dz = \varphi(0)(2\pi)^{N/2}.$$

Az előzőek alapján minden $x \in \mathbb{R}^N$ esetén

$$\varphi(x) = (L_{-x}\varphi)(0) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} (F_\pm L_{-x}\varphi)(y)dy =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\mp i x \cdot y}(F_\pm \varphi)(y)dy = (F_\mp F_\pm \varphi)(x),$$

tehát $F_\mp F_\pm \varphi = \varphi$.

9.3.

Állítás. *Az* $F_\pm : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *leképezés* $\mathcal{S}$*-folytosnos.*

Bizonyítás Legyen φ_n 0-hoz tartó függvények sorozata az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ térben. Azt kell belátnunk, hogy tetszőleges p, q multipolinomokkal $pq(\pm i\mathrm{D})F_\pm \varphi_n$ egyenletesen tart 0-hoz. Mivel

$$pq(\pm i\mathrm{D})F_\pm \varphi_n = F_\pm p(\mp i\mathrm{D})q\varphi_n = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm i \bullet x}(p(\mp i\mathrm{D})q\varphi_n)(x\, dx\ ,$$

véve a bal oldali és a jobb oldali kifejezések abszolút értékét és kihasználva a háromszög-egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy

$$|pq(\pm iD)F_\pm\varphi_n| = \left| \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm i\bullet x}(p(\mp iD)q\varphi_n)(x)\,dx \right|$$
$$\leq \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} |p(\mp iD)q\varphi_n| \ .$$

Minthogy a $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ sorozat a nullához tart $\mathcal{S}$-értelemben, $|p(\mp iD)q\varphi_n|$ egyenletesen tart 0-hoz, így a Lebesgue-tétel szerint a fenti egyenlőtlenség jobb oldalán álló integrál is 0-hoz tart. Ezzel állításunkat beláttuk.

9.4.

A fentiek alapján értelmezhető a Fourier-transzformációk transzponáltja mint azok az $F_\pm^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^* \longmapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$ leképezések, melyre

$$\left(F_\pm^* T \mid \varphi\right) = (T \mid F_\pm\varphi) \qquad \text{ahol} \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N),\ T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^* \ .$$

Legyen most $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Ekkor

$$\left(F_\pm^* R_\psi \mid \varphi\right) = (R_\psi \mid F_\pm\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} \psi(y)\,(F_\pm\varphi)\,(y)\,dy =$$
$$\int_{\mathbb{R}^N} \psi(y) \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy\cdot x}\varphi(x)\,dx\,dy =$$
$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm ix\cdot y}\psi(y)\,dy \right) \varphi(x)\,dx = \left(R_{F_\pm\psi} \mid \varphi\right) \ .$$

Ezek alapján kiterjesztjük a Fourier-transzformációkat a temperált disztribúciókra:

Definíció.

$$F_\pm : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^* \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*, \qquad F_\pm := F_\pm^*.$$

Tehát

$$(F_\pm T \mid \varphi) = (T \mid F_\pm\varphi)$$

minden és $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ és $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ esetén .

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy a disztribúciókon értelmezett Fourier-transzformációkra és a szorzás, a differenciálás stb. operátorokra érvényben maradnak a 9.1 pontban felsorolt tulajdonságok.

9.5.

Állítás. *Legyen* m *véges variációjú Radon-mérték, azaz* $|\mathrm{m}|(\mathbb{R}^N) < \infty$. *Ekkor* m *mint disztribúció* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$ *eleme, továbbá* $F_\pm\mathrm{m}$ *reguláris disztribúció, és mint ilyen folytonos függvény,*

$$(F_\pm\mathrm{m})(y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy\cdot x}\,d\mathrm{m}(x) \ .$$

Bizonyítás Először is jegyezzük meg, hogy a fenti integrál értelmes és mint az y függvénye folytonos. Legyen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Ekkor definíció szerint

$$(F_\pm \mathrm{m} \mid \varphi) = (\mathrm{m} \mid F_\pm \varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} (F_\pm \varphi)(x)\, d\mathrm{m}(x)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy\cdot x} \varphi(y)\, dy \right) d\mathrm{m}(x)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy\cdot x}\, d\mathrm{m}(x) \right) \varphi(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} (F_\pm \mathrm{m})(y)\varphi(y)\, dy \ .$$

A fentiekben az integrálokat minden további nélkül megcserélhettük, mert $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ és $|e^{\pm ix\cdot y}| = 1$, tehát az integrálok abszolút értékben léteznek és így a Fubini-tétel értelmében egyenlők.

Állítás. *Legyen* m *kompakt tartójú Radon-mérték. Ekkor* $F_\pm \mathrm{m} \in \Theta(\mathbb{R}^N)$.

Bizonyítás m Fourier-transzformáltja

$$(F_\pm \mathrm{m})\,(y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy\cdot x} f(x)\, d\mathrm{m}(x) \ ,$$

és ez y szerint differenciálható a paraméteres integrálokról szóló tétel szerint, és

$$(\mp \partial_k F_\pm \mathrm{m})\,(y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_K x_k e^{\pm iy\cdot x} \cdot f(x)\, d\mathrm{m}(x) \ ,$$

és az integrál alkalmas konstanssal majorálható. EbbÍl látszik, hogy $F_\pm \mathrm{m}$ végtelenszer differenciálható és akárhanyadik deriváltja egy konstanssal majorálható, tehát a $\Theta(\mathbb{R}^N)$ eleme.

9.6.

A fenti eredmények alkalmazásaképpen számítsuk ki néhány disztribúció Fourier-transzformáltját. Vegyük először a 0-ra koncentrált Dirac- deltát. Az előző tétel szerint

$$(F_\pm \delta)(y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy\cdot x}\, d\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \ .$$

Nyilvánvaló, hogy az a pontra koncentrált Dirac-delta Fourier-transzformáltja is hasonlóképpen számolható:

$$(F_\pm \delta_a)(y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy\cdot x}\, d\delta_a(x) = \frac{e^{\pm iy\cdot a}}{(2\pi)^{N/2}} \ .$$

Legyen most $N = 1$, és vizsgáljuk az $[a, b]$ intervallum karakterisztikus függvénye által meghatározott reguláris disztribúciót! Nyilvánvaló, hogy $\chi_{[a,b]}\lambda$ Radon-mérték, így az előző tétel értelmében a Fourier-transzformáltja

$$\left(F_\pm \left(\chi_{[a,b]}\right)\right)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\pm iyx} \chi_{[a,b]}(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{\pm iyx}\, dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{\pm iyx}}{\pm iy} \right|_{x=a}^{x=b} = \frac{e^{\pm iyb} - e^{\pm iya}}{\pm iy}.$$

9.7.

Most vegyük $\mathbb{R}^3$-ban a 0 középpontú, R sugarú gömb felületi Lebesgue-mértékét, $\lambda_{S_R(0)}$-t. Ez mint disztribúció $S(\mathbb{R}^3)^*$ eleme, azaz alkalmazható az előző tétel, és

$$\left(F_\pm \lambda_{S_R(0)}\right)(y) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i \pm y \cdot x}\, d\lambda_{S_R(0)}(x) \ .$$

Az integrál kiszámításához gömbi polárkoordinátákra térünk át, mégpedig úgy, hogy minden rögzített nemnulla y-hoz választunk két, az y-ra és egymásra is merőleges vektort, és x-et ezáltal fejezzük ki. Tehát

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{\pm iy \cdot x}\, d\lambda_{S_R(0)}(x) =$$
$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi e^{\pm i|y|R\cos\vartheta} R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta\, d\varphi$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{2\pi \cdot R}{\mp i|y|} e^{\pm i|y|R\cos\vartheta} \Big|_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} = \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} \frac{R}{|y|} \frac{e^{\mp i|y|R} - e^{\pm i|y|R}}{\pm 2i} \ .$$

Innen kapjuk, hogy

$$\left(F_\pm \lambda_{S_R(0)}\right)(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{R\sin(|y|R)}{|y|} \ .$$

Tudjuk, hogy a szóban forgó Fourier-transzfromált folytonos függvény, tehát az $y = 0$ helyen az értéke a fenti kifejezésnek az ismert határértéke.

9.8.

Emlékezzünk, hogy kompakt tartójú disztribúció bármely végtelenszer differenciálható függvényre is alkalmazható; ennek ismeretében állíthatjuk, hogy kompakt tartójú disztribúciókra is igaz a Radon-mértékekre vonatkozó elöbbi eredményünk; azonban ezt nem bizonyítjuk.

Állítás. *Legyen $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$ és* $\operatorname{Supp} T$ *kompakt. Ekkor $F_\pm T$ reguláris disztribúció és mint ilyen a $\Theta(\mathbb{R}^N)$ eleme,*

$$(F_\pm T)(y) = \left(T \,\middle|\, \frac{e^{\pm iy\bullet}}{(2\pi)^{N/2}} \right) \ .$$

9.9.

Mielőtt a következő tételt kimondanánk, bevezetünk egy fogalmat. Korábban már definiáltuk folytonos függvények tartóját, de az is nyilvánvaló, hogy ennek a definíciónak nem folytonos függvények esetén nincs értelme.

Az $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ mérhető függvényt **kompakt tartójúnak** mondjuk, ha az $f\lambda$ mérték kompakt tartójú, azaz létezik olyan $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt halmaz, hogy f a K komplementerén λ-majdnem mindenütt nulla.

Ha f kompakt tartójú lokálisan integrálható függvény, akkor $F_\pm \lambda$ kompakt tartójú Radon-mérték, tehát f Fourier-transzformáltja – amely megegyezik az

$f\lambda$ Fourier-transzformáltjával – a $\Theta(\mathbb{R}^N)$ eleme. Ezek figelembevételével értelmes a következÍ állítás.

