OPERÁTOROK HILBERT-TEREKBEN

A továbbiakban $\mathbf{H}$ adott Hilbert-teret jelöl, és operátoron $\mathbf{H} \rightarrowtail \mathbf{H}$ lineáris leképezést értünk. $\mathbb{K}$ a valós vagy komplex számok halmazát jelöli.

1. A funkcionálanalízis alaptételei

A tételeket és a hozzájuk szükséges fogalmakat az adott $\mathbf{H}$ Hilbert-tér operátoraira mondjuk ki, de értelemszerűen igazak Banach-terek közötti lineáris leképezésekre is. Ezeket a tételeket nem bizonyítjuk.

Definíció. *Egy operátort nyíltnak nevezünk, ha az értékkészlete nyílt.*

Állítás. *(***Banach-féle nyíltleképezés-tétel***) Egy mindenütt értelmezett folytonos operátor pontosan akkor nyílt, ha szürjektív.*

Ennek a tételnek a legfontosabb következménye, hogy ha az A folytonos operátor bijektív, akkor A^{-1} is folytonos.

Definíció. *Egy operátort zártnak nevezünk, ha a grafikonja zárt.*

A definícióból azonnal következik, hogy az A operátor pontosan akkor zárt, ha minden olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathrm{Dom}(A)$-beli konvergens sorozat esetén ($x := \lim_n x_n$), melyre az $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens ($y := \lim_n Ax_n$), az teljesül, hogy $x \in \mathrm{Dom}(A)$ és $y = Ax$, azaz $A \lim_n x_n = \lim_n Ax_n$.

Érdemes leírni a folytonosság feltételét, hogy jól összehasonlíthassuk a zártság feltételével. Az A operátor pontosan akkor folytonos, ha minden olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathrm{Dom}(A)$-beli konvergens sorozat esetén, amelyre $x := \lim_n x_n \in \mathrm{Dom}(A)$, az $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens ($y := \lim_n Ax_n$), az teljesül, hogy $y = A(x)$, azaz $A \lim_n x_n = \lim_n Ax_n$.

Ezekből azonnal adódik:

(i) Zárt operátor magtere zárt,

(ii) Zárt operátor és folytonos operátor és egy nála nem szűkebben értelmezett folytonos operátor összege zárt.

Definíció. *Egy A operátor lezárható, ha a grafikonjának a lezártja egy operátor grafikonja, azaz ha létezik $\overline{A}$ operátor úgy, hogy $\overline{\mathrm{Graph}(A)} = \mathrm{Graph}(\overline{A})$; ekkor az $\overline{A}$ zárt operátort az A lezártjának nevezzük.*

Nyilvánvaló, hogy ha van egy olyan B zárt operátor, amelyre $A \subset B$ teljesül, akkor A lezárható, és $\overline{A} \subset B$.

Állítás. *(***Zártgrafikon-tétel***) Egy A operátorra a következő tulajdonságok közül bármely kettő maga után vonja a harmadikat:* – $\mathrm{Dom}(A)$ *zárt,*

– *A zárt,*

– *A folytonos.*

Egyszerű tények a következők az A zárt operátorra:

– αA is zárt minden α számra,

– ha F folytonos operátor, akkor $A + F$ is zárt,

– ha A injektív, akkor A^{-1} is zárt operátor.

– A magja (a nullának az A általi ősképe) zárt lineáris altér ősképe) zárt lineáris altér. A magtér zártságához kevesebb is elég.

Állítás. (**Banach-Steinhaus-tétel**) *A folytonos operátorok egy H halmaza pontosan akkor korlátos (a folytonos lineáris leképezések normája szerint), ha minden $x \in \mathbf{H}$ esetén az $\{Ax \mid A \in H\}$ halmaz korlátos* **H**-*ban.*

2. Operátorok adjungáltja

Legyen A sűrűn értelmezett operátor. Ekkor minden $y \in \mathbf{H}$ esetén

$$\langle y| \circ A : \mathrm{Dom}(A) \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \langle y, Ax\rangle$$

lineáris leképezés. Ha ez a leképezés folytonos, akkor egyértelműen kiterjeszthető **H**-n értelmezett folytonos lineáris leképezéssé, azaz **H** duálisának elemévé. A Riesz-féle reprezentációs tétel szerint létezik egyetlen, A^*y-gal jelölt vektor **H**-ban, amelyre

$$\langle A^*y, x\rangle = \langle y, Ax\rangle.$$

minden $x \in \mathrm{Dom}(A)$ esetén. Nyilvánvaló, hogy

$$\mathrm{Dom}(A^*) := \{y \in \mathbf{H} \mid \langle y, |\rangle \circ A \ \text{ folytonos}\}$$

lineáris altér **H**-ban, és az

$$A^* : \mathrm{Dom}(A^*) \to \mathbf{H}, \quad y \mapsto A^*y$$

leképezés lineáris.

Definíció. *A^*-ot az A operátor* **adjungáltjának** *nevezzük.*

Jegyezük meg, hogy csak sűrűn értelmezett operátornak van adjungáltja, továbbá a fenti egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha x az A értelmezési tartományában, y az A^* értelmezési tartományában van. Erre mindig figyelni kell, hiszen a bal oldali kifejezés akármilyen x-re, a jobb oldali pedig akármilyen y-ra is értelmes.

Végül megemlítjük azt az egyszerű tényt, hogy $\mathrm{id}_{\mathbf{H}}^* = \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$.

Állítás. *Ha A mindenütt értelmezett, folytonos operátor, akkor A^* is mindenütt értelmezett, folytonos operátor, és*

$$\|A^*\| = \|A\|.$$

Bizonyítás Ha A mindenütt értelmezett, folytonos operátor, akkor nyilvánvaló, hogy $\mathrm{Dom}(A^*) = \mathbf{H}$.

Minden $x, y \in \mathbf{H}$ esetén

$$\sup_{\|y\|\le 1} \|A^*y\| = \sup_{\|y\|\le 1} \sup_{\|x\|\le 1} |\langle A^*y, x\rangle| = \sup_{\|x\|\le 1} \sup_{\|y\|\le 1} |\langle A^*y, x\rangle| =$$

$$= \sup_{\|x\|\le 1} \sup_{\|y\|\le 1} |\langle y, Ax\rangle| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| = \|A\| < +\infty,$$

amit bizonyítani akartunk.

Állítás. *Minden adjungált operátor zárt.*

Bizonyítás Legyen A sűrűn értelmezett operátor, és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathrm{Dom}(A^*)$-ban, mely konvergál egy $\mathbf{H}$-beli y-hoz, úgy, hogy az $(A^*y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergál egy $\mathbf{H}$-beli z-hez. Ekkor $x{\in}\mathrm{Dom}(A)$ esetén

$$\langle z, x\rangle = \lim_n \langle A^*y_n, x\rangle = \lim_n \langle y_n, Ax\rangle = \langle y, Ax\rangle\,,$$

következésképpen $y{\in}\mathrm{Dom}(A^*)$ és $z{=}A^*(y)$, így A^* zárt.

Állítás. *Legyenek A és B sűrűn értelmezett operátorok.*

(1) Ha $\mathrm{Dom}(A{+}B){=}\mathrm{Dom}(A){\cap}\mathrm{Dom}(B)$ *sűrű, akkor*

$$(A{+}B)^* \supset A^*{+}B^*,$$

és ha A vagy B egyike mindenütt értelmezett és folytonos, akkor egyenlőség van.

(2) Ha $\mathrm{Dom}(AB){=}B^{-1}[\mathrm{Dom}(A)]$ *sűrű, akkor*

$$(AB)^* \supset B^*A^*,$$

és ha A mindenütt értelmezett és folytonos, akkor egyenlőség van.

(3) Ha $\mathrm{Dom}(A^*)$ *sűrű, akkor*

$$A^{**} \supset A.$$

(4) $\lambda{\in}\mathbb{K}$ esetén

$$(\lambda A)^* \supset \lambda^*A^*,$$

és ha $\lambda{\neq}0$, akkor egyenlőség van.

(5) Ha $A{\subset}B$, akkor $B^*{\subset}A^*$.

Bizonyítás (1) Ha $y{\in}\mathrm{Dom}(A^*{+}B^*)$, akkor $\langle y|{\circ}A$ és $\langle y|{\circ}B$ folytonosak, ezért $\langle y|{\circ}(A{+}B) = \langle y|{\circ}A{+}\langle y|{\circ}B$ is folytonos, tehát $y{\in}\mathrm{Dom}((A{+}B)^*)$. Továbbá $x{\in}\mathrm{Dom}(A{+}B)$ esetén

$$\langle (A^*{+}B^*)(y), x\rangle = \langle A^*y, x\rangle + \langle B^*y, x\rangle = = \langle y, Ax\rangle + \langle y, Bx\rangle = \langle y, (A{+}B)x\rangle\,,$$

így $(A{+}B)^*{\supset}A^*{+}B^*$.

Ha például A mindenütt értelmezett és folytonos, akkor $y{\in}\mathrm{Dom}((A{+}B)^*)$ esetén $\langle y|{\circ}(A{+}B){=}\langle y|{\circ}A{+}\langle y|{\circ}B$ folytonos, és mivel $\langle y|{\circ}A$ folytonos, $\langle y|{\circ}B$ is az, tehát $y{\in}\mathrm{Dom}(A^*){\cap}\mathrm{Dom}(B^*){=}\mathrm{Dom}(A^*{+}B^*)$.

(2) Ha $y{\in}\mathrm{Dom}(B^*A^*)$, akkor $y{\in}\mathrm{Dom}(A^*)$ valamint $A^*y{\in}\mathrm{Dom}(B^*)$, így $\langle y|{\circ}A$ és $\langle A^*y|{\circ}B{=}\langle y|{\circ}AB$ folytonosak, tehát $y{\in}\mathrm{Dom}((AB)^*)$. Továbbá $x{\in}\mathrm{Dom}(AB)$ esetén

$$\langle B^*A^*y, x\rangle = \langle A^*y, Bx\rangle = \langle y, ABx\rangle\,,$$

tehát $(AB)^*{\supset}B^*A^*$.

Ha A mindenütt értelmezett és folytonos, akkor $y \in \mathrm{Dom}((AB)^*)$ esetén $\langle y|{\circ}AB$ folytonos, és $\mathrm{Dom}(A^*) = \mathrm{Dom}(A){=}\mathbf{H}$ miatt $\langle A^*y|{\circ}B{=}\langle y|{\circ}AB$ folytonos, tehát $A^*y{\in}\mathrm{Dom}(B^*)$, vagyis $y{\in}\mathrm{Dom}(B^*A^*)$.

(3) Ha $x{\in}\mathrm{Dom}(A)$, akkor $\langle x|{\circ}A^*{=}\langle Ax|$ folytonos A^* értelmézési tartományán, tehát $x{\in}\mathrm{Dom}(A^{**})$. Továbbá $x{\in}\mathrm{Dom}(A^*)$ esetén

$$\langle Ay, x\rangle = \langle y, A^*x\rangle = \langle A^{**}y, x\rangle\,,$$

tehát $A \subset A^{**}$.

(4) és (5) bizonyítása annyira egyszerű, hogy az Olvasóra hagyjuk. ■

Az elöbbi (5) tulajdonság következménye, hogy ha A sűrűn értelezett és folytonos, akkor $A^* = \overline{A}^*$.

Az előbbi eredményünk szerint, ha A és B mindenütt értelmezett, folytonos operátorok, és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor

$$\begin{aligned}(A+B)^* &= A^*+B^*,\\ (\lambda A)^* &= \lambda^* A^*,\\ (AB)^* &= B^* A^*,\\ A^{**} &= A,\\ \|A^*\| &= \|A\|.\end{aligned}$$

Állítás. *Ha A mindenütt értelmezett, folytonos operátor, akkor*

$$\|A^* A\| = \|A\|^2.$$

Bizonyítás Az operátornorma tulajdonsága és a 16.2.(ii) állítás miatt

$$\|A^* A\| \leq \|A^*\| \, \|A\| = \|A\|^2.$$

Továbbá minden $x \in \mathbf{H}$ esetén

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle x, A^* A x \rangle \leq \|A^* A\| \, \|x\|^2,$$

ezért $\|Ax\| \leq \sqrt{\|A^* A\|} \, \|x\|$, így $\|A\| \leq \sqrt{\|A^* A\|}$, tehát $\|A\|^2 \leq \|A^* A\|$.

Állítás. *Ha A sűrűn értelmezett operátor, akkor*

$$\operatorname{Ker}(A^*) = \operatorname{Ran}(A)^\perp.$$

Bizonyítás $y \in \operatorname{Ker}(A^*)$ ekvivalens azzal, hogy $y \in \operatorname{Dom}(A^*)$ és $A^* y = 0$, azaz minden $x \in \operatorname{Dom}(A)$ esetén $0 = \langle A^* y, x \rangle = \langle y, Ax \rangle$, amiből $y \in \operatorname{Ran}(A)^\perp$.

Következmény A^* pontosan akkor injektív, ha $\operatorname{Ran}(A)$ sűrű $\mathbf{H}$-ban.

Állítás. *Ha A olyan sűrűn értelmezett operátor, hogy A injektív és* $\operatorname{Dom}(A^{-1}) = \operatorname{Ran}(A)$ *sűrű, akkor*

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}.$$

Bizonyítás Mind AA^{-1} mind $A^{-1}A$ sűrűn értelmezett, és az identitásnak a leszűkítései, tehát az adjungáltjuk maga az identitás. A szorzatok adjungálásának szabályából

$$(A^{-1})^* A^* \subset (AA^{-1})^* = \mathrm{id}_{\mathbf{H}}, \quad A^* (A^{-1})^* \subset (A^{-1} A)^* = \mathrm{id}_{\mathbf{H}}.$$

Azt kell már csak megmutatnunk, hogy a bal oldalakon álló szorzatok értelmezési tartománya a megegyezik a hátul álló operátor értelmezési tartományával, azaz $\operatorname{Ran}(A^*) \subset \operatorname{Dom}(A^{-1})^*$ és $\operatorname{Ran}(A^{-1})^* \subset \operatorname{Dom}(A^*)$.

Íme: ha $z \in \operatorname{Ran}(A^*)$, akkor van olyan $y \in \operatorname{Dom}(A^*)$, hogy $z = A^* y$. Ekkor

$$\langle z| \circ A^{-1} = \langle A^* y| \circ A^{-1} \subset \langle y| \circ A \circ A^{-1} \subset \langle y|,$$

azaz z benne van $(A^{-1})^*$ értelmezési tartományában.

