A fizika a világ *esemény*einek egymáshoz való viszonyát vizsgálja. Ehhez szükség van valamilyen matematikai struktúrára, aminek fogalmai megfeleltethetők az eseménynek, valamint a köztük fennálló kapcsolatoknak. Ha van egy ilyen alkalmasnak tűnő struktúránk, akkor annak keretein belül állításokat vezethetünk le, amiket végül a tapasztalattal összevetve dönthetünk a modell alkalmazhatóságáról. Először tehát foglaljuk össze az eseményekkel kapcsolatos ismereteket.

Elemi tapasztalat, hogy vannak olyan eseménypárok, amelyek egyik tagja *maga után vonja* a másikat. Matematikailag ez azt jelenti, hogy az események halmazán van egy reláció. Világos, hogy ahhoz, hogy ez a reláció rendelkezzen az implikáció jól ismert tulajdonságaival, szükséges, hogy antiszimmetrikus, reflexív és tranzitív, azaz részbenrendezés legyen.

Ez azonban nem elég, azt szeretnénk, hogy két esemény *együttes bekövetkezés*e is esemény legyen, valamint az is, hogy két esemény közül *legalább az egyik bekövetkezik.* A relációnkra nézve ez azt a feltételt adja, hogy bármely két eseményhez találunk olyan eseményt, ami mindkettőnél kisebb-egyenlő, és minden ilyen tulajdonságú eseménynél nagyobb-egyenlő, és egy olyan további eseményt, ami mindkettőnél nagyobb-egyenlő, és minden ilyen tulajdonságú eseménynél kisebb-egyenlő. A későbbiekben az eseményekhez valószínűséget fogunk rendelni, ezért jó, ha nemcsak két, hanem megszámlálhatóan végtelen eseményhez is mindig találunk legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátot.

Van *biztos esemény* és *lehetetlen esemény*, tehát az események halmazán létezik maximális és minimális elem.

Minden eseményhez létezik *ellentett esemény* azzal a tulajdonsággal, hogy bármely esemény és az ellentettje közül pontosan az egyik következik be. Az ellentett ellentettje az eredeti esemény, és ha egy esemény bekövetkezése maga után vonja egy másikét, akkor az utóbbi ellentettje az előbbi ellentettjét vonja maga után. Modellünkben tehát az események halmazán van egy kitüntetett involúció, ami megfordítja a rendezést.

A felsorolt tulajdonságok nem igényelnek sok magyarázatot, de nem elegendőek. Később látni fogjuk, hogy szükség van egy további követelményre is, amelyet ortomodularitásnak hívunk.

Definíció. A $\mathcal{P}$ halmazon értelmezett $\leq$ reláció részbenrendezés, ha $\forall a, b, c \in \mathcal{P}$:

(1) $a \leq a$

(2) $(a \leq b \text{ és } a \geq b) \Rightarrow a = b$

(3) $(a \leq b \text{ és } b \leq c) \Rightarrow a \leq c$

Ekkor a $(\mathcal{P}, \leq)$ párt részbenrendezett halmaznak mondjuk. Ha nem okoz félreértést, akkor gyakran $(\mathcal{P}, \leq)$ helyett is csak $\mathcal{P}$-t írunk.

Definíció. Legyen $\mathcal{P}$ részbenrendezett halmaz, $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}$, ahol I tetszőleges indexhalmaz. $\{x_i\}_{i\in I}$ elemeinek legkisebb felső korlátja $x \in \mathcal{P}$, ha $\forall i \in I : x_i \leq x$ és $\forall y \in \mathcal{P} : (\forall i \in I : x_i \leq y) \Rightarrow x \leq y$. Hasonlóan $\{x_i\}_{i\in I}$ elemeinek legnagyobb alsó korlátja $x \in \mathcal{P}$, ha $\forall i \in I : x_i \geq x$ és $\forall y \in \mathcal{P} : (\forall i \in I : x_i \geq y) \Rightarrow x \geq y$.

Állítás. *Legyen $(\mathcal{P}, \leq)$ részbenrendezett halmaz, $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}$. Ha létezik, akkor $\{x_i\}_{i\in I}$ legkisebb felső (legnagyobb alsó) korlátja egyértelmű.*

Bizonyítás. Legyen x és x' az $\{x_i\}_{i\in I}$ részhalmaz legkisebb felső (legnagyobb alsó) korlátja. Ekkor egyrészt $x \leq x'$, másrészt $x \geq x'$ igaz, tehát a részbenrendezés (2) tulajdonsága szerint $x = x'$. □

Jelölés. Legyen $(\mathcal{P}, \leq)$ részbenrendezett halmaz, $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}$ tetszőleges részhalmaza. Ha létezik $\{x_i\}_{i\in I}$ legkisebb felső korlátja, azt a következő módon jelöljük:

$$\bigvee_{i\in I} x_i$$

Hasonlóan ha létezik $\{x_i\}_{i\in I}$ legnagyobb alsó korlátja, akkor azt

$$\bigwedge_{i\in I} x_i$$

jelöli. Véges indexhalmaznál szokásos még az infix jelölés is: $x_1 \vee \ldots \vee x_n$ ill. $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$.