Állítás. *Legyen $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ kompakt tartójú lokálisan integrálható függvény és $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Ekkor $F_\pm(f * \varphi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, továbbá*

$$F_\pm(f * \varphi) = (2\pi)^{N/2}(F_\pm f) \cdot (F_\pm \varphi) \ .$$

Bizonyítás Tudjuk, hogy $F_\pm(\varphi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ és $F_\pm(f) \in \Theta(\mathbb{R}^N)$, tehát 5.9 alapján elég az álllításban szereplő egyenlőséget megmutatni.

$$F_\pm(f * \varphi)(y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy\cdot x}(f * \varphi)(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy\cdot x} \int_{\mathbb{R}^N} f(z)\varphi(x-z)\,dz\,dx \ .$$

Ez az integrál az $x - z =: u$ helyettesítéssel átalakítható, és így

$$F_\pm(f * \varphi)(y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy\cdot(u+z)} \int_{\mathbb{R}^N} f(z)\varphi(u)\,dz\,du =$$
$$= (2\pi)^{N/2}\left(\frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy\cdot z} f(z)\,dz\right) \cdot \left(\frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm iy\cdot u}\varphi(u)\,du\right)$$
$$= (2\pi)^{N/2} F_\pm(f) \cdot F_\pm(\varphi) \ ,$$

amit bizonyítani akartunk.

9.10.

Az előbbi eredmény általánosabban is igaz, nevezetesen a disztribúciók körében; ezt csak kimondjuk bizonyítás nélkül.

Állítás. *Legyen T kompakt tartójú disztribúció és S temperált disztribúció. Ekkor $T * S \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$, továbbá*

$$F_\pm(T * S) = (2\pi)^{N/2}(F_\pm T)\,(F_\pm S) \ .$$

9.11.

Az alábbiakban értelmezzük a gyorsan csökkenő függvények részleges Fourier-transzformáltját. Ehhez $\mathbb{R}^N$-et $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^K$ alakban állítjuk elő.

Definíció. *A $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^K)$ függvénynek az első M változója szerinti* ***parciális*** *Fourier-transzformáltja*

$$\left(\left(F_\pm^{(M)} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^K)}\right)\varphi\right)(p, v) := \frac{1}{(2\pi)^{M/2}} \int_{\mathbb{R}^M} e^{\pm ip\cdot u}\varphi(u, v)\,du \ .$$

Hasonlóképpen értelmezhető $\mathrm{id}_{S(R^M)} \otimes F_\pm^{(K)}$ is.

Ugyanúgy, ahogy a Fourier-transzformácóra megmutattuk, beláthatjuk, hogy $F_\pm^{(M)} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^K)} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ folytonos lineáris bijekció, az inverze $F_\mp^{(M)} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^K)}$. Ezért a transzponáltján keresztül a 9.4 definícióhoz hasonlóan értelmezhetjük a parciális Fourier-transzformációkat a temperált disztribúciókon is.

9.12.

A parciális Fourier-transzformációk segítségével bebizonyíthatjuk a hullámegyenlet alapmegoldására vonatkozó 6.4 állítást.

Vegyük tehát a

$$(\partial_0^2 - \triangle)K = \delta^{(4)}$$

egyenletet, és tegyük fel, hogy az alapmegoldás mérsékelt disztribúció, azaz $T \in S(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)^*$. Ekkor a fenti egyenletre alkalmazható az $\mathrm{id}_{S(\mathbb{R})} \otimes F_{\pm}^{(3)}$ parciális Fourier-transzformáció, és az eredmény

$$(\partial_0^2 + |\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}|^2)\hat{K} = \delta^{(1)} \otimes \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} ,$$

ahol a rövidítés kedvéért K-val jelöltük Z parciális Fourier-transzformáltját. A fenti egyenletnek a

$$\hat{K}_+(t,p) := \frac{H(t)}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\sin|p|t}{|p|} ,$$

illetve a

$$\hat{K}_-(t,p) := \frac{H(-t)}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\sin|p|(-t)}{|p|} ,$$

függvénynek megfelelő reguláris disztribúció a megoldása; $\hat{K}_+$-t retardált, $\hat{K}_-$-t avanzsált megoldásnak nevezzük. A következőképpen ellenőrizhetjük, hogy például $\hat{K}_+$ valóban megoldás:

$$\partial_0\hat{K}_+(t,p) = \delta^{(1)} \otimes \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\sin|p|t}{|p|} + \frac{H(t)}{(2\pi)^{3/2}}\cos|p|t = \frac{H(t)}{(2\pi)^{3/2}}\cos|p|t ,$$

illetve

$$\begin{aligned}\partial_0^2\hat{K}_+(t,p) = \delta^{(1)} \otimes \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\cos|p|t - \frac{H(t)}{(2\pi)^{3/2}}|p|\sin|p|t \\ = \delta^{(1)} \otimes \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} - \frac{H(t)}{(2\pi)^{3/2}}|p|\sin|p|t .\end{aligned}$$

Ugyanakkor

$$\left(|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}|^2\hat{K}_+\right)(t,p) = |p|^2 \frac{H(t)}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\sin|p|t}{|p|} .$$

Az inverz Fourier-transzformációval $K_+ = (\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \otimes F_{\mp}^{(3)})\hat{K}_+$. Így tehát egy $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ függvényre

$$(K_+|\varphi) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3} K_+(t,p)e^{\mp ip\cdot x}\,dp\right)\varphi(t,x)\,dt\,dx .$$

Külön ki szeretnénk hangsúlyozni, hogy a fenti integrálformula formális (mert semmi nem garantálja azt, hogy a p szerinti integrál létezik), csak azt jelenti, hogy az adott függvénynek mint disztribúciónak a p változó szerinti Fourier-transzformáltját kell venni.

Most használjuk fel a szóban forgó függvény konkrét alakját :

$$\hat{K}_+(t,p) = \frac{H(t)}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\sin|p|t}{|p|} \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}t}{\sqrt{\frac{2}{\pi}}t} = \frac{H(t)}{4\pi t}\sqrt{\frac{2}{\pi}}t\frac{\sin|p|t}{|p|} \ .$$

Emlékeztetünk arra, hogy a fenti egyenlőségben felbukkanó $\sqrt{\frac{2}{\pi}}t\frac{\sin|p|t}{|p|}$ kifejezés éppen a t sugarú gömbhéj Lebesgue-mértékének Fourier-transzformáltja. Ezt, és a Heaviside-függvény tulajdonságait felhasználva kapjuk, hogy

$$(K_+|\varphi) = \int_0^\infty \frac{1}{4\pi t}\int_{S_t(0)} \varphi(t,x)\, d\lambda_{S_t(0)}(x)\, dt = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(|x|,x)}{4\pi|x|}\, dx \ ,$$

ami éppen a bizonyítandó volt.

Avanzsált megoldás esetén a bizonyítás menete teljesen hasonló.

9.12.1.

A Fourier-tanszformáció segítségével azt is megmutathatjuk, mennyire nem egyértelmű a Laplace-operátor alapmegoldása (lásd a következő fejezetet).

Állítás. *Legyen T temperált disztribúció, azaz $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$ úgy, hogy $\triangle T = 0$. Ekkor T multipolinom.*

Bizonyítás Fourier-transzformáljuk a $\triangle T = 0$ egyenlőséget. Ekkor kapjuk, hogy

$$0 = F_\pm(\triangle T) = -|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^2(F_\pm T) \ ,$$

ahonnan következik, hogy $\mathrm{Supp}(F_\pm T) \subset \{0\}$. Ezért (lásd a 5.8 állítást) van olyan p multipolinom, hogy

$$F_\pm T = p(\pm iD)\delta \ ,$$

amiből inverz Fourier-transzformáció után

$$T = \text{konstans } p \ ,$$

ami éppen a bizonyítandó volt.

9.13.

A Fourier-transzformációt értelmezhetjük úgy is, hogy skalárszorzat helyett az exponenciálisban Lorentz-szorzatot veszünk, amit a relativitáselmélet követel meg. Az $\mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3) = \mathcal{S}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ egyenlőséget tekintve, ha az 1, illetve a 3 indexszel utalunk az eddig tárgyalt megfelelő Fourier-transzformációkra, akkor a Lorentz-szorzásos Fourier-transzformáció

$$F^1_\pm \otimes F^3_\mp.$$

Erre lényegében minden eddigi érvényben marad, csak arra kell ügyelni, hogy egy p multipolinommal való szorzást nem egyszerűen $p(\pm i\mathrm{D})$-be vagy $p(\mp i\mathrm{D})$-be visz át: a más előjelet ad az $\mathbb{R}$ („idő”) szerinti parciális deriváltnak, mint az $\mathbb{R}^3$ („tér”) szerinti parciális deriváltaknak.

10. Lineáris differenciáloperátorok

10.1.

Definíció. *Legyen p multipolinom. A $p(\mathrm{D})$ állandó együtthatójú lineáris differenciáloperátor **alapmegoldásának** nevezzük az E disztribúciót, ha*

$$p(\mathrm{D})E = \delta.$$

A $p(\mathrm{D})$ differenciáloperátor alapmegoldása általában nem egyértelmű: ha E_0 olyan disztribúció, mely megoldása a homogén egyenletnek, azaz $p(\mathrm{D})E_0 = 0$, akkor nyilván $E + E_0$ is alapmegoldás. Fordítva pedig, ha E és E' alapmegoldások, akkor ezek egymástól csak egy fenti tulajdonságú E_0 disztribúcióban térnek el egymástól.

Állítás. *Tekintsük a $p(\mathrm{D})$ differenciáloperátort, és legyen T disztribúció, amely konvolválható a differenciáloperátor egy E alapmegoldásával. Ekkor az*

$$\left(U \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*\right)? \qquad p(\mathrm{D})U = T$$

differenciálegyenletnek az $E * T$ konvolúció megoldása.