Ha $z \in \mathrm{Ran}(A^{-1})^*$, akkor van olyan $y \in \mathrm{Dom}(A^{-1})^*$, hogy $z = (A^{-1})^* y$. Ekkor

$$\langle z| \circ A = \langle (A^{-1})^* y| \circ A \subset \langle y| \circ A^{-1} \circ A \subset \langle y|,$$

azaz z benne van A^* értelmezési tartományában.

Most egy kis technikai közbevetés: $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ Hilbrt-tér az

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle$$

skalárszorzattal, és

$$V : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \to \mathbf{H} \times \mathbf{H}, \quad (x, y) \mapsto (-y, x)$$

leképezés lineáris, izometrikus bijekció, amelyre $V^{-1} = -V$.

Állítás. *Ha A sűrűn értelmezett operátor, akkor*

$$\mathrm{Graph}(A^*) = (V[\mathrm{Graph}(A)])^\perp.$$

Bizonyítás A Hilbert-tér x és y vektorára $(x, y) \in (V[\mathrm{Graph}(A)])^\perp$ akkor és csak akkor teljesül, ha minden $z \in \mathrm{Dom}(A)$ esetén $\langle (x, y), V(z, Az) \rangle = 0$ áll fönn; azonban $\langle (x, y), V(z, Az) \rangle = -\langle x, Az \rangle + \langle y, z \rangle$ miatt ez ekvivalens azzal, hogy minden $z \in \mathrm{Dom}(A)$ esetén $\langle x, Az \rangle = \langle y, z \rangle$, következésképpen $x \in \mathrm{Dom}(A^*)$ valamint $y = A^* x$, tehát $(x, y) \in \mathrm{Graph}(A^*)$.■

Ez az eredményünk magában foglalja azt a korábbit, A^* zárt operátor, hiszen látjuk, hogy A^* grafikonja zárt lineáris altér.

Mivel V izometrikus, megtartja az ortogonalitást, ezért $V[(V[\mathrm{Graph}(A)])^\perp = (VV[\mathrm{Graph}(A)])^\perp$, így az is igaz, hogy

$$V[\mathrm{Graph}(A^*)] = (\mathrm{Graph}(A))^\perp.$$

Állítás. *Ha Z sűrűn értelmezett zárt operátor, akkor* $\mathrm{Dom}(Z^*)$ *sűrű.*

Bizonyítás Ha $z \in \mathrm{Dom}(Z^*)^\perp$, akkor $y \in \mathrm{Dom}(Z^*)$ esetén $\langle z, y \rangle = 0$, következésképpen $\langle (0, z), V(y, Z^* y) \rangle = \langle z, y \rangle = 0$, ezért

$$(0, z) \in (V[\mathrm{Graph}(Z^*)])^\perp = \mathrm{Graph}(Z)^{\perp\perp} = \mathrm{Graph}(Z),$$

(ugyanis $\mathrm{Graph}(Z)$ zárt lineáris altér), így $z = Z(0) = 0$, tehát $\mathrm{Dom}(Z^*)^\perp = \{0\}$, azaz $\mathrm{Dom}(Z^*)$ sűrű.

Állítás. *Az A sűrűn értelmezett operátor pontosan akkor lezárható, ha A^* sűrűn értelmezett, és ekkor*

$$\overline{A} = A^{**}.$$

Bizonyítás Ha A lezárható, akkor $A \subset \overline{A}$, következésképpen $(\overline{A})^* \subset A^*$; mivel $(\overline{A})^*$ sűrűn értelmezett, A^* is az.

Ha A^* sűrűn értelmezett, akkor

$$\mathrm{Graph}(A^{**}) = (V[\mathrm{Graph}(A^*)])^\perp = \mathrm{Graph}(A)^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Graph}(A)},$$

így A lezárható, és $\overline{A} = A^{**}$.

3. Speciális típusú operátorok

3.1. Izometrikus operátorok

Állítás. *Egy $V : \mathbf{H} \rightarrowtail \mathbf{H}$ operátorra a következők egyenértékűek:*

(i) $\|Vx\| = \|x\|$ *minden* $x \in \mathrm{Dom}(V)$ *esetén,*
(ii) $\langle Vx, Vy \rangle = \langle x, y \rangle$ *minden* $x, y \in \mathrm{Dom}(V)$ *esetén.*

Bizonyítás (ii)-ből nyilvánvalóan következik (i), az pedig a azért vonja maga után (ii)-t, mert a skalárszorzatot a norma a 10.1. állítás szerint meghatározza.
■

Tehát egy operátor pontosan akkor **izometrikus**, ha skalárszorzattatrtó.
Megjegyezzük, hogy ha V izometrikus operátor, akkor
– V folytonos, $\|V\| = 1$,
– V injektív, és V^{-1} is izometrikus.

Állítás. *Egy V izometrikus operátorra a következők egyenértékűek:*

(i) $\mathrm{Dom}(V)$ *zárt,*
(ii) $\mathrm{Ran}(V)$ *zárt,*
(iii) $\mathrm{Graph}(V)$ *zárt.*

Bizonyítás Legyen $\mathrm{Dom}(V)$ zárt. Vegyünk egy $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens sorozatot $\mathrm{Ran}(V)$-ben. Ekkor minden n-re van olyan $x_n \in \mathrm{Dom}(V)$, hogy $y_n = Vx_n$. Mivel $\|x_m - x_n\| = \|y_m - y_n\|$, az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat Cauchy-féle, ezért konvergens, $x := \lim_n x_n \in \mathrm{Dom}(V)$. Minthogy $\|Vx - y_n\| = \|x - x_n\|$, az igaz, hogy $\lim_n y_n = Vx \in \mathrm{Ran}(V)$, azaz $\mathrm{Ran}(V)$ zárt.

A V^{-1} izomertrikus operátorra alkalmazva az előbbi eredményt látjuk, ha $\mathrm{Ran}(V)$ zárt, akkor $\mathrm{Dom}(V)$ is zárt.

V folytonossága és a zártgrafikon-tétel szerint $\mathrm{Graph}(V)$ zártsága egyenértékű $\mathrm{Dom}(V)$ zártságával.

Állítás. *Egy mindenütt értelmezett V operátor pontosan akkor izometrikus, ha*

$$V^*V = \mathrm{id}_{\mathbf{H}},$$

és ekkor

$$VV^* = P_{\mathrm{Ran}(V)}$$

(ahol az utolsó szimbólum a $\mathrm{Ran}(V)$ *zárt lineáris altér ortogonális projektorát jelöli).*

Bizonyítás Ha V izometrikus, akkor minden $x, y \in \mathbf{H}$ esetén

$$\langle x, y \rangle = \langle Vx, Vy \rangle = \langle V^*Vx, y \rangle ,$$

amiből a 11.4-ben mondottak szerint $V^*V = \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$. Ha viszont ez az utóbbi egyenlőség teljesül, akkor minden $x, y \in \mathbf{H}$ esetén

$$\langle x, y \rangle = \langle x, V^*Vy \rangle = \langle Vx, Vy \rangle .$$

Ha $z \in \mathrm{Ran}(V)$, akkor létezik $x \in \mathbf{H}$ úgy, hogy $z = Vx$, és $VV^*z = VV^*Vx = Vx = z$. Ha $z \in (\mathrm{Ran}(V))^\perp = \mathrm{Ker}(V^*)$, tehát $VV^*z = 0$. Összegezve: VV^* a $\mathrm{Ran}(V)$-n az identitás, $(\mathrm{Ran}(V)^\perp$-on a nulla, tehát VV^* az állított ortogonális projektor.

Definíció. *Egy bijektív izometrikus operátort* **unitérnek** *hívunk.*

Egy izometrikus operátor, mégha mindenütt is van értelmezve, nem szükségképpen unitér. Példa erre l^2-ben a jobbra tolás operátora, amely mindenhol értelmezett, izometrikus, azonban nem szürjektív, ezért nem unitér: az $(1, 0, 0, \dots)$ vektor nincs benne az értékkészletében.

Állítás. *Egy sűrűn értelmezett U operátor pontosan akkor unitér, ha $U^*{=}U^{-1}$.*

Bizonyítás Ha U unitér, akkor az előzőállítás szerint $U^*U = \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$, $UU^* = P_{\mathrm{Ran}(U)} = \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$, tehát valóban az U adjungáltja az inverze is egyben.

Ha U sűrűn értelmezett, és $U^* = U^{-1}$, akkor minden $x{\in}\mathrm{Dom}(U)$ esetén

$$\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux\rangle = \langle U^*Ux, x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2,$$

így U izometrikus. U^{-1} zárt, mert egy adjungált operátorral egyenlő; de ekkor U is zárt. Korábbi állításunk szerint ekkor $\mathrm{Dom}(U)$ zárt, azaz U mindenütt értelmezett. Ekkor viszont U^* is mindenütt értélmezett, azaz $\mathbf{H} = \mathrm{Dom}(U^{-1}) = \mathrm{Ran}(U)$. Mindent egybevetve U izometrikus bijekció, azaz unitér.

3.2. Szimmetrikus operátorok

Definíció. *Az S sűrűn értelmezett operátor*

(1) **szimmetrikus***, ha $S{\subset}S^*$,*

(2) **önadjungált***, ha $S{=}S^*$.*

Mivel bármely operátor adjungáltja zárt, önadjungált operátor szükségképpen zárt. Ezért egy önadjungált operátor a zártgrafikon-tétel szerint pontosan akkor folytonos, ha mindenütt értelmezett.

Egy S szimmetrikus operátor lezárható, hiszen $S \subset S^*$; ugyanezen tartalmazás szerint S^* sűrűn van értelmezve, ezért korábbi állításaink szerint $\overline{S} = S^{**}$ és $S^{**} \subset S^*$; továbbá S^* zárt operátor, ezért $(S^*)^{**} = S^*$; mindezek azt eredményezik, hogy a szimmetrikus operátor lezártja is szimmetrikus:

$$\overline{S}{=}S^{**}{\subset}S^*{=}(S^*)^{**}{=}(S^{**})^*{=}(\overline{S})^*.$$

Egy szimmetrikus operátort **lényegében önadjungáltnak** nevezünk, ha lezártja önadjungált. Az S szimmetrikus operátor pontosan akkor lényegében önadjungált, ha $S^{**}{=}S^*$ teljesül.

Ha az S szimmetrikus operátor a T szimmetrikus operátor kiterjesztése, akkor $T{\subset}S{\subset}S^*{\subset}T^*$ teljesül. Ebből következik, hogy önadjungált operátor maximális szimmetrikus operátor, azaz nincs valódi szimmetrikus kiterjesztése.

Ha tehát T és S önadjungált operátorok és $T \subset S$, akkor $T = S$.

Állítás. *Ha S folytonos (tehát mindenütt értelmezett) önadjungált operátor, akkor*

$$\|S\| = \sup_{\|x\|\le 1} |\,\langle x, Sx\rangle\,|.$$

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy

$$\alpha := \sup_{\|x\|\le 1} |\,\langle x, Sx\rangle\,| \le \|S\|.$$

Minden $x, y \in \mathbf{H}$ létezik $\lambda \in \mathbb{T}$ úgy, hogy $|\langle y, Sx \rangle| = \lambda^* \langle y, Sx \rangle = \langle \lambda y, Sx \rangle$. Ekkor speciálisan $\langle \lambda y, Sx \rangle \in \mathbb{R}$, így

$$\langle \lambda y, Sx \rangle = \frac{1}{4}\Big(\langle x+\lambda y, S(x+\lambda y) \rangle - \langle x-\lambda y, S(x-\lambda y) \rangle \Big),$$

következésképpen, ha $\|x\| \leq 1$ és $\|y\| \leq 1$, akkor

$$|\langle y, Sx \rangle| \leq \frac{\alpha}{4}(\|x+\lambda y\|^2 + \|x-\lambda y\|^2) = \frac{\alpha}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) \leq \alpha,$$

ezért $\|S\| \leq \alpha$.

3.3. Projektorok

Definíció. *Egy mindenütt értelmezett operátort* **projektornak** *hívunk, ha* Ker$P$ *és* Ran$P$ *kiegészítő zárt lineáris alterek. A projektor* **ortogonális**, *ha* Ker$P$ *és* Ran$P$ *ortogonálisak.*

Egy projektor folytonos, mert az értelmezési tartománya és értékkészlete is zárt.

Állítás. *A sűrűn értelmezett P operátor pontosan akkor ortogonális projektor, ha $P^2 = P = P^*$ teljesül.*

Bizonyítás Ha $P^2 = P = P^*$ és $x \in \mathrm{Dom}(P)$, akkor $Px \in \mathrm{Dom}(P) = \mathrm{Dom}(P^*)$, ezért

$$\|Px\|^2 = \langle Px, Px \rangle = \langle P^*Px, x \rangle = \langle Px, x \rangle \leq \|Px\| \|x\|,$$

azaz $\|Px\| \leq \|x\|$, tehát P folytonos, emellett $P = P^*$ miatt zárt is, következésképpen $\mathrm{Dom}(P)$ zárt, ezért P mindenütt értelmezett. Tehát P folytonos projektor, és $\mathrm{Ker}(P) = \mathrm{Ker}(P^*) = \mathrm{Ran}(P)^\perp$ miatt ortogonális.

Legyen P ortogonális projektor. Ekkor $P^2 = P$, és $(P^*)^2 = (P^2)^* = P^*$, tehát P^* is folytonos projektor. Továbbá

$$\mathrm{Ker}(P) = \mathrm{Ran}(P)^\perp = \mathrm{Ker}(P^*),$$

és

$$\mathrm{Ran}(P)^\perp = \mathrm{Ker}(P) = \mathrm{Ker}(P^{**}) = \mathrm{Ran}(P^*)^\perp.$$

P és P^* folytonos projektorok, így $\mathrm{Ran}(P)$ és $\mathrm{Ran}(P^*)$ zártak, ezért $\mathrm{Ran}(P^*) = \mathrm{Ran}(P)$, tehát P és P^* képterei és magterei megegyeznek, következésképpen $P = P^*$.

3.4. Normális operátorok

Definíció. *Egy N sűrűn értelmezett zárt operátort* **normálisnak** *nevezünk, ha $NN^* = N^*N$.*

Nyilvánvaló, hogy az unitér és az önadjungált operátorok normálisak.

Állítás. *Ha N normális operátor, akkor*

(1) $\mathrm{Dom}(N^*) = \mathrm{Dom}(N)$,
(2) minden $x \in \mathrm{Dom}(N)$ esetén $\|N^*x\| = \|Nx\|$.