Definíció. Az $\mathcal{L}$ halmaz a $\leq$ részbenrendezéssel σ-háló, ha bármely megszámlálható részhalmazának létezik legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátja. Az $\mathcal{L}$ σ-háló ortokomplementeres σ-háló az $\mathcal{L} \to \mathcal{L} : x \mapsto x^\perp$ ortokomplementációval, ha van legkisebb és legnagyobb eleme, és $\forall x \in \mathcal{L} : x \vee x^\perp = 1$ és $x \wedge x^\perp = 0$, $(x^\perp)^\perp = x$, és $x \leq y \Rightarrow y^\perp \leq x^\perp$. Ha emellett $x \leq y \Rightarrow y = x \vee (y \wedge x^\perp)$, akkor $\mathcal{L}$ ortomoduláris σ-háló.

Látható, hogy ha a legkisebb felső korlát és a legnagyobb alsó korlát képzése egymásra nézve disztributív, akkor az ortokomplementeres háló egyben ortomoduláris is (ekkor a hálót disztributív ortokomplementeres σ-hálónak mondjuk). Az ortomodularitásból azonban nem következik a disztributív tulajdonság.

Összefoglalva tehát az események halmaza minden esetben valamilyen ortomoduláris σ-háló. A továbbiakban ennek alapvető tulajdonságait vizsgáljuk.

Definíció. Legyen $\mathcal{L}$ ortokomplementeres σ-háló. $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$ rész-ortokomplementeres σ-háló (jel.:$\mathcal{L}_0 \leq \mathcal{L}$) ha $\mathcal{L}_0 \neq \emptyset$ és

(1) $x_n \in \mathcal{L}_0 \Rightarrow \bigvee_n x_n \in \mathcal{L}_0$

(2) $x_n \in \mathcal{L}_0 \Rightarrow \bigwedge_n x_n \in \mathcal{L}_0$

(3) $x \in \mathcal{L}_0 \Rightarrow x^\perp \in \mathcal{L}_0$

Megjegyzés. (3) teljesülése esetén (1) és (2) ekvivalens, csak a szimmetria miatt szerepel mindkettő.

Definíció. Az $\mathcal{L}$ és $\mathcal{L}'$ ortokomplementeres σ-hálók közti $u : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ függvény ortokomplementeres σ-háló-morfizmus, ha a következők teljesülnek:

(1) $u(\bigvee_n x_n) = \bigvee_n u(x_n)$

(2) $u(\bigwedge_n x_n) = \bigwedge_n u(x_n)$

(3) $u(x^\perp) = u(x)^\perp$

Megjegyzés. (3) teljesülése esetén (1) és (2) ekvivalens, csak a szimmetria kedvéért szerepel mindkettő. A tulajdonságokból az is következik, hogy u rendezéstartó.

Állítás. *Ha* $u : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ *ortokomplementeres* σ*-háló-morfizmus, akkor* $\operatorname{Ran} u$ *rész-ortokomplementeres* σ*-háló. Ha* $\mathcal{L}$ *disztributív, akkor* $\operatorname{Ran} u$ *is az.*

Definíció. Legyen $\mathcal{L}$ ortokomplementeres σ-háló, $S \subseteq \mathcal{L}$. Az S által generált rész-ortokomplementeres σ-hálónak nevezzük az S-et tartalmazó rész-ortokomplementeres σ-hálók metszetét, azaz $\{x \in \mathcal{L} | \forall \mathcal{L}_0 \leq \mathcal{L} : (S \subseteq \mathcal{L}_0 \Rightarrow x \in \mathcal{L}_0)\}$-t.

Állítás. *Legyen* $\mathcal{L}$ *és* $\mathcal{L}'$ *két ortokomplementeres* σ*-háló,* $u, v : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ *két ortokomplementeres* σ*-háló-morfizmus. Ekkor* $\{x \in \mathcal{L} | u(x) = v(x)\} \leq \mathcal{L}$.

Definíció. Legyen $\mathcal{L}$ ortokomplementeres σ-háló, $x, y \in \mathcal{L}$. Azt mondjuk, hogy x ortogonális y-ra (jel.:$x \perp y$), ha $x \leq y^\perp$.

Állítás. *Az ortogonalitási reláció szimmetrikus, azaz* $x \perp y \iff y \perp x$.

Bizonyítás. $x \perp y \iff x \leq y^\perp \iff y \leq x^\perp \iff y \perp x$ □

Jelölés. Páronként ortogonális elemek ($\forall n \neq m : x_n \perp x_m$) legkisebb felső korlátját a következőképp jelöljük:

$$\dot{\bigvee_n} x_n$$

Jelölés. $x \leq y$ esetén bevezetjük a $y \setminus x := y \wedge x^\perp$ jelölést.