A megoldás egyértelmű a következő értelemben: ha U_1 és U_2 olyan megoldás, hogy a különbségük E-vel konvolválható, akkor $U_1 = U_2$.

Bizonyítás $E * T$ megoldás, mert $p(\mathrm{D})(E * T) = (p(\mathrm{D})E) * T = \delta * T = T$. Tegyük most fel, hogy U_1 és U_2 megoldások, és $U_0 := U_1 - U_2$ konvolválható E-vel. Ekkor egyrészt

$$p(\mathrm{D})(U_0 * E) = U_0 * (p(\mathrm{D})E) = U_0 * \delta = U_0,$$

másrészt viszont

$$p(\mathrm{D})(U_0 * E) = (p(\mathrm{D})U_0) * E = 0 * E = 0,$$

azaz $U_0 = 0$.

10.2.

$\mathbb{R}^N$-beli bármely p másodfokú multipolinom $p(x) = A(x, x) + bx + c$ alakra hozható, ahol $A\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris forma, $b \in (\mathbb{R}^N)^*$, és $c \in \mathbb{R}$. Mint ismeretes (lásd Analízis II.), tetszőleges A-ortogonális bázis esetén a nulla A-nulla bázisvektorok z száma, az A-pozitív bázisvektorok p száma és az A-negatív bázisvektorok n száma a bázistól független, csak az A bilineáris formára jellemző.

Definíció. *A $p(\mathrm{D})$ állandó együtthatós másodrendű lineáris parciális differenciáloperátor (illetve a megfelelő differenciálegyenlet)*

*(i) **elliptikus**, ha $z = 0$ (azaz A nem degenerált), és $p = N$ vagy $n = N$;*

*(ii) **hiperbolikus**, ha $z = 0$, és $p = N - 1$ vagy $n = N - 1$;*

*(iii) **parabolikus**, ha A degenerált ($z \neq 0$), de $p = N - 1$ vagy $n = N - 1$.*

11. A potenciálegyenlet

11.1.

Az $|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}|^2$ multipolinomnak megfelelő differenciáloperátort Laplace-operátornak hívjuk, és szokás szerint a $\triangle$ szimbólummanl jelöljük; tehát $\triangle = \sum_{k=1}^{N} \partial_k^2$. Ez elliptikus differenciáloperátor.

A következőkben csak az $N = 3$ esettel foglalkozunk.

11.2.

Az elektrosztatika klasszikus feladata szerint a $\varrho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ töltéssűrűség keltette potenciált a

$$(u \in C^2(\mathbb{R}^3))? \qquad \triangle u = -\varrho$$

Laplace-egyenlet határozza meg.

Könnyen átfogalmazhatjuk a problémát disztribúciókra. Legyen $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^*$ a „tölteseloszlás”, és tekintsük az

$$(U \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^*)? \qquad \triangle U = -T \tag{5}$$

általánosított Laplace-féle differenciálegyenletet. Az 6.2 állítás alapján tudjuk, hogy $Z = -\frac{1}{4\pi|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}|}$ lokálisan integrálható függvény meghatározta disztribúció a Lapalce-operátor alapmegoldása.

A 8.6 állítást alkalmazva azonnal kapjuk a következő eredményt:

Állítás. *Legyen az $m\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ Radon-mérték olyan, hogy minden $x \in \mathbb{R}^3$ esetén $\dfrac{1}{|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} - x|}$ integrálható $|m|$ szerint, és az*

$$x \mapsto V(x) := (-Z * m)(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{dm(y)}{|x-y|} \tag{6}$$

függvény lokálisan integrálható. Ekkor az m-nek megfelelő disztribúció konvolválható a fenti alapmegoldással, és a $T = m$ esetben a (5) differenciálegyenlet megoldása a (6) függvénynek megfelelő reguláris disztribúció.

11.3.

Néhány példa:

(i) Ha m abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre és ϱ sűrűségfüggvényét valamely $\alpha > 0$ esetén az $\frac{1}{1+|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}|^{2+\alpha}}$ egy számszorosa majorálja, akkor létezik a kérdéses konvolúció.

(ii) Konstans tölteseloszlás esetén a konvolúció nem létezik.

(iii) Legyen adott egy F felület. $\sigma : F \to \mathbb{R}$ felületi töltéssűrűség esetén $m := \sigma\lambda_F$, ahol λ_F a felület Lebesgue-mértéke $\mathbb{R}^3$-ban. A megfelelő feltételek teljesülése esetén

$$V(x) = \frac{1}{4\pi} \int_F \frac{\sigma(y) d\lambda_F(y)}{|x-y|}$$

a töltések keltette potenciál.

Nevezetesen végtelen sík felület és konstans σ esetén a fenti integrál és így a kérdéses konvolúció nem létezik: ily módon nem értelmes a töltések keltette potenciál.

(iv) Az elektromos térerősség a potenciál negatív gradiense. Gömbi koordinátákkal könnyen megmutatható, hogy $\partial_k Z$ (lásd 1) lokálisan integrálható, ezért 5.7 alapján

$$E_k = -\partial_k R_V = -\partial_k(R_Z * F_m) = -(\partial_k R_Z) * F_m = -R_{\partial_k Z} * F_m,$$

azaz

$$E_k(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(x-y)_k}{|x-y|^3} dm(y).$$

11.4.

Az elektoromos dipóleloszlást $\mathbf{P}\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ vektor-mértékkel írhatjuk le. A hozzá tartozó látszólagos tölteseloszlás $-\mathrm{div}\mathbf{P}$, ami azt jelenti, hogy az általa létrehozott potenciál $Z * \mathrm{div}\mathbf{P}$ (feltéve, hogy a konvolúció létezik). Ha Z konvolválható $\mathbf{P}$-vel is, akkor $Z * (-\partial_i P_i) = (-\partial_i N) * P_i$, tehát

$$V(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sum_i (x-y)_k \, dP_k(y)}{4\pi|x-y|^3} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x-y)}{4\pi|x-y|^3} \cdot d\mathbf{P}(y).$$

Speciálisan a $p\delta_y$ pontdipólus esetén $V(x) = \frac{(x-y)\cdot p}{|x-y|^3}$.

Az elektromos térerősség

$$E_i = -\partial_i R_V = -\partial_i (\sum_{k=1}^{3} R_{\partial_k Z} * F_{P_k} = \sum_{k=1}^{3} \partial_i R_{\partial_k Z} * F_{P_k}.$$

Igen fontos: $\partial_i\partial_k Z$ (lásd 1) nem lokálisan integrálható, tehát $\partial_i R_{\partial_k Z}$ nem egyenlő ennek a függvénynek megfelelő – mert nincs ilyen – disztribúcióval; más szóval, itt az elektromos térerősség formulájában szereplő disztribúció már nem reguláris.

Vizsgáljuk meg ezt a nem reguláris disztribúciót!

$$\begin{aligned}(\partial_i\partial_k R_Z \mid \varphi) = -\,(\partial_k R_Z \mid \partial_i\varphi) = -\int_{\mathbb{R}^3} \partial_k Z \partial_i \varphi = -\lim_{r\to 0}\int_{G_r(0)^\diamond} \partial_k Z \partial_i\varphi = \\ = \lim_{r\to 0}\int_{G_r(0)^\diamond} \pi\partial_k Z\varphi - \lim_{r\to 0}\int_{S_r(0)} n_i \partial_k Z \varphi \, d\lambda_{S_r}\end{aligned}$$

ahol a $-\partial_k Z \partial_i \varphi = \partial_i\partial_k Z\varphi - \partial_i(\partial_k Z\varphi)$ öszefüggést, valamint Gauss tételét alkalmaztuk; n az r sugarú gömbhéj a „befelé irányított" normálvektora.

$\partial_i\partial_k Z$ konkrét alakjából – $\frac{x_k}{|x|} = -n_k$ – polárkoordinátákkal azonnal látjuk, hogy $\int_{G_r(0)^\diamond} \partial_i\partial_k Z = 0$, ezért a fenti jobb oldal első tagjának az értéke nem változik, ha az integrandusból levonunk $\partial_i\partial_k Z\varphi(0)$-t. Viszont a $\varphi = \varphi(0) + \sum_k \partial_k\varphi(\xi(x))x_k$ Taylor-formulából azt következtethetjük, hogy $\partial_i\partial_k Z(\varphi - \varphi(0)$ integrálható az egész $\mathbb{R}^3$-on, ezért a szóban forgó tag határértéke

$$\int_{\mathbb{R}^3} \partial_i\partial_k Z(\varphi - \varphi(0)),$$

ami a 4.3 pontban említett depolarizáció.

Továbbá Z konkrét alakjával

$$\int_{S_r} n_i \partial_k Z \varphi \, d\lambda_{S_r(0)} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(0)} \frac{n_i n_k}{r^2} \varphi(rn) r^2 \, d\lambda_{S_1(0)}.$$

Ennek limesze, miközben r tart a nullához,

$$\frac{1}{3} \delta_{ik} \varphi(0)$$

(Kronecker-delta!). Végül is tehát:

$$(\partial_i \partial_k R_Z \mid \varphi) = \int_{\mathbb{R}^3} \partial_i \partial_k Z(\varphi - \varphi(0)) + \frac{1}{3} \delta_{ik} \varphi(0).$$

11.5. Feladatok

1. Legyen adott egy egyenes hasábban egyenletes sűrűségű dipóluseloszlás, amely merőleges a hasáb szemben fekvő két oldalára. Ekkor a fizikai meggondolások azt eredményezik, hogy a látszólagos tölteseloszlás a két oldalra van koncentrálva, egyenletes $|\mathbf{p}|$ illetve $-|\mathbf{p}|$ felületi sűrűséggel. Matematikailag pontosan ezt a következőképp írhatjuk le. Legyen T nyílt halmaz $\mathbb{R}^2$-ben, $a < b \in \mathbb{R}$, a hasáb $H := T \times [a, b]$, $\mathbf{p} := (0, 0, p)$, és a $\mathbf{P}$ dipóluseloszlást a $\mathbf{p}\chi_H$ függvénynek megfelelő reguláris disztribúcióval írhatjuk le. Mutassuk meg, hogy függvényértelemben $\mathrm{div}(\mathbf{p}\chi_H) = 0$ majdnem mmindenütt, disztribúcióértelemben viszont $\mathrm{div}\mathbf{P} = p(\delta_b - \delta_a) \otimes \lambda_T)$ (lásd 5.10), ami egybeesik a fizikai meggondolások eredményével.

