IV. OPERTOROK HILBERT-TEREKBEN

Ebben a fejezetben $\boldsymbol{H}$ adott Hilbert-teret jelöl, és operátoron $\boldsymbol{H} \rightarrowtail \boldsymbol{H}$ lineáris leképezést értünk.

15. A funkcionálanalízis alaptételei

A tételeket és a hozzájuk szükséges fogalmakat az adott $\boldsymbol{H}$ Hilbert-tér operátoraira mondjuk ki, de értelemszerűen igazak Banach-terek közötti lineáris leképezésekre is. Ezeket a tételeket nem bizonyítjuk.

15.1. Definíció *Egy operátort nyíltnak nevezünk, ha az értékkészlete nyílt.*

15.2. Állítás *(**Banach-féle nyíltleképezés-tétel**) Egy mindenütt értelmezett folytonos operátor pontosan akkor nyílt, ha szürjektív.*

Ennek a tételnek a legfontosabb következménye, hogy ha az A folytonos operátor bijektív, akkor A^{-1} is folytonos.

15.3. Definíció *Egy operátort zártnak nevezünk, ha a grafikonja zárt.*

A definícióból azonnal következik, hogy az A operátor pontosan akkor zárt, ha minden olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathrm{Dom}(A)$-beli konvergens sorozat esetén ($x := \lim_n x_n$), melyre az $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens ($y := \lim_n Ax_n$), az teljesül, hogy $x \in \mathrm{Dom}(A)$ és $y = Ax$, azaz $A \lim_n x_n = \lim_n Ax_n$.

Érdemes leírni a folytonosság feltételét, hogy jól összehasonlíthassuk a zártság feltételével. Az A operátor pontosan akkor folytonos, ha minden olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathrm{Dom}(A)$-beli konvergens sorozat esetén, amelyre $x := \lim_n x_n \in \mathrm{Dom}(A)$, az $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens ($y := \lim_n Ax_n$), az teljesül, hogy $y = A(x)$, azaz $A \lim_n x_n = \lim_n Ax_n$.

Definíció *Egy A operátor lezárható, ha a grafikonjának a lezártja egy operátor grafikonja, azaz ha létezik $\overline{A}$ operátor úgy, hogy $\overline{\mathrm{Graph}(A)} = \mathrm{Graph}(\overline{A})$; ekkor az $\overline{A}$ zárt operátort az A lezártjának nevezzük.*

Nyilvánvaló, hogy ha van egy olyan B zárt operátor, amelyre $A \subset B$ teljesül, akkor A lezárható, és $\overline{A} \subset B$.

15.4. Állítás *(**Zártgrafikon-tétel**) Egy A operátorra a következő tulajdonságok közül bármely kettő maga után vonja a harmadikat:*

- $\mathrm{Dom}(A)$ *zárt,*
- A *zárt,*
- A *folytonos.*

15.5. Egyszerű tények a következők az A zárt operátorra:
– αA is zárt minden α számra,
– ha F folytonos operátor, akkor $A + F$ is zárt,
– ha A injektív, akkor A^{-1} is zárt operátor.
– A magja (a nullának az A általi ősképe) zárt lineáris altér ősképe) zárt lineáris altér. A magtér zártságához kevesebb is elég.

15.5. Állítás *(**Banach-Steinhaus-tétel**) A folytonos operátorok egy H halmaza pontosan akkor korlátos (a folytonos lineáris leképezések normája szerint), ha minden $x \in \boldsymbol{H}$ esetén az $\{Ax \mid A \in H\}$ halmaz korlátos $\boldsymbol{H}$-ban.*

16. Operátorok adjungáltja

16.1. Legyen A srn értelmezett operátor. Ekkor minden $y \in \boldsymbol{H}$ esetén $\langle y| \circ A : \mathrm{Dom}(A) \to \mathbb{K}$ lineáris leképezés (jelölés: 12.1.) Ha ez a leképezés folytonos, akkor az 1.3. szerint egyértelmen kiterjeszthető $\boldsymbol{H}$-n értelmezett folytonos lineáris leképezéssé, azaz $\boldsymbol{H}'$-beli elemmé; jelölje ezt $\overline{\langle y| \circ A}$. A Riesz-féle reprezentációs tétel szerint létezik egyetlen, $A^* y$-gal jelölt vektor $\boldsymbol{H}$-ban, amelyre

$$\langle A^* y| = \overline{\langle y| \circ A}.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\mathrm{Dom}(A^*) := \{y \in \boldsymbol{H} \mid \langle y| \circ A \text{ folytonos}\},$$

lineáris altér $\boldsymbol{H}$-ban, és az

$$A^* : \mathrm{Dom}(A^*) \to \boldsymbol{H}, \quad y \mapsto A^* y$$

leképezés lineáris.

Definíció *A^*-ot az A operátor* ***adjungáltjának*** *nevezzük.*

Az adjungált definíciója tehát egyenérték azzal, hogy

$$\langle A^*y, x\rangle = \langle y, Ax\rangle \qquad \big(x{\in}\mathrm{Dom}(A), y{\in}\mathrm{Dom}(A^*)\big). \tag{$*$}$$

Jegyezük meg, hogy csak sűrűn értelmezett operátornak van adjungáltja, továbbá a fenti egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha x az A értelmezési tartományában, y az A^* értelmezési tartományában van. Erre mindig figyelni kell, hiszen a bal oldali kifejezés akármilyen x-re, a jobb oldali pedig akármilyen y-ra is értelmes.

Sokszor kell eldöntenünk, benne van-e y vektor egy A operátor adjungáltjának az értelmezési tartományában, azaz $\langle y| \circ A$ folytonos-e. Világos, ha találunk egy z vektort úgy, $\langle y| \circ A \subset \langle z|$, akkor $y \in \mathrm{Dom}(A^*)$ és $z = A^*y$.

Végül megemlítjük azt az egyszerű tényt, hogy $\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}^* = \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$.

16.2. Állítás *(i) Ha A sűrűn értelmezett, folytonos operátor, és $\overline{A}$ jelöli az egyértelmű kiterjesztését az egész térre, akkor $A^* = (\overline{A})^*$.*

(ii) Ha A mindenütt értelmezett, folytonos operátor, akkor A^* is mindenütt értelmezett, folytonos operátor, és

$$\|A^*\|{=}\|A\|.$$

Bizonyítás Ha A sűrűn (esetleg mindenütt) értelmezett, folytonos operátor, akkor nyilvánvaló, hogy $\mathrm{Dom}(A^*){=}\boldsymbol{H}$.

(i) Minden y-ra $\langle A^*y| = \overline{\langle y| \circ A} = \langle y| \circ \overline{A} = \langle (\overline{A})^*y|$.

(ii) Minden $x, y{\in}\boldsymbol{H}$ esetén az előző pont $(*)$ összefüggése teljesül, ezért

$$\sup_{\|y\|\le 1} \|A^*y\| = \sup_{\|y\|\le 1}\sup_{\|x\|\le 1} |\langle A^*y, x\rangle| = \sup_{\|x\|\le 1}\sup_{\|y\|\le 1} |\langle A^*y, x\rangle| =$$

$$= \sup_{\|x\|\le 1}\sup_{\|y\|\le 1} |\langle y, Ax\rangle| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| = \|A\| < +\infty,$$

amit bizonyítani akartunk.

16.3. Állítás *Minden adjungált operátor zárt.*

Bizonyítás Legyen A sűrűn értelmezett operátor, és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathrm{Dom}(A^*)$-ban, mely konvergál egy $\boldsymbol{H}$-beli y-hoz, úgy, hogy az $(A^*y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergál egy $\boldsymbol{H}$-beli z-hez. Ekkor $x{\in}\mathrm{Dom}(A)$ esetén

$$\langle z, x\rangle = \lim_n \langle A^*y_n, x\rangle = \lim_n \langle y_n, Ax\rangle = \langle y, Ax\rangle,$$

következésképpen $y \in \mathrm{Dom}(A^*)$ és $z = A^*(y)$, így az 5.2. állítás szerint A^* zárt.

16.4. Állítás *Legyenek A és B sűrűn értelmezett operátorok.*

(1) Ha $\mathrm{Dom}(A+B) = \mathrm{Dom}(A) \cap \mathrm{Dom}(B)$ sűrű, akkor

$$(A+B)^* \supset A^* + B^*,$$

és ha A vagy B egyike mindenütt értelmezett és folytonos, akkor egyenlőség van.

(2) Ha $\mathrm{Dom}(AB) = B^{-1}[\mathrm{Dom}(A)]$ sűrű, akkor

$$(AB)^* \supset B^* A^*,$$

és ha A mindenütt értelmezett és folytonos, akkor egyenlőség van.

(3) Ha $\mathrm{Dom}(A^*)$ sűrű, akkor

$$A^{**} \supset A.$$

(4) $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén

$$(\lambda A)^* \supset \lambda^* A^*,$$

és ha $\lambda \neq 0$, akkor egyenlőség van.

(5) Ha $A \subset B$, akkor $B^* \subset A^*$.

Bizonyítás (1) Ha $y \in \mathrm{Dom}(A^* + B^*)$, akkor $\langle y| \circ A$ és $\langle y| \circ B$ folytonosak, következésképpen $\langle y| \circ (A+B) = \langle y| \circ A + \langle y| \circ B$ is folytonos, tehát $y \in \mathrm{Dom}((A+B)^*)$. Továbbá $x \in \mathrm{Dom}(A+B)$ esetén

$$\langle (A^* + B^*)(y), x \rangle = \langle A^* y, x \rangle + \langle B^* y, x \rangle = = \langle y, Ax \rangle + \langle y, Bx \rangle = \langle y, (A+B)x \rangle,$$

tehát $(A+B)^* \supset A^* + B^*$.

Ha például A mindenütt értelmezett és folytonos, akkor $y \in \mathrm{Dom}((A+B)^*)$ esetén $\langle y| \circ (A+B) = \langle y| \circ A + \langle y| \circ B$ folytonos, és mivel $\langle y| \circ A$ folytonos, $\langle y| \circ B$ is az, tehát $y \in \mathrm{Dom}(A^*) \cap \mathrm{Dom}(B^*) = \mathrm{Dom}(A^* + B^*)$.

(2) Ha $y \in \mathrm{Dom}(B^* A^*)$, akkor $y \in \mathrm{Dom}(A^*)$ valamint $A^* y \in \mathrm{Dom}(B^*)$, így $\langle y| \circ A$ és $\langle A^* y| \circ B = \langle y| \circ AB$ folytonosak, tehát $y \in \mathrm{Dom}((AB)^*)$. Továbbá $x \in \mathrm{Dom}(AB)$ esetén

$$\langle B^* A^* y, x \rangle = \langle A^* y, Bx \rangle = \langle y, ABx \rangle,$$

tehát $(AB)^* \supset B^* A^*$.