Bizonyítás Minden $y\in\mathrm{Dom}(N^*N)$ esetén

$$\|Ny\|^2 = \langle Ny, Ny\rangle = \langle N^*Ny, y\rangle = \langle NN^*y, y\rangle = \langle N^*y, N^*y\rangle = \|N^*y\|^2,$$

tehát $\|N^*y\|{=}\|Ny\|$. Legyen $x\in\mathrm{Dom}(N)$. Ekkor a 16.12. állítás szerint létezik $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathrm{Dom}(N^*N)$-ben úgy, hogy $(x, Nx){=}\lim\limits_n (y_n, Ny_n)$. Minden $m, n\in\mathbb{N}$ esetén $\|N^*y_n{-}N^*y_m\|{=}\|Ny_n{-}Ny_m\|$, így $(N^*y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat **H**-ban, következésképpen létezik $\lim\limits_n N^*y_n{=:}z$. Mivel N^* zárt, ez maga után vonja, hogy $x\in\mathrm{Dom}(N^*)$ és $z{=}N^*x$, ezért

$$\|N^*x\| = \|z\| = \lim_n \|N^*y_n\| = \lim_n \|Ny_n\|{=}\|Nx\|.$$

Emellett azt kaptuk még, hogy $\mathrm{Dom}(N)\subset\mathrm{Dom}(N^*)$. N és N^* szerepét felcserélve, $N^{**}{=}N$ miatt (ugyanis N zárt) $\mathrm{Dom}(N^*)\subset\mathrm{Dom}(N)$ is igaz, azaz

$$\mathrm{Dom}(N^*) = \mathrm{Dom}(N).$$

Következmény Ha N normális operátor, akkor

$$\mathrm{Ker}(N) = \mathrm{Ker}(N^*) = \mathrm{Ran}(N)^{\perp}.$$

Ha S önadjungált és injektív, az inverze is önadjungált: $(A^{-1})^*{=}(A^*)^{-1}{=}A^{-1}$ miatt A^{-1} önadjungált. Természetesen unitér operátor inverze is unitér. Most megmutatjuk, normális operátorra is hasonló igaz.

Állítás. *Az N normális operátor pontosan akkor injektív, ha* $\mathrm{Ran}(N)$ *sűrű, és ekkor N^{-1} normális. Ha* $\mathrm{Ran}(N){=}\mathbf{H}$*, akkor N^{-1} folytonos.*

Bizonyítás $\mathrm{Ker}(N){=}\mathrm{Ran}(N)^{\perp}$ miatt N akkor és csak akkor injektív, ha $\mathrm{Ran}(N)$ sűrű, és ekkor

$$N^{-1}(N^{-1})^*{=}N^{-1}(N^*)^{-1}{=}(N^*N)^{-1}{=}(NN^*)^{-1}{=}(N^*)^{-1}N^{-1}{=}(N^{-1})^*N^{-1},$$

tehát N^{-1} normális. Ha $\mathrm{Ran}(N){=}\mathbf{H}$, akkor N^{-1} a zárt grafikon tétele szerint folytonos.

Állítás. *Ha N folytonos (tehát mindenütt értelmezett) normális operátor, akkor* $\|N^2\| = \|N\|^2$.

Bizonyítás A Hilbert-tér minden x elemére az előzőek szerint $\|N^2x\| = \|N^*Nx\|$, amiből azonnal adódik, hogy $\|N^2\| = \|N^*N\|$; már csak ehy korábbi állításunkat kell figyelembe vennünk, hogy a bizonyítás végére érjünk.

4. Differenciálás-operátorok

4.1. $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$-ben

Emlékeztetünk arra, hogy ha $I\subset\mathbb{R}$ (nem szükségképpen korlátos) intervallum, akkor egy $\phi : I{\to}\mathbb{C}$ függvényt **abszolút folytonosnak** neveztünk, ha létezik $\eta : I{\to}\mathbb{C}$ lokálisan Lebesgue-integrálható függvény és $a\in I$ úgy, hogy

$$\phi(x) = \phi(a) + \int_a^x \eta \qquad (x\in I).$$

Ha ϕ ilyen függvény, akkor η Lebesgue-majdnem mindenütt egyértelműen meghatározott. A ϕ abszolút folytonos függvény **deriváltján** bármely olyan η függvényt értünk, amelyre a fenti egyenlőség teljesül.

Az $L^2(I,\mathbb{C})$ Hilbert-tér elemei függvényosztályok, noha úgy beszélünk róluk, mint függvényekről. Egy függvényosztályban, tudjuk csak egy folytonos függvény lehet, ezért jól meghatározott értelme van annak, ha azt mondjuk, hogy legyen az $L^2(I,\mathbb{C})$ egy eleme folytonos, speciálisan abszolút folytonos. Ha ϕ abszolút folytonos, akkor a deriváltja nem, de a deriváltjának a majdnem mindenütti egyenlőséggel meghatározott függvényosztálya egyértelmű.

Definíció. *Legyen $\alpha \in \mathbb{T}$, és*

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}(D) &:= \{\phi \in L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C}) \mid \phi \text{ abszolút folytonos, } \phi' \in L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})\}, \\ \mathrm{Dom}(P_\alpha) &:= \{\phi \in \mathrm{Dom}(D) \mid \phi(-\pi) = \alpha\phi(\pi)\}, \\ \mathrm{Dom}(P_0) &:= \{\phi \in \mathrm{Dom}(D) \mid \phi(-\pi) = \phi(\pi) = 0\}, \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} D &: \mathrm{Dom}(D) \to L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C}), \quad \phi \mapsto -i\phi', \\ P_\alpha &: \mathrm{Dom}(P_\alpha) \to L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C}), \quad \phi \mapsto -i\phi', \\ P_0 &: \mathrm{Dom}(P_0) \to L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C}), \quad \phi \mapsto -i\phi'. \end{aligned}$$

Ezeket a lineáris leképezéseket a **differenciálás-operátoroknak** nevezzük. Mindhárom operátor sűrűn értelmezett, hiszen $P_0 \subset P_\alpha \subset D$, és P_0 értelmezési tartománya tartalmazza a végtelenszer differenciálható, $]-\pi,\pi[$-ben kompakt tartójú függvényeket.

Állítás. *$P_0{}^* = D$.*

Bizonyítás $\psi \in \mathrm{Dom}(D)$ és $\phi \in \mathrm{Dom}(P_0)$ esetén

$$\langle \psi, P_0\phi \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \psi^*(-i\phi') = -i[\psi^*\phi]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} (\psi^*)'(i\phi) = \int_{-\pi}^{\pi} (-i\psi')^*\phi = \langle D\psi, \phi \rangle\,,$$

következésképpen $D \subset P_0^*$.

Ha $\psi \in \mathrm{Dom}(P_0^*)$, akkor $P_0^*\psi \in L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, és tudjuk, hogy véges mértékű halmazon a négyzetesen integrálható függvények intregrálhatók, tehát jól értelmezett az

$$\eta := i\left(\delta + \int_{-\pi} P_0^*\psi\right),$$

függvény, ahol $\delta \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $\int_{-\pi}^{\pi} (\psi - \eta) = 0$. Nyilvánvaló, hogy $\eta \in \mathrm{Dom}(D)$. $\phi \in \mathrm{Dom}(P_0)$ esetén

$$-i\int_{-\pi}^{\pi} \psi^*\phi' = \langle \psi, P_0\phi \rangle = \langle P_0^*\psi, \phi \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} (P_0^*\psi)^*\phi = \int_{-\pi}^{\pi} (-i\eta')^*\phi = -i\int_{-\pi}^{\pi} \eta^*\phi',$$

következésképpen $\int_{-\pi}^{\pi} (\psi - \eta)^*\phi' = 0$.

Legyen $\phi := \int\limits_{-\pi}(\psi - \eta)$. Ekkor δ választása miatt $\phi \in \mathrm{Dom}(P_0)$, továbbá $\phi' = \psi - \eta$, így az előzőek szerint $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\psi - \eta|^2 = 0$, következésképpen ψ Lebesgue-majdnem mindenütt megegyezik az $\eta \in \mathrm{Dom}(D)$ függvénnyel, ezért $\psi \in \mathrm{Dom}(D)$. Ezzel beláttuk, hogy $P_0^* \subset D$, azaz $P_0^* = D$.

Állítás. $D^* = P_0$.

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy $P_0 \subset P_0^{**} = D^*$, és $P_0 \subset D$ miatt $D^* \subset P_0^* = D$.
Legyen $\psi \in \mathrm{Dom}(D^*)$ és $\phi \in \mathrm{Dom}(D)$. Ekkor

$$-i\int\limits_{-\pi}^{\pi} \psi^* \phi' = \langle \psi, D\phi \rangle = \langle D^*\psi, \phi \rangle = \langle D\psi, \phi \rangle = i\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\psi')^* \phi,$$

így

$$[\psi^* \phi]_{-\pi}^{\pi} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\psi^* \phi' + (\psi')^* \phi) = 0.$$

Ez az egyenlőség a D értelmezési tartományának minden minden ϕ elemére igaz. $\phi := \mathrm{id}_{[-\pi,\pi]} + \pi \in \mathrm{Dom}(D)$, amelyre $\phi(-\pi) = 0$ és $\phi(\pi) = 2\pi \neq 0$, így $\psi(\pi) = 0$. Hasonlóan, a $\phi := \mathrm{id}_{[-\pi,\pi]} - \pi \in \mathrm{Dom}(D)$ függvénnyel azt kapjuk, hogy $\psi(-\pi) = 0$, azaz $\psi \in \mathrm{Dom}(P_0)$. Ezzel beláttuk, hogy $D^* \subset P_0$, következésképpen $D^* = P_0$.

Állítás. $P_\alpha^* = P_\alpha$.

Bizonyítás $P_0 \subset P_\alpha$ miatt $P_\alpha^* \subset P_0^* = D$.
Legyen $\phi, \psi \in \mathrm{Dom}(P_\alpha)$. Ekkor

$$\langle \psi, P_\alpha \phi \rangle = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \psi^*(-i\phi') = -i[\psi^* \phi]_{-\pi}^{\pi} + \int\limits_{-\pi}^{\pi} {\psi^*}' i\phi = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (-i\psi')^* \phi = \langle P_\alpha \psi, \phi \rangle,$$

ugyanis

$$[\psi^* \phi]_{-\pi}^{\pi} = \psi^*(\pi)\phi(\pi) - \psi^*(-\pi)\phi(-\pi) = \psi^*(\pi)\phi(\pi) - \alpha^* \psi^*(\pi) \alpha \phi(\pi) = 0,$$

következésképpen $P_\alpha \subset P_a^*$.
Ha $\psi \in \mathrm{Dom}(P_\alpha^*)$ és $\phi \in \mathrm{Dom}(P_\alpha)$, akkor

$$i\int\limits_{-\pi}^{\pi} {\psi'}^* \phi = \langle P_\alpha^* \psi, \phi \rangle = \langle \psi, P_\alpha \phi \rangle = -i\int\limits_{-\pi}^{\pi} \psi^* \phi' \ ,$$

ezért

$$[\psi^* \phi]_{-\pi}^{\pi} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\psi^* \phi' + {\psi'}^* \phi) = 0$$

minden $\phi \in \mathrm{Dom}(P_\alpha)$ esetén, azaz

$$0 = \psi^*(\pi)\phi(\pi) - \psi^*(-\pi)\phi(-\pi) = \psi^*(\pi)\phi(\pi) - \psi^*(\pi)\alpha\phi(\pi),$$

amiből $\psi(-\pi){=}\alpha\psi(\pi)$, azaz $\psi{\in}\mathrm{Dom}(P_\alpha)$. Ezzel beláttuk, hogy $P_\alpha^*{\subset}P_\alpha$, és így $P_\alpha^*{=}P_\alpha$. ■

Foglaljuk össze eredményeinket!

P_0 zárt, mert a D-nek az adjungáltja; P_0 szimmetrikus de nem önadjungált; P_0-nak legalább kontinuum sok önadjungált kiterjesztése van: minden $\alpha\in\mathbb{T}$ esetén P_α. Mivel az önadjungált operátorok maximális szimmetrikusok (nincs szimmetrikus kiterjesztésük), minden olyan operátor, amely valamely P_α-nak a kiterjesztése, nem szimmetrikus. Ilyen például a D, amely zárt, mert a P_0-nak az adjungátja.

Megjegyzés

A kvantummechanika szerint (a $[-\pi,\pi]$ intervallummal reprezentált) egydimenziós dobozba zárt részecske impulzusát egy P önadjungált differenciálás-operátorral kell leírni, energiáját pedig a $\frac{P^2}{2m}$ operátorral, ahol m a részecske tömege. A szokásos tárgyalásokban nem határozzák meg pontosan, mely differenciálás-operátorról van szó, holott láttuk, legalább kontinuum sok különböző önadjungált differenciálás-operátor van. Az energiaoperátort azonban részletesen kifejtik, és bizonyos meggondolásokkal arra jutnak, hogy az értelmezési tartományában olyan függvényeknek kell lenniük, amelyek a határon nulla értéket vesznek föl, a deriváltjukra azonban már nincs semmi kikötés. Ebből végül is a

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\frac{2n-1}{2}x \;\middle|\; n\in\mathbb{N}\right\} =$$
$$= \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\frac{n+1}{2}x \;\middle|\; n\in\mathbb{N}_0,\ n \text{ páratlan}\right\} \bigcup \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\frac{n+1}{2}x \;\middle|\; \neq 0,\ n \text{ páros}\right\}$$

úgynevezett „zárt végű állóhullámokra” jutnak, amelyek teljes ortonormált rendszerek $L^2([-\pi,\pi])$-ben. A zárt végű állóhullámok deriváltjai a

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\frac{2n-1}{2}x \;\middle|\; n\in\mathbb{N}\right\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\}\bigcup$$
$$\left\{\cos\frac{n+1}{2}x \;\middle|\; \neq 0,\ n \text{ páratlan}\right\} \bigcup \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\frac{n+1}{2}x \;\middle|\; n\in\mathbb{N}_0,\ n \text{ páros}\right\},$$

„nyitott végű állóhullámok” számszorosai, kivéve a konstans függvényt.

Ezekből azonnal adódik, hogy energiaoperátornak a $\frac{DP_0}{2m}$ operátort veszik. DP_0 önadjungált (az érdeklődő olvasó ezt be tudja bizonyítani), de nincs olyan önadjungált differenciálás-operátor, amelynek a négyzete volna. (Van olyan önadjungált operátor, amelynek a négyzete, de az nem diffrenciálás-operátor.)