2. A pontdipólust a fizikában úgy képzelik előállítani, hogy egyre nagyobb, azonos nagyságú pozitív és negatív ponttöltést hoznak egyre közelebb egymáshoz. Legyen $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$; mutassuk meg, hogy $\lim_{e\to\infty}(e\delta_{\mathbf{p}/e} - e\delta) = -\mathrm{div}(\mathbf{p}\delta)$. (Útmutatás: legyen $a := 1/e$.)

3. Tekintsük az $\mathbf{A}$ mágneses vektorpotenciált és az $\mathbf{i}$ áramot is függvények helyett disztribúcióknak: jelölje komponenseiket $A_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^*$, illetve $i_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^*$ $(k = 1, 2, 3)$. A fentiek értelmében, ha $\mathbf{i}$ konvolválható N-nel, akkor a $\triangle\mathbf{A} = \mathbf{i}$ egyenlet megoldása $N * \mathbf{i}$ (Ampère-törvény).

A G irányított görbén mint vezetb̋en folyó i nagyságú egyenáramot az $\mathbf{i} = i\boldsymbol{\lambda}_G$ írja le, ahol $\boldsymbol{\lambda}_G$ a görbe vektori Lebesgue-mértéke. Adjuk meg egy köráram által gerjesztett mágneses mező vektorpotenciálját!

4. Adjuk meg az $\mathbf{M}\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ vektor-mérték által meghatározott mágneses momentumeloszlás mágneses mezőjének vektorpotenciálját. (A látszólagos áram $\mathrm{rot}\mathbf{M}$.)

5. A pontmágnest a fizikában úgy is előállítják, hogy egyre kisebb sugarú, egyre erősebb köráramot vesznek. Legyen $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3$; mutassuk meg, hogy a rá merőleges síkban a talppontja körüli r sugarú G_r körvonalban „pozitív irányban" folyó áramra $\lim_{r\to 0} \frac{|\mathbf{m}|}{r^2} \boldsymbol{\lambda}_{G_r} = \mathrm{rot}(\mathbf{m}\delta)$.

12. A diffúzióegyenlet

12.1.

Most az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$-beli parabolikus $\partial_0 - \triangle$ differenciáloperátorral foglalkozunk, ahol ∂_0 az $\mathbb{R}$-változó (az „idő") szerinti parciális differenciálás, $\triangle$ pedig az $\mathbb{R}^N$-

változó (a „tér") szerint Laplace-operátor. Valamely anyagnak egy (végtelen kiterjedésű) közegben levő u koncentrációját, ha adott az anyag $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ forrása, a

$$(u \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R})? \qquad (\partial_0 - \triangle)u = f$$

diferenciálegyenlet határozza meg. Ez az egyenlet egyszerűen értelmezhető a disztribúciók körében is, és megoldása a forrásnak az alapmegoldással vett konvolúciója.

A gyakorlatban azonban sokszor úgy merül fel a probléma, hogy a forrás nem ismert „ősidők óta", csak egy meghatározott „kezdeti" időponttól kezdve, és adva van a kezdeti koncentráció. Vagyis az $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ forrás és $u_0 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ kezdeti koncentráció esetén az

$$(u \colon \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R})? \qquad (\partial_0 - \triangle)u = f, \qquad u(0, \cdot) = u_0$$

kezdetiérték-probléma megoldását keressük. Klasszikus keretek között az u-tól megfelelően sokszori differenciálhatóságot kell megkövetelni.

Ha át akarjuk fogalmazni a problémát disztribúciókra, első látásra nagy nehézségbe ütközünk: nincs értelme annak, hogy egy disztribúció egy üres belsejű halmazon ($\{0\} \times \mathbb{R}^N$-en) adott értéket vesz fel. Ez a nehézség azonban áthidalható.

Tekintsük a szóban forgó függvényeknek a következő iterjesztését:

$$\begin{aligned} \hat{u} \quad &: \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \quad (t, x) \mapsto \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0, \\ u(t, x), & \text{ha } t \geq 0; \end{cases} \\ \hat{f} \quad &: \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \quad \text{hasonlóan.} \end{aligned}$$

Jelöljük az egydimenziós delta-disztribúciót $\delta^{(1)}$-gyel.

Állítás. *Ha $\hat{f}$ és u_0 lokálisan integrálható , akkor a fenti kezdetiérték-problémával egyenértékű a következő disztribúcióegyenlet*

$$(\partial_0 - \triangle)\hat{u} = \hat{f} + \delta^{(1)} \otimes u_0,$$

ahol megintcsak nem különböztettük meg a függvényeket és az azoknak megfelelő disztribúciókat.

Bizonyítás A bal oldal hatása egy φ alapfüggvényen:

$$\begin{aligned} ((\partial_0 - \triangle)\hat{u} \mid \varphi) = (\hat{u} \mid (-\partial_0 - \triangle)\varphi) = - \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N} \hat{u}(\partial_0 + \triangle)\varphi = \\ = - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u(\partial_0 + \triangle)\varphi = - \lim_{\alpha \to +0} \int_\alpha^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u(\partial_0 + \triangle)\varphi. \end{aligned}$$

A $u\partial_0\varphi = \partial_0(u\varphi) - (\partial_0 u)\varphi$ és $u\triangle\varphi = (\triangle u)\varphi + \mathrm{div}(u\mathrm{grad}\varphi) - \mathrm{div}(\varphi\mathrm{grad}u)$ egyenlőségeket kihasználva, valamint azt, hogy az utolsó két tag a Gauss-tétellel átalakítva az integrálásnál eltűnik (lásd a 6.3 állítást), a következőket kapjuk:

$$\lim_{\alpha \to +0} \left[- \int_{\mathbb{R}^N} u\varphi|_\alpha^\infty + \int_\alpha^\infty \int_{\mathbb{R}^N} ((\partial_0 - \triangle)u)\,\varphi \right].$$

Mivel φ kompakt tartójú , a felső határon 0 adódik. Továbbá $u(\alpha, \cdot)\varphi(\alpha, \cdot)$ minden α esetén integrálható , és u folytonossága miatt az integrálok felülről korlátosak. A Lebesgue-tétel szerint ezért a limesz bevihető az első integráljel mögé.

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(0,\cdot)\varphi(0,\cdot)+\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^N}((\partial_0-\triangle)u)\varphi=\left(\delta^{(1)}\otimes u(0,\cdot)\,\middle|\,\varphi\right)+((\partial_0-\triangle)u\mid\varphi)\,.$$

(Itt az utolsó tagban a deriváltfüggvényhez tartozó reguláris disztribúció szerepel, míg a disztribúcióegyenlet bal oldalán az $\hat{u}$ disztribúció értelmű deriváltja!) Mivel ez tetszőleges φ-re fennáll, írhatjuk, hogy

$$(\partial_0-\triangle)\hat{u}=(\partial_0-\triangle)u+\delta^{(1)}\otimes u(0,\cdot),$$

ahol a jobb oldal első tagját „kalappal" kell érteni, azaz nullával kiterjeszteni $\mathbb{R}^-\times\mathbb{R}^N$-re. Tehát $\hat{u}$ pontosan akkor elégíti ki a disztribúcióegyenletet, ha $(\partial_0-\triangle)u=f$ és $u(0,\cdot)=u_0$.

12.2.

A 10.1 pontban láttuk, hogy ha $F\in\mathcal{D}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)^*$ és $U_0\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$ adottak, akkor az

$$(U\in\mathcal{D}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)^*)?\qquad(\partial_0-\triangle)U=F+\delta^{(1)}\otimes U_0$$

diffúzióegyenlet megoldása

$$U=C*(F+\delta^{(1)}\otimes U_0),$$

ahol

$$C(t,x):=\frac{H(t)}{(4\pi t)^{N/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

feltéve természetesen, hogy a kérdéses konvolúció létezik. A létezés feltételeiről szól a következő állítás.