Ha A mindenütt értelmezett és folytonos, akkor $y \in \mathrm{Dom}((AB)^*)$ esetén $\langle y| \circ AB$ folytonos, és a 16.2. állítás szerint $\mathrm{Dom}(A^*) = \mathrm{Dom}(A) = \boldsymbol{H}$, így $\langle A^* y| \circ B = \langle y| \circ AB$ folytonos, tehát $A^* y \in \mathrm{Dom}(B^*)$, vagyis $y \in \mathrm{Dom}(B^* A^*)$.

(3) Ha $x{\in}\mathrm{Dom}(A)$, akkor $\langle x|{\circ}A^*{=}\langle Ax|$ folytonos A^* értelmézési tartományán, tehát $x{\in}\mathrm{Dom}(A^{**})$. Továbbá $x{\in}\mathrm{Dom}(A^*)$ esetén

$$\langle Ay, x\rangle = \langle y, A^*x\rangle = \langle A^{**}y, x\rangle,$$

tehát $A{\subset}A^{**}$.

(4) és (5) bizonyítása annyira egyszerű, hogy az Olvasóra hagyjuk.

16.5. Az előbbi eredményünk szerint, ha A és B mindenütt értelmezett, folytonos operátorok, és $\lambda{\in}\mathbb{K}$, akkor

$$\begin{aligned}(A{+}B)^* &= A^*{+}B^*,\\ (\lambda A)^* &= \lambda^* A^*,\\ (AB)^* &= B^*A^*,\\ A^{**} &= A,\\ \|A^*\| &= \|A\|.\end{aligned}$$

Jelölje $\mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ a $\boldsymbol{H}{\to}\boldsymbol{H}$ folytonos lineáris leképezések Banach-terét a sup-operátonormára nézve. Ekkor $\|AB\|{\le}\|A\|\,\|B\|$, így a kompozícióval együtt $\mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ Banach-algebra $\mathbb{K}$ felett. Egy $\mathbb{K}$ feletti olyan Banach-algebrát, melyen adott egy egyváltozós * művelet, melyre teljesülnek az fenti tulajdonságok, **B^*-algebrának** nevezünk. $\mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ tehát az $A{\mapsto}A^*$ adjungálással B^*-algebra. Egy B^*-algebrát **C^*-algebrának** nevezünk, ha minden A elemére $\|A^*A\|{=}\|A\|^2$ áll fönn. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ C^*-algebra.

16.6. Állítás *Ha A mindenütt értelmezett, folytonos operátor, akkor*

$$\|A^*A\|{=}\|A\|^2.$$

Bizonyítás Az operátornorma tulajdonsága és a 16.2.(ii) állítás miatt

$$\|A^*A\|{\le}\|A^*\|\,\|A\|{=}\|A\|^2.$$

Továbbá minden $x{\in}\boldsymbol{H}$ esetén

$$\|Ax\|^2{=}\langle Ax, Ax\rangle{=}\langle x, A^*Ax\rangle{\le}\|A^*A\|\,\|x\|^2,$$

ezért $\|Ax\|{\le}\sqrt{\|A^*A\|}\,\|x\|$, így $\|A\|{\le}\sqrt{\|A^*A\|}$, tehát $\|A\|^2{\le}\|A^*A\|$.

16.7. Állítás *Ha A sűrűn értelmezett operátor, akkor*

$$\mathrm{Ker}(A^*) = \mathrm{Ran}(A)^{\perp}.$$

Bizonyítás $y \in \mathrm{Ker}(A^*)$ ekvivalens azzal, hogy $y \in \mathrm{Dom}(A^*)$ és $A^*y=0$, azaz minden $x \in \mathrm{Dom}(A)$ esetén $0=\langle A^*y, x\rangle=\langle y, Ax\rangle$, ami épp azt jelenti, hogy $y \in \mathrm{Ran}(A)^\perp$.

Következmény A^* pontosan akkor injektív, ha $\mathrm{Ran}(A)$ sűrű $\boldsymbol{H}$-ban.

16.8. Állítás *Ha A olyan sűrűn értelmezett operátor, hogy A injektív és* $\mathrm{Dom}(A^{-1})=\mathrm{Ran}(A)$ *sűrű, akkor*

$$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}.$$

Bizonyítás Mind AA^{-1} mind $A^{-1}A$ sűrűn értelmezett, és az identitásnak a leszűkítései, tehát az adjungáltjuk a 16.2. (i) szerint maga az identitás. A szorzatok adjujungálásának szabályából

$$(A^{-1})^*A^* \subset (AA^{-1})^* = \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}, \quad A^*(A^{-1})^* \subset (A^{-1}A)^* = \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}.$$

Azt kell már csak megmutatnunk, hogy a bal oldalakon álló szorzatok értelmezési tartománya a megegyezik a hátul álló operátor értelmezési tartományával, azaz $\mathrm{Ran}(A^*) \subset \mathrm{Dom}(A^{-1})^*$ és $\mathrm{Ran}(A^{-1})^* \subset \mathrm{Dom}(A^*)$.

Áme: ha $z \in \mathrm{Ran}(A^*)$, akkor van olyan $y \in \mathrm{Dom}(A^*)$, hogy $z = A^*y$. Ekkor

$$\langle z| \circ A^{-1} = \langle A^*y| \circ A^{-1} \subset \langle y| \circ A \circ A^{-1} \subset \langle y|,$$

azaz z benne van $(A^{-1})^*$ értelmezési tartományában.

Ha $z \in \mathrm{Ran}(A^{-1})^*$, akkor van olyan $y \in \mathrm{Dom}(A^{-1})^*$, hogy $z = (A^{-1})^*y$. Ekkor

$$\langle z| \circ A = \langle (A^{-1})^*y| \circ A \subset \langle y| \circ A^{-1} \circ A \subset \langle y|,$$

azaz z benne van A^* értelmezési tartományában.

16.9. $\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}$-n

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle$$

skalárszorzat, mely $\langle (x_1, x_2), (x_1, x_2)\rangle = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$ miatt a kettes szorzatnormát indukálja, tehát $\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}$ ezzel a skalárszorzattal Hilbert-tér (teljes). A

$$V : \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}, \quad (x, y) \mapsto (-y, x)$$

leképezés lineáris, izometrikus bijekció, és $V \circ V = -\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}}$.

Állítás *Ha A sűrűn értelmezett operátor, akkor*

$$\mathrm{Graph}(A^*) = (V[\mathrm{Graph}(A)])^\perp.$$

BIZONYÍTÁS A Hilbert-tér x és y vektorára $(x,y){\in}(V[\mathrm{Graph}(A)])^{\perp}$ akkor és csak akkor teljesül, ha minden $z{\in}\mathrm{Dom}(A)$ esetén $\langle(x,y),V(z,Az)\rangle{=}0$ áll fönn; azonban $\langle(x,y),V(z,Az)\rangle{=}{-}\langle x,Az\rangle{+}\langle y,z\rangle$ miatt ez ekvivalens azzal, hogy minden $z{\in}\mathrm{Dom}(A)$ esetén $\langle x,Az\rangle{=}\langle y,z\rangle$, következésképpen $x{\in}\mathrm{Dom}(A^*)$ valamint $y{=}A^*x$, tehát $(x,y)\in\mathrm{Graph}(A^*)$. ■

Ez az eredményünk magában foglalja azt, amit 16.3-ban mondtunk: látjuk, hogy A^* grafikonja zárt lineáris altér, tehát A^* zárt operátor.

Mivel V izometrikus, megtartja az ortogonalitást, ezért $V[(V[\mathrm{Graph}(A)])^{\perp} = (VV[\mathrm{Graph}(A)])^{\perp}$, így az is igaz, hogy

$$V[\mathrm{Graph}(A^*)] = (\mathrm{Graph}(A))^{\perp}.$$

16.10. **Állítás** *Ha Z sűrűn értelmezett zárt operátor, akkor* $\mathrm{Dom}(Z^*)$ *sűrű.*

BIZONYÍTÁS Ha $z{\in}\mathrm{Dom}(Z^*)^{\perp}$, akkor $y{\in}\mathrm{Dom}(Z^*)$ esetén $\langle z,y\rangle{=}0$, következésképpen $\langle(0,z),V(y,Z^*y)\rangle{=}\langle z,y\rangle{=}0$, ezért

$$(0,z){\in}(V[\mathrm{Graph}(Z^*)])^{\perp} = \mathrm{Graph}(Z)^{\perp\perp} = \mathrm{Graph}(Z),$$

(ugyanis $\mathrm{Graph}(Z)$ zárt lineáris altér), így $z{=}Z(0){=}0$, tehát $\mathrm{Dom}(Z^*)^{\perp}{=}\{0\}$, azaz $\mathrm{Dom}(Z^*)$ sűrű.

16.11. **Állítás** *Az A sűrűn értelmezett operátor pontosan akkor lezárható, ha A^* sűrűn értelmezett, és ekkor*

$$\overline{A} = A^{**}.$$

BIZONYÍTÁS Ha A lezárható, akkor $A{\subset}\overline{A}$, következésképpen $(\overline{A})^*{\subset}A^*$; mivel $(\overline{A})^*$ sűrűn értelmezett, A^* is az.

Ha A^* sűrűn értelmezett, akkor

$$\mathrm{Graph}(A^{**}) = (V[\mathrm{Graph}(A^*)])^{\perp} = \mathrm{Graph}(A)^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Graph}(A)},$$

így A lezárható, és $\overline{A}{=}A^{**}$.

17. Speciális típusú operátorok

17.1. Már eddig is sokat szerepeltek izometrikus lineáris leképezések, most ezeket vizsgáljuk meg közelebbről.

1. Állítás *Egy $V : \boldsymbol{H} \rightarrowtail \boldsymbol{H}$ operátorra a következők egyenértékűek:*

(i) $\|Vx\| = \|x\|$ *minden* $x \in \mathrm{Dom}(V)$ *esetén,*

(ii) $\langle Vx, Vy\rangle = \langle x, y\rangle$ *minden* $x, y \in \mathrm{Dom}(V)$ *esetén.*

Bizonyítás (ii)-ből nyilvánvalóan következik (i), az pedig a azért vonja maga után (ii)-t, mert a skalárszorzatot a norma a 10.1. állítás szerint meghatározza. ■

Tehát egy operátor pontosan akkor izometrikus, ha skalárszorzattatrtó.

Megjegyezzük, hogy ha V izometrikus operátor, akkor

– V folytonos, $\|V\| = 1$,

– V injektív, és V^{-1} is izometrikus.

2. Állítás *Egy V izometrikus operátorra a következők egyenértékűek:*

(i) $\mathrm{Dom}(V)$ *zárt,*

(ii) $\mathrm{Ran}(V)$ *zárt,*

(iii) $\mathrm{Graph}(V)$ *zárt.*

Bizonyítás Legyen $\mathrm{Dom}(V)$ zárt. Vegyünk egy $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens sorozatot $\mathrm{Ran}(V)$-ben. Ekkor minden n-re van olyan $x_n \in \mathrm{Dom}(V)$, hogy $y_n = Vx_n$. Mivel $\|x_m - x_n\| = \|y_m - y_n\|$, az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat Cauchy-féle, ezért konvergens, $x := \lim_n x_n \in \mathrm{Dom}(V)$. Minthogy $\|Vx - y_n\| = \|x - x_n\|$, az igaz, hogy $\lim_n y_n = Vx \in \mathrm{Ran}(V)$, azaz $\mathrm{Ran}(V)$ zárt.