Állítás (De Morgan-azonosságok)**.** *Ortokomplementeres* σ*-hálóban* $(\bigvee_n x_n)^\perp = \bigwedge_n x_n^\perp$ *(és* $(\bigwedge_n x_n)^\perp = \bigvee_n x_n^\perp$*).*

Bizonyítás. $\forall m : x_m \leq \bigvee_n x_n$, ebből ortokomplementációval $\forall m : (\bigvee_n x_n)^\perp \leq x_m^\perp$ majd a legnagyobb felső korlát definíciója alapján $(\bigvee_n x_n)^\perp \leq \bigwedge_m x_m^\perp$ adódik. A másik irányú implikáció azért igaz, mert $x_n^\perp \geq \bigwedge_m x_m^\perp$ azaz $x_n \leq \left(\bigwedge_m x_m^\perp\right)^\perp$ alapján $\bigvee_n x_n \leq \left(\bigwedge_m x_m^\perp\right)^\perp$ Ennek ortokomplementuma viszont $(\bigvee_n x_n)^\perp \geq \bigwedge_m x_m^\perp$. □

Előfordul, hogy az eseményeket nem tudjuk, vagy nem akarjuk teljes bizonyossággal előrejelezni. Ez a helyzet például a statisztikus fizikában, és jelenlegi felfogásunk szerint a véletlen lényeges szerepet játszik a mikrovilágban. Emiatt szükség van arra, hogy a klasszikus valószínűségelmélet fogalmait kiterjesszük a most tárgyalt általánosabb hálók esetére.

A klasszikus valószínűségelméletben az események disztributív ortokomplementeres σ-hálót alkotnak a halmazelméleti tartalmazással, unióval, metszet- és komplementerképzéssel. A valószínűségi mérték ezen hálón értelmezett σ-additív függvény. A most következő definíció ezt általánosítja nem disztributív hálókra.

Definíció. Egy $p : \mathcal{L} \to [0,1]$ leképezés törvény, ha $p(1) = 1$ és $p(\dot{\bigvee}_n x_n) = \sum_n p(x_n)$.

Állítás. *Legyen $\mathcal{L}$ ortomoduláris σ-háló, $p : \mathcal{L} \to [0,1]$ törvény. Ekkor $x \leq y \Rightarrow p(x) \leq p(y)$.*

Bizonyítás. Az ortomodularitás miatt $y = x \vee (y \wedge x^\perp)$, amiből $p(y) = p(x) + p(y \wedge x^\perp)$, mivel $x \perp (y \wedge x^\perp)$. □

Látható, hogy a bizonyításban lényegesen kihasználtuk az ortomodularitást.

A klasszikus valószínűségelméletben jól ismert fogalom az elemi esemény. Most ennek hálóelméleti megfelelője és hozzá kapcsolódó fogalmak definíciója következik.

Definíció. Legyen $\mathcal{L}$ ortomoduláris σ-háló. $a \in \mathcal{L}$ atom, ha $x \leq a \Rightarrow x = a$ vagy $x = 0$.

Definíció. Legyen $\mathcal{L}$ ortomoduláris σ-háló. $\mathcal{L}$ atomos, ha $\forall x \in \mathcal{L} : \exists a \in \mathcal{L}$ atom, amire $a \leq x$. $\mathcal{L}$ teljesen atomos, ha $\forall x \in \mathcal{L} : x = \bigvee_{i \in I} a_i$, ahol $\{a_i\}_{i \in I}$ atomok valamilyen halmaza.

Az utóbbi két fogalom bevezetésére a klasszikus valószínűségelméletben nincs szükség, az általában előforduló eseményterek teljesen atomosak.

Definíció. Legyen $\mathcal{L}$ ortomoduláris σ-háló. A $p : \mathcal{L} \to [0,1]$ törvény szórásmentes, ha $p^2 = p$, azaz csak 0 vagy 1 értékeket vesz fel.

Állítás. *Legyen az $\mathcal{L}$ ortomoduláris σ-háló atomos, disztributív. Ekkor létezik olyan $p : \mathcal{L} \to [0,1]$ törvény, ami szórásmentes.*

Bizonyítás. Legyen $a \in \mathcal{L}$ tetszőleges atom. Ekkor tekinthetjük a következő törvényt, ami nyilván szórásmentes:

$$p(x) := \begin{cases} 1 & a \leq x \\ 0 & a \nleq x \end{cases}$$

□

Definíció. Legyen $\mathcal{L}$ ortomoduláris σ-háló, és $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ törvények. Legyenek továbbá $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan valós számok, hogy $\sum_n \lambda_n = 1$. Ekkor $p = \sum_n \lambda_n p_n$ a törvények σ-konvex kombinációja. p triviális σ-konvex kombináció, ha $\exists n \in \mathbb{N} : p = p_n$.

Állítás. *Törvények σ-konvex kombinációja törvény.*

Definíció. A $p : \mathcal{L} \to [0,1]$ törvény szélsőséges, ha nem áll elő törvények nemtriviális σ-konvex kombinációjaként.