Állítás. *Legyen $f\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ mérhető függvény, mely az $\mathbb{R}^-\times\mathbb{R}^N$ halmazon 0, és minden pozitív t esetén $f\big|_{[0,t]\times\mathbb{R}^N}$ korlátos. Legyen továbbá $u_0\colon\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ korlátos mérhető függvény. Ekkor az alábbi konvolúciók léteznek, és reguláris disztribúciók:*

$$C*f=:V,\qquad \textit{illetve}\qquad C*(\delta^{(1)}\otimes u_0)=:V_0,$$

ahol

$$V(t,x)=H(t)\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(\tau,\xi)}{\big(4\pi(t-\tau)\big)^{N/2}}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}\,d\xi\,d\tau,$$

és

$$V_0(t,x)=H(t)\int_{\mathbb{R}^N}\frac{u_0(\xi)}{(4\pi t)^{N/2}}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}\,d\xi.$$

Bizonyítás Az f és az u_0 függvény tulajdonságai alapján nyilvánvaló, hogy V és V_0 jól értelmezett (vagyis a kérdéses integrálok léteznek). A

$$K(t):=\max_{0\le\tau<t,\xi\in\mathbb{R}^N}|f(\tau,\xi)|$$

jelöléssel

$$|V(t,x)| \le K(t) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \frac{e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}}{(4\pi(t-\tau))^{N/2}}\, d\xi\, d\tau = K(t)t$$

minden $t > 0$ és x esetén, ugyanis a második (az $\mathbb{R}^N$-re vett) integrál értéke 1. Minthogy $t \mapsto K(t)$ monoton növő függvény, ebből következik, hogy V lokálisan integrálható. Továbbá V_0 is lokálisan integrálható , mert

$$|V_0(t,x)| \le \max_{\mathbb{R}^N} |u_0| \int_{\mathbb{R}^N} \frac{e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{N/2}}\, d\xi = \max_{\mathbb{R}^N} |u_0|.$$

A $C * f$ disztribúció létezik, ha minden φ alapfüggvényre

$$\begin{aligned}(C * f \mid \varphi) &= (C \otimes f \mid \varphi \circ A) = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^{1+N} \times \mathbb{R}^{1+N}} C(\alpha,\omega) f(\tau,\xi) \varphi(\alpha+\tau, \omega+\xi)\, d\alpha\, d\omega\, d\tau\, d\xi\end{aligned}$$

értelmes, vagyis a jobb oldali integrál létezik. Vezessük be a $t := \alpha + \tau$, és $x := \omega + \xi$ helyettesítést. Ekkor kapjuk, hogy a fenti integrál

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{1+N} \times \mathbb{R}^{1+N}} C(t-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi) \varphi(t,x)\, d\tau\, d\xi\, dt\, dx$$

integrállal egyenértékű. Minthogy

$$V(t,x) = \int_{\mathbb{R}^{1+N}} C(t-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi)\, d\tau\, d\xi,$$

és φ kompakt tartójú, Fubini tételét alkalmazva láthatjuk, hogy az integrál értelmes. Ezzel az első konvolúció vizsgálatát befejeztük.

A $C * (\delta^{(1)} \otimes u_0)$ disztribúció létezik, ha minden φ alapfüggvényre

$$\begin{aligned}\Big(C * (\delta^{(1)} \otimes u_0) \,\Big|\, \varphi\Big) &= \Big(C \otimes (\delta^{(1)} \otimes u_0) \,\Big|\, \varphi \circ A\Big) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{1+N} \times \mathbb{R}^N} u_0(\xi) C(\alpha,\omega) \varphi(\alpha + 0, \omega+\xi)\, d\alpha\, d\xi\, d\omega\end{aligned}$$

értelmes. Ez teljesen hasonló az előző integrálhoz, csak a τ szerinti integrállal nem kell foglalkoznunk. Tehát helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\Big(C * (\delta^{(1)} \otimes u_0) \,\Big|\, \varphi\Big) &= \int_{\mathbb{R}^{1+N} \times \mathbb{R}^N} u_0(\xi) C(t, x-\xi) \varphi(t,x)\, d\xi\, dt\, dx = \\ = \int_{\mathbb{R}^{1+N} \times \mathbb{R}^N} u_0(\xi) C(t, x-\xi)\, d\xi\, \varphi(t,x)\, dt\, dx &= \int_{\mathbb{R}^{1+N}} V_0(t,x) \varphi(t,x)\, dx\, dt.\end{aligned}$$

Ezzel az állítást sikerült bebizonyítanunk.

Állítás. *Minden $x \in \mathbb{R}^N$ esetén $\lim\limits_{t \to +0} V(t,x) = 0$, és ha u_0 folytonos függvény, akkor $\lim\limits_{t \to +0} V_0(t,x) = u_0(x)$.*

Bizonyítás Az előző bizonyításban beláttuk, hogy $|V(t,x)| \leq K(t)t$, ahol K monoton növő nemnegatív függvény; ezért a kérdéses határérték valóban 0. A másik esettel kapcsolatban pedig vegyük észre, hogy

$$V_0(t,x) = (C(t, x - \cdot) \mid u_0)\,,$$

valamint azt, hogy $C(t,\cdot)$ éppen a t paraméter szerinti δ-konvergens sorozat; emiatt kapjuk, hogy a keresett határérték $(\delta_x \mid u_0) = u_0(x)$, amit be akartunk bizonyítani.

13. A hullámegyenlet

13.1.

Most az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$-beli hiperbolikus $\Box := \partial_0^2 - \triangle$ differenciáloperátorral foglalkozunk, ahol ∂_0 ismét az $\mathbb{R}$-változó (az „idő") szerinti parciális differenciálás, $\triangle$ pedig az $\mathbb{R}^N$-változó (a „tér") szerint Laplace-operátor. Egy hullám terjedését valamely (végtelen kiterjedésű) közegben ha adott a hullám $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ forrása

$$(u \colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R})? \qquad \Box u = f$$

diferenciálegyenlet határozza meg. Ez az egyenlet egyszerűen értelmezhető a disztribúciók körében is, és megoldása a forrásnak egy alapmegoldással vett konvolúciója.

A gyakorlatban azonban itt is kezdeti érték probléma vetődik fel: adott az $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ hullámforrás és a hullám $u_0 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ kezdeti kezdeti értéke, valamint az időderiváltjának az $u_1 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ kezdeti értéke, és ezekkel

$$(u \colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R})? \qquad \Box u = f$$

differenciálegyenlet írja le az

$$u(0,\cdot) = u_0 \qquad \partial_0 u(0,\cdot) = u_1.$$

Klasszikus keretek között az u-tól megfelelően sokszori differenciálhatóságot kell megkövetelni.

Ha át akarjuk fogalmazni a problémát disztribúciókra, ugyanolyan problémával állunk szemközt, és azt hasonlóan hidalhatjuk át mint a diffúzióegyenletnél.

Terjesszük ki u-t és f-et az egész $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$-en értelmezett $\hat{u}$, illetve $\hat{f}$ függvénnyé, mint az előző fejezetben.

Állítás. *Ha $\hat{f}$, u_0 és u_1 lokálisan integrálható , akkor a fenti kezdetiérték-problémával egyenértékű a következő disztribúcióegyenlet*

$$(\partial_0^2 - \triangle)\hat{u} = \hat{f} + \delta^{(1)} \otimes u_1 + \dot{\delta}^{(1)} \otimes u_0,$$

ahol megintcsak nem különböztettük meg a függvényeket és az azoknak megfelelő disztribúciókat.

Bizonyítás A bal oldal hatása egy φ alapfüggvényen:

$$\big((\partial_0^2 - \triangle)\hat{u} \,\big|\, \varphi\big) = \big(\hat{u} \,\big|\, (\partial_0^2 - \triangle)\varphi\big) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N} \hat{u}(\partial_0^2 - \triangle)\varphi =$$
$$= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u(\partial_0^2 - \triangle)\varphi = \lim_{\alpha \to +0} \int_\alpha^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u(\partial_0^2 - \triangle)\varphi.$$

Kihasználva, hogy $u\partial_0^2\varphi = (\partial_0^2 u)\varphi + \partial_0(u\partial_0\varphi) - \partial_0(\varphi\partial_0 u)$, valamint $u\triangle\varphi = (\triangle u)\varphi + \mathrm{div}(u\mathrm{grad}\varphi) - \mathrm{div}(\varphi\mathrm{grad}u)$ utolsó két tagja a Gauss-tétellel átalakítva az integrálásnál eltűnik (lásd a 6.3 állítást), a következőket kapjuk:

$$\lim_{\alpha\to+0}\left[\int_{\mathbb{R}^N} u\partial_0\varphi|_\alpha^\infty - \int_{\mathbb{R}^N}\varphi\partial_0 u|_\alpha^\infty + \int_\alpha^\infty\int_{\mathbb{R}^N}((\partial_0-\triangle)u)\,\varphi\right].$$

Ezután ugyanúgy érvelve, mint az előző fejezetben, megkapjuk a kívánt eredményt.

13.2.

A továbbiakban az $N = 3$ esetre korlátozódunk. Ha $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)^*$ és $U_0, U_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^*$ adottak, akkor az

$$(U \in \mathcal{D}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)^*)? \qquad (\partial_0^2 - \triangle)U = F + \delta^{(1)}\otimes U_1 + \dot{\delta}^{(1)}\otimes U_0$$

hullámegyenlet megoldása 10.1 szerint

$$U = Z_+ * (F + \delta^{(1)}\otimes U_1 + \dot{\delta}^{(1)}\otimes U_0)$$

abban az esetben, ha a konvolúció létezik. A létezés feltételeiről mond többet a következő tétel.

Állítás. *Legyen $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ lokálisan integrálható , $u_0, u_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ lokálisan integrálható , továbbá $f\big|_{\mathbb{R}^-\times\mathbb{R}^3} = 0$. Ekkor a következő konvolúciók értelmesek és a következőképpen adhatók meg:*

$$K_+ * f =: V, \quad K_+ * (\delta^{(1)}\otimes u_1) =: V_1 \quad \textit{és} \quad K_+ * (\dot{\delta}^{(1)}\otimes u_0) = \partial_0 V_0,$$

ahol

$$\begin{aligned} V(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^3}\frac{f(t-|\xi|, x-\xi)}{4\pi|\xi|}\,d\xi,\\ V_1(t,x) &= \frac{H(t)}{4\pi t}\int_{S_t(x)} u_1\,d\lambda_{S_t(x)},\\ V_0(t,x) &= \frac{H(t)}{4\pi t}\int_{S_t(x)} u_0\,d\lambda_{S_t(x)}, \end{aligned}$$

és H továbbra is a Heaviside-féle függvényt jelöli, $S_t(x)$ pedig az x középpontú t sugarú gömbhéj $\mathbb{R}^3$-ban.

Bizonyítás Nézzük az első konvolúciót. Tudjuk, hogy K_+ tartója a jövőszerű fénykúp. Nyilvánvaló, hogy f tartója az $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^3$ pozitív félsíkban van. Innen adódik, hogy

$$(\mathrm{Supp}\,K_+)\cap(K - \mathrm{Supp}\,f) \qquad \text{és} \qquad (\mathrm{Supp}\,f)\cap(K - \mathrm{Supp}\,K_+)$$

kompakt minden $K \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ kompakt halmaz esetén. Ezért a konvolúció létezik (lásd a 8.3 állítást).