A V^{-1} izomertrikus operátorra alkalmazva az előbbi eredményt látjuk, ha $\mathrm{Ran}(V)$ zárt, akkor $\mathrm{Dom}(V)$ is zárt.

V folytonossága és a zártgrafikon-tétel szerint $\mathrm{Graph}(V)$ zártsága egyenértékű $\mathrm{Dom}(V)$ zártságával.

17.2. Állítás *Egy mindenütt értelmezett V operátor pontosan akkor izometrikus, ha*

$$V^*V = \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}},$$

és ekkor

$$VV^* = P_{\mathrm{Ran}(V)}$$

(ahol az utolsó szimbólum a $\mathrm{Ran}(V)$ *zárt lineáris altér ortogonális projektorát jelöli).*

Bizonyítás Ha V izometrikus, akkor minden $x, y \in \boldsymbol{H}$ esetén

$$\langle x, y\rangle = \langle Vx, Vy\rangle = \langle V^*Vx, y\rangle,$$

amiből a 11.4-ben mondottak szerint $V^*V = \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$. Ha viszont ez az utóbbi egyenlőség teljesül, akkor minden $x, y \in \boldsymbol{H}$ esetén

$$\langle x, y\rangle = \langle x, V^*Vy\rangle = \langle Vx, Vy\rangle.$$

Ha $z \in \mathrm{Ran}(V)$, akkor létezik $x \in \boldsymbol{H}$ úgy, hogy $z = Vx$, és $VV^*z = VV^*Vx = Vx = z$. Ha $z \in (\mathrm{Ran}(V))^\perp = \mathrm{Ker}(V^*)$, tehát $VV^*z = 0$. Összegezve: VV^* a $\mathrm{Ran}(V)$-n az identitás, $(\mathrm{Ran}(V)^\perp$-on a nulla, tehát VV^* az állított ortogonális projektor.

17.3. Definíció *Egy bijektív izometrikus operátort **unitérnek** hívunk.*

Egy izometrikus operátor, mégha mindenütt is van értelmezve, nem szükségképpen unitér. Példa erre l^2-ben a jobbra tolás operátora, amely mindenhol értelmezett, izometrikus, azonban nem szürjektív, ezért nem unitér: az $(1, 0, 0, \dots)$ vektor nincs benne az értékkészletében.

Állítás *Egy sűrűn értelmezett U operátor pontosan akkor unitér, ha $U^*{=}U^{-1}$.*

Bizonyítás Ha U unitér, akkor az előző állítás szerint $U^*U = \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$, $UU^* = P_{\mathrm{Ran}(U)} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$, tehát valóban az U adjungáltja az inverze is egyben.

Ha U sűrűn értelmezett, és $U^* = U^{-1}$, akkor minden $x{\in}\mathrm{Dom}(U)$ esetén

$$\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux\rangle = \langle U^*Ux, x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2,$$

így U izometrikus. U^{-1} zárt, mert egy adjungált operátorral egyenlő; de ekkor U is zárt. A 17.1.2. állítás szerint ekkor $\mathrm{Dom}(U)$ zárt, azaz U mindenütt értelmezett. Ekkor viszont U^* is mindenütt értélmezett, azaz $\boldsymbol{H} = \mathrm{Dom}(U^{-1}) = \mathrm{Ran}(U)$. Mindent egybevetve U izometrikus bijekció, azaz unitér.

17.4. Definíció *Az S sűrűn értelmezett operátor*
*(1) **szimmetrikus**, ha $S{\subset}S^*$, (2) **önadjungált**, ha $S{=}S^*$.*

Mivel bármely operátor adjungáltja zárt, önadjungált operátor szükségképpen zárt. Ezért egy önadjungált operátor a zártgrafikon-tétel szerint pontosan akkor folytonos, ha mindenütt értelmezett.

Egy S szimmetrikus operátor adjungáltja sűrűn van értelmezve, hiszen $S \subset S^*$, ezért a 16.11. állítás szerint S lezárható és $\overline{S} = S^{**}$; a 16.4.(3) szerint $S^{**} \subset S^*$; továbbá S^* zárt operátor, ezért $(S^*)^{**} = S^*$; mindezek azt eredményezik, hogy a szimmetrikus operátor lezártja is szimmetrikus:

$$\overline{S}{=}S^{**}{\subset}S^*{=}(S^*)^{**}{=}(S^{**})^*{=}(\overline{S})^*.$$

Egy szimmetrikus operátort **lényegében önadjungáltnak** nevezünk, ha lezártja önadjungált. Az S szimmetrikus operátor pontosan akkor lényegében önadjungált, ha $S^{**}{=}S^*$ teljesül.

Ha az S szimmetrikus operátor a T szimmetrikus operátor kiterjesztése, akkor $T{\subset}S{\subset}S^*{\subset}T^*$ teljesül. Ebből következik, hogy önadjungált operátor maximális szimmetrikus operátor, azaz nincs valódi szimmetrikus kiterjesztése.

Ha tehát T és S önadjungált operátorok és $T \subset S$, akkor $T = S$.

17.6. Definíció *Egy N sűrűn értelmezett zárt operátort* ***normálisnak*** *nevezünk, ha $NN^*{=}N^*N$.*

Nyilvánvaló, hogy az unitér és az önadjungált operátorok normálisak.

Állítás *Ha N normális operátor, akkor*

(1) $\mathrm{Dom}(N^*){=}\mathrm{Dom}(N)$,
(2) minden $x{\in}\mathrm{Dom}(N)$ esetén $\|N^*x\| = \|Nx\|$.

Bizonyítás Minden $y{\in}\mathrm{Dom}(N^*N)$ esetén

$$\|Ny\|^2 = \langle Ny, Ny\rangle = \langle N^*Ny, y\rangle = \langle NN^*y, y\rangle = \langle N^*y, N^*y\rangle = \|N^*y\|^2,$$

tehát $\|N^*y\|{=}\|Ny\|$. Legyen $x{\in}\mathrm{Dom}(N)$. Ekkor a 16.12. állítás szerint létezik $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathrm{Dom}(N^*N)$-ben úgy, hogy $(x, Nx){=}\lim\limits_n(y_n, Ny_n)$. Minden $m, n{\in}\mathbb{N}$ esetén $\|N^*y_n{-}N^*y_m\|{=}\|Ny_n{-}Ny_m\|$, így $(N^*y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat $\boldsymbol{H}$-ban, következésképpen létezik $\lim\limits_n N^*y_n{=:}z$. Mivel N^* zárt, ez maga után vonja, hogy $x{\in}\mathrm{Dom}(N^*)$ és $z{=}N^*x$, ezért

$$\|N^*x\| = \|z\| = \lim_n \|N^*y_n\| = \lim_n \|Ny_n\|{=}\|Nx\|.$$

Emellett azt kaptuk még, hogy $\mathrm{Dom}(N){\subset}\mathrm{Dom}(N^*)$. N és N^* szerepét felcserélve, $N^{**}{=}N$ miatt (ugyanis N zárt) $\mathrm{Dom}(N^*){\subset}\mathrm{Dom}(N)$ is igaz, azaz

$$\mathrm{Dom}(N^*) = \mathrm{Dom}(N).$$

Következmény Ha N normális operátor, akkor

$$\mathrm{Ker}(N) = \mathrm{Ker}(N^*) = \mathrm{Ran}(N)^{\perp}.$$

17.7. Ha S önadjungált és injektív, akkor a 16.8. szerint az inverze is önadjungált: $(A^{-1})^*{=}(A^*)^{-1}{=}A^{-1}$. miatt A^{-1} önadjungált. Természetesen unitér operátor inverze is unitér. Most megmutatjuk, normális operátorra is hasonló igaz.

Állítás *Az N normális operátor pontosan akkor injektív, ha $\mathrm{Ran}(N)$ sűrű, és ekkor N^{-1} normális. Ha $\mathrm{Ran}(N){=}\boldsymbol{H}$, akkor N^{-1} folytonos.*

Bizonyítás $\mathrm{Ker}(N){=}\mathrm{Ran}(N)^{\perp}$ miatt N akkor és csak akkor injektív, ha $\mathrm{Ran}(N)$ sűrű, és ekkor

$$N^{-1}(N^{-1})^*{=}N^{-1}(N^*)^{-1}{=}(N^*N)^{-1}{=}(NN^*)^{-1}{=}(N^*)^{-1}N^{-1}{=}(N^{-1})^*N^{-1},$$

tehát N^{-1} normális. Ha $\mathrm{Ran}(N)=\boldsymbol{H}$, akkor N^{-1} a zárt grafikon tétele szerint folytonos.

17.8. Állítás *Ha A sűrűn értelmezett operátor egy komplex Hilbert-téren, akkor*

(1) $A\subset A^*$ pontosan akkor, ha minden $x\in\mathrm{Dom}(A)$ esetén $\langle x, Ax\rangle\in\mathbb{R}$.
(2) $A=0$ pontosan akkor, ha minden $x\in\mathrm{Dom}(A)$ esetén $\langle x, Ax\rangle=0$.

Bizonyítás Ha $A \subset A^*$, akkor minden $x\in\mathrm{Dom}(A)$ esetén

$$\langle x, Ax\rangle = \langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle^*,$$

következésképpen $\langle x, Ax\rangle\in\mathbb{R}$.

Vezessük be $x, y\in\mathrm{Dom}(A)$ az

$$\alpha := \langle x, Ay\rangle+\langle y, Ax\rangle = \langle x+y, A(x+y)\rangle-\langle x, Ax\rangle-\langle y, Ay\rangle,$$

és

$$\beta := i\langle x, Ay\rangle-i\langle y, Ax\rangle = \langle x+iy, A(x+iy)\rangle-\langle x, Ax\rangle-\langle y, Ay\rangle$$

jelölést.

(1) Ha minden $x\in\mathrm{Dom}(A)$ esetén $\langle x, Ax\rangle\in\mathbb{R}$, akkor $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$, így

$$\langle x, Ay\rangle = \frac{\alpha-i\beta}{2} = \left(\frac{\alpha+i\beta}{2}\right)^* = \langle y, Ax\rangle^* = \langle Ax, y\rangle,$$

tehát $A\subset A^*$.

(2) Ha minden $x\in\mathrm{Dom}(A)$ esetén $\langle x, Ax\rangle=0$, akkor $\alpha=\beta=0$, így $\langle x, Ay\rangle=0$. Mivel $\mathrm{Dom}(A)$ sűrű, ebből következik, hogy $Ay=0$ minden $y\in\mathrm{Dom}(A)$ esetén, azaz $A=0$. ■

Világos, hogy valós Hilbert-téren (1) nem igaz, hiszen a skalárszorzat minden értéke valós, és vannak nem szimmetrikus operátorok (még véges dimenzióban is).