4.2. $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$-ben

Definíció. *$L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$-ben a*

$$\mathrm{Dom}(P) := \{\phi{\in}L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) \mid \phi \text{ abszolút folytonos}, \phi'{\in}L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})\},$$

és

$$P:\mathrm{Dom}(P){\to}L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}),\quad \phi{\mapsto}-i\phi',$$

formulákkal meghatározott operátort **differenciálás-operátornak** *nevezzük.*

P sűrűn értelmezett, hiszen $\mathrm{Dom}(P)$ tartalmazza a végtelenszer differenciálható, kompakt tartójú függvényeket.

Állítás. *Ha* $\phi \in \mathrm{Dom}(P)$*, akkor* $\lim\limits_{+\infty} \phi = \lim\limits_{-\infty} \phi = 0$.

Bizonyítás $\phi \in \mathrm{Dom}(P)$ esetén $\phi' \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, így $(\phi^*)'\phi$ és $\phi^*\phi'$ Lebesgue-integrálható, következésképpen létezik

$$C := \lim_{x \to \pm\infty} \int\limits_0^x ((\phi^*)'\phi + \phi^*\phi') = \lim_{x \to \pm\infty} \left[|\phi|^2\right]_0^x = \lim_{x \to \pm\infty} |\phi(x)|^2 - |\phi(0)|^2,$$

tehát $\lim\limits_{x \to \pm\infty} |\phi(x)|^2 = |\phi(0)|^2 + C$, azonban $|\phi|^2$ integrálhatósága miatt csak

$$\lim_{x \to \pm\infty} |\phi(x)|^2 = 0$$

lehetséges.

Állítás. $P^* = P$.

Bizonyítás Legyen $\phi, \psi \in \mathrm{Dom}(P)$; ekkor

$$\langle \psi, P\phi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} \psi^*(-i\phi') = i \int\limits_{\mathbb{R}} (\psi^*)'\phi = \int\limits_{\mathbb{R}} (-i\psi')^*\phi' = \langle P\psi, \phi \rangle \ ,$$

következésképpen $P \subset P^*$.

Legyen $\psi \in \mathrm{Dom}(P^*)$; ekkor $P^*\psi \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, és tudjuk, hogy négyzetesen integrálható függvények véges mértékű halmazon integrálhatók, ezért minden $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esetén jól értelmezett az $\eta := i\left(\delta + \int\limits_a P^*\psi\right)$, függvény, ahol $\delta \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $\int\limits_a^b (\psi - \eta) = 0$ teljesüljön. η abszolút folytonos, és $\eta' = iP^*\psi$.

Ha $\phi \in \mathrm{Dom}(P)$ tartója része az $[a, b]$ intervallumnak, akkor

$$\begin{aligned} -i \int\limits_a^b \psi^*\phi' = \langle \psi, P\phi \rangle = \langle P^*\psi, \phi \rangle = \int\limits_a^b (P^*\psi)^*\phi = \int\limits_a^b (-i\eta')^*\phi = \\ = [i\eta^*\phi]_a^b - i \int\limits_a^b \eta^*\phi' = -i \int\limits_a^b \eta^*\phi', \end{aligned}$$

következésképpen $\int\limits_a^b (\psi - \eta)^*\phi' = 0$.

A

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto \begin{cases} \int\limits_a^x (\psi - \eta), & \text{ha } x \in [a, b], \\ 0, & \text{ha } x \notin [a, b] \end{cases}$$

függvény benne van P értelmezési tartományában, tartója része az $[a, b]$ intervallumnak, így $\int\limits_a^b |\psi - \eta|^2 = 0$, következésképpen ψ az $[a, b]$-n Lebesgue-majdnem mindenütt egyenlő η-val, tehát ψ az $[a, b]$-n abszolút folytonos, továbbá $(\psi|_{[a,b]})' = iP^*\psi|_{[a,b]}$. Ez minden $[a, b]$ intervallumra igaz, így ψ abszolút folytonos és $\psi' = iP^*\psi$, azaz $\psi \in \mathrm{Dom}(P)$. Ezzel beláttuk, hogy $P^* \subset P$, és így $P^* = P$.

5. A függvénnyel való szorzás-operátorok

Definíció. *Legyen $(X,\mathcal{A},\mu)$ σ-véges mértéktér, és $f: X\to\mathbb{C}$ mérhető függvény. A*

$$\mathrm{Dom}(M_f) := \{\phi\in L^2_\mu(X) \mid f\phi\in L^2_\mu(X)\},$$

$$M_f : \mathrm{Dom}(M_f)\to L^2_\mu(X), \quad \phi\mapsto f\phi$$

formulákkal meghatározott M_f-et az f-**fel való szorzás operátorának** *nevezzük.*

Állítás. $\mathrm{Dom}(M_f)\subset L^2_\mu(X)$ *sűrű lineáris altér.*

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy $\mathrm{Dom}(M_f)$ lineáris altere $L^2_\mu(X)$-nek. Ha $\phi\in L^2_\mu(X)$, akkor minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $F_n{:=}\{|f|\leq n\}\subset X$ mérhető halmaz, és $|f\chi_{F_n}\phi|\leq n\chi_{F_n}|\phi|$ miatt $\chi_{F_n}\phi\in\mathrm{Dom}(M_f)$. A $(\chi_{F_n}\phi)_n\in\mathbb{N}$ sorozat pontonként ϕ-hez konvergál, és $|\phi|$ négyzetesen integrálható majoránsa, így a Lebesgue-tétel szerint $(\chi_{F_n}\phi)_{n\in\mathbb{N}}$ ϕ-hez konvergál $L^2_\mu(X)$-ben is.

Állítás. *Legyen f és g két $X\to\mathbb{C}$ mérhetőfüggvény. $M_f{=}M_g$ pontosan akkor teljesül, ha f és g μ-majdnem mindenütt egyenlők.*

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy ha f és g μ-majdnem mindenütt egyenlők, akkor $M_f{=}M_g$.

Tegyük fel, hogy f és g nem μ-majdnem mindenütt egyenlők, és zárjuk ki a $\mu=0$ triviális esetet. Ekkor létezik $E\in\mathcal{A}$, amelyre $\infty>\mu(E)>0$, és $E\subset\{f\neq g\}$. Minden $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$H_n := E\cap\{|f|\leq n\}\cap\{|g|\leq n\}$$

mérhető halmaz, $\biguplus\limits_{n\in\mathbb{N}} H_n{=}E$, ezért létezik olyan $m\in\mathbb{N}$, hogy $\mu(H_m){>}0$. Ekkor $|f\chi_{H_m}|\leq m|\chi_{H_m}|$ és $|g\chi_{H_m}|\leq m|\chi_{H_m}|$ miatt $\chi_{H_m}\in\mathrm{Dom}(M_f)\cap\mathrm{Dom}(M_g)$. Az $f\chi_{H_m}$ és a $g\chi_{H_m}$ függvények nem μ-majdnem mindenütt egyenlők, tehát $M_f\chi_{H_m}\neq M_g\chi_{H_m}$, és így $M_f{\neq}M_g$.

Állítás. *M_f pontosan akkor folytonos, ha f μ-korlátos, és ekkor*

$$\|M_f\| = \|f|_\infty.$$

Bizonyítás Legyen f μ-korlátos. Ekkor minden $\phi\in L^2_\mu(X)$ esetén $f\phi\in L^2_\mu(X)$, azaz $\mathrm{Dom}(M_f){=}L^2_\mu(X)$, és

$$\|M_f\phi\|^2 = \int\limits_X |f\phi|^2 d\mu \leq (\|f|_\infty)^2\|\phi\|^2,$$

következésképpen M_f korlátos, és $\|M_f\|\leq\|f|_\infty$. Legyen α olyan szám, hogy $\|f|_\infty{>}\alpha$. Ekkor $\mu(\{|f|{>}\alpha\}){\neq}0$, így létezik $E\in\mathcal{A}$ olyan, hogy $0{<}\mu(E){<}\infty$, és $E\subset\{|f|{>}\alpha\}$. A

$$\psi := \frac{\chi_E}{\sqrt{\mu(E)}}\in L^2_\mu(X)$$

függvény olyan, hogy $\|\psi\|{=}1$ és $\|f\psi\|{>}\alpha$, tehát $\|M_f\|>\alpha$, így $\|M_f\|\geq\|f|_\infty$.

Tegyük fel, hogy f nem μ-korlátos. Ekkor minden $n\in\mathbb{N}$ esetén létezik olyan $m_n\in\mathbb{N}$ és $E_n\in\mathcal{A}$, amelyre $0{<}\mu(E_n){<}\infty$, és $E_n\subset\{|f|{>}n\}\cap\{|f|{<}m_n\}$. A

$$\psi_n := \frac{\chi_{E_n}}{\sqrt{\mu(E_n)}}\in L^2_\mu(X)$$

függvények olyanok, hogy $\|\psi_n\|$=1, $\psi_n \in \mathrm{Dom}(M_f)$ és $\|f\psi_n\|>n$, tehát M_f nem korlátos.

Állítás. $(M_f)^*=M_{f^*}$.

Bizonyítás Ha $\phi, \psi \in \mathrm{Dom}(M_f)=\mathrm{Dom}(M_{f^*})$, akkor

$$\langle \phi, M_f\psi\rangle = \int\limits_X \phi^* f\psi d\mu = \int\limits_X (f^*\phi)^*\psi d\mu = \left\langle M_f^*\phi, \psi\right\rangle \ ,$$

következésképpen $M_{f^*}\subset(M_f)^*$.

Ha $\phi\in\mathrm{Dom}((M_f)^*)$ és $\psi\in\mathrm{Dom}(M_f)$, akkor

$$\int\limits_X ((M_f)^*\phi)^*\psi d\mu = \langle (M_f)^*\phi, \psi\rangle = \langle \phi, M_f\psi\rangle = \int\limits_X \phi^* f\psi d\mu = \int\limits_X (f^*\psi)^*\psi d\mu \ ,$$

így

$$\int\limits_X ((M_f)^*\phi - f^*\phi)^*\psi d\mu = 0.$$

Legyen $n\in\mathbb{N}$ esetén $F_n := \{|f| \leq n\}$, és

$$\psi := \chi_{F_n}((M_f)^*\phi - f^*\phi).$$

$(M_f)^*\phi\in L^2_\mu(X)$, és az $|f^*\phi\chi_{F_n}|\leq n\chi_{F_n}|\phi|$ egyenlőtlenség szerint $f^*\phi\chi_{F_n} \in L^2_\mu(X)$, következésképpen $\psi\in L^2_\mu(X)$. Másrészt az $|f\psi| = |f\chi_{F_n}\psi| \leq n\chi_{F_n}|\psi|$ egyenlőtlenség miatt $f\psi\in L^2_\mu(X)$, tehát $\psi \in \mathrm{Dom}(M_f)$, és így

$$\int\limits_X |(M_f)^*\phi - f^*\phi|^2\chi_{F_n}\, d\mu = 0,$$

ezért $(M_f)^*\phi = f^*\phi$ az F_n halmazon μ-majdnem mindenütt. Ez tetszőleges $n\in\mathbb{N}$ esetén igaz, és $\biguplus\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n = X$, így $(M_f)^*\phi = f^*\phi$ μ-majdnem mindenütt, következésképpen $\phi\in\mathrm{Dom}(M_{f^*})=\mathrm{Dom}(M_f)$. Ezzel beláttuk, hogy $(M_f)^* \subset M_{f^*}$, azaz végül is $(M_f)^*=M_{f^*}$.

Következmény M_f zárt operátor minden $f : X\to\mathbb{C}$ mérhetőfüggvény esetén, ugyanis $M_f=(M_{f^*})^*$.

Tehát a zártgrafikon-tétel miatt M_f pontosan akkor mindenütt értelmezett, ha folytonos, ami viszont a 21.3. állítás szerint azzal egyenértékű, hogy $f \in L^\infty_\mu(X)$.

Egyszerű tény, hogy $M_1 = \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$, $M_0 = 0$, és minden $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ esetén $M_{\lambda f} = \lambda M_f$ (természetesen $0 = M_{0f} \supset 0M_f$). Továbbá igaz még a következő két összefüggés is.

Állítás. *Legyenek $f, g : X\to\mathbb{C}$ mérhető függvények. Ekkor*

(i) $M_{f+g}\supset M_f+M_g$ és egyenlőség áll, ha M_f és az M_g közül az egyik folytonos,

(ii) $M_{fg}\supset M_f M_g$, a jobb oldal értelmezési tartománya $\mathrm{Dom}(M_g)\cap\mathrm{Dom}(M_{fg})$, *és egyenlőség áll, ha M_g folytonos.*

Bizonyítás (i) Ha $\phi \in \mathrm{Dom}(M_f + M_g)$, akkor $f\phi$ és $g\phi$ négyzetesen integrálható, így $(f+g)\phi$ is négyzetesen integrálható, tehát igaz a kijelentett tartalmazás.

Ha például M_g folytonos, azaz $g \in L^\infty_\mu(X)$, és $\phi \in \mathrm{Dom}(M_{f+g})$, akkor $(f+g)\phi$ és nyilvánvalóan $g\phi$ is négyzetesen integrálható, tehát $f\phi$ is négyzetesn integrálható, azaz $\phi \in \mathrm{Dom}(M_f + M_g)$, tehát végül is $M_{f+g} = M_f + M_g$.

(ii) Ha $\phi \in \mathrm{Dom}(M_f M_g)$, akkor $g\phi$ és $f(g\phi) = (fg)\phi$ négyzetesen integrálható, tehát igaz a kijelentett tartalmazás. Az is nyilvánvaló ekkor, hogy a jobb oldal értelmezési tartománya része $\mathrm{Dom}(M_g) \cap \mathrm{Dom}(M_{fg})$-nek. Ha viszont ϕ ez utóbbi halmaznak az eleme, akkor $g\phi$ és $(fg)\phi = f(g\phi)$ négyzetesen integrálható, tehát $\phi \in \mathrm{Dom}(M_f M_g)$.

Ha M_g folytonos, akkor mindenütt értelmezett, ezért az értelmezési tartományokra az imént belátott öszefüggés szerint $M_{fg} = M_f M_g$.