Tehát definíció szerint minden φ alapfüggvényre

$$(K_+ * f \mid \varphi) = (K_+\otimes f \mid \varphi\circ A) = \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}\frac{f(\tau,\xi)\varphi(\tau+|\omega|, \xi+\omega)}{4\pi|\omega|}\,d\tau\,d\xi\,d\omega.$$

Végezzük el a $\xi+\omega =: x$ és $\tau+|\omega| =: t$ helyettesítéseket. Így kapjuk, hogy

$$(K_+ * f \mid \varphi) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(t-|\omega|, x-\omega)}{4\pi|\omega|} \, d\omega \, \varphi(t,x)\, dt\, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3} V(t,x)\varphi(t,x)\, dt\, dx.$$

Vegyük most a második konvolúciót. Ennek a létezése az előzőhöz hasonló érvek alapján nyilvánvaló. Továbbá

$$\Big(K_+ * (\delta^{(1)} \otimes u_1) \,\Big|\, \varphi\Big) = \Big(K_+ \otimes (\delta^{(1)} \otimes u_1) \,\Big|\, \varphi \circ A\Big) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u_1(\xi)\varphi(|\omega|, \xi+\omega)}{4\pi|\omega|} \, d\xi \, d\omega.$$

Itt is a $\xi+\omega =: x$ helyettesítéssel adódik, hogy

$$\Big(K_+ * (\delta^{(1)} \otimes u_1) \,\Big|\, \varphi\Big) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u_1(x-\omega)\varphi(|\omega|, x)}{4\pi|\omega|} \, dx \, d\omega =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^\infty \int_{S_t(x)} \frac{1}{4\pi t} \, u_1\big|_{S_t(x)} \, d\lambda_{S_t(x)} \varphi(t,x)\, dt\, dx.$$

Itt közben felhasználtuk az alábbi összefüggést:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(z)\, dz = \int_0^\infty \int_{S_r(0)} f\big|_{S_r(0)} \, d\lambda_{S_r(0)} \, dr.$$

Látható, hogy pozitív t-re éppen a bizonyítandó V_1 függvényt kaptuk.

A harmadik konvolúcióra mondottak az előzőből és az ismert

$$K_+ * (\dot{\delta}^{(1)} \otimes u_0) = \partial_0 (K_+ * \delta^{(1)} \otimes u_0)$$

összefüggésből adódnak.

Megjegyzés A tárgyalt disztribúciók közül az első kettő reguláris, a harmadik nem feltétlenül az: $\partial_0 V_0$ a V_0 disztribúció-deriváltját jelöli. Természetesen ez is reguláris, ha V_0 mint függvény differenciálható. Ez teljesül, ha u_0 folytonosan differenciálható. Ugyanis ekkor az $F\colon S_1(x) \to S_t(x), \quad \xi \mapsto x + (\xi - x)t$ bijekcióval integrálhelyettesítést végezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{H(t)}{4\pi t} \int_{S_t(x)} u_0 \, d\lambda_{S_t(x)} = \frac{H(t)\, t}{4\pi} \int_{S_1(x)} u_0((\xi - x)t + x)\, d\xi,$$

amely viszont már differenciálható t szerint.

13.3.

Tekintsük az aritmetikai speciális relativisztikus téridőmodellt, és legyen $C \subset \mathbb{R}^4$ az e töltésű részecske világvonala.

Ekkor a részecske négyesárama $e\boldsymbol{\lambda}_C$, ahol $\boldsymbol{\lambda}_C$ a C irányított görbe vektori Lebesgue-mértéke. Azaz, ha $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ a világvonal sajátidő-paraméterezése, akkor

$$(\boldsymbol{\lambda}_C \mid \varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(r(s))\dot{r}(s) ds.$$

A részecske által keltett elektromágneses mező vektorpotenciálja $A := K_+ * e\boldsymbol{\lambda}_C$, feltéve, hogy ez a konvolúció létezik.

$$(K_+ * \boldsymbol{\lambda}_C \mid \varphi) = (K_+ \otimes \boldsymbol{\lambda}_C \mid \varphi \circ A) = \\ = \frac{1}{4\pi} \int_R \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi\big(r(s) + (|\xi|, \xi)\big)}{|\xi|} \dot{r}(s)\, d\xi\, ds.$$

Célszerű ezek után az $r = (r_0, r_1, r_2, r_3) =: (r_0, \mathbf{r})$ jelöléssel élni. Az $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, $(s, \xi) \mapsto r(s) + (|\xi|, \xi) = (r_0(s) + |\xi|, \mathbf{r}(s) + \xi)$ függvény az $\mathbb{R}\times\{0\}$ halmazt kivéve differenciálható, és Jacobi-determinánsa

$$\dot{r}_0(s) + \frac{\mathbf{r}(s)\cdot\xi}{|\xi|},$$

ahol a pont az $\mathbb{R}^3$-beli skalárszorzatot jelöli. A determináns pozitív, tekintve, hogy $(\dot{r}_0)^2 - \sum_k (\dot{r}_k)^2 = 1$. Tehát a szóban forgó függvény a mondott halmazt kivéve injektív, de egy pillantás meggyőz minket arról, hogy ott is. A $(t, \mathbf{x}) \mapsto (s(t, \mathbf{x}), \xi(t, \mathbf{x}))$ formában jelölt inverzére $\xi(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{r}(s(t, \mathbf{x}))$ és $|\mathbf{x} - \mathbf{r}(s(t, \mathbf{x}))| = t - r_0(s(t, \mathbf{x}))$ teljesül. Az inverz általi integrálhelyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$(K_+ * \boldsymbol{\lambda}_C \mid \varphi) = \\ = \frac{1}{4\pi} \int_R \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(t, \mathbf{x}) \frac{\dot{r}(s(t, \mathbf{x}))}{r_0(s)|\mathbf{x} - \mathbf{r}(s(t, \mathbf{x}))| - \mathbf{r}(s(t, \mathbf{x}))\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{r}(s(t, \mathbf{x})))}\, d\mathbf{x}\, dt.$$

Áttérve az elegáns négyes jelölésre, az $x := (t, \mathbf{x})$ és $R(x) := x - r(s(x))$ bevezetésével arra jutunk, hogy vektorpotenciál

$$A(x) = \frac{e}{4\pi} \frac{\dot{r}(s(x))}{\dot{r}(s(x))\cdot R(x)},$$

ahol most a pont a Lorentz-szorzást jelöli.

A téridőn értelmezett $x \mapsto s(x)$ függvényt retardált sajátidő-függvénynek szokás nevezni: $s(x)$ a részecskének az a sajátidő-pillanata, amelyre $x - s(x)$ jövő-fényszerű, tehát $r(s(x))$ múltszerű (retardált) x-hez képest.

13.4. Feladatok

1. Milyen világvonal esetén nem létezik a konvolúció? (Vizsgáljunk meg az egyenletesen gyorsuló világvonalat, amelyet $s \mapsto (\sinh s, \cosh s, 0, 0)$ ír le.)

2. Milyen feltételeket kell kiróni az f-re, u_0-ra és u_1-re, ha a 13.2 állításhoz hasonlót akarunk megfogalmazni a K_- avanzsált maggal?

14. Elliptikus differenciáloperátorok

14.1.

Az eddigiekben a differenciáloperátor állandó együtthatójú polinom volt, és az egész $\mathbb{R}^N$-en, illetve $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$-en tekintettünk velük differenciálegyenleteket; ez utóbbi esetben a differenciálegyenlet értelmezési tartományának határa, amelyen meg kelett adnunk a keresett függvény illetve bizonyos deriváltjának az értékét („kezdeti feltételek"), sík volt. Ezért a klasszikus feladatokat át tudtuk fogalmazni disztribúciókra.

Most általánosabban, függvényegyütthatójú differenciáloperátorok egy speciális csoportjával adunk meg differenciálegyenleteket, amelyek értelmezési tartományának a határa nem sík, és azon vannak előírva úgynevezett peremfeltételek; ezek a feladatok nem fogalmazhatók át disztribúciókra.

14.2.

Tekintsünk egy $G \subset \mathbb{R}^N$ összefüggő, korlátos, nyílt halmazt, melynek $S := \partial G$ határa $N-1$ dimenziós részsokaság, és legyen $X := C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$. Az, hogy egy függvény a zárt $\overline{G}$ halmazon folytonosan differenciálható , azt jelenti, hogy létezik egy U nyílt halmaz, amely tartalmazza $\overline{G}$-t, és egy U-n értelmezett folytonosan differenciálható függvény, melynek $\overline{G}$-ra vett leszűkítése éppen a kérdéses függvény.

Definíció. *Legyenek* $p \in C^1(G)$ *és* $q \in C(\overline{G})$ *adott függvények, melyekre* $0 < p$ *és* $0 \leq q$ *teljesül, és legyen*

$$L\colon X \to C(G), \qquad Lu := -\mathrm{div}(p\mathrm{grad}u) + qu.$$

Megjegyzés $p = 1$ és $q = 0$ esetén $L = -\triangle$, a Laplace-operátor negatívja.

Állítás (Green-formulák). *Legyenek* u *és* v *az* X *halmaz elemei,* $Lu, Lv \in L^2(G)$. *Ekkor fennállnak a következő azonosságok:*

$$\int_G uLv = \int_G p(\mathrm{grad}u)\cdot(\mathrm{grad}v) - \int_S up\mathrm{D}_n v \, d\lambda_S + \int_G quv, \qquad \text{(I.)}$$

$$\int_G (uLv - vLu) = -\int_S p(u\mathrm{D}_n v - v\mathrm{D}_n u)\, d\lambda_S, \qquad \text{(II.)}$$

ahol D_n az S-re normális irányú deriválás.