Állítás. *Ha $p : \mathcal{L} \to [0,1]$ szórásmentes törvény, akkor szélsőséges.*

Bizonyítás. Ha p valamely törvények nemtriviális σ-konvex kombinációjaként áll elő, akkor felírható $p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$ alakban is, ahol $0 \neq \lambda_1 = 1 - \lambda_2 \neq 1$, és $p_1 \neq p_2$. Ha $x \in \mathcal{L}$ olyan, hogy $p(x) = 0$, akkor $0 = \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x)$, ami csak $p_1(x) = p_2(x) = 0$ esetén lehetséges. Hasonlóan ha $y \in \mathcal{L}$ olyan, hogy $p(y) = 1$, akkor $1 = \lambda_1 p_1(y) + \lambda_2 p_2(y)$ miatt $p_1(y) = p_2(y) = 1$. □

Állítás. *Ha S Hausdorff-tér, $p : B(S) \to [0,1]$ törvény, akkor a következők ekvivalensek:*

(1) p szórásmentes

(2) p szélsőséges

(3) p Dirac-mérték

Bizonyítás. A (3) $\Rightarrow$ (1) és (1) $\Rightarrow$ (2) következtetéseket láttuk, azt kell még megmutatni, hogy ha p nem Dirac-mérték, akkor nem szélsőséges. Legyen $p : B(S) \to [0,1]$ Dirac-mértéktől különböző törvény. Ekkor létezik $G \in B(S)$, amire $p(G) \notin \{0,1\}$. Egy ilyen halmazt rögzítve $p_1, p_2 : B(S) \to [0,1]$

$$p_1(H) = \frac{p(H \cap G)}{p(G)} \qquad \text{ill.} \qquad p_2(H) = \frac{p(H \cap G^{\complement})}{p(G^{\complement})}$$

két törvény, amikkel $p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$, ahol $\lambda_1 = p(G) = 1 - \lambda_2$ □

A valószínűségi mérték mellett központi fogalom a klasszikus valószínűségelméletben a valószínűségi változó. Ennek most nem a legáltalánosabb definícióját tekintjük, a továbbiakban elég lesz úgy tekinteni rájuk, mint az $(S, \mathcal{S})$ mérhető térről valamilyen $(T, \mathcal{T})$ topologikus térbe képező mérhető f függvényekre. Célszerű áttérni f-ről a teljes inverzre, ami rendelkezik az $f^{-1}(\cup_n A_n) = \cup_n f^{-1}(A_n)$ és az $f^{-1}(A^{\complement}) = f^{-1}(A)^{\complement}$ tulajdonsággal, ami azt jelenti, hogy $f^{-1} : B(T) \to \mathcal{S}$ ortokomplementeres σ-háló morfizmus T Borel-σ-algebrája és $\mathcal{S}$ közt.

Ebből kiindulva kapjuk a valószínűségi változó általánosabb fogalmát:

Definíció. Legyen $\mathcal{L}$ ortomoduláris σ-háló, T topologikus tér. Ekkor egy $u : B(T) \to \mathcal{L}$ leképzés $B(T)$-mutató, ha ortokomplementeres σ-háló-morfizmus.

Eszerint ha $u : B(T) \to \mathcal{L}$ $B(T)$-mutató, $E \in B(T)$, akkor $u(E)$ azt az eseményt jelenti, hogy a valószínűségi változó értéke E-ben van.

Definíció. Az $u : B(T) \to \mathcal{L}$ mutatónak $t \in T$ éles értéke, ha $u(\{t\}) \neq 0$. A $\sigma(u) := \{t \in T | \forall G \in \mathcal{T} : t \in G \Rightarrow u(G) \neq 0\}$ halmaz az u mutató tartója.

Állítás. *Ha $u : B(T) \to \mathcal{L}$ mutató, és $t \in T$ u éles értéke, akkor $t \in \sigma(u)$.*

Bizonyítás. Ha G tetszőleges nyílt halmaz T-ben, ami tartalmazza t-t, akkor $u(G) = u(\{t\}) + u(G \setminus \{t\}) \geq u(\{t\}) \neq 0$. □

A valószínűségi változók eloszlását általánosítja a következő definíció:

Definíció. Legyen $\mathcal{L}$ ortomoduláris σ-háló, $p : \mathcal{L} \to [0,1]$ törvény. Az $u : B(T) \to \mathcal{L}$ $B(T)$-mutató eloszlása a p törvényre $p \circ u$.

Definíció. Legyen $\mathcal{L}$ ortomoduláris σ-háló, $p : \mathcal{L} \to [0,1]$ törvény, $u : B(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}$ valós mutató. u m. momentuma a p törvényre

$$\eta_p^m(u) := \int_{\mathbb{R}} id_{\mathbb{R}}^m d(p \circ u)$$

Az u mutató várható értéke $\eta_p^1(u)$, szórása

$$\sigma_p(u) := \sqrt{\eta_p^2(u) - (\eta_p^1(u))^2}$$

Állítás. *Legyen $\mathcal{L}$ ortomoduláris σ-háló, $p : \mathcal{L} \to [0,1]$ szórásmentes törvény. Ekkor tetszőleges $u : B(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}$ valós mutató szórása* 0.

A klasszikus valószínűségelméletben megszoktuk, hogy ha tekintünk két valószínűségi változót, X-et és Y-t, akkor azokból képezhetjük az (X, Y) párt, ami szintén valószínűségi változó. Az általánosabb esetben nem ilyen egyszerű a helyzet.