Ugyancsak egyszerű ellenpélda hozható arra, hogy valós Hilbert-téren (2) sem igaz: példa erre $\mathbb{R}^2$-n (a szokásos skalárszorzással) az $(x, y) \mapsto (-y, x)$ lineáris leképezés.

17.9. Állítás *Ha S folytonos (tehát mindenütt értelmezett) önadjungált operátor, akkor*

$$\|S\| = \sup_{\|x\|\le 1} |\langle x, Sx\rangle|.$$

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy

$$\alpha := \sup_{\|x\|\le 1} |\langle x, Sx\rangle| \le \|S\|.$$

Minden $x, y \in \boldsymbol{H}$ létezik $\lambda \in \mathbb{T}$ úgy, hogy $|\langle y, Sx\rangle| = \lambda^* \langle y, Sx\rangle = \langle \lambda y, Sx\rangle$. Ekkor speciálisan $\langle \lambda y, Sx\rangle \in \mathbb{R}$, így

$$\langle \lambda y, Sx\rangle = \frac{1}{4}\Big(\langle x+\lambda y, S(x+\lambda y)\rangle - \langle x-\lambda y, S(x-\lambda y)\rangle \Big),$$

következésképpen, ha $\|x\| \le 1$ és $\|y\| \le 1$, akkor

$$|\langle y, Sx\rangle| \le \frac{\alpha}{4}(\|x+\lambda y\|^2 + \|x-\lambda y\|^2) = \frac{\alpha}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) \le \alpha,$$

ezért $\|S\| \le \alpha$.

17.10. Állítás *Ha N folytonos (tehát mindenütt értelmezett) normális operátor, akkor $\|N^2\| = \|N\|^2$.*

Bizonyítás A Hilbert-tér minden x elemére a 17.6. állítás szerint $\|N^2 x\| = \|N^* N x\|$, amiből azonnal adódik, hogy $\|N^2\| = \|N^* N\|$; már csak a 16.6. állítást kell figyelembe vennünk, hogy a bizonyítás végére érjünk.

18. Pozitív operátorok

18.1. Ha T szimmetrikus operátor, akkor minden $x \in \mathrm{Dom}(T)$ esetén $\langle x, Tx\rangle \in \mathbb{R}$. Ez persze triviális valós Hilbert-terekre, komplex Hilbert-terekre is egyszerű tény, és ott még egyenértékű is azzal, hogy T szimmetrikus (lásd a 17.8. állítást).

Definíció *Legyenek S és T olyan önadjungált operátorok, melyek egyike legalább mindenütt értelmezett. Azt mondjuk, hogy S **nagyobb vagy egyenlő, mint** T ($S \ge T$), ha minden $x \in \mathrm{Dom}(S) \cap \mathrm{Dom}(T)$ esetén $\langle x, Sx\rangle \ge \langle x, Tx\rangle$. Az S önadjungált operátor **pozitív**, ha $S \ge 0$, és **szigorúan pozitív**, ha létezik $\sigma > 0$ úgy, hogy $S \ge \sigma \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$.*

A 17.9. állítás egyszerű következménye:

Állítás *Ha $S, T \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ és $S \ge T \ge 0$, akkor $\|S\| \ge \|T\|$.*

18.2. Állítás *Legyen Z sűrűn értelmezett zárt operátor. Ekkor $Z^* Z$ pozitív önadjungált operátor.*

Bizonyítás $x \in \mathrm{Dom}(Z^* Z)$ esetén

$$\|x\|\,\|(\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} + Z^* Z)x\| \ge \langle x, (\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} + Z^* Z)x\rangle = \|x\|^2 + \|Zx\|^2 \ge \|x\|^2,$$

így $\|(\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}+Z^*Z)x\|\geq\|x\|$, tehát $(\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}+Z^*Z)$ injektív, és inverze folytonos. A 16.12. állítás szerint $\mathrm{Ran}(\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}+Z^*Z)=\boldsymbol{H}$, tehát $A:=(\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}+Z^*Z)^{-1}:\boldsymbol{H}\to\mathrm{Dom}(Z^*Z)$ folytonos operátor.

Minden $y_1, y_2\in\boldsymbol{H}$ esetén létezik $x_1, x_2\in\mathrm{Dom}(Z^*Z)$ úgy, hogy $y_1=(\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}+Z^*Z)x_1$ és $y_2=(id_{\boldsymbol{H}}+Z^*Z)x_2$, ezért

$$\begin{aligned}\langle y_2, Ay_1\rangle =&\langle(\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}+Z^*Z)x_2, x_1\rangle = \langle x_2, x_1\rangle + \langle Z^*Zx_2, x_1\rangle = \\ =&\langle x_2, x_1\rangle + \langle Zx_2, Zx_1\rangle = \langle x_2, x_1\rangle + \langle x_2, Z^*Zx_1\rangle = \\ =&\langle x_2, (\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}+Z^*Z)x_1\rangle = \langle Ay_2, y_1\rangle,\end{aligned}$$

tehát A önadjungált.

A injektív és az inverze sűrűn értelmezett (a 16.12. állítás szerint), ezért a 16.8. állítás miatt $(\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}+Z^*Z)$ önadjungált, így Z^*Z is önadjungált (lásd 16.4.(1)).

Ha $x\in\mathrm{Dom}(Z^*Z)$, akkor $\langle x, Z^*Zx\rangle=\|Zx\|^2\geq 0$, azaz Z^*Z pozitív.

18.3. Állítás *Ha $S \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ pozitív önadjungált operátor, akkor minden $x, y \in \boldsymbol{H}$ esetén*

(i) $|\langle y, Sx\rangle|^2 \leq \langle y, Sy\rangle\langle x, Sx\rangle$,

(ii) $\|Sx\|^2 \leq \|S\|\langle x, Sx\rangle$.

Bizonyítás (i) Az $(y, x) \mapsto \langle y, Sx\rangle$ leképezésre teljesülnek a 10.4-beli tulajdonságok, így igaz rá a Cauchy–Schwartz-egyenlőtlenség.

(ii) Az előző egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned}\|Sx\|^4 = \langle Sx, Sx\rangle^2 &\leq \langle Sx, S(Sx)\rangle\langle x, Sx\rangle \leq \|Sx\|\,\|S^2x\|\langle x, Sx\rangle \\ &\leq \|S\|\,\|Sx\|^2\langle x, Sx\rangle.\end{aligned}$$

18.4. Állítás *Legyenek $T, S_n \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ önadjungált operátorok, $S_n \leq S_{n+1} \leq T$ $(n\in\mathbb{N})$. Ekkor létezik $(s)\lim_n S_n$, (pontonkénti határérték) amely önadjungált, és kisebb vagy egyenlő mint T.*

Bizonyítás Ha $m < n$, akkor $0 \leq S_n-S_m \leq S-S_1$, így 18.1. alapján $\|S_n-S_m\| \leq \|S - S_1\|$, valamint a 18.3.(ii) következtében a $\boldsymbol{H}$ ninden x elemére

$$\|(S_n - S_m)x\|^2 \leq \|S - S_1\|\langle x, (S_n - S_m)x\rangle. \qquad (*)$$

Az $\langle x, S_nx\rangle$ $(n\in\mathbb{N})$ valós sorozat monoton növekvő, felülről korlátos, tehát konvergens; mivel $\langle x, S_nx\rangle - \langle x, S_mx\rangle = \langle x, (S_n - S_mx\rangle$, a $(*)$ becslés alapján $(S_nx)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat a Hilbert-térben, tehát konvergens, ami éppen azt jelenti, hogy létezik $(s)\lim_n S_n \in \mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$.

Annak bizonyítását, hogy ez a határérték önadjungált és kisebb-egyenlő mint T, mint egyszerű feladatot az olvasóra bízzuk.

19. Operátorsorozatok konvergenciája

19.1 Definíció *Azt mondjuk, hogy mindenütt értelmezett folytonos operátorok $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata*

– **normában** *(vagy* **uniform***)* **konvergens**, *ha létezik A mindenütt értelmezett folytonos operátor úgy, hogy $\lim_n \|A_n - A\| = 0$, és ekkor az $A = (u)\lim_n A_n$ jelölést használjuk;*

– **erősen konvergens**, *ha létezik A mindenütt értelmezett folytonos operátor úgy, hogy $\lim_n A_n x = Ax$ minden $x \in \boldsymbol{H}$ esetén, és ekkor az $A = (s)\lim_n A_n$ jelölést használjuk (vagyis az erős konvergencia a pontonkénti konvergencia);*

– **gyengén konvergens**, *ha létezik A mindenütt értelmezett folytonos operátor úgy, hogy $\lim_n \langle y, A_n x\rangle = \langle y, Ax\rangle$ minden $x, y \in \boldsymbol{H}$ esetén, és ekkor az $A = (w)\lim_n A_n$ jelölést használjuk.*

19.2 Egyszerű feladat bebizonyítani: hogy

Állítás *Ha az operátorsorozat*

– *normában konvergens, akkor erősen is konvergens és $(s)\lim_n A_n = (u)\lim_n A_n$,*

– *erősen konvergens, akkor gyengén is konvergens és $(w)\lim_n A_n = (s)\lim_n A_n$.*

Viszont fordítva nem áll. Legyen l^2-ben a **jobbra tolás operátora**

$$R : l^2 \to l^2, \qquad (a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (0, a_1, a_2, a_3, \dots),$$

és a **balra tolás operátora**

$$L : l^2 \to l^2, \qquad (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots) \mapsto (a_2, a_3, a_4, \dots).$$

Könnyű megmutatni, hogy

– az $(L^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat normában nem konvergens, de $(s)\lim_n L^n = 0$,

– az $(R^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat erősen nem konvergens, de $(w)\lim_n R^n = 0$.

19.3. A normában konvergens operátorsorzat tudvalevőleg korlátos, és a Banach–Steinhaus-tételből azonnal következik, hogy ez igaz az erősen konvergens operátorsorozatra is:

Állítás *Ha $(A_n)_{neN}$ normában vagy erősen konvergens, akkor van olyan α szám, hogy $||A_n|| \leq \alpha$ minden n-re.*

19.4. Állítás *(i) Az operátorok lineáris műveletei felcserélhetők az előző feladatban értelmezett mindhárom határértékkel, azaz ha $A = (.)\lim_n A_n$ és $B = (.)\lim_n B_n$, akkor $A + B = (.)\lim_n (A_n + B_n)$, és hasonló igaz a számmal szorzásra.*

(ii) Az operátorok szorzása felcserélhető az egyenletes és az erős határértékkel, azaz ha $A = (u)\lim_n A_n$ és $B = (u)\lim_n B_n$, akkor $AB = (u)\lim_n (A_nB_n)$, és ugyanez igaz az erős limeszre is.

(iii) Az adjungálás felcserélhető az egyenletes és a gyenge határértékkel, azaz ha $A = (u)\lim_n A_n$, akkor $A^* = (u)\lim_n A_n^*$, és ugyanez igaz a gyenge limeszre is.