Állítás. *M_f normális operátor.*

Bizonyítás Ha $\phi{\in}\mathrm{Dom}(M_{|f|^2})$, akkor $\phi{\in}L^2_\mu(X)$ és $|f|^2\phi \in L^2_\mu(X)$, így a szorzatuk $|f|^2|\phi|^2$ μ-integrálható, azaz $f\phi{\in}L^2_\mu(X)$. Ez azt jelenti, hogy ϕ az M_f értelmezési tartományának is eleme. Arra jutottunk tehát, hogy $\mathrm{Dom}(M_{|f|^2}) \subset \mathrm{Dom}(M_f) = \mathrm{Dom}(M_{f^*})$. Alkalmazva az előbbi állítás (ii) pontját a $g{:=}f^*$ függvényre azt kapjuk, hogy

$$M_f M_{f^*} = M_{|f|^2} = M_{f^*} M_f,$$

azaz M_f normális.

Állítás. *Az M_f operátor pontosan akkor*

(i) önadjungált, ha $f = f^*$ μ-majdnem mindenütt (azaz f μ-majdnem mindenütt valós értékű),

(ii) unitér, ha $|f| = 1$ μ-majdnem mindenütt,

(iii) projektor, ha létezik $E \in \mathcal{A}$ úgy, hogy $f = \chi_E$ μ-majdnem mindenütt (azaz f μ-majdnem mindenütt 0 és 1 értékű).

Bizonyítás Azonnal adódnak a kívánt összefüggések az alábbi formulák alapján.

(i) $M_f = (M_f)^* = M_{f^*}$

(ii) $M_1 = \mathrm{id}_{\mathbf{H}} = M_f (M_f)^* = M_f M_{f^*} = M_{|f|^2}$.

(iii) $M_{f^2} = (M_f)^2 = M_f$.

6. A Heisenberg-féle felcserélési reláció

Legyen P a differenciálás-operátor a $\mathbf{H}{:=}L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ Hilbert-téren, és $Q{:=}M_{\mathrm{id}_\mathbb{R}}$. Ekkor P és Q nem folytonos önadjungált operátorok, $PQ{-}QP$ sűrűn értelmezett, mert a kompakt tartójú végtelenszer differenciálható függvények benne vannak az értelmezési tartományában, és $PQ{-}QP{\subset}{-i}\,\mathrm{id}_{\mathbf{H}}$.

Legyen P valamelyik önadjungált differenciálás-operátor a $\mathbf{H}{:=}L^2([-\pi,\pi], \mathbb{C})$ Hilbert-téren ($P = P_\alpha$ valamely α-ra) és $Q{:=}M_{\mathrm{id}_{[-\pi,\pi]}}$. Ekkor P nem folytonos, Q folytonos önadjungált operátor, $PQ{-}QP$ sűrűn értelmezett, és fennáll rá az előbbi összefüggés.

Mindkét idézett esetben csak tartalmazás áll. Felmerül a kérdés, hogy létezik-e egyáltalán olyan P és Q önadjungált operátor valamely $\mathbf{H}$ Hilbert-térben, hogy teljesül a

$$PQ - QP = -i\,\mathrm{id}_{\mathbf{H}}$$

úgynevezett **Heisenberg-féle felcserélési reláció**.

Ha P és Q ilyenek, akkor mindenütt értelmezettek, így zártságuk miatt folytonosak. A következő állítás azt mondja, hogy a fenti egyenlőség folytonos (nem szükségképpen önadjungált) operátorokra nem teljesülhet.

Állítás. *Ha A és B folytonos operárotorok, amelyekre $AB - BA = \lambda \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$ teljesül valamely $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén, akkor $\lambda = 0$.*

Bizonyítás Ha A és B eleget tesz az állításban kirótt feltételnek, akkor indukcióval megmutatható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A^n B - BA^n = n\lambda A^{n-1}$.

Tegyük fel először, hogy létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $A^n = 0$, de $A^{n-1} \neq 0$. Ekkor $n\lambda A^{n-1} = A^n B - BA^n = 0$, következésképpen $\lambda = 0$.

Tegyük fel most, hogy $A^n \neq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor

$$n|\lambda| \|A^{n-1}\| \leq \|A^n B\| + \|BA^n\| \leq 2\|B\|\, \|A^{n-1}\| \|A\|,$$

így

$$|\lambda| \leq \frac{2\|A\|\, \|B\|}{n}$$

minden n-re, következésképpen $\lambda = 0$. ■

A kvantummechanika alapaxiómájaként szokás feltenni, hogy egy tömegpont P impulzusát és Q helyzetét olyan operátorokkal kell leírni, amelyek teljesítik a Heisenberg-féle felcserélési relációt. Láttuk, ez lehetetlen. Ha helyette azt követeljük meg, hogy csak egy sűrű lináris altéren álljon fönn az egyenlőség, akkor már nem kívánunk lehetetlent, amint azt a bevezető példák mutatták. Ekkor azonban éppen ezeknek a példáknak a bősége okozza a kellemetlenséget: legalább kontinuum sok unitér inekvivalens lehetőség van. Pontosan megmagyarázzuk, mit értünk ezen.

Legyen P és Q olyan önadjungált operátor valamely $\mathbf{H}$ Hilbert-térben, hogy egy sűrű lineáris altéren teljesül a $PQ - QP = -i\,\mathrm{id}_{\mathbf{H}}$ összefüggés, P' és Q' olyan önadjungált operátor valamely $\mathbf{H}'$ Hilbert-térben, hogy egy sűrű lineáris altéren teljesül a $P'Q' - Q'P' = -i\,\mathrm{id}_{\mathbf{H}'}$ összefüggés. Azt mondjuk, hogy a (P, Q) pár **unitér ekvivalens** a (P', Q') párral, ha van olyan olyan $U : \mathbf{H} \to \mathbf{H}'$ unitér leképezés (azaz izometrikus lineáris bijekció), hogy $P' = UPU^{-1}$, $Q' = UQU^{-1}$.

Az unitér ekvivalens párokat – és csak azokat – „ugyanolyanoknak", „fizikailag egyenértékűeknek" tekintjük. Ha tehát kontinuum sok inekvivalens lehetőség van, akkor ugyanennyi fizikailag nem egyenértékű kvantummechanika. Később a spektrumokkal kapcsolatban látni fogjuk, hogy az $L^2([-\pi, \pi])$-beli $(P_\alpha, M_{\mathrm{id}_{[-\pi,\pi]}})$ és $(P_{\alpha'}, M_{\mathrm{id}_{[-\pi,\pi]}})$ párok unitér inekvivalensek, ha $\alpha \neq \alpha'$.

A Heisenberg-féle felcserélési relációból formális átalakításokkal, összegzéssel nyerhető az

$$e^{iaP} e^{ibQ} = e^{iab} e^{ibQ} e^{iaP} \qquad (a, b \in \mathbb{R}),$$

Weyl-féle reláció, ahol az exponenciálosoknak jól meghatározott értelme van (nem sorösszeg!). Neumann János megmutatta, hogy ha a (P, Q) pár eleget tesz a fenti relációnak és irreducibilis, azaz csak a triviális zárt alterek – a nulla és az egész – invariánsak mind P-re, mind Q-ra, akkor ez a pár unitér ekvivalens az

$L^2(\mathbb{R})$-beli differenciálás-operátorból és az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$-vel való szorzás-operátorból álló párral.

7. Operátorok spektruma

7.1. Általános tudnivalók

A véges dimenziós vektortéren megismert fogalmakat alkalmazzuk most Hilbert-terekre.

Definíció. *A* $\lambda \in \mathbb{K}$ *az* A *operátor* **sajátértéke**, *ha* $\mathrm{Ker}(A-\lambda \mathrm{id}_{\mathbf{H}}) \neq \{0\}$, *és ekkor a* $\mathrm{Ker}(A-\lambda \mathrm{id}_{\mathbf{H}})$ *altér az* A*-nak a* λ*-hoz tartozó* **sajátaltere**, *amelynek nem nulla elemei az* A*-nak* λ*-hoz tartozó* **sajátvektorai**. *Jelölje* $\mathrm{Eig}(A)$ *az* A *sajátértékeinek halmazát.*

Tehát $\lambda \in \mathbb{K}$ pontosan akkor sajátértéke A-nak, ha az $A-\lambda \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$ lineáris leképezés nem injektív, és $x \in \mathrm{Dom}(A) \setminus \{0\}$ pontosan akkor λ-hoz tartozó sajátvektora A-nak, ha $Ax=\lambda x$.

Ugyanúgy, mint véges dimenziós vektorterek esetén, egy operátor különböző sajátértékű sajátvektoraiból álló rendszer lineárisan független.

Állítás. *Egy zárt operátor minden sajátaltere zárt lineáris altér.*

Bizonyítás Ha Z zárt operátor és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor $Z-\lambda \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$ zárt operátor, így magtere lineáris altér. ■

Speciálisan, mindenütt értelmezett és folytonos operátor sajátalterei zártak.

Tudjuk, hogy véges dimenziós komplex vektortéren minden operátornak van sajátértéke. Végtelen dimenzióban ez nem igaz. Most a sajátérték fogalmának általánosításával foglalkozunk.

Definíció. $\lambda \in \mathbb{K}$ *az* A *operátor* **reguláris értéke**, *ha az* $A - \lambda \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$ *operátor*

(i) injektív,
(ii) értékkészlete sűrű,
(iii) inverze folytonos.

Jelölje $\mathrm{Reg}(A)$ *az* A *reguláris értékeinek halmazát. A* $\mathrm{Sp}(A) := \mathbb{K} \setminus \mathrm{Reg}(A)$ *halmazt az* A **spektrumának** *nevezzük.*

Nyilvánvaló, hogy $\mathrm{Eig}(A) \subset \mathrm{Sp}(A)$. Ha $\mathbf{H}$ véges dimenziós, akkor $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Eig}(A)$, mivel ekkor minden $\mathbf{H} \to \mathbf{H}$ injektív lineáris leképezés bijekció, melynek inverze, lévén lineáris, folytonos.

A spektrum pontjait – a sajátértékeken kívül – aszerint osztályozzuk, hogy a reguláris értékekre felsorolt (ii)-(iii) tulajdonságok közül melyik nem teljesül.

$$\mathrm{Sp}_c(A) := \{\lambda \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Eig}(A) \mid \mathrm{Ran}(A-\lambda \mathrm{id}_{\mathbf{H}}) \text{ sűrű, } (A-\lambda \mathrm{id}_{\mathbf{H}})^{-1} \text{ nem folytonos}\},$$
$$\mathrm{Sp}_{r_1}(A) := \{\lambda \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Eig}(A) \mid \mathrm{Ran}(A-\lambda \mathrm{id}_{\mathbf{H}}) \text{ nem sűrű, } (A-\lambda \mathrm{id}_{\mathbf{H}})^{-1} \text{ folytonos}\},$$
$$\mathrm{Sp}_{r_2}(A) := \{\lambda \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Eig}(A) \mid \mathrm{Ran}(A-\lambda \mathrm{id}_{\mathbf{H}}) \text{ nem sűrű, } (A-\lambda \mathrm{id}_{\mathbf{H}})^{-1} \text{ nem folytonos}\}.$$

Tehát $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Eig}(A) \cup \mathrm{Sp}_c(A) \cup \mathrm{Sp}_{r_1}(A) \cup \mathrm{Sp}_{r_2}(A)$.

$\mathrm{Sp}_c(A)$-t az A **folytonos spektrumának** szokás nevezni, $\mathrm{Sp}_{r_1}(A) \cup \mathrm{Sp}_{r_2}(A)$-t pedig a **maradékspektrumának**.

Állítás. *Ha Z zárt operátor, akkor $\lambda{\in}\mathrm{Reg}(Z)$ ekvivalens azzal, hogy $Z{-}\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}}$ injektív, az inverze mindenütt értelmezett és folytonos (azaz $\mathcal{L}in(\mathbf{H})$ eleme).*

Bizonyítás Ha Z zárt, akkor $\lambda{\in}\mathrm{Reg}(Z)$ esetén $(Z{-}\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}})^{-1}$ sűrűn értelmezett folytonos lineáris leképezés, mely egyben zárt is, így a zárt grafikon tétele szerint mindenütt értelmezett.■

Ha tehát $\lambda \in \mathrm{Reg}(Z)$, akkor $\mathrm{Ran}(Z - \lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}}) = \mathbf{H}$.

Speciálisan igaz ez mindenütt értelmezett folytonos operátorra, azaz $\mathcal{L}in(\mathbf{H})$ elemére.

Állítás. *Ha $A \in \mathcal{L}in(\mathbf{H})$, akkor $\mathrm{Sp}(A)$ része a nulla körüli $\|A\|$ sugarú zárt gömbnek (tehát $\mathrm{Sp}(A)$ kompakt részhalmaza $\mathbb{K}$-nak).*

Bizonyítás Legyen $\lambda{\in}\mathbb{K}$ olyan, hogy $|\lambda|{>}\|A\|$. Ekkor $\|\lambda^{-1}A\|{<}1$ és

$$A{-}\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}} = -\lambda(\mathrm{id}_{\mathbf{H}}{-}\lambda^{-1}A)$$

miatt $A{-}\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}}$ injektív, és

$$R_A(\lambda) = (A{-}\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}})^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} A^n \in \mathcal{L}in(\mathbf{H}).$$

Következésképpen $\lambda{\in}\mathrm{Reg}(A)$, így $\mathrm{Sp}(A){\subset}\{\lambda{\in}\mathbb{K} \mid |\lambda|{\le}\|A\|\}$. ■

A fenti formulából közvetlenül látszik az is, hogy R_A végtelenben eltűnő, azaz nullához tart, ha $|\lambda|$ tart a végtelenhez.

Állítás. *Ha A sűrűn értelmezett operátor és $\mathrm{Eig}(A^*){\subset}\mathrm{Eig}(A)^*$, akkor $\mathrm{Ran}(A - \lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}})$ sűrű, vagy ami ugyanaz,*

$$\mathrm{Sp}_{r_1}(A){=}\mathrm{Sp}_{r_2}(A){=}\emptyset.$$

Bizonyítás Legyen $\lambda{\in}\mathbb{K}{\setminus}\mathrm{Eig}(A)$. Ekkor $\lambda^*{\notin}\mathrm{Eig}(A)^*$, így $\lambda^*{\notin}\mathrm{Eig}(A^*)$, következésképpen $A^*{-}\lambda^*\mathrm{id}_{\mathbf{H}}{=}(A{-}\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}})^*$ injektív, így

$$\mathrm{Ran}(A{-}\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}})^{\perp} = \mathrm{Ker}(A{-}\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}})^* = \{0\}\ ,$$

tehát $\mathrm{Ran}(A{-}\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}}){\subset}\mathbf{H}$ sžrž. ■

Definíció. *$\lambda \in \mathbb{K}$ az A operátor* **általánosított sajátértéke***, ha $\lambda \notin \mathrm{Eig}(A)$ és létezik $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathrm{Dom}(A)$-ban úgy, hogy valamely $K{>}0$ és minden $n{\in}\mathbb{N}$ esetén $\|x_n\|{\ge}K$, és*

$$\lim_n\,(A{-}\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}})x_n = 0. \tag{$*$}$$

Állítás. *$\lambda \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Eig}(A)$ pontosan akkor általánosított sajátértéke A-nak, ha létezik $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathrm{Dom}(A)$-ban úgy, hogy minden $n{\in}\mathbb{N}$ esetén $\|x_n\| = 1$ és a $(*)$ egyenlőség teljesül.*

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy ha a sorozat tagjai mind egységvektorok, akkor a $K := 1$ számmal teljesül a definíció feltétele. Ha viszont a sorozat alulról korlátos, akkor az $y_n := \dfrac{x_n}{\|x_n\|}$ sorozat tagjai egységvektorok, és

$$\|(A - \lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}})y_n\| \le \frac{1}{K}\|(A - \lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}})x_n\|,$$

tehát a bal oldal határértéke nulla.