Definíció. Legyen $\mathcal{L}$ ortomoduláris σ-háló. Az $u_i : B(T_i) \to \mathcal{L}$ $(i \in I)$ mutatók kompatibilisek, ha létezik olyan $\mathcal{L}_0$ disztributív rész-ortomoduláris σ-hálója $\mathcal{L}$-nek, amire $\forall i \in I : \operatorname{Ran} u_i \subseteq \mathcal{L}_0$.

Definíció. Legyen $\mathcal{L}$ ortomoduláris σ-háló, $u_1 : B(T_1) \to \mathcal{L}$, $u_2 : B(T_2) \to \mathcal{L}$ két mutató. u_1 és u_2 együttes mutatója $u : B(T_1 \times T_2) \to \mathcal{L}$, ha $u \circ pr_1^{-1} = u_1$ és $u \circ pr_2^{-1} = u_2$.

Állítás. *Ha az $u_1 : B(T_1) \to \mathcal{L}$ és $u_2 : B(T_2) \to \mathcal{L}$ mutatóknak van együttes mutatója, akkor kompatibilisek.*

Definíció. Legyenek $u_1, u_2 : B(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}$ olyan valós mutatók, amelyeknek $u : B(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathcal{L}$ együttes mutatója. Ekkor $u_1 \boxplus u_2 := u^{-1} \circ +^{-1}$ az összeg mutató, ahol $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az összeadás.

A kvantummechanikában a vizsgált rendszert egy $\mathcal{H}$ Hilbert-térrel írjuk le, ebből származtathatjuk az eseményteret. Legyen $\mathcal{L} = \mathfrak{M}(\mathcal{H})$ a Hilbert-tér zárt lineáris altereiek halmaza, $\leq$ jelentse a halmazelméleti tartalmazást, $x^{\perp}$ pedig az $x \subseteq \mathcal{H}$ zárt altér ortogonális kiegészítőjét. Ezzel egy ortomoduláris σ-hálót nyerünk, amely általában nem disztributív. Könnyen látható, hogy $x, y \in \mathcal{L}$ esetén $x \vee y = \overline{x + y}$ (zárt lineáris burok), és $x \wedge y = x \cap y$. A maximális elem $\mathcal{H}$, a minimális a csak a 0-t tartalmazó altér.

A zárt lineáris alterek és a Hilbert-tér projektorai közt meglévő bijekciót felhasználva átterhetünk a projektorokkal való leírásra is. $x \in \mathcal{H}$,$M \in \mathcal{L}$ esetén ugyanis egyértelműen létezik az $x = x_M + x_{M^{\perp}}$ felbontása x-nek M-beli és M-re ortogonális komponensekre, így tekinhetjük a $P_M : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \quad x \mapsto x_M$ leképzést, amely nyilván lineáris és $P_M = P_M^2 = P_M^*$. Visszafelé: ha a P lineáris leképzésre $P = P^2 = P^*$, akkor P ortogonálisan vetít $\operatorname{Ran} P$-re.

Ezzel a bijekcióval az alterekről a hálóstruktúrát átvihetjük a projektorokra: ha P, Q a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér két projektora, akkor $P \leq Q$ azt jelenti, hogy $\operatorname{Ran} P \subseteq \operatorname{Ran} Q$, $P \vee Q$ a $\overline{\operatorname{Ran} P + \operatorname{Ran} Q}$, $P \wedge Q$ a $\operatorname{Ran} P \cap \operatorname{Ran} Q$, $P^{\perp}$ pedig a $(\operatorname{Ran} P)^{\perp}$ altér projektora. A maximális elem $id_{\mathcal{H}}$, a minimális 0. Az így kapott hálót a továbbiakban $Pr(\mathcal{H})$ jelöli.

Most a projektorháló műveleteinek az operátorok halmazának algebrai és topologikus tulajdonságaival való kapcsolatát vizsgáljuk. Fontos tény, hogy a projektorok ezen részbenrendezése egybeesik az önadjungált operátorok szokásos részbenrendezésével:

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $P, Q \in Pr(\mathcal{H})$. Ekkor $P \leq Q$ pontosan akkor teljesül, ha $Q - P$ pozitív.*

Bizonyítás. Ha $\operatorname{Ran} P \subseteq \operatorname{Ran} Q$, akkor bármely $x \in \mathcal{H}$ vektorra $\langle x, Px \rangle = \langle x, PQx \rangle = \|PQx\|^2 \leq \|P\|^2 \|Qx\|^2 \leq \|Qx\|^2 = \langle x, Qx \rangle$. Megfordítva, ha minden $x \in \mathcal{H}$ vektorra $\langle x, Px \rangle \leq \langle x, Qx \rangle$, akkor speciálisan $x \in \operatorname{Ran} P$ esetén $\|x\|^2 \leq \|Qx\|^2 \leq \|Q\|^2 \|x\|^2$, amiből $Qx = x$ következik. □

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $P, Q \in Pr(\mathcal{H})$. Ekkor $P \leq Q \iff PQ = QP = P$*