Bizonyítás (i) nyilvánvaló

(ii) Az

$$\begin{aligned}||A_nB_nx - ABx|| \leq & ||A_nB_nx - A_nBx|| + ||A_nBx - ABx|| \leq \\ \leq & ||A_n||\ ||B_nx - Bx|| + ||B||\ ||A_nx - Ax|| \leq \\ \leq & \alpha||B_nx - Bx|| + ||B||\ ||A_nx - Ax||\end{aligned}$$

egyenlőtlenségek biztosítják a konvergenciát.

(iii) A normában való konvergenciát

$$||A_n^* - A^*|| = ||(A_n - A)^*|| = ||A_n - A||$$

mutatja, a gyenge konvergenciát pedig

$$\langle y, A_n^*x\rangle - \langle y, A^*x\rangle = \langle y, (A_n^* - A^*)x\rangle = \langle y, (A_n - A)^*x\rangle = \langle (A_n - A)y, x\rangle.$$

Viszont a gyenge határértékre (ii) nem teljesül: $(w)\lim_n L^n = (w)\lim_n R^n = 0$, de $L^nR^n = \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ minden n-re.

Az erős határértékre pedig (iii) nem teljesül: $(s)\lim_n L^n = 0$, de az $(L^n)^* = R^n$ sorozatnak nem létezik erős határértéke.

20. Differenciálás-operátor $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$-ben

20.1. Definíció *$L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$-ben a*

$$\mathrm{Dom}(P) := \{\phi{\in}L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) \mid \phi \text{ abszolút folytonos}, \ \phi'{\in}L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})\},$$

és

$$P : \mathrm{Dom}(P){\to}L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}), \quad \phi{\mapsto}{-i}\phi',$$

formulákkal meghatározott operátort ***differenciálás-operátornak*** *nevezzük.*

P sűrűn értelmezett, hiszen $\mathrm{Dom}(P)$ tartalmazza a végtelenszer differenciálható, kompakt tartójú függvényeket.

Állítás *Ha $\phi{\in}\mathrm{Dom}(P)$, akkor $\lim\limits_{+\infty}\phi{=}\lim\limits_{-\infty}\phi{=}0$.*

Bizonyítás $\phi{\in}\mathrm{Dom}(P)$ esetén $\phi'{\in}L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, így $(\phi^*)'\phi$ és $\phi^*\phi'$ Lebesgue-integrálható, következésképpen létezik

$$C{:=}\lim_{x\to\pm\infty}\int\limits_0^x((\phi^*)'\phi{+}\phi^*\phi') = \lim_{x\to\pm\infty}\left[|\phi|^2\right]_0^x = \lim_{x\to\pm\infty}|\phi(x)|^2{-}|\phi(0)|^2,$$

tehát $\lim\limits_{x\to\pm\infty}|\phi(x)|^2{=}|\phi(0)|^2{+}C$, azonban $|\phi|^2$ integrálhatósága miatt csak

$$\lim_{x\to\pm\infty}|\phi(x)|^2 = 0$$

lehetséges.

20.2. Állítás *$P^*{=}P$.*

Bizonyítás Legyen $\phi,\psi{\in}\mathrm{Dom}(P)$; ekkor

$$\langle\psi,P\phi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}}\psi^*(-i\phi') = i\int\limits_{\mathbb{R}}(\psi^*)'\phi = \int\limits_{\mathbb{R}}(-i\psi')^*\phi' = \langle P\psi,\phi\rangle\ ,$$

következésképpen $P{\subset}P^*$.

Legyen $\psi{\in}\mathrm{Dom}(P^*)$; ekkor $P^*\psi \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, és tudjuk, hogy négyzetesen integrálható függvények véges mértékű halmazon integrálhatók, ezért minden $a,b{\in}\mathbb{R}$, $a{<}b$ esetén jól értelmezett az $\eta := i\left(\delta + \int\limits_a P^*\psi\right)$, függvény, ahol $\delta{\in}\mathbb{C}$ olyan, hogy $\int\limits_a^b(\psi{-}\eta){=}0$ teljesüljön. η abszolút folytonos, és $\eta' = iP^*\psi$.

Ha $\phi\in\mathrm{Dom}(P)$ tartója része az $[a,b]$ intervallumnak, akkor

$$-i\int_a^b \psi^*\phi' = \langle\psi, P\phi\rangle = \langle P^*\psi,\phi\rangle = \int_a^b (P^*\psi)^*\phi = \int_a^b (-i\eta')^*\phi =$$
$$= [i\eta^*\phi]_a^b - i\int_a^b \eta^*\phi' = -i\int_a^b \eta^*\phi',$$

következésképpen $\int_a^b (\psi-\eta)^*\phi'=0$.

A

$$\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{C},\quad x\mapsto\begin{cases}\int_a^x(\psi-\eta), & \text{ha } x\in[a,b],\\ 0, & \text{ha } x\notin[a,b]\end{cases}$$

függvény benne van P értelmezési tartományában, tartója része az $[a,b]$ intervallumnak, így $\int_a^b|\psi-\eta|^2=0$, következésképpen ψ az $[a,b]$-n Lebesgue-majdnem mindenütt egyenlő η-val, tehát ψ az $[a,b]$-n abszolút folytonos és $(\psi|_{[a,b]})'=iP^*\psi|_{[a,b]}$. Ez minden $[a,b]$ intervallumra igaz, így ψ abszolút folytonos és $\psi'=iP^*\psi\in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, azaz $\psi\in\mathrm{Dom}(P)$. Ezzel beláttuk, hogy $P^*\subset P$, és így $P^*=P$.

21. A függvénnyel való szorzás-operátorok

21.1. Definíció *Legyen $(X,\mathcal{A},\mu)$ σ-véges mértéktér, és $f:X\to\mathbb{C}$ mérhető függvény. A*

$$\mathrm{Dom}(M_f):=\{\phi\in L^2_\mu(X)\mid f\phi\in L^2_\mu(X)\},$$
$$M_f:\mathrm{Dom}(M_f)\to L^2_\mu(X),\quad \phi\mapsto f\phi$$

*formulákkal meghatározott M_f-et az f-**fel való szorzás operátorának** nevezzük.*

Állítás *$\mathrm{Dom}(M_f)\subset L^2_\mu(X)$ sűrű lineáris altér.*

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy $\mathrm{Dom}(M_f)$ lineáris altere $L^2_\mu(X)$-nek. Ha $\phi\in L^2_\mu(X)$, akkor minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $F_n:=\{|f|\le n\}\subset X$ mérhető halmaz, és $|f\chi_{F_n}\phi|\le n\chi_{F_n}|\phi|$ miatt $\chi_{F_n}\phi\in\mathrm{Dom}(M_f)$. A $(\chi_{F_n}\phi)_n\in\mathbb{N}$ sorozat pontonként ϕ-hez konvergál, és $|\phi|$ négyzetesen integrálható majoránsa, így a Lebesgue-tétel szerint $(\chi_{F_n}\phi)_{n\in\mathbb{N}}$ ϕ-hez konvergál $L^2_\mu(X)$-ben is.

21.2. Állítás *Legyen f és g két $X \to \mathbb{C}$ mérhető függvény. $M_f = M_g$ pontosan akkor teljesül, ha f és g μ-majdnem mindenütt egyenlők.*

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy ha f és g μ-majdnem mindenütt egyenlők, akkor $M_f = M_g$.

Tegyük fel, hogy f és g nem μ-majdnem mindenütt egyenlők, és zárjuk ki a $\mu = 0$ triviális esetet. Ekkor létezik $E \in \mathcal{A}$, amelyre $\infty > \mu(E) > 0$, és $E \subset \{f \neq g\}$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$H_n := E \cap \{|f| \leq n\} \cap \{|g| \leq n\}$$

mérhető halmaz, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n = E$, következésképpen létezik olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy $\mu(H_m) > 0$. Ekkor $|f \chi_{H_m}| \leq m |\chi_{H_m}|$ és $|g \chi_{H_m}| \leq m |\chi_{H_m}|$ miatt $\chi_{H_m} \in \mathrm{Dom}(M_f) \cap \mathrm{Dom}(M_g)$. Az $f \chi_{H_m}$ és a $g \chi_{H_m}$ függvények nem μ-majdnem mindenütt egyenlők, tehát $M_f \chi_{H_m} \neq M_g \chi_{H_m}$, és így $M_f \neq M_g$.

21.3. Állítás *M_f pontosan akkor folytonos, ha f μ-korlátos, és ekkor*

$$\|M_f\| = \|f|_\infty.$$

Bizonyítás Legyen f μ-korlátos. Ekkor minden $\phi \in L^2_\mu(X)$ esetén $f\phi \in L^2_\mu(X)$, azaz $\mathrm{Dom}(M_f) = L^2_\mu(X)$, és

$$\|M_f \phi\|^2 = \int_X |f\phi|^2 d\mu \leq (\|f|_\infty)^2 \|\phi\|^2,$$

következésképpen M_f korlátos, és $\|M_f\| \leq \|f|_\infty$. Legyen α olyan szám, hogy $\|f|_\infty > \alpha$. Ekkor $\mu(\{|f| > \alpha\}) \neq 0$, így létezik $E \in \mathcal{A}$ olyan, hogy $0 < \mu(E) < \infty$, és $E \subset \{|f| > \alpha\}$. A

$$\psi := \frac{\chi_E}{\sqrt{\mu(E)}} \in L^2_\mu(X)$$

függvény olyan, hogy $\|\psi\| = 1$ és $\|f\psi\| > \alpha$, tehát $\|M_f\| > \alpha$, így $\|M_f\| \geq \|f|_\infty$.

Tegyük fel, hogy f nem μ-korlátos. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $m_n \in \mathbb{N}$ és $E_n \in \mathcal{A}$, amelyre $0 < \mu(E_n) < \infty$, és $E_n \subset \{|f| > n\} \cap \{|f| < m_n\}$. A

$$\psi_n := \frac{\chi_{E_n}}{\sqrt{\mu(E_n)}} \in L^2_\mu(X)$$

függvények olyanok, hogy $\|\psi_n\| = 1$, $\psi_n \in \mathrm{Dom}(M_f)$ és $\|f\psi_n\| > n$, tehát M_f nem korlátos.

21.4. Állítás $(M_f)^* = M_{f^*}$.

Bizonyítás Ha $\phi, \psi \in \mathrm{Dom}(M_f) = \mathrm{Dom}(M_{f^*})$, akkor

$$\langle \phi, M_f \psi \rangle = \int_X \phi^* f \psi d\mu = \int_X (f^* \phi)^* \psi d\mu = \left\langle M_f^* \phi, \psi \right\rangle ,$$

következésképpen $M_{f^*} \subset (M_f)^*$.