Állítás. *$\lambda \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Eig}(A)$ pontosan akkor általánosított sajátértéke A-nak, ha $(A - \lambda \mathrm{id}_{\mathbf{H}})^{-1}$ nem folytonos.*

Bizonyítás $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Eig}(A)$ miatt $A - \lambda \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$ injektív, és, mint tudjuk, $(A - \lambda \mathrm{id}_{\mathbf{H}})^{-1}$ pontosan akkor nem folytonos, ha

$$\inf_{x \in \mathrm{Dom}(A), \|x\|=1} \|(A - \lambda \mathrm{id}_{\mathbf{H}})x\| = 0.$$

Ha λ általánosított sajátérték, akkor az előzőek szerint a fenti egyenlőség nyilvánvalóan igaz. Ha viszont ez az egyenlőség áll, akkor az infimum alaptulajdonsága szerint létezik $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egységvektorokból álló sorozat, amelyre $(*)$ teljesül.

7.2. Normális operátorok spektruma

Állítás. *Ha N normális operátor, akkor*

$$\mathrm{Eig}(N^*) = \mathrm{Eig}(N)^*,$$

és a $\lambda \in \mathrm{Eig}(N)$ illetve a $\lambda^* \in \mathrm{Eig}(N^*)$ sajátértékekhez tartozó sajátalterek megegyeznek.

Bizonyítás Legyen $\lambda \in \mathbb{K}$. Ekkor $N - \lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$ normális, így $\mathrm{Ker}(N^* - \lambda^* \mathrm{id}_{\mathbf{H}}) = \mathrm{Ker}(N - \lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{H}})^* = \mathrm{Ker}(N - \lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{H}})$.

Megjegyzés Ha N normális, akkor a fenti eredmény és egy korábbi állításunk alapján $\mathrm{Sp}_{r_1}(N) = \mathrm{Sp}_{r_2}(N) = \emptyset$, tehát

$$\mathrm{Sp}(N) = \mathrm{Eig}(N) \cup \mathrm{Sp}_c(N),$$

azaz normális operátor spektrumában csak sajátértékek és általánosított sajátértékek vannak. Más szóval, ha $N - \lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$ injektív és az inverze folytonos, akkor $\lambda \in \mathrm{Reg}(N)$.

Ha N normális operátor, akkor minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén $N - \lambda \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$ akkor és csak akkor injektív, ha értékkészlete sűrű, így tehát $\lambda \in \mathrm{Eig}(N)$ esetén $\mathrm{Ran}(N - \lambda \mathrm{id}_{\mathbf{H}})$ nem sűrű.

Állítás. *Legyen V izometrikus és T szimmetrikus operátor. Ekkor*

(1) $\mathrm{Eig}(V) \subset \mathbb{T}$ *és* $\mathrm{Eig}(V)^* \subset \mathrm{Eig}(V^*)$,
és minden $\lambda \in \mathrm{Eig}(V)$, $x \in \mathbf{H}$ esetén, ha $Vx = \lambda x$, akkor $V^* x = \lambda^* x$;

(2) $\mathrm{Eig}(T) \subset \mathbb{R}$ *és* $\mathrm{Eig}(T)^* \subset \mathrm{Eig}(T^*)$.

Bizonyítás (1) Legyen $\lambda \in \mathrm{Eig}(V)$, és $0 \neq x \in \mathbf{H}$ olyan, hogy $Vx = \lambda x$. Ekkor

$$\langle x, x \rangle = \langle Vx, Vx \rangle = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = |\lambda|^2 \langle x, x \rangle,$$

következésképpen $|\lambda| = 1$. Továbbá, $V^* V = \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$ miatt

$$x = V^*(Vx) = V^*(\lambda x) = \lambda V^* x,$$

így $V^* x = \lambda^{-1} x = \lambda^* x$, tehát $\lambda^* \in \mathrm{Eig}(V^*)$.

(2) Legyen $\lambda \in \mathrm{Eig}(T)$, és $0 \neq x \in \mathbf{H}$ olyan, hogy $Tx = \lambda x$. Ekkor

$$\lambda^* \langle x, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \langle Sx, x \rangle = \langle x, Sx \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle,$$

következésképpen $\lambda^* = \lambda$, azaz $\lambda \in \mathbb{R}$. Mivel $T \subset T^*$,

$$\mathrm{Eig}(T)^* = \mathrm{Eig}(T) \subset \mathrm{Eig}(T^*).$$

Állítás. *Ha az A operátor normális, szimmetrikus vagy izometrikus, akkor A különböző sajátértékeihez tartozó sajátalterei ortogonálisak egymásra.*

Bizonyítás Legyen λ és μ az A két különbözősajátértéke, és $x, y \in \mathbf{H} \setminus \{0\}$ olyanok, hogy $Ax = \lambda x$ és $Ay = \mu y$. Ekkor az előzőek szerint $A^* y = \mu^* y$, így

$$\mu \langle y, x \rangle = \langle \mu^* y, x \rangle = \langle A^* y, x \rangle = \langle y, Ax \rangle = \lambda \langle y, x \rangle ,$$

ezért $\lambda \neq \mu$ miatt $\langle y, x \rangle = 0$.

Állítás. *Legyen U unitér és S önadjungált operátor. Ekkor*

(1) $\mathrm{Sp}(U) \subset \mathbb{T}$ *és* $\mathrm{Eig}(U)^* = \mathrm{Eig}(U^*)$,

(2) $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}$ *és* $\mathrm{Eig}(S)^* = \mathrm{Eig}(S^*)$.

Bizonyítás (1) U normális, így $\mathrm{Eig}(U)^* = \mathrm{Eig}(U^*)$. Továbbá $\lambda \in \mathrm{Sp}(U)$ esetén $|\lambda| \leq \|U\| = 1$. Legyen $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| < 1$. Ekkor, minthogy $U^{-1} \in \mathcal{L}in(\mathbf{H})$, valamint $\|\lambda \mathrm{id}_{\mathbf{H}}\| = |\lambda| < 1 = \dfrac{1}{\|U^{-1}\|}$, az $U - \lambda \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$ operátor invertálható, azaz $\lambda \notin \mathrm{Sp}(U)$.

(2) S normális, így $\mathrm{Eig}(S)^* = \mathrm{Eig}(S^*)$. Legyen $\lambda = \alpha + i\beta$, ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és $\beta \neq 0$. Ekkor $\lambda \notin \mathrm{Eig}(S)$, és $x \in \mathrm{Dom}(S)$ esetén

$$\|(S - \lambda \mathrm{id}_{\mathbf{H}})x\|^2 = \|(S - \alpha \mathrm{id}_{\mathbf{H}})x\|^2 + \beta^2 \|x\|^2 \geq \beta^2 \|x\|^2,$$

ezért $(S - \lambda \mathrm{id}_{\mathbf{H}})^{-1}$ folytonos, így $\lambda \in \mathrm{Reg}(S)$.

Állítás. *Legyen N normális operátor és $(x_i)_{i \in I}$ az N sajátvektoraiból álló ortonormált rendszer: minden $i \in I$ esetén $N x_i = \lambda_i x_i$ (λ_i nem szükségképpen különbözik λ_j-től, ha $i \neq j$). Ekkor tetszőleges $(c_i)_{i \in I} \in l^2_{\mathbb{K}}(I)$ esetén $\sum\limits_{i \in I} c_i x_i \in \mathrm{Dom}(N)$ pontosan akkor, ha $\sum\limits_{i \in I} |c_i|^2 |\lambda_i|^2 < +\infty$, és ekkor*

$$N \left(\sum_{i \in I} c_i x_i \right) = \sum_{i \in I} c_i N x_i = \sum_{i \in I} c_i \lambda_i x_i .$$

Bizonyítás Legyen $\sum_{i \in I} |c_i|^2 |\lambda_i|^2 < +\infty$. Ekkor létezik $\sum_{i \in I} c_i \lambda_i x_i \in \mathbf{H}$, és minden $x \in \mathrm{Dom}(N^*)$ esetén

$$\left\langle \sum_{i \in I} c_i x_i , N^* x \right\rangle = \sum_{i \in I} \langle c_i x_i, N^* x \rangle = \sum_{i \in I} \langle c_i N x_i, x \rangle =$$

$$= \sum_{i \in I} \langle c_i \lambda_i x_i, x \rangle = \left\langle \sum_{i \in I} c_i \lambda_i x_i , x \right\rangle ,$$

ami az adjungált operátor definíciója szerint éppen azt jelenti, hogy $\sum_{i \in I} c_i \lambda_i x_i \in \mathrm{Dom}(N^{**}) = \mathrm{Dom}(N)$ és

$$N \left(\sum_{i \in I} c_i x_i \right) = \sum_{i \in I} c_i \lambda_i x_i = \sum_{i \in I} c_i N x_i .$$

Tegyük most fel, hogy $\sum_{i\in I} c_i x_i \in \mathrm{Dom}(N)$. Az I minden véges F részhalmazára $x_F := \sum_{i\in F} c_i\lambda_i x_i \in \mathrm{Dom}(N) = \mathrm{Dom}(N^*)$, és $\|x_F\|^2 = \sum_{i\in F} |c_i|^2|\lambda_i|^2$ miatt egyrészt

$$\left|\left\langle \sum_{i\in I} c_i x_i, N^* x_F \right\rangle\right| = \left|\left\langle N\left(\sum_{i\in I} c_i x_i\right), x_F \right\rangle\right| \leq \left\| N\left(\sum_{i\in I} c_i x_i\right)\right\| \|x_F\|,$$

másrészt

$$\left|\left\langle \sum_{i\in I} c_i x_i, N^* x_F \right\rangle\right| = \left|\sum_{i\in I} \langle c_i x_i, N^* x_F\rangle\right| = \left|\sum_{i\in I} \langle c_i \lambda_i x_i, x_F\rangle\right| = \|x_F\|^2$$

miatt

$$\sqrt{\sum_{i\in F} |c_i|^2|\lambda_i|^2} = \|x_F\| \leq \left\| N\left(\sum_{i\in I} c_i x_i\right)\right\|,$$

és ez azt jelenti, hogy $\sum_{i\in I} |c_i|^2|\lambda_i|^2 < +\infty$.

Állítás. *Legyen N olyan normális operátor, melynek sajátalterei által kifeszített zárt lineáris altér az egész tér. Ekkor*

$$\mathrm{Sp}(N) = \overline{\mathrm{Eig}(N)}.$$

Bizonyítás Tudjuk, hogy $\overline{\mathrm{Eig}(N)} \subset \mathrm{Sp}(N)$.

Ha $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\overline{\mathrm{Eig}(N)}$, akkor $\alpha := d(\lambda, \overline{\mathrm{Eig}(N)}) > 0$. Legyen $(x_i)_{i\in I}$ az N sajátvektoraiból álló teljes ortonormált rendszer, $i\in I$ esetén $Nx_i = \lambda_i x_i$.

Ha $x = \sum_{i\in I} c_i x_i \in E$, akkor az előző állítás szerint

$$\|(N - \lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}})x\|^2 = \left\|\sum_{i\in I} c_i(\lambda_i - \lambda)x_i\right\|^2 =$$
$$= \sum_{i\in I} |c_i|^2|\lambda_i - \lambda|^2 \geq \alpha^2 \sum_{i\in I} |c_i|^2 = \alpha^2\|x\|^2,$$

következésképpen $(N - \lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}})^{-1}$ folytonos, így $\lambda \in \mathrm{Reg}(N)$, azaz $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\mathrm{Sp}(N)$.

Állítás. *Ha P ortogonális projektor, $P\neq 0$, $P\neq \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$, akkor*

$$\mathrm{Sp}(P) = \mathrm{Eig}(P) = \{0, 1\}.$$

Bizonyítás Ha $Px = \lambda x$, akkor $\lambda x = Px = P^2x = \lambda^2 x$, ezért $\mathrm{Eig}(P) \subset \{0, 1\}$. Ha $P\neq 0$, akkor $\mathrm{Ran}(P) \neq 0$, és minden $x \in \mathrm{Ran}(P)$ esetén $Px = x$, tehát $1 \in \mathrm{Eig}(P)$. Ha $P \neq \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$, akkor $\mathrm{Ker}(P) \neq 0$, és minden $x \in \mathrm{Ker}(P)$ esetén $Px = 0$, tehát $0 \in \mathrm{Eig}(P)$.

Az ortogonális projektor önadjungált, sajátalterei kifeszítik az egész teret, a sajátértékek halmaza zárt, ezért a spektruma az előző állítás szerint a sajátértékeken kívül más pontot nem tartalmaz.

Megjegyzés $\mathrm{Sp}(\mathrm{id}_{\mathbf{H}}) = \mathrm{Eig}(\mathrm{id}_{\mathbf{H}}) = \{1\}$, és $\mathrm{Sp}(0) = \mathrm{Eig}(0) = \{0\}$.

7.3. Operátor polinomjának spektruma

Tekintsünk egy $p = \sum_{i=0}^{n} c_i \mathrm{id}_{\mathbb{C}}^i$ polinomot és legyen A folytonos operátor. Ekkor $p(A) := \sum_{i=0}^{n} c_i A^i$.

Állítás. *Az előbbi jelöléssel* $\mathrm{Sp}(p(A)) = p[\mathrm{Sp}(A)]$.