Bizonyítás. Ha $P \leq Q$, azaz $\operatorname{Ran} P \subseteq \operatorname{Ran} Q$, akkor $\forall x \in \mathcal{H} : QPx = Px$, amiből $QP = P$, ennek az egyenlőségnek az adjungáltja pedig $PQ = P$. Ha viszont $PQ = QP = P$, akkor $\forall x \in \mathcal{H} : QPx = Px$, vagyis $Px \in \operatorname{Ran} Q$. □

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $Pr(\mathcal{H})$-beli sorozat, amire $\forall n \in \mathbb{N} : P_n \leq P_{n+1}$. Ekkor létezik $(s) \lim_n P_n$, és ez éppen $\overline{\bigcup_n \operatorname{Ran} P_n}$ projektora.*

Bizonyítás. Mivel a sorozat önadjungált elemekből áll, monoton nő, és korlátos (minden eleme kisebb $id_{\mathcal{H}}$-nál), létezik erős limesze. Ha $x \in \bigcup_n \operatorname{Ran} P_n$, akkor $\exists m \in \mathbb{N} : P_m x = x$. Egy ilyen m-et rögzítve $n \geq m$ esetén $P_n P_m = P_m$ miatt $P_n x = x$, eszerint $\lim_n (P_n x) = x$. Ha viszont $x \perp \bigcup_n \operatorname{Ran} P_n$, akkor $\forall n \in \mathbb{N} : P_n x = 0$. $(s) \lim_n P_n$ tehát $\bigcup_n \operatorname{Ran} P_n$-en identitás, ennek ortogonálisán 0, a folytonossága miatt tehát csak $\overline{\bigcup_n \operatorname{Ran} P_n}$ projektora lehet. □

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $Pr(\mathcal{H})$-beli sorozat, amire $\forall n \in \mathbb{N} : P_n \geq P_{n+1}$. Ekkor létezik $(s) \lim_n P_n$, és éppen $\bigcap_n \operatorname{Ran} P_n$ projektora.*

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $P \in Pr(\mathcal{H})$. Ekkor $P^{\perp} = id_{\mathcal{H}} - P$.*

Bizonyítás. Ha $x \in \operatorname{Ran} P$, akkor $x \perp \operatorname{Ran} P^{\perp}$, tehát $P^{\perp} x = 0$, és ekkor $(id_{\mathcal{H}} - P)x = x - x = 0$. Ha viszont $x \perp \operatorname{Ran} P$, akkor $x \in \operatorname{Ran} P^{\perp}$ és $(id_{\mathcal{H}} - P)x = x - 0 = x$. □

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $P, Q \in Pr(\mathcal{H})$ felcserélhető projektorok. Ekkor $P \wedge Q = PQ$ és $P \vee Q = P + Q - PQ$*

Bizonyítás. PQ projektor, hiszen $(PQ)^2 = PQPQ = P^2Q^2 = PQ$ és $(PQ)^* = Q^*P^* = QP = PQ$. Nyilván $\operatorname{Ran} PQ = \operatorname{Ran} QP \subseteq \operatorname{Ran} P \cap \operatorname{Ran} Q$, azaz $PQ \leq P \wedge Q$. Másrészt $(P \wedge Q)x = x \iff Px = Qx = x \Rightarrow PQx = x$.

Az állítás második felének bizonyításához a De Morgan-azonosságot használjuk fel: $P \vee Q = (P^\perp \wedge Q^\perp)^\perp = id_\mathcal{H} - ((id_\mathcal{H} - P) \wedge (id_\mathcal{H} - Q)) = id_\mathcal{H} - (id_\mathcal{H} - P - Q + PQ) = P + Q - PQ$. □

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $P, Q \in Pr(\mathcal{H})$ olyanok, hogy $P \leq Q$. Ekkor $Q \setminus P = Q - P$.*

Bizonyítás. P és Q ekkor felcserélhetők, így az előző állítások szerint $Q \wedge P^\perp = Q(id_\mathcal{H} - P) = Q - QP = Q - P$. □

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $P, Q \in Pr(\mathcal{H})$. Ekkor $P \perp Q \iff PQ = QP = 0$.*

Bizonyítás. $P \perp Q \iff P \leq Q^\perp \iff \operatorname{Ran} P \subseteq (\operatorname{Ran} Q)^\perp = \operatorname{Ker} Q \iff QP = 0 \iff PQ = 0$. □

Az utóbbi állításból speciálisan $P \dot{\vee} Q = P + Q$ adódik. A két felcserélhető projektor legnagyobb alsó, és két ortogonális projektor legkisebb felső korlátjára kapott formulák általánosíthatók megszámlálhatóan sok projektor esetére is.