Ha $\phi \in \mathrm{Dom}((M_f)^*)$ és $\psi \in \mathrm{Dom}(M_f)$, akkor

$$\int_X ((M_f)^* \phi)^* \psi d\mu = \langle (M_f)^* \phi, \psi \rangle = \langle \phi, M_f \psi \rangle = \int_X \phi^* f \psi d\mu = \int_X (f^* \psi)^* \psi d\mu ,$$

így

$$\int_X ((M_f)^* \phi - f^* \phi)^* \psi d\mu = 0.$$

Legyen $n \in \mathbb{N}$ esetén $F_n := \{|f| \leq n\}$, és

$$\psi := \chi_{F_n}((M_f)^* \phi - f^* \phi).$$

$(M_f)^* \phi \in L^2_\mu(X)$, és az $|f^* \phi \chi_{F_n}| \leq n \chi_{F_n} |\phi|$ egyenlőtlenség szerint $f^* \phi \chi_{F_n} \phi \in L^2_\mu(X)$, következésképpen $\psi \in L^2_\mu(X)$. Másrészt az $|f \psi| = |f \chi_{F_n} \psi| \leq n \chi_{F_n} |\psi|$ egyenlőtlenség miatt $f \psi \in L^2_\mu(X)$, tehát $\psi \in \mathrm{Dom}(M_f)$, és így

$$\int_X |(M_f)^* \phi - f^* \phi|^2 \chi_{F_n} \, d\mu = 0,$$

ezért $(M_f)^* \phi = f^* \phi$ az F_n halmazon μ-majdnem mindenütt. Ez tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén igaz, és $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = X$, így $(M_f)^* \phi = f^* \phi$ μ-majdnem mindenütt, következésképpen $\phi \in \mathrm{Dom}(M_{f^*}) = \mathrm{Dom}(M_f)$. Ezzel beláttuk, hogy $(M_f)^* \subset M_{f^*}$, azaz $(M_f)^* = M_{f^*}$.

Következmény M_f zárt operátor minden $f : X \to \mathbb{C}$ mérhető függvény esetén, ugyanis $M_f = (M_{f^*})^*$.

Tehát a zártgrafikon-tétel miatt M_f pontosan akkor mindenütt értelmezett, ha folytonos, ami viszont a 21.3. állítás szerint azzal egyenértékű, hogy $f \in L^\infty_\mu(X)$.

21.5. Egyszerű tény, hogy $M_1 = \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$, $M_0 = 0$, és minden $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ esetén $M_{\lambda f} = \lambda M_f$ (természetesen $0 = M_{0f} \supset 0 M_f$). Továbbá igaz még a következő két összefüggés is, és mindezek "rímelnek" a 16.4-ben mondottakra.

Állítás *Legyenek $f, g : X \to \mathbb{C}$ mérhető függvények. Ekkor*

(i) $M_{f+g} \supset M_f + M_g$ és egyenlőség áll, ha M_f és az M_g közül az egyik folytonos,

(ii) $M_{fg} \supset M_f M_g$, a jobb oldal értelmezési tartománya $\mathrm{Dom}(M_g) \cap \mathrm{Dom}(M_{fg})$, és egyenlőség áll, ha M_g folytonos.

Bizonyítás (i) Ha $\phi \in \mathrm{Dom}(M_f + M_g)$, akkor $f\phi$ és $g\phi$ négyzetesen integrálható, így $(f+g)\phi$ is négyzetesen integrálható, tehát igaz a kijelentett tartalmazás.

Ha például M_g folytonos, azaz $g \in L^\infty_\mu(X)$, és $\phi \in \mathrm{Dom}(M_{f+g})$, akkor $(f+g)\phi$ és nyilvánvalóan $g\phi$ is négyzetesen integrálható, tehát $f\phi$ is négyzetesn integrálható, azaz $\phi \in \mathrm{Dom}(M_f + M_g)$, tehát végül is $M_{f+g} = M_f + M_g$.

(ii) Ha $\phi \in \mathrm{Dom}(M_f M_g)$, akkor $g\phi$ és $f(g\phi) = (fg)\phi$ négyzetesen integrálható, tehát igaz a kijelentett tartalmazás. Az is nyilvánvaló ekkor, hogy a jobb oldal értelmezési tartománya része $\mathrm{Dom}(M_g) \cap \mathrm{Dom}(M_{fg})$-nek. Ha viszont ϕ ez utóbbi halmaznak az eleme, akkor $g\phi$ és $(fg)\phi = f(g\phi)$ négyzetesen integrálható, tehát $\phi \in \mathrm{Dom}(M_f M_g)$.

Ha M_g folytonos, akkor mindenütt értelmezett, ezért az értelmezési tartományokra az imént belátott öszefüggés szerint $M_{fg} = M_f M_g$.

21.6. Állítás *M_f normális operátor.*

Bizonyítás Ha $\phi \in \mathrm{Dom}(M_{|f|^2})$, akkor $\phi \in L^2_\mu(X)$ és $|f|^2\phi \in L^2_\mu(X)$, így a szorzatuk $|f|^2|\phi|^2$ μ-integrálható, azaz $f\phi \in L^2_\mu(X)$. Ez azt jelenti, hogy ϕ az M_f értelmezési tartományának is eleme. Arra jutottunk tehát, hogy $\mathrm{Dom}(M_{|f|^2}) \subset \mathrm{Dom}(M_f) = \mathrm{Dom}(M_{f^*})$. Alkalmazva az előbbi állítás (ii) pontját a $g := f^*$ függvényre azt kapjuk, hogy

$$M_f M_{f^*} = M_{|f|^2} = M_{f^*} M_f,$$

azaz M_f normális.

21.7. Állítás *Az M_f operátor pontosan akkor*

(i) önadjungált, ha $f = f^*$ μ-majdnem mindenütt (azaz f μ-majdnem mindenütt valós értékű),

(ii) unitér, ha $|f| = 1$ μ-majdnem mindenütt,

(iii) projektor, ha létezik $E \in \mathcal{A}$ úgy, hogy $f = \chi_E$ μ-majdnem minenütt (azaz f μ-majdnem mindenütt 0 és 1 értékű).

Bizonyítás A 21.3. és 21.4. állításokból azonnal adódnak a kívánt összefüggések az alábbi formulák alapján.

(i) $M_f = (M_f)^* = M_{f^*}$

(ii) $M_1 = \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}} = M_f(M_f)^* = M_f M_{f^*} = M_{|f|^2}$.

(iii) $M_{f^2} = (M_f)^2 = M_f$.

22. A Heisenberg-féle felcserélési reláció

22.1. Legyen P a 20. fejezetben definiált differenciálás-operátor a $\boldsymbol{H} := L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Hilbert-téren, és $Q{:=}M_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$. Ekkor P és Q nem folytonos önadjungált operátorok, $PQ{-}QP$ sűrűn értelmezett, mert a kompakt tartójú végtelenszer differenciálható függvények benne vannak az értelmezési tartományában, és $PQ{-}QP{\subset}{-}i\,\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$.

Legyen P a 20. fejezetben definiált valamelyik önadjungált differenciálás-operátor a $\boldsymbol{H}{:=}L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ Hilbert-téren ($P = P_\alpha$ valamely α-ra) és $Q{:=}M_{\mathrm{id}_{[-\pi,\pi]}}$. Ekkor P nem folytonos, Q folytonos önadjungált operátor, $PQ{-}QP$ sűrűn értelmezett, és $PQ{-}QP{\subset}{-}i\,\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$.

Mindkét idézett esetben csak tartalmazás áll. Felmerül a kérdés, hogy létezik-e egyáltalán olyan P és Q önadjungált operátor valamely $\boldsymbol{H}$ Hilbert-térben, hogy teljesül a

$$PQ{-}QP = -i\,\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$$

úgynevezett **Heisenberg-féle felcserélési reláció**.

Ha P és Q ilyenek, akkor mindenütt értelmezettek, így zártságuk miatt folytonosak. A következő állítás azt mondja, hogy a fenti egyenlőség folytonos (nem szükségképpen önadjungált) operátorokra nem teljesülhet.

Állítás *Ha A és B folytonos operárotorok, amelyekre $AB{-}BA = \lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ valamely $\lambda{\in}\mathbb{K}$ esetén, akkor $\lambda{=}0$.*

Bizonyítás Ha A és B eleget tesz az állításban kirótt feltételnek, akkor indukcióval megmutatható, hogy minden $n{\in}\mathbb{N}$ esetén $A^nB{-}BA^n{=}n\lambda A^{n-1}$.

Tegyük fel először, hogy létezik olyan $n{\in}\mathbb{N}$, hogy $A^n{=}0$, de $A^{n-1}{\neq}0$. Ekkor $n\lambda A^{n-1}{=}A^nB{-}BA^n{=}0$, következésképpen $\lambda{=}0$.

Tegyük fel most, hogy $A^n{\neq}0$ minden $n{\in}\mathbb{N}$ esetén. Ekkor

$$n|\lambda|\|A^{n-1}\| \le \|A^nB\| + \|BA^n\| \le 2\|B\|\,\|A^{n-1}\|\|A\|,$$

így

$$|\lambda| \le \frac{2\|A\|\,\|B\|}{n}$$

minden n-re, következésképpen $\lambda{=}0$.

22.3. A kvantummechanika alapaxiómájaként szokás feltenni, hogy egy tömegpont P impulzusát és Q helyzetét olyan operátorokkal kell leírni, amelyek teljesítik a Heisenberg-féle felcserélési relációt. Láttuk, ez lehetetlen. Ha helyette azt követeljük meg, hogy csak egy sűrű lináris altéren álljon fönn az egyenlőség, akkor már nem kívánunk lehetetlent, amint azt a bevezető példák mutatták. Ekkor azonban éppen ezeknek a példáknak a bősége okozza a kellemetlenséget: legalább kontinuum sok unitér inekvivalens lehetőség van. Pontosan megmagyarázzuk, mit értünk ezen.

Legyen P és Q olyan önadjungált operátor valamely $\boldsymbol{H}$ Hilbert-térben, hogy egy sűrű lineáris altéren teljesül a $PQ{-}QP = -i\,\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ összefüggés, P' és Q' olyan önadjungált operátor valamely $\boldsymbol{H}'$ Hilbert-térben, hogy egy sűrű lineáris altéren teljesül a $P'Q'-Q'P' = -i\,\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}'}$ összefüggés. Azt mondjuk, hogy a (P,Q) pár **unitér ekvivalens** a (P',Q') párral, ha van olyan olyan $U : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}'$ unitér leképezés (azaz izometrikus lineáris bijekció), hogy $P' = UPU^{-1}$, $Q' = UQU^{-1}$.

Az unitér ekvivalens párokat – és csak azokat – "ugyanolyanoknak", "fizikailag egyenértékűeknek" tekintjük. Ha tehát kontinuum sok unitér inekvivalens lehetőség van, akkor ugyanennyi fizikailag nem egyenértékű kvantummechanika. Később a spektrumokkal kapcsolatban látni fogjuk, hogy az $L^2([-\pi,\pi])$-beli $(P_\alpha, M_{\mathrm{id}_{[-\pi,\pi]}})$ és $(P_{\alpha'}, M_{\mathrm{id}_{[-\pi,\pi]}})$ párok unitér inekvivalensek, ha $\alpha \neq \alpha'$.