Bizonyítás Az $u(-\mathrm{div}(p\mathrm{grad}v)) = -\mathrm{div}(up\mathrm{grad}v) + p(\mathrm{grad}u)\cdot(\mathrm{grad}v)$ azonosság és a Gauss-tétel felhasználásával:

$$\int_G [u(-\mathrm{div}(p\mathrm{grad}v)) + uqv] = \int_G p(\mathrm{grad}u)\cdot(\mathrm{grad}v) -$$
$$-\int_S (up\mathrm{grad}v)\cdot d\boldsymbol{\lambda}_S + \int_G quv = \int_G p(\mathrm{grad}u)\cdot(\mathrm{grad}v) - \int_S up\mathrm{D}_n v\, d\lambda_S + \int_G quv,$$

ami a bizonyítandó volt.

A második Green-formula az elsőből egyszerűen kapható.

14.3.

A továbbiakban peremfeltételeket rovunk ki az X-ben lévő függvényekre, majd megvizsgáljuk, hogy ezekkel a feltételekkel mi az, amit többletként el tudunk mondani az L operátorról.

Definíció. *Legyen* $\alpha, \beta \in C(S)$*, azaz* G *határán folytonos függvények, melyekre* $\alpha, \beta \geq 0$*, és* $\alpha + \beta > 0$ *fennáll, és*

$$X_0 := \left\{ u \in X \;\middle|\; Lu \in L^2(G),\ \alpha u + \beta \mathrm{D}_n u = 0 \right\},$$

valamint $L_0 := L\big|_{X_0}$.

Állítás. L_0 *sűrűn értelmezett lineáris operátor* $L^2(G)$*-ben.*

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy X_0 lineáris altér, továbbá tartalmazza a G-ben kompakt tartójú végtelenszer differenciálható függvényeket, amelyek sűrűn vannak $L^2(G)$-ben.

Állítás. *Az* $L_0 : L^2(G) \rightarrowtail L^2(G)$ *operátor szimmetrikus, továbbá* $\langle u, L_0 u\rangle \geq 0$ *minden* $u \in X_0$ *esetén.*

Bizonyítás Legyenek u és v az X_0 halmaz elemei, és számítsuk ki a $\langle v, L_0 u\rangle - \langle L_0 v, u\rangle$ értéket. A második Green-azonosság alkalmazásával:

$$\langle v, L_0 u\rangle - \langle L_0 v, u\rangle = \int_G v^*(Lu) - \int_G (Lv^*)u = -\int_S p(v^* \mathrm{D}_n u - u \mathrm{D}_n v^*)\, d\lambda_S =$$
$$= \int_{\{\beta \neq 0\}} p(v^* \frac{\alpha}{\beta} u - u \frac{\alpha}{\beta} v^*)\, d\lambda_S - \int_{\{\beta = 0\}} p(v^* \mathrm{D}_n u - u \mathrm{D}_n v^*)\, d\lambda_S,$$

ahol $\{\beta = 0\} := \{\, x \in S \mid \beta(x) = 0 \,\}$ és $\{\beta \neq 0\}$ hasonlóan van definiálva. Mivel p és q valós, $(Lv)^* = Lv^*$. Kihasználtuk továbbá az $\alpha u + \beta \mathrm{D}_n u = 0$ és az $\alpha v + \beta \mathrm{D}_n v = 0$ határfeltételeket, s emiatt az első integrál 0. A második esetben pedig $\beta = 0$ miatt $\alpha \neq 0$, s így a határfeltételekből az következik, hogy a $\{\beta = 0\}$ halmazon u és v nulla. Ezzel a tétel első részét beláttuk.

Vegyük most az $\langle u, L_0 u\rangle$ skaláris szorzatot. Az első Green-formula alapján ez

$$\int_G u^* L_0 u = \int_G \left(p|\mathrm{grad} u|^2 + q|u|^2\right) - \int_S u^* p \mathrm{D}_n u\, d\lambda_S.$$

Az első integrál nyilvánvalóan nem-negatív, a második az előbb is használt átalakítás szerint az

$$\int_{\{\beta \neq 0\}} p \frac{\alpha}{\beta} |u|^2\, d\lambda_S \geq 0$$

integrállal egyenlő.

Következmények.

(i) Az L_0 *operátor sajátértékei valósak, mert* L_0 *szimmetrikus, és nemnegatívak, mert* L_0 *pozitív szemidefinit. A sajátfüggvények pedig vehetők valósnak. Legyen ugyanis* $Lu = \lambda u$*. Ekkor* $Lu^* = (Lu)^* = \lambda u^*$*, azaz* u^* *is sajátvektor* λ *sajátértékkel. Ekkor viszont választhatjuk helyettük az*

$$\frac{u + u^*}{2} \qquad \textit{és} \qquad \frac{u - u^*}{2i}$$

valós sajátfüggvényeket.

(ii) L_0*-nak legfeljebb megszámlálható sok sajátértéke van, s a különböző sajátértékekhez tartozó sajátalterek ortogonálisak.*

Állítás. *A 0 az L_0 operátornak akkor és csak akkor sajátértéke, ha $q = 0$ és $\alpha = 0$, és ebben az esetben a 0-hoz tartozó sajátaltér egydimenziós, amely a konstans függvények összessége.*

Bizonyítás Alkalmazzuk az

$$\langle u, L_0 u\rangle = \int_G p|\mathrm{grad} u|^2 + \int_G q|u|^2 + \int_{\{\beta\neq 0\}} p\frac{\alpha}{\beta}|u|^2\, d\lambda_S$$

összefüggést. Tegyük fel, hogy $u \neq 0$ és $L_0 u = 0$. Ekkor $\langle u, L_0 u\rangle = 0$, ahonnan is következik, hogy a fenti összeg mindhárom tagja nulla. Az elsőből kapjuk, hogy $|\mathrm{grad} u|^2 = 0$ majdnem mindenütt, s mivel u folytonosan differenciálható , $u = \mathrm{const}$ adódik. A másodikból kapjuk, hogy $q|u|^2 = 0$ majdnem mindenütt, de mivel $u = \mathrm{const} \neq 0$, és q folytonos, $q = 0$ áll fenn. A harmadik tagból pedig hasonlóan kapjuk, hogy $\alpha = 0$.

Viszont, tegyük fel, hogy $\alpha = 0$ és $q = 0$. Ekkor egy konstans u függvény kielégíti a határfeltételeket, és $L_0 u = -\mathrm{div}(p\mathrm{grad} u) + qu = 0$, azaz a 0 sajátérték.

14.4.

Bizonyítás nélkül közöljük a következő eredményt.

Állítás. *Legyen $\beta = 0$ vagy $\beta = 1$ (ezzel ekvivalens $\beta > 0$), és p, q, valamint α sima függvények. Ekkor*

(i) L_0 lényegében önadjungált,

(ii) sajátalterei kifeszítik $L^2(G)$-t,

(iii) minden sajátértéke véges multiplicitású (sajátalterei véges dimenziósak),

(iv) a sajátértékeknek nincs torlódási pontja.

Megjegyzés Ha $p = 1$, akkor $\overline{L_0}$ a G tartományba zárt, q potenciálú mezőben levő kvantummechanikai részecske Hamilton-operátora. Szokásosan a $\beta = 0$ esetnek megfelelő peremfeltételt róják ki, de ez nem szükségszerű. A peremfeltétel a „doboz" határának fizikai tulajdonságát hivatott visszatükrözni.

Definíció. *Legyen $f \in C(G)$. Az*

$$(u \in X_0)? \qquad L_0 u = f$$

*parciális differenciálegyenletet **klasszikus harmadik peremérték-feladatnak** nevezzük. $\beta = 0$ esetben **első peremérték-feladatról** vagy **Dirichlet-feladatról**, $\alpha = 0$ esetben **második peremérték-feladatról** vagy **Neumann-feladatról** beszélünk.*

Állítás. *Tegyük fel, hogy L_0-nak a nulla nem sajátértéke, valamint teljesülnek a 14.4 állítás feltételei. Ekkor a klasszikus harmadik peremérték-probléma megoldása egyértelmű, ha létezik.*

Bizonyítás A 14.4 állítás értelmében kifejthetjük u-t L_0 sajátvektorai szerint $u = \sum\limits_n c_n u_n$ alakban, ahol az u_n-ek teljesítik az $L_0 u_n = \lambda_n u_n$ sajátértékegyenletet, és teljes ortonormált rendszert alkotnak. Az f függvényt is kifejtjük az u_n sajátfüggvények szerint: $f = \sum_n \varphi_n u_n$. A c_n-ek és φ_n-ek négyzetesen összegezhetők. Nem biztos, hogy az u-t megadó fenti sor a szokásos értelemben differenciálható , azaz hogy benne van L_0 értelmezési tartományában. L_0 azonban lényegében önadjungált, ezért u biztosan benne van L_0 lezártjának értelmezési tartományában, ha $c_n \lambda_n$ $(n \in \mathbb{N})$ négyzetesen összegezhető; ekkor az önadjungált $\overline{L}_0$ bevihető az összegzés mögé:

$$\overline{L}_0 u = \sum_n c_n L_0 u_n = \sum_n c_n \lambda_n u_n = \sum_n \varphi_n u_n = f.$$

Ez az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha $c_n \lambda_n = \varphi_n$, azaz $c_n = \varphi_n / \lambda_n$. Az a kérdés, adott φ_n-ek és λ_n-ek esetén mikor lesznek az ilyen c_n-ek négyzetesen összegezhetők. A válasz: az adott feltétel esetén mindig. Ugyanis a sajátértékeknek a nulla nem torlódási pontja, ezért a legkisebb abszolútértékű, jelöljük ennek az indexét $n = 0$-val, nem nulla. Emiatt $\varphi_n / \lambda_n \leq \varphi_n / \lambda_0$, ami viszont négyzetesen összegezhető. Ebből következik, hogy az általánosított, $\overline{L}_0$-ra vonatkozó problémának egyértelmű megoldása van. Ha pedig ez az összeg X_0-nak eleme, akkor ez megoldása a klasszikus problémának is.