Bizonyítás Legyen $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Mivel λ gyöke a $p - p(\lambda)$ polinomnak, van olyan q polinom, hogy $p - p(\lambda) = (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - \lambda)q$. Ennek megfelelően

$$p(A) - p(\lambda)\mathrm{id}_{\mathbf{H}} = (A - \lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}})q(A) = q(A)(A - \lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}}).$$

Tegyük fel, hogy $p(\lambda) \notin \mathrm{Sp}(p(A))$. Ekkor a fenti egyenlőségből

$$q(A)\big(p(A) - p(\lambda)\mathrm{id}_{\mathbf{H}}\big)^{-1} = \big(p(A) - p(\lambda)\mathrm{id}_{\mathbf{H}}\big)^{-1}q(A)$$

adódik, és ezekkel

$$\begin{aligned}
\mathrm{id}_{\mathbf{H}} &= (A - p(\lambda)\mathrm{id}_{\mathbf{H}})\big(p(A) - p(\lambda)\mathrm{id}_{\mathbf{H}}\big)^{-1} = \\
&= \big(p(A) - p(\lambda)\mathrm{id}_{\mathbf{H}}\big)^{-1}q(A)(A - p(\lambda)\mathrm{id}_{\mathbf{H}}) = \\
&= q(A)\big(p(A) - p(\lambda)\mathrm{id}_{\mathbf{H}}\big)^{-1}(A - p(\lambda)\mathrm{id}_{\mathbf{H}}),
\end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy $A - p(\lambda)\mathrm{id}_{\mathbf{H}}$-nek van mindenütt értelmezett folytonos inverze, azaz $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$; ezen ellentmondás szerinht tehát $p[\mathrm{Sp}(A)] \subset \mathrm{Sp}(p(A))$.

Legyen most $\lambda \in \mathrm{Sp}(p(A))$. A $p - \lambda$ polinomnak a ξ_i (multiplicitással számított) gyökeivel a gyöktényezős alak szerint

$$p(A) - \lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}} = \alpha(A - \xi_1\mathrm{id}_{\mathbf{H}}) \dots (A - \xi_n\mathrm{id}_{\mathbf{H}})$$

Ha $\xi_i \notin \mathrm{Sp}(A)$ minden i-re, akkor a jobb oldal minden tényezőjének, és így az egész jobb oldalnak, és ezért a bal oldalnak is van mindenütt értelmezett folytonos inverze, ami ellentmondás. Tehát van olyan i_0, hogy $\xi_{i_0} \in \mathrm{Sp}(A)$. Lévén $p(\xi_{i_0}) - \lambda = 0$, azaz $\lambda = p(\xi_{i_0})$, így $\mathrm{Sp}(p(A)) \subset p[\mathrm{Sp}(A)]$.

8. Operátorsorozatok konvergenciája

Definíció. *A mindenütt értelmezett folytonos operátorok* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozata*

– **normában** *(vagy* **uniform***)* **konvergens**, *ha létezik A mindenütt értelmezett folytonos operátor úgy, hogy* $\lim_n \|A_n - A\| = 0$*, és ekkor az* $A = (u)\lim_n A_n$ *jelölést használjuk;*

– **erősen konvergens**, *ha létezik A mindenütt értelmezett folytonos operátor úgy, hogy* $\lim_n A_n x = Ax$ *minden* $x \in \mathbf{H}$ *esetén, és ekkor az* $A = (s)\lim_n A_n$ *jelölést használjuk (vagyis az erős konvergencia a pontonkénti konvergencia);*

– **gyengén konvergens**, *ha létezik A mindenütt értelmezett folytonos operátor úgy, hogy* $\lim_n \langle y, A_n x\rangle = \langle y, Ax\rangle$ *minden* $x, y \in \mathbf{H}$ *esetén, és ekkor az* $A = (w)\lim_n A_n$ *jelölést használjuk.*

Egyszerű feladat bebizonyítani:

Állítás. *Ha az operátorsorozat*

– *normában konvergens, akkor erősen is konvergens és* $(s)\lim_n A_n = (u)\lim_n A_n$,

– *erősen konvergens, akkor gyengén is konvergens és* $(w)\lim_n A_n = (s)\lim_n A_n$.

Viszont fordítva nem áll. Legyen l^2-ben a **jobbra tolás operátora**

$$R : l^2 \to l^2, \qquad (a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (0, a_1, a_2, a_3, \dots),$$

és a **balra tolás operátora**

$$L : l^2 \to l^2, \qquad (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots) \mapsto (a_2, a_3, a_4, \dots).$$

Könnyű megmutatni, hogy
– az $(L^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat normában nem konvergens, de $(s)\lim_n L^n = 0$,
– az $(R^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat erősen nem konvergens, de $(w)\lim_n R^n = 0$.

A normában konvergens operátorsorozat tudvalevőleg korlátos, és a Banach–Steinhaus-tételből azonnal következik, hogy ez igaz az erősen konvergens operátorsorozatra is:

Állítás. *Ha* $(A_n)_{neN}$ *normában vagy erősen konvergens, akkor van olyan* α *szám, hogy* $\|A_n\| \le \alpha$ *minden* n*-re.*

Állítás. *(i) Az operátorok lineáris műveletei felcserélhetők az előzőfeladatban értelmezett mindhárom határértékkel, azaz ha* $A = (.)\lim_n A_n$ *és* $B = (.)\lim_n B_n$*, akkor* $A + B = (.)\lim_n (A_n + B_n)$*, és hasonló igaz a számmal szorzásra.*

(ii) Az operátorok szorzása felcserélhetőaz egyenletes és az erős határértékkel, azaz ha $A = (u)\lim_n A_n$ *és* $B = (u)\lim_n B_n$*, akkor* $AB = (u)\lim_n (A_n B_n)$*, és ugyanez igaz az erős limeszre is.*

(iii) Az adjungálás felcserélhetőaz egyenletes és a gyenge határértékkel, azaz ha $A = (u)\lim_n A_n$*, akkor* $A^* = (u)\lim_n A_n^*$*, és ugyanez igaz a gyenge limeszre is.*

Bizonyítás (i) nyilvánvaló
(ii) Az

$$\begin{aligned}\|A_nB_nx - ABx\| \le & \|A_nB_nx - A_nBx\| + \|A_nBx - ABx\| \le \\ \le & \|A_n\|\ \|B_nx - Bx\| + \|B\|\ \|A_nx - Ax\| \le \\ \le & \alpha\|B_nx - Bx\| + \|B\|\ \|A_nx - Ax\|\end{aligned}$$

egyenlőtlenségek biztosítják a konvergenciát.
(iii) A normában való konvergenciát

$$\|A_n^* - A^*\| = \|(A_n - A)^*\| = \|A_n - A\|$$

mutatja, a gyenge konvergenciát pedig

$$\langle y, A_n^*x\rangle - \langle y, A^*x\rangle = \langle y, (A_n^* - A^*)x\rangle = \langle y, (A_n - A)^*x\rangle = \langle (A_n - A)y, x\rangle\,.$$

Viszont a gyenge határértékre (ii) nem teljesül: $(w)\lim_n L^n = (w)\lim_n R^n = 0$, de $L^nR^n = \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$ minden n-re.

Az erős határértékre pedig (iii) nem teljesül: $(s)\lim_n L^n = 0$, de az $(L^n)^* = R^n$ sorozatnak nem létezik erős határértéke.

9. Kompakt operátorok

9.1. Véges rangú operátorok

Definíció. *Az A folytonos operátort* **véges rangúnak** *nevezzük, ha* $\mathrm{Ran}(A)$ *véges dimenziós, és ekkor* $\mathrm{rk}(A) := \dim(\mathrm{Ran}(A))$ *az A* **rangja**.

Nyilvánvaló, hogy a véges rangú operátorok összessége lineáris altér: ha A, B véges rangú és $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, akkor $\mathrm{Ran}(A+B) = \mathrm{Ran}(A) + \mathrm{Ran}(B)$ és $\mathrm{Ran}(\lambda A) = \mathrm{Ran}(A)$, továbbá $\mathrm{Ran}(0A) = \{0\}$ miatt

$$\begin{aligned}\mathrm{rk}(A+B) &\leq \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B),\\ \mathrm{rk}(\lambda A) &= \mathrm{rk}(A),\\ \mathrm{rk}(0A) &= 0,\end{aligned}$$

így $A+B$, λA, $0A$ is véges rangú.

Állítás. *Ha az A és B operátorok közül legalább az egyik véges rangú, akkor AB és BA véges rangú, és*

$$\mathrm{rk}(BA) \leq \min(\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B)), \quad \mathrm{rk}(BA) \leq \min(\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B)).$$

Bizonyítás $\mathrm{Ran}(AB) = A[\mathrm{Ran}(B)]$ miatt az állítás nyilvánvaló.■

Állítás. *Ha A véges rangú operátor, akkor A^* is véges rangú, és*

$$\mathrm{rk}(A^*) = \mathrm{rk}(A).$$

Bizonyítás Egyszerű tény, hogy minden $A \in \mathcal{L}in(\mathbf{H})$ esetén $A^*|_{\overline{\mathrm{Ran}(A)}}$ injektív és $A^*[\overline{\mathrm{Ran}(A)}] = \mathrm{Ran}(A^*)$.

Ha A véges rangú, akkor $\mathrm{Ran}(A)$ zárt, mert véges dimenziós altér; következésképpen $A^*|_{\mathrm{Ran}(A)}$ lineáris bijekció $\mathrm{Ran}(A)$ és $\mathrm{Ran}(A^*)$ között, ezért A^* véges rangú, és rangja megegyezik A rangjával.

9.2. Kompakt operátorok tulajdonságai

Definíció. *Az A folytonos operátort operátort* **kompaktnak**, *vagy* **teljesen folytonosnak** *nevezzük, ha minden* $\mathbf{H}$*-beli korlátos halmaz A általi képe prekompakt (azaz a lezártja kompakt).*

Nyilvánvaló, hogy A akkor és csak akkor kompakt, ha $A[G_1(0)]$ prekompakt.

Állítás. *Legyen A folytonos operátor.*

(1) Ha A véges rangú, akkor kompakt.
(2) Ha A kompakt és $\mathrm{Ran}(A)$ *zárt, akkor A véges rangú.*

Bizonyítás (1) A folytonos, ezért $A[G_1(0)]$ korlátos halmaz, amely a véges dimenziós $\mathrm{Ran}(A)$ része, így relatív kompakt.

(2) Ha $\mathrm{Ran}(A)$ zárt, akkor teljes, így a nyílt leképezés tétele szerint $A{:}\mathbf{H} \to \mathrm{Ran}(A)$ nyílt, következésképpen $A[G_1(0)]$ környezete a 0-nak $\mathrm{Ran}(A)$-ban, emellett a lezártja kompakt, ezért $\mathrm{Ran}(A)$ véges dimenziós.

Állítás. *A kompakt operátorok zárt lineáris alteret alkotnak.*

Bizonyítás Triviális, hogy kompakt operátor számszorosa is kompakt.

Legyen A és B jkompakt operátor, és $H \subset \mathbf{H}$ korlátos halmaz. Ekkor

$$(A+B)[H] \subset A[H]+B[H] \subset \overline{A[H]}+\overline{B[H]},$$

így $(A+B)[H]$ prekompakt, mert két kompakt halmaz összege kompakt, tehát $A+B$ is kompakt operátor.

Legyen a T folytonos operátor a kompakt operátorok halmazának érintkezési pontja. Ekkor minden $\varepsilon>0$ esetén létezik A kompakt operátor úgy, hogy $\|T-S\|<\varepsilon/3$. Mivel $A[G_1(0)]$ prekompakt, létezik $x_1, \ldots, x_n$ eleme $G_1(0)$-nak úgy, hogy

$$A[G_1(0)] \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_{\varepsilon/3}(ax_k).$$

Legyen $x \in G_1(0)$. Ekkor létezik $k \in \{1, \ldots, n\}$ úgy, hogy $\|Ax-ax_k\|<\varepsilon/3$, tehát

$$\|Tx-Tx_k\| \leq \|Tx-Ax\| + \|Ax-Ax_k\| + \|Ax_k-Tx_k\| < \varepsilon,$$

így

$$T[G_1(0)] \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_{\varepsilon}(Tx_k),$$

ezért $T[G_1(0)]$ prekompakt, azaz T kompakt operátor.

Állítás. *Ha az A és B folytonos operátorok közülük legalább az egyik kompakt, akkor AB és BA kompakt.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy A kompakt, és legyen $H \subset \mathbf{H}$ korlátos halmaz.

Ekkor $\overline{A[H]}$ kompakt halmaz, így, mivel B folytonos, $B\left[\overline{A[H]}\right]$ is kompakt halmaz, és $\overline{B[A[H]]} \subset B\left[\overline{A[H]}\right]$, következésképpen $B[A[H]]$ relatív kompakt, tehát BA kompakt operátor.

B folytonos, ezért $B[H]$ korlátos halmaz, következésképpen $A[B[H]]$ relatív kompakt, tehát AB kompakt operátor.■

Állítás. *A véges rangú operátorok sűrű lineáris alteret alkotnak a kompakt operátorok zárt lineáris alterében.*

Bizonyítás Megmutatjuk, hogy bármely A kompakt operátor minden $\varepsilon>0$ sugarú környezetében van véges rangú operátor.

$A[G_1(0)]$ prekompakt halmaz, ezért létezik $x_1, \ldots, x_n$ eleme $G_1(0)$-nak úgy, hogy

$$A[B_1(0)] \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_{\varepsilon}(Ax_k).$$

$\mathbf{M} := \mathrm{Span}\{Ax_1, \ldots, Ax_n\}$ véges dimenziós (tehát zárt) altér, és ha $P_{\mathbf{M}}$ jelöli az $\mathbf{M}$-re vetítő ortogonális projektort, akkor $P_{\mathbf{M}}A$ véges rangú operátor. Minden $x \in B_1(0)$ esetén létezik $k \in \{1, \ldots, n\}$ úgy, hogy $\|Ax-Ax_k\|<\varepsilon$, ezért

$$\|Ax-P_{\mathbf{M}}Ax\| = \|(\mathrm{id}_{\mathbf{H}}-P_M)(Ax-Ax_k)\| \leq \|\mathrm{id}_{\mathbf{H}}-P_{\mathbf{M}}\|\|Ax-Ax_k\| < \varepsilon,$$

hiszen $(\mathrm{id}_{\mathbf{H}}-P_{\mathbf{M}})=P_{\mathbf{M}^\perp}$ ortogonális projektor, így normája 1. Tehát

$$\|A-P_{\mathbf{M}}A\| \leq \varepsilon.■$$

Következésképpen minden kompakt operátor előáll véges rangú operátorok sorozatának határértékeként.