A Heisenberg-féle felcserélési relációból formális átalakításokkal, összegzéssel nyerhető az

$$e^{iaP}e^{ibQ} = e^{iab}e^{ibQ}e^{iaP} \qquad (a,b \in \mathbb{R}),$$

Weyl-féle reláció, ahol az exponenciálosoknak jól meghatározott értelme van (nem sorösszeg!). Neumann János megmutatta, hogy ha a (P,Q) pár eleget tesz a fenti relációnak és irreducibilis, azaz csak a triviális zárt alterek – a nulla és az egész –invariánsak mind P-re, mind Q-ra, akkor ez a pár unitér ekvivalens az $L^2(\mathbb{R})$-beli differenciálás-operátorból és az $\mathrm{id}_\mathbb{R}$-vel való szorzás-operátorból álló párral.

23. Operátorok spektruma

23.1. A véges dimenziós vektortéren megismert fogalmakat (Analízis II.37.1.) alkalmazzuk most Hilbert-terekre.

Definíció *A* $\lambda{\in}\mathbb{K}$ *az* A *operátor* ***sajátértéke****, ha* $\mathrm{Ker}(A{-}\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}){\neq}\{0\}$*, és ekkor a* $\mathrm{Ker}(A{-}\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})$ *altér az* A*-nak a* λ*-hoz tartozó* ***sajátaltere****, amelynek nem nulla elemei az* A*-nak* λ*-hoz tartozó* ***sajátvektorai****. Jelölje* $\mathrm{Eig}(A)$ *az* A *sajátértékeinek halmazát.*

Tehát $\lambda{\in}\mathbb{K}$ pontosan akkor sajátértéke A-nak, ha az $A{-}\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ lineáris leképezés nem injektív, és $x{\in}\mathrm{Dom}(A)\setminus\{0\}$ pontosan akkor λ-hoz tartozó sajátvektora A-nak, ha $Ax{=}\lambda x$.

Ugyanúgy, mint véges dimenziós vektorterek esetén, egy operátor különböző sajátértékű sajátvektoraiból álló rendszer lineárisan független.

Állítás *Egy zárt operátor minden sajátaltere zárt lineáris altér.*

Bizonyítás Ha Z zárt operátor és $\lambda{\in}\mathbb{K}$, akkor az 5.3. állítás szerint $Z{-}\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ zárt operátor, így magtere az 5.5. szerint zárt lineáris altér. ■

Speciálisan, mindenütt értelmezett és folytonos operátor sajátalterei zártak.

23.2. Tudjuk, hogy véges dimenziós komplex vektortéren minden operátornak van sajátértéke. Végtelen dimenzióban ez nem igaz. Most a sajátérték fogalmának általánosításával foglalkozunk.

Definíció *$\lambda\in\mathbb{K}$ az A operátor* ***reguláris értéke****, ha az $A - \lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ operátor*

(i) injektív,
(ii) értékkészlete sűrű,
(iii) inverze folytonos.

Jelölje $\mathrm{Reg}(A)$ *az A reguláris értékeinek halmazát. A* $\mathrm{Sp}(A){:=}\mathbb{K}\setminus\mathrm{Reg}(A)$ *halmazt az A* ***spektrumának*** *nevezzük.*

Nyilvánvaló, hogy $\mathrm{Eig}(A)\subset\mathrm{Sp}(A)$. Ha $\boldsymbol{H}$ véges dimenziós, akkor $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Eig}(A)$, mivel ekkor minden $\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}$ injektív lineáris leképezés bijekció, melynek inverze, lévén lineáris, folytonos.

A spektrum pontjait – a sajátértékeken kívül – aszerint osztályozzuk, hogy a reguláris értékekre felsorolt (ii)-(iii) tulajdonságok közül melyik nem teljesül.

$$\mathrm{Sp}_c(A) := \{\lambda\in\mathbb{K}\setminus\mathrm{Eig}(A) \mid \mathrm{Ran}(A-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}) \text{ sűrű, } (A-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{-1} \text{ nem folytonos}\},$$

$$\mathrm{Sp}_{r_1}(A){:=}\{\lambda\in\mathbb{K}\setminus\mathrm{Eig}(A) \mid \mathrm{Ran}(A-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}) \text{ nem sűrű, } (A-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{-1} \text{ folytonos}\},$$

$$\mathrm{Sp}_{r_2}(A){:=}\{\lambda\in\mathbb{K}\setminus\mathrm{Eig}(A) \mid \mathrm{Ran}(A-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}) \text{ nem sűrű, } (A-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{-1} \text{ nem folytonos}\}.$$

Tehát $\mathrm{Sp}(A){=}\mathrm{Eig}(A) \cup \mathrm{Sp}_c(A) \cup \mathrm{Sp}_{r_1}(A) \cup \mathrm{Sp}_{r_2}(A)$.

$\mathrm{Sp}_c(A)$-t az A **folytonos spektrumának** szokás nevezni, $\mathrm{Sp}_{r_1}(A) \cup \mathrm{Sp}_{r_2}(A)$-t pedig a **maradékspektrumának**.

Állítás *Ha Z zárt operátor, akkor $\lambda\in\mathrm{Reg}(Z)$ ekvivalens azzal, hogy $Z-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ injektív, az inverze mindenütt értelmezett és folytonos (azaz $\mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ eleme).*

Bizonyítás Ha Z zárt, akkor $\lambda\in\mathrm{Reg}(Z)$ esetén $(Z-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{-1}$ sűrűn értelmezett folytonos lineáris leképezés, mely az 5.3. és az 5.4 állítás szerint zárt, így a zárt grafikon tétele szerint mindenütt értelmezett. ■

Ha tehát $\lambda \in \mathrm{Reg}(Z)$, akkor $\mathrm{Ran}(Z - \lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}) = \boldsymbol{H}$.

Speciálisan igaz ez mindenütt értelmezett folytonos operátorra, azaz $\mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$ elemére.

23.12. Definíció *$\lambda \in \mathbb{K}$ az A operátor* ***általánosított sajátértéke****, ha $\lambda \notin \mathrm{Eig}(A)$ és létezik $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathrm{Dom}(A)$-ban úgy, hogy valamely $K{>}0$ és minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $\|x_n\|{\geq}K$, és*

$$\lim_n (A-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})x_n = 0. \qquad (*)$$

Állítás *$\lambda \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Eig}(A)$ pontosan akkor általánosított sajátértéke A-nak, ha létezik $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathrm{Dom}(A)$-ban úgy, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $\|x_n\| = 1$ és a $(*)$ egyenlőség teljesül.*

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy ha a sorozat tagjai mind egységvektorok, akkor a $K := 1$ számmal teljesül a definíció feltétele. Ha viszont a sorozat alulról korlátos, akkor az $y_n := \dfrac{x_n}{\|x_n\|}$ sorozat tagjai egységvektorok, és

$$\|(A - \lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})y_n\| \leq \frac{1}{K}\|(A - \lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})x_n\|,$$

tehát a bal oldal határértéke nulla.

23.13. Állítás *$\lambda\in\mathbb{K} \setminus \mathrm{Eig}(A)$ pontosan akkor általánosított sajátértéke A-nak, ha $(A-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{-1}$ nem folytonos.*

Bizonyítás $\lambda\in\mathbb{K}\setminus\mathrm{Eig}(A)$ miatt $A-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ injektív, és a 23.11. állítás szerint $(A-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{-1}$ pontosan akkor nem folytonos, ha

$$\inf_{x\in\mathrm{Dom}(A),\|x\|=1} \|(A-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})x\| = 0.$$

Ha λ általánosított sajátérték, akkor az előzőek szerint a fenti egyenlőség nyilvánvalóan igaz. Ha viszont ez az egyenlőség áll, akkor az infimum alaptulajdonsága szerint létezik $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egységvektorokból álló sorozat, amelyre $(*)$ teljesül.

25. Normális operátorok spektruma

25.1. Állítás *Ha N normális operátor, akkor*

$$\mathrm{Eig}(N^*)=\mathrm{Eig}(N)^*,$$

és a $\lambda\in\mathrm{Eig}(N)$ illetve a $\lambda^*\in\mathrm{Eig}(N^*)$ sajátértékekhez tartozó sajátalterek megegyeznek.

Bizonyítás Legyen $\lambda\in\mathbb{K}$. Ekkor $N-\lambda\cdot\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ normális, így 17.6. következménye szerint $\mathrm{Ker}(N^*-\lambda^*\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})=\mathrm{Ker}(N-\lambda\cdot\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^*=\mathrm{Ker}(N-\lambda\cdot\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})$.

Megjegyzés Ha N normális, akkor a fenti eredmény és a 23.10. állítás alapján $\mathrm{Sp}_{r_1}(N)=\mathrm{Sp}_{r_2}(N)=\emptyset$, tehát

$$\mathrm{Sp}(N)=\mathrm{Eig}(N)\cup\mathrm{Sp}_c(N),$$

azaz normális operátor spektrumában csak sajátértékek és általánosított sajátértékek vannak. Más szóval, ha $N-\lambda\cdot\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ injektív és az inverze folytonos, akkor $\lambda\in\mathrm{Reg}(N)$.

Ha N normális operátor, akkor minden $\lambda\in\mathbb{K}$ esetén a 17.6. állítás szerint $N-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ akkor és csak akkor injektív, ha értékkészlete sűrű, így tehát $\lambda \in \mathrm{Eig}(N)$ esetén $\mathrm{Ran}(N-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})$ nem sűrű.

25.2. Állítás *Legyen V izometrikus és T szimmetrikus operátor. Ekkor*

(1) $\quad \mathrm{Eig}(V)\subset\mathbb{T}$ *és* $\mathrm{Eig}(V)^*\subset\mathrm{Eig}(V^*)$,
és minden $\lambda\in\mathrm{Eig}(V)$, $x\in\boldsymbol{H}$ esetén, ha $Vx=\lambda x$, akkor $V^*x=\lambda^*x$;

(2) $\quad \mathrm{Eig}(T)\subset\mathbb{R}$ *és* $\mathrm{Eig}(T)^*\subset\mathrm{Eig}(T^*)$.

Bizonyítás (1) Legyen $\lambda\in\mathrm{Eig}(V)$, és $0 \neq x\in\boldsymbol{H}$ olyan, hogy $Vx=\lambda x$. Ekkor

$$\langle x,x\rangle = \langle Vx,Vx\rangle = \langle \lambda x,\lambda x\rangle = |\lambda|^2\langle x,x\rangle,$$

következésképpen $|\lambda|=1$. Továbbá, $V^*V=\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ miatt

$$x = V^*(Vx) = V^*(\lambda x) = \lambda V^*x,$$

így $V^*x=\lambda^{-1}x=\lambda^*x$, tehát $\lambda^*\in\mathrm{Eig}(V^*)$.