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $Pr(\mathcal{H})$-ban haladó sorozat, amelynek tagjai felcserélhetők. Ekkor $\bigwedge_n P_n = (s)\prod_n P_n \equiv (s)\lim_n \prod_{k=1}^n P_k$*

Bizonyítás. $Q_n = \prod_{k=1}^n P_k$ csökkenő projektorsorozat, erős limesze $\cap_n \operatorname{Ran} P_n$ projektora. □

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $Pr(\mathcal{H})$-ban haladó sorozat, amelynek tagjai egymásra ortogonálisak. Ekkor $\dot{\bigvee}_n P_n = (s)\sum_n P_n \equiv (s)\lim_n \sum_{k=1}^n P_k$.*

Bizonyítás. $Q_n = \sum_{k=1}^n P_k$ növő projektorsorozat, erős limesze $\overline{\cup_n \operatorname{Ran} P_n}$ projektora. □

Két tetszőleges projektor esetén valamivel bonyolultabb a helyzet, ilyenkor a következő formulák mindegyike megadja a legnagyobb alsó korlátot:

$$P \wedge Q = (s)\lim_n (PQP)^n = (s)\lim_n (QPQ)^n = (s)\lim_n (PQ)^n = (s)\lim_n (QP)^n$$

Ezt nem bizonyítjuk, a továbbiakban nem lesz erre szükség.

A következőkben projektorhálókba képző mutatókkal foglalkozunk. Elsőként projektorhálók disztributív részobjektumait jellemezzük.

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $Pr(\mathcal{H})$ a projektorhálója. Ekkor $\mathcal{L} \leq Pr(\mathcal{H})$ pontosan akkor disztributív, ha elemei felcserélhetők egymással.*

Bizonyítás. Ha $\mathcal{L}$ disztributív, $P, Q \in \mathcal{L}$, akkor $P \wedge (P \wedge Q)^\perp = P \wedge (P^\perp \vee Q^\perp) = (P \wedge P^\perp) \vee (P \wedge Q^\perp) = P \wedge Q^\perp \leq Q^\perp$. $P \wedge Q \leq P$ miatt $P \wedge Q$ felcserélhető P-vel, eszerint $P \wedge (P \wedge Q)^\perp = P - P(P \wedge Q) = P - P \wedge Q$. A fenti egyenlőtlenség miatt azonban ezt bármelyik oldalról Q-val szorozva 0-t kapunk, azaz $PQ - P \wedge Q = 0 = QP - P \wedge Q$, amiből $PQ = QP$ adódik.

Ha $\mathcal{L}$ kommutatív, $P, Q, R \in \mathcal{L}$, akkor $(P \vee Q) \wedge R = (P + Q - PQ)R = PR + QR - PQR$, és ugyanezt kapjuk a disztributív tulajdonság szerint kifejtve is: $(P \wedge R) \vee (Q \wedge R) = PR + QR - PRQR = PR + QR - PQR$. □

Ha $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, T topologikus tér, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ mutató, akkor $\operatorname{Ran} P$ disztributív rész-ortomoduláris σ-háló $Pr(\mathcal{H})$-ban, tehát a fentiek szerint $E, F \in B(T)$ esetén $P(E \cap F) = P(E)P(F)$ és $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $(\forall n \in \mathbb{N} : E_n \in B(T))$ diszjunkt halmazokra $P(\dot{\bigcup}_n E_n) = (s)\sum_n P(E_n)$, valamint nyilván $P(T) = id_{\mathcal{H}}$. Az ilyen leképezéseket projektormértéknek hívjuk.

Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, T topologikus tér. A $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ leképezés projektormérték, ha

(1) $\forall E, F \in B(T) : P(E \cap F) = P(E)P(F)$

(2) $(\forall n \in \mathbb{N} : E_n \in B(T)) \Rightarrow P(\dot{\bigcup}_n E_n) = (s)\sum_n P(E_n)$

(3) $P(T) = id_{\mathcal{H}}$

teljesül.

Ha veszünk a $\mathcal{H}$ Hilbert-térben két vektort, x-t és y-t, akkor egy $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormértékhez megadhatunk egy x-től és y-tól függő komplex mértéket a $\mu_{x,y} : B(T) \to \mathbb{C} \quad E \mapsto \langle x, P(E)y \rangle$ képlettel. Azt, hogy így valóban mértékhez jutunk, a

$$\begin{aligned} \mu_{x,y}\left(\dot{\bigcup_n} E_n\right) &= \langle x, \left((s)\sum_n P(E_n)\right) y\rangle = \langle x, \sum_n (P(E_n)y)\rangle \\ &= \sum_n \langle x, P(E_n)y\rangle = \sum_n \mu_{x,y}(E_n) \end{aligned}$$

egyenlőség mutatja.

Speciálisan $x \in \mathcal{H}$ esetén $\mu_{x,x} : B(T) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ közönséges (nemnegatív) mérték.

Röviden összefoglaljuk a komplex mértékekkel kapcsolatos tudnivalókat.

Definíció. Egy $\mu : B(T) \to \mathbb{C}$ komplex mérték teljes variációja a

$$|\mu| : B(T) \to \mathbb{C} \quad E \mapsto \sup\left\{\sum_{k=1}^n |\mu(E_k)| \,\middle|\, E = \bigcup_{k=1}^n E_k, E_l \cap E_m = \emptyset \quad (l \neq m)\right\}$$

függvény.