Megjegyzések

(i) A $\lambda_0 = 0$ esetet külön kell vizsgálnunk. Ha $\varphi_0 = 0$, akkor c_0 tetszőleges lehet, így végtelen sok, konstans erejéig különböző megoldás lehet. Ha $\varphi_0 \neq 0$, akkor nincs megoldás az adott peremfeltétel mellett.

(ii) Az $L_0 u - \lambda u = f$ peremérték-feladatnak pontosan akkor van egyértelmű megoldása, ha λ nem sajátértéke L_0-nak. Ellenkező esetben a megoldások affin teret alkotnak L_0-nak a λ sajátértékhez tartozó sajátaltere felett, ha f ortogonális erre az altérre, egyébként nincs megoldás.

14.5.

Gyengíthető az a követelmény, hogy S legyen $N - 1$ dimenziós részsokaság. Minden igaz marad, ha S „bizonyos értelemben csekély számú" pontot kivéve részsokaság. Az idézőjelbe tett fogalmat lehet, azonban meglehetősen körülményes pontosan definiálni. Megemlítjük, hogy vehető például G-nek egy tégla.

14.6. Feladatok

1. Adjuk meg kockába, illetve a gömbbe zárt szabad $(q = 0)$ részecske energiájának sajátértékeit a $\beta = 0$ és az $\alpha = 0$ által meghatározott peremfeltétel mellett.

2. Bizonyítsuk be a 14.4 megjegyzésének (ii) pontját.

15. Parabolikus és hiperbolikus egyenletek

15.1.

Értelmezzük az előző szakaszban definiált L hatását az $\mathbb{R}^+ \times G$-n értelmezett függvényeken mint a második változóban ható, „térszerű" differenciálást. Legyen ezentúl $Y := C^2(\mathbb{R}^+ \times G) \cap C^1(\mathbb{R}_0^+ \times \overline{G})$. A peremfeltételek „időfüggetlenek”, azokat a korábbihoz hasonlóan rójuk ki. Legyen $\alpha, \beta \in C(S)$, melyekre

$\alpha, \beta \geq 0$, és $\alpha + \beta > 0$, és

$$Y_0 :=$$
$$= \left\{ u \in Y \;\middle|\; (Lu)(t,\cdot) \in L^2(G),\ \alpha(x)u(t,x)+\beta(x)\mathrm{D}_n u(t,x)=0,\ (t\in\mathbb{R}^+, x\in S) \right\}.$$

A peremfeltétellel leszűkített L_0 differenciálás a korábbival megegyezik. Tegyük fel, hogy teljesülnek rá a 14.4 állítás feltételei, továbbá sajátérték-problémáját most is megoldottnak tekintjük: a λ_n sajátértékekhez tartozó u_n sajátvektorok teljes ortonormált rendszert alkotnak $L^2(G)$-n.

Definíció. *Legyen $f \in C(\mathbb{R}^+ \times G)$ és $u_0 \in C(G)$ adott függvény, és u_0 elégítse ki a peremfeltételt. Az*

$$(u \in Y_0)? \qquad (\partial_0 + L_0)u = f, \qquad u(0,\cdot) = u_0$$

parciális differenciálegyenletet ***klasszikus parabolikus vegyes feladatnak*** *nevezzük. $\beta = 0$, ill. $\alpha = 0$ esetben* ***első****, illetve* ***második peremfeltételes vegyes feladatról*** *beszélünk.*

Megjegyzés A vegyes jelző arra utal, hogy peremfeltétel is, kezdeti feltétel is van előírva.

15.2.

Megadjuk a fenti differenciálegyenletnek egy formális megoldását.

Fejtsük sorba minden $t \in \mathbb{R}_0^+$ esetén $u(t,\cdot)$-t és $f(t,\cdot)$-t az L_0 operátor sajátfüggvényei szerint:

$$u(t,\cdot) = \sum_n c_n(t)u_n, \qquad f(t,\cdot) = \sum_n \varphi_n(t)u_n.$$

u-ra formálisan alkalmazva a $(\partial_0 + L_0)$ operációt kapjuk, hogy

$$(\partial_0 + L_0)u = (\partial_0 + L_0)\sum_n c_n u_n = \sum_n (\dot{c}_n u_n + \lambda_n c_n u_n) = \sum_n \varphi_n u_n,$$

ahonnan $\dot{c}_n = -\lambda_n c_n + \varphi_n$ adódik. Ennek megoldása a $c_n(0) = \langle u_n, u_0 \rangle =: a_n$ kezdeti feltétel mellett

$$c_n(t) = a_n e^{-\lambda_n t} + \int_0^t \varphi_n(\tau)e^{-\lambda_n(t-\tau)}\, d\tau.$$

Hangsúlyozzuk, hogy ez csupán a formális megoldás, a lépések jogosságát (a nem korlátos operátor és az „idő" szerinti differenciálás bevihető-e a végtelen összeg mögé) minden egyes esetben külön meg kell vizsgálni! Mindazonáltal bizonyos feltételek esetén állítható, hogy a formális és a tényleges megoldás megegyezik. Egy ilyen feltételt ad a következő, bizonyítás nélkül kimondott állítás.

Állítás. *Ha $u_0 \in \operatorname{Dom} \overline{L}_0$, és $f = 0$, akkor van megoldás, és ez megegyezik a formális megoldással.*

15.3.

Érdekes alkalmazás a forrásmentes hővezetés leírása: itt $L = -\triangle$, $f = 0$; G egy testet szimbolizál.

(i) Ha a test fala (határa) hőszigetelő, hő nem áramlik ki; mivel a hőáram a hőmérséklet gradiensével arányos, ekkor a peremfeltétel $\mathrm{D}_n u\big|_S = 0$. Ebben az esetben a 14.3 szerint a $-\triangle$-nak a nulla a sajátértéke, a sajátaltér a konstans függvények összessége. Mivel a sajátértéke pozitív, az

$$u(t,\cdot) = \sum_n c_n(0) e^{-\lambda_n t} u_n$$

megoldás $t \to \infty$ esetén a $c_0(0)$ konstans függvényhez tart, ami jól ismert tapasztalati tény: hőszigetelt testen a hőmérséklet eloszlása az idő múlásával egyenletes lesz.

(ii) Ha a test „hőtartályban" van, azaz egy állandó hőmérsékletű környezetben, akkor a peremfeltétel $u\big|_S = c = \mathrm{const.}$ Ez nem olyan peremfeltétel, mint amit tárgyaltunk, de a feladatot vissza lehet vezetni a megismertre: az $\hat{u} := u - c$ függvényre $\triangle \hat{u} = 0$ és $\hat{u}|_S = 0$. Ekkor a $-\triangle$-nak nincs nulla sajátértéke, ezért $\lim_{t\to\infty} \hat{u}(t) = 0$, azaz $\lim_{t\to\infty} u(t) = c$, ami ismét jól ismert tapasztalati tény: hőtartályban levő testen a hőmérséklet eloszlása az idő múlásával egyenletesen a külső hőmérséklet lesz.

Definíció. *Legyen $f \in C(\mathbb{R}^+ \times G)$ és $u_0, u_1 \in C(G)$ adott függvény, függvény, és u_0 elégítse ki a peremfeltételt. Az*

$$(u \in Y_0)? \qquad (\partial_0^2 + L_0)u = f, \qquad u(0,\cdot) = u_0 \qquad \partial_0 u(0,\cdot) = u_1$$

parciális differenciálegyenletet ***klasszikus hiperbolikus vegyes feladatnak*** *nevezzük. $\beta = 0$, illetve $\alpha = 0$ esetben* ***első***, *illetve* ***második peremfeltételes vegyes feladatról*** *beszélünk.*

15.4.

Most is megadunk egy formális megoldást az előzőhöz teljesen hasonlóan és az ott tett megjegyzések figyelembevételével:

$$(\partial_0^2 + L_0)u = (\partial_0^2 + L_0)\sum_n c_n u_n = \sum_n (\ddot{c}_n u_n + \lambda_n c_n u_n) = \sum_n \varphi_n u_n,$$

ahonnan $\ddot{c}_n + \lambda_n c_n = \varphi_n$ adódik. Ennek a közönséges differenciálegyenletnek a megoldása a

$$c_n(0) = \langle u_n, u_0 \rangle =: a_n, \qquad \dot{c}_n(0) = \langle u_n, u_1 \rangle =: b_n$$

kezdeti feltételek mellett:

$$u(t,x) = \sum_n \left[a_n \cos\sqrt{\lambda_n} t + b_n \frac{\sin\sqrt{\lambda_n} t}{\sqrt{\lambda_n}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t \varphi_n(\tau) \sin\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)\, d\tau \right] u_n.$$

Állítás. *Ha $u_0 \in \mathrm{Dom}\,\overline{L}_0$, és minden pozitív t esetén $f(t,\cdot)$ négyzetesen integrálható , és az $\mathbb{R}^+ \to L^2(G)$, $\quad t \mapsto f(t,\cdot)$ leképzés folytonos, akkor van megoldás, és ez megegyezik a formális megoldással.*

15.5. Feladat

Legyen $N = 1$, $G = (0, 1)$, s oldjuk meg a $\partial_0^2 u = a^2 \partial_1^2 u$ klasszikus vegyes feladatot ($a > 0$) az $u(0, x) = 0$, $\partial_0 u(0, x) = \sin(2\pi x)$ kezdeti és az $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$ peremfeltétellel.