(2) Legyen $\lambda\in\mathrm{Eig}(T)$, és $0 \neq x\in\boldsymbol{H}$ olyan, hogy $Tx=\lambda x$. Ekkor

$$\lambda^*\langle x,x\rangle = \langle \lambda x,x\rangle = \langle Tx,x\rangle = \langle x,Tx\rangle = \langle x,\lambda x\rangle = \lambda\langle x,x\rangle,$$

következésképpen $\lambda^*=\lambda$, azaz $\lambda\in\mathbb{R}$. Mivel $T\subset T^*$,

$$\mathrm{Eig}(T)^* = \mathrm{Eig}(T) \subset \mathrm{Eig}(T^*).$$

25.3. Állítás *Ha az A operátor normális, szimmetrikus vagy izometrikus, akkor A különböző sajátértékeihez tartozó sajátalterei ortogonálisak egymásra.*

Bizonyítás Legyen λ és μ az A két különböző sajátértéke, és $x,y\in\boldsymbol{H}\setminus\{0\}$ olyanok, hogy $Ax=\lambda x$ és $Ay=\mu y$. Ekkor a 25.1. állítás illetve a 25.2. állítás szerint $A^*y=\mu^*y$, így

$$\mu\langle y,x\rangle = \langle \mu^*y,x\rangle = \langle A^*y,x\rangle = \langle y,Ax\rangle = \lambda\langle y,x\rangle,$$

ezért $\lambda\neq\mu$ miatt $\langle y,x\rangle=0$.

25.4. Állítás *Legyen U unitér és S önadjungált operátor. Ekkor*

(1) $\quad \mathrm{Sp}(U)\subset\mathbb{T}$ *és* $\mathrm{Eig}(U)^*=\mathrm{Eig}(U^*)$,

(2) $\quad \mathrm{Sp}(S)\subset\mathbb{R}$ *és* $\mathrm{Eig}(S)^*=\mathrm{Eig}(S^*)$.

Bizonyítás (1) U normális, így $\mathrm{Eig}(U)^*=\mathrm{Eig}(U^*)$. A 23.7. állítás szerint $\lambda\in\mathrm{Sp}(U)$ esetén $|\lambda|\leq\|U\|=1$. Legyen $\lambda\in\mathbb{K}$, $|\lambda|<1$. Ekkor, minthogy $U^{-1}\in\mathcal{L}in(\boldsymbol{H})$, valamint $\|\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}\|=|\lambda|<1=\dfrac{1}{\|U^{-1}\|}$, az $U-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ operátor invertálható, azaz $\lambda\notin\mathrm{Sp}(U)$.

(2) S normális, így $\mathrm{Eig}(S)^*=\mathrm{Eig}(S^*)$. Legyen $\lambda=\alpha+i\beta$, ahol $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ és $\beta\neq0$. Ekkor a 25.2. állítás szerint $\lambda\notin\mathrm{Eig}(S)$, és $x\in\mathrm{Dom}(S)$ esetén

$$\|(S-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})x\|^2=\|(S-\alpha\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})x\|^2+\beta^2\|x\|^2\geq\beta^2\|x\|^2,$$

ezárt a 23.11. állítás következéstében $(S-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{-1}$ folytonos, így a 25.1. megjegyzése alapján $\lambda\in\mathrm{Reg}(S)$.

25.5. Állítás *Legyen S pozitív önadjungált operátor. Ekkor* $\mathrm{Sp}(S)\subset[0,+\infty[$. *Ha S szigorúan pozitív, és $\sigma>0$ olyan, hogy $S\geq\sigma\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$, akkor* $\mathrm{Sp}(S)\subset[\sigma,+\infty[$.

Bizonyítás Legyen $\lambda<0$, és $x\in\mathrm{Dom}(S)$. Ekkor

$$\begin{aligned}-\lambda\|x\|^2=\langle x,-\lambda x\rangle\leq\langle x,Sx\rangle+\langle x,-\lambda x\rangle=&\\ =\langle x,(S-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})x\rangle\leq\|x\|\,\|(S-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})x\|,&\end{aligned}$$

következésképpen $\|(S-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})x\|\geq-\lambda\|x\|$, így $(S-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})$ injektív, és inverze folytonos, tehát a 25.1. állítás következménye szerint $\lambda\in\mathrm{Reg}(S)$.

Ha S szigorúan pozitív, és $\sigma>0$ olyan, hogy $S\geq\sigma\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$, akkor $\lambda<\sigma$ és $x\in\mathrm{Dom}(S)$ esetén

$$(\sigma-\lambda)\|x\|^2\leq\langle x,Sx\rangle+\langle x,-\lambda x\rangle=\langle x,(S-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})x\rangle\leq\|x\|\,\|(S-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})x\|,$$

következésképpen $\|(S-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})x\|\geq(\sigma-\lambda)\|x\|$, így az előzőhöz hasonló gondolattal azt kapjuk, hogy $\lambda\in\mathrm{Reg}(S)$.

25.6. Állítás *Legyen N normális operátor és $(x_i)_{i\in I}$ az N sajátvektoraiból álló ortonormált rendszer: minden $i\in I$ esetén $Nx_i=\lambda_i x_i$ (λ_i nem szükségképpen különbözik λ_j-től, ha $i\neq j$). Ekkor tetszőleges $(c_i)_{i\in I}\in l^2_{\mathbb{K}}(I)$ esetén $\sum\limits_{i\in I}c_ix_i\in\mathrm{Dom}(N)$ pontosan akkor, ha $\sum\limits_{i\in I}|c_i|^2|\lambda_i|^2<+\infty$, és ekkor*

$$N\left(\sum_{i\in I}c_ix_i\right)=\sum_{i\in I}c_iNx_i=\sum_{i\in I}c_i\lambda_ix_i.$$

Bizonyítás Legyen $\sum\limits_{i\in I}|c_i|^2|\lambda_i|^2<+\infty$. Ekkor létezik $\sum\limits_{i\in I}c_i\lambda_ix_i\in\boldsymbol{H}$, és minden

$x \in \mathrm{Dom}(N^*)$ esetén

$$\left\langle \sum_{i\in I} c_i x_i, N^* x \right\rangle = \sum_{i\in I} \langle c_i x_i, N^* x\rangle = \sum_{i\in I} \langle c_i N x_i, x\rangle =$$
$$= \sum_{i\in I} \langle c_i \lambda_i x_i, x\rangle = \left\langle \sum_{i\in I} c_i \lambda_i x_i, x \right\rangle,$$

ami az adjungált operátor definíciója szerint éppen azt jelenti, hogy $\sum_{i\in I} c_i\lambda_i x_i \in \mathrm{Dom}(N^{**}) = \mathrm{Dom}(N)$ és

$$N\left(\sum_{i\in I} c_i x_i\right) = \sum_{i\in I} c_i \lambda_i x_i = \sum_{i\in I} c_i N x_i.$$

Tegyük most fel, hogy $\sum_{i\in I} c_i x_i \in \mathrm{Dom}(N)$. Az I minden véges F részhalmazára $x_F := \sum_{i\in F} c_i \lambda_i x_i \in \mathrm{Dom}(N) = \mathrm{Dom}(N^*)$, és $\|x_F\|^2 = \sum_{i\in F} |c_i|^2 |\lambda_i|^2$ miatt egyrészt

$$\left|\left\langle \sum_{i\in I} c_i x_i, N^* x_F \right\rangle\right| = \left|\left\langle N\left(\sum_{i\in I} c_i x_i\right), x_F \right\rangle\right| \leq \left\| N\left(\sum_{i\in I} c_i x_i\right)\right\| \, \|x_F\|,$$

másrészt

$$\left|\left\langle \sum_{i\in I} c_i x_i, N^* x_F \right\rangle\right| = \left|\sum_{i\in I} \langle c_i x_i, N^* x_F\rangle\right| = \left|\sum_{i\in I} \langle c_i \lambda_i x_i, x_F\rangle\right| = \|x_F\|^2$$

miatt

$$\sqrt{\sum_{i\in F} |c_i|^2 |\lambda_i|^2} = \|x_F\| \leq \left\| N\left(\sum_{i\in I} c_i x_i\right)\right\|,$$

és ez azt jelenti, hogy $\sum_{i\in I} |c_i|^2 |\lambda_i|^2 < +\infty$.

25.7. Állítás *Legyen N olyan normális operátor, melynek sajátalterei által kifeszített zárt lineáris altér az egész tér. Ekkor*

$$\mathrm{Sp}(N) = \overline{\mathrm{Eig}(N)}.$$

Bizonyítás Tudjuk, hogy $\overline{\mathrm{Eig}(N)}\subset\mathrm{Sp}(N)$.

Ha $\lambda\in\mathbb{K}\setminus\overline{\mathrm{Eig}(N)}$, akkor $\alpha:=d(\lambda,\overline{\mathrm{Eig}(N)})>0$. Legyen $(x_i)_{i\in I}$ az N sajátvektoraiból álló teljes ortonormált rendszer, $i\in I$ esetén $Nx_i=\lambda_i x_i$.

Ha $x=\sum\limits_{i\in I} c_i x_i\in E$, akkor az előző állítás szerint

$$\|(N-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})x\|^2 = \left\|\sum_{i\in I} c_i(\lambda_i-\lambda)x_i\right\|^2 = \\ = \sum_{i\in I}|c_i|^2|\lambda_i-\lambda|^2 \geq \alpha^2\sum_{i\in I}|c_i|^2 = \alpha^2\|x\|^2,$$

következésképpen $(N-\lambda\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})^{-1}$ folytonos, így 25.1. megjegyzése szerint $\lambda\in\mathrm{Reg}(N)$, azaz $\lambda\in\mathbb{K}\setminus\mathrm{Sp}(N)$.

25.8. Állítás *Ha P ortogonális projektor, $P\neq0$, $P\neq\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$, akkor*

$$\mathrm{Sp}(P)=\mathrm{Eig}(P)=\{0,1\}.$$

Bizonyítás Ha $Px=\lambda x$, akkor $\lambda x=Px=P^2x=\lambda^2x$, ezért $\mathrm{Eig}(P)\subset\{0,1\}$. Ha $P\neq0$, akkor $\mathrm{Ran}(P)\neq0$, és minden $x\in\mathrm{Ran}(P)$ esetén $Px=x$, tehát $1\in\mathrm{Eig}(P)$. Ha $P\neq\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$, akkor $\mathrm{Ker}(P)\neq0$, és minden $x\in\mathrm{Ker}(P)$ esetén $Px=0$, tehát $0\in\mathrm{Eig}(P)$.

Az ortogonális projektor önadjungált, sajátalterei kifeszítik az egész teret, a sajátértékek halmaza zárt, ezért a spektruma az előző állítás szerint a sajátértékeken kívül más pontot tartalmaz.

Megjegyzés $\mathrm{Sp}(\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})=\mathrm{Eig}(\mathrm{id}_{\boldsymbol{H}})=\{1\}$, és $\mathrm{Sp}(0)=\mathrm{Eig}(0)=\{0\}$.