Állítás. *Ha A kompakt operátor, akkor A^* is kompakt.*

Bizonyítás Az előzőeredmény szerint létezik véges rangú operátorok $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata úgy, hogy $\lim_n A_n = A$ normában. Mivel a folyatonos operátorokon az adjungálás izometrikus bijekció, $\lim_n A_n^* = A^*$ normában. Mivel minden A_n^* véges rangú, így az előző állítás alapján A^* is kompakt operátor.

9.3. Kompakt operátorok spektruma

Ebben a fejezetben A egy adott kompakt operátort jelöl.

Állítás. $\lambda\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$ *esetén* $\mathrm{Ker}(A-\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}})$ *véges dimenziós. Ha* $\mathbf{H}$ *végtelen dimenziós, akkor* $0 \in \mathrm{Sp}(A)$.

Bizonyítás $\mathbf{N}:=\mathrm{Ker}(A-\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}})$ zárt lineáris altér, és $A|_{\mathbf{N}}=\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{N}}$ kompakt operátor, melynek értékkészlete $\lambda\neq 0$ miatt $\mathbf{N}$, így a 32.2. állítás szerint $\mathbf{N}$ véges dimenziós.

Tegyük fel, hogy $0\in\mathrm{Reg}(A)$. Ekkor $\mathrm{Ran}(A)=\mathbf{H}$, így $\mathbf{H}$ véges dimenziós.

Állítás. $\lambda\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$ *esetén* $\mathrm{Ran}(A-\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}})$ *zárt lineáris altér.*

Bizonyítás $\mathbf{M}:=\mathrm{Ker}(A-\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}})^{\perp}$ zárt lineáris altér, $S:=(A-\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}})|_{\mathbf{M}}$ injektív lineáris leképezés, és $\mathrm{Ran}(S)=\mathrm{Ran}(A-\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}})$. Tegyük fel, hogy S^{-1} nem folytonos. Ekkor $\inf_{x\in\mathbf{M},\|x\|=1}\|Sx\| = 0$, tehát létezik $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathbf{M}$-ben úgy, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $\|x_n\|=1$ és $\lim_n Sx_n=0$. Mivel A kompakt operátor, létezik $i:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ indexsorozat úgy, hogy $(Ax_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergens; legyen $y_0\in\mathbf{M}$ a határértéke. Ekkor $\lim_k Sx_{i_k} = 0$ miatt $y_0=\lambda\lim_k x_{i_k}$, így $\|y_0\| = |\lambda|\neq 0$, és emellett $Sy_0=\lambda\lim_k Sx_{i_k}=0$, ami ellentmond annak, hogy S injektív. Tehát S^{-1} folytonos, így, mivel zárt operátor, $\mathrm{Dom}(S^{-1}) = \mathrm{Ran}(S)$ zárt.

Állítás. *Minden $\varepsilon > 0$ esetén $E_\varepsilon:=\{\lambda\in\mathrm{Eig}(A) \mid |\lambda|>\varepsilon\}$ véges halmaz.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy valamely $\varepsilon > 0$ esetén E_ε végtelen. Ekkor létezik $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ injektív sorozat E_ε-ban. Legyen $n\in\mathbb{N}$ esetén $0 \neq e_n$ az A-nak λ_n sajátértékű sajátvektora (azaz $e_n\in\mathrm{Ker}(A-\lambda_n\mathrm{id}_{\mathbf{H}})$), és $\mathbf{M}_n$ az $\{e_1,\ldots,e_n\}$ halmaz lineáris burka. Ekkor

(a) $\mathbf{M}_n$ valódi altere $\mathbf{M}_{n+1}$-nek,
(b) $A[\mathbf{M}_n]\subset\mathbf{M}_n$,
(c) $(A-\lambda_{n+1}\mathrm{id}_{\mathbf{H}})[\mathbf{M}_{n+1}]\subset\mathbf{M}_n$.

Ugyanis (b) és (c) nyilvánvaló, és az is hogy $\mathbf{M}_n\subset\mathbf{M}_{n+1}$. Mivel a λ_n sajátértékek különbözők, minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $\{e_1,\ldots,e_{n+1}\}$ lineárisan független, így $\mathbf{M}_n \neq \mathbf{M}_{n+1}$.

Minden n-re létezik $y_{n+1} \in \mathbf{M}_{n+1}\cap\mathbf{M}_n^{\perp}$ úgy, hogy $\|y_{n+1}\|=1$. Ekkor minden $x\in\mathbf{M}_n$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$\|\alpha y_{n+1}-x\|^2 = |\alpha|^2\|y_{n+1}\|^2 + \|x\|^2 \geq |\alpha|^2.$$

Ha $m\leq n$, akkor

$$z := Ay_m-(A-\lambda_{n+1}\mathrm{id}_{\mathbf{H}})y_{n+1} \in \mathbf{M}_n,$$

így

$$\|Ay_{n+1}-Ay_m\| = \|\lambda_{n+1}y_{n+1}-z\| = |\lambda_{n+1}| \geq \varepsilon. \qquad (*)$$

Következésképpen az $(Ay_n)_{n\geq 2}$ sorozatnak nincs sűrűsödési helye, holott $(y_n)_{n\geq 2}$ korlátos sorozat, ez pedig ellentmont A kompaktságának.

Állítás. *Ha* $0 \neq \lambda \in \mathrm{Eig}(A)$*, akkor* $\mathrm{Ran}(A-\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}}) \neq \mathbf{H}$.

Bizonyítás Tegyük fel, hogy $\mathrm{Ran}(A-\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}}) = \mathbf{H}$. Az $\mathbf{M}_n{:=}\mathrm{Ker}((A-\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}})^n)$ $(n\in\mathbb{N})$ zárt lineáris alterekre az előbbi bizonyításban felsorolt (a)-(b)-(c) tulajdonságok teljesülnek a $\lambda_{n+1} := \lambda$ definícióval.

Ugyanis (b) és (c) nyilvánvaló, és az is hogy $\mathbf{M}_n\subset\mathbf{M}_{n+1}$. Mivel λ sajátértéke A-nak, létezik $0 \neq x_1\in\mathbf{M}_1$, és mivel $A-\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}}$ szürjektív, létezik $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathbf{H}$-ban úgy, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $(A-\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}})x_{n+1}{=}x_n$. Ekkor

$$(A-\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}})^n x_{n+1}{=}x_1{\neq}0 \quad \text{és} \quad (A-\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}})^{n+1}x_{n+1}{=}0,$$

azaz $x_{n+1}\in\mathbf{M}_{n+1}\setminus\mathbf{M}_n$. Tehát $\mathbf{M}_n \neq \mathbf{M}_{n+1}$.

Ezután ugyanúgy érvelhetünk, mint az előbb, csak a $(*)$ összefüggésben nincs, és nem is kell ε.

Állítás. $\lambda\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$ *esetén a következő alterek véges és azonos dimenziósak:*

$$\begin{array}{cc} \mathrm{Ker}(A-\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}}), & \mathrm{Ran}(A-\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}})^{\perp}, \\ \mathrm{Ker}(A^*-\lambda^*\mathrm{id}_{\mathbf{H}}), & \mathrm{Ran}(A^*-\lambda^*\mathrm{id}_{\mathbf{H}})^{\perp}. \end{array}$$

Bizonyítás Legyen $S{:=}A-\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}}$, és tegyük fel, hogy

$$\mathrm{dimKer}(S) > \mathrm{dimRan}(S)^{\perp}$$

Mivel $\mathrm{Ker}(S)$ véges dimenziós, létezik $L{:}\mathrm{Ker}(S)\to\mathrm{Ran}(S)^{\perp}$ lineáris szürjekció, mely nem injekció. $F{:=}A{+}L{\circ}P_{\mathrm{Ker}(S)}$ kompakt operátor (kompakt és véges rangú összege) és $F-\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}}{=}S{+}L{\circ}P_{\mathrm{Ker}(S)}$. Ezért $\{0\}{\neq}\mathrm{Ker}(L){\subset}\mathrm{Ker}(F-\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}})$, tehát $\lambda\in\mathrm{Eig}(F)$, és $\mathrm{Ran}(F-\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}}){\neq}\mathbf{H}$. Azonban,

$$(F-\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}})[\mathrm{Ker}(S)^{\perp}] = S[\mathrm{Ker}(S)^{\perp}] = \mathrm{Ran}(S),$$

és

$$(F-\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}})[\mathrm{Ker}(S)] = L[\mathrm{Ker}(S)] = \mathrm{Ran}(S)^{\perp},$$

így $\mathrm{Ran}(F-\lambda\mathrm{id}_{\mathbf{H}}){=}\mathbf{H}$, ami ellentmondás, tehát

$$\mathrm{dimKer}(S) \leq \mathrm{dimRan}(S)^{\perp}.$$

Alkalmazzuk ezt az eredményt az A^* kompakt operátorra:

$$\mathrm{dimKer}(S^*) \leq \mathrm{dimRan}(S^*)^{\perp}.$$

Azonban

$$\mathrm{dimRan}(S^*)^{\perp} = \mathrm{dimKer}(S) \leq \mathrm{dimRan}(S)^{\perp} = \mathrm{dimKer}(S^*),$$

ez pedig csak úgy lehetséges, ha ezen négy altér dimenziója megegyezik.

Állítás. $\mathrm{Sp}(A)$ *legfeljebb megszámlálható halmaz, melynek csak a* $0\in\mathbb{K}$ *lehet torlódási pontja. A spektrum minden nemnulla eleme sajátérték, és a megfelelő sajátalterek véges dimenziósak.*

Bizonyítás Ha $\lambda \neq 0$ nem sajátértéke A-nak, akkor $A - \lambda \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$ injektív, így a 33.5. állítás alapján szürjektív, és ekkor inverze, lévén zárt operátor, folytonos, következésképpen $\lambda \in \mathrm{Reg}(A)$. Tehát $\mathrm{Sp}(A) \setminus \{0\} \subset \mathrm{Eig}(A)$. A 33.3. állítás szerint

$$\mathrm{Sp}(A) \setminus \{0\} = \mathrm{Eig}(A) \setminus \{0\} = \biguplus_{n \in \mathbb{N}} E_{1/n}$$

legfeljebb megszámlálható halmaz, melynek csak a 0 lehet torlódási pontja, így $\mathrm{Sp}(A)$ is ugyanilyen tulajdonságú. A nem nulla sajátértékekhez tartozó sajátalterek a 33.1. állítás szerint véges dimenziósak.

9.4. Nyomoperátorok

Definíció. *A K kompakt operátort* **nyomperátornak** *hívjuk, ha tetszőleges $(x_i)_{i \in I}$ teljes ortonormált rendszer esetén létezik*

$$\mathrm{Tr}(K) := \sum_{i \in I} \langle x_i, K x_i \rangle \,,$$

amely független az ortonormált rendszertől, és amelyet a K **nyomának** *hívunk.*

Legyen W önadjungált nyomoperátor, $\{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ a sajátértékei mulitplicitással számolva, e_n a λ_n-hez tartozó sajátvektor, úgy választva, hogy a sajátvektorok ortonormált rendszert alkossanak. Ekkor

$$W = (u) \sum_n \lambda_n |e_n\rangle\langle e_n|,$$

ahol (u) az uniform (operátorok normájára vonatkokzó) összegzést jelöli. A spektráltételből azonnal adódik a gyenge összegzési formula, azaz hogy minden x és y vektorra

$$\langle y, Wx \rangle = \sum_n \lambda_n \langle y, e_n \rangle \langle e_n, x \rangle,$$

és ebből nem nehéz becsléssel megkapjuk a normára vonatkozó konvergenciát is.

Ha W a fenti alakú nyomoperátor, akkor

$$\mathrm{Tr}(W) = \sum_n \lambda_n,$$

ugyanis

$$\mathrm{Tr}(W) = \sum_{i \in I} \langle x_i, W x_i \rangle = \sum_i \sum_n \lambda_n \langle x_i, e_n \rangle \langle e_n, x_i \rangle;$$

az összegzés sorrendjének megfordítása adja a kívánt eredményt.

Állítás. *Ha W önadjungált nyomoperátor és A korlátos operátor, akkor AW és WA is nyomoperátor, és $\mathrm{Tr}(AW) = \mathrm{Tr}(WA)$.*

Bizonyítás Legyen W a fenti alakú, és x_i $(i \in I)$ teljes ortonormált rendszer. Vizsgáljuk meg a

$$\sum_{i \in I} \langle x_i, AW x_i \rangle = \sum_i \sum_n \lambda_n \langle x_i, A e_n \rangle \langle e_n, x_i \rangle$$

sor konvergenciáját.

Tekintsük a fordított sorrendű abszolút összegezhetőséget:

$$\sum_n \lambda_n \sum_i \big|\langle x_i, Ae_n\rangle\big| \, \big|\langle e_n, \xi\rangle\big|.$$

A második összeg a Cauchy-egyenlőtlenség és a Parseval-egyenlőség folytán nem nagyobb, mint $\|Ae_n\|\|e_\| \leq \|A\|$, így a sor konvergens, tehát az eredeti sorrendű összeg is konvergens, és megegyezik a fordított sorrendű összeggel, ami

$$\sum_n \lambda_n \sum_i \langle x_i, Ae_n\rangle\langle e_n, \xi\rangle = \sum_n \lambda_n \langle e_n, Ae_n\rangle.$$

Teljesen hasonló érveléssel láthatjuk be, hogy $\mathrm{Tr}(WA)$ is létezik, és a fenti összeggel egyenlő. ■

Nem folytonos operátor és magoperátor szorzata nem feltétlenül nyom- operátor. Az előzőhöz hasonlóan – csak még egyszerűbben, mert véges összegzést cserélünk fel végtelennel, ami minden feltétel nélkül megtehető– bizonyíthatjuk be a következőt.

Állítás. *Legyen* $W = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n |e_n\rangle\langle e_n|$ *(véges rangú operátor) és* L *olyan operátor, hogy* $e_n \in \mathrm{Dom}(L)$ $(n = 1, \ldots, N)$. *Ekkor* LW *véges rangú, nyomoperátor, és*

$$\mathrm{Tr}(LW) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \langle e_n, Le_n\rangle .$$

Érdemes megjegyezni, hogy $\mathrm{Tr}(WL)$ biztosan nem létezik, ha L értelmezési tartománya nem az egész Hilbert-tér. Ekkor ugyanis választható olyan teljes ortonormált rendszer, amelynek legalább egy tagja nincs benne a $\mathrm{Dom}(L)$-ben, így a nyom definíciójában szereplő összegnek nincs értelme.