Állítás. *Ha $\mu : B(T) \to \mathbb{C}$ komplex mérték, akkor $|\mu|$ is mérték.*

Állítás. *Ha $\mu : B(T) \to \mathbb{C}$ komplex mérték, $f : T \to \mathbb{C}$ mérhető, akkor f pontosan akkor μ-integrálható, ha $|f|$ integrálható $|\mu|$ szerint, és ekkor $|\int_T f d\mu| \leq \int_T |f| d|\mu|$*

Definíció. Legyen $\mu : B(T) \to \mathbb{C}$ komplex mérték, $f : T \to \mathbb{C}$ mérhető függvény, $E \in B(T)$. f integrálható E-n, ha létezik $\int_E f d\mu := \int_T f 1_E d\mu$.

Jelölés. Legyen $\mu : B(T) \to \mathbb{C}$ komplex mérték, $f : T \to \mathbb{C}$ μ-integrálható függvény. Ekkor az $f\mu : B(T) \to \mathbb{C}$ jelöli a $E \mapsto \int_E f d\mu$ komplex mértéket.

Állítás. *Legyen $\mu : B(T) \to \mathbb{C}$ komplex mérték, $g : T \to \mathbb{C}$ mérhető, $f : T \to \mathbb{C}$ μ-integrálható függvény. Ekkor g pontosan akkor integrálható $f\mu$ szerint, ha gf integrálható μ szerint és $\int_T g d(f\mu) = \int_T g f d\mu$.*

A fent bevezetett $\mu_{x,y}$ néhány egyszerű tulajdonsága közvetlenül adódik a projektormérték definíciójából és a fenti állításokból. Rögzítve egy $\mathcal{H}$ Hilbert-teret és egy $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormértéket tetszőleges $x, y \in \mathcal{H}$,$E, F \in B(T)$ esetén igazak a következők:

(1) $\mu_{x,y} = \mu^*_{y,x}$

(2) $|\mu_{x,y}(E)|^2 \leq |\mu_{x,x}(E)||\mu_{y,y}(E)|$

(3) $1_F \mu_{x,y} = \mu_{P(F)x,y} = \mu_{x,P(F)y} = \mu_{P(F)x,P(F)y}$

(4) $(1_F \mu_{x,y})(E) = \mu_{x,y}(E \cap F) = \langle x, P(E \cap F)y \rangle$
$= \langle x, P(E)P(F)y \rangle \langle x, P(F)P(E)y \rangle \langle x, P(E)P(F)P(E)y \rangle$

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert tér, T topologikus tér, $x, y \in \mathcal{H}$, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérék, $\mu_{x,y} : B(T) \to \mathbb{C}$ $E \mapsto \langle x, P(E)y \rangle$. Ekkor $|\mu_{x,y}|(E) \leq \sqrt{\mu_{x,x}(E)}\sqrt{\mu_{y,y}(E)}$.*

Bizonyítás. A fentiek szerint $|\mu_{x,y}|(E) \leq \sqrt{\mu_{x,x}(E)}\sqrt{\mu_{y,y}(E)}$. Eszerint

$$\sum_{k=1}^{n} |\mu_{x,y}(E_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\mu_{x,x}(E_k)}\sqrt{\mu_{y,y}(E_k)} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \mu_{x,x}(E_k)}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \mu_{y,y}(E_k)}$$

Ennek jobb oldalán a bizonyítandó egyenlőtlenség jobb oldala szerepel, $|\mu_{x,y}|(E)$ pedig a bal oldal szuprémuma. □

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert tér, T topologikus tér, $x, y \in \mathcal{H}$, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérék, $\mu_{x,y} : B(T) \to \mathbb{C}$ $E \mapsto \langle x, P(E)y \rangle$. Ekkor ha $|g|^2$ $\mu_{x,x}$-integrálható és $|f|^2$ $\mu_{y,y}$-integrálható, akkor gf $\mu_{x,y}$-integrálható, és*

$$|\int_T f g d\mu_{x,y}| \leq \int_T |fg| d|\mu_{x,y}| \leq \sqrt{\int_T |g|^2 d\mu_{x,x}}\sqrt{\int_T |f|^2 d\mu_{y,y}}$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy f, g lépcsős függvények, azaz valamely $\{E_k\}_{k=1}^n$ diszjunkt Borel-halmazokkal $|g| = \sum_{k=1}^n a_k 1_{E_k}$ és $|f| = \sum_{k=1}^n b_k 1_{E_k}$. Ekkor tehát $|gf| = \sum_{k=1}^n a_k b_k 1_{E_k}$, amiből az előző állítást felhasználva

$$\begin{aligned}\int_T |gf| d|\mu_{x,y}| &= \sum_{k=1}^n a_k b_k |\mu_{x,y}|(E_k) \\ &\leq \sum_{k=1}^n a_k b_k \sqrt{\mu_{x,x}(E_k)}\sqrt{\mu_{y,y}(E_k)} \\ &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2 \mu_{x,x}(E_k)}\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2 \mu_{y,y}(E_k)}\end{aligned}$$

Tetszőleges függvények esetét monoton növő lépcsős függvény-sorozattal vezethetjük vissza erre. □

Speciálisan legyen $g = 1$, $|f|^2$ $\mu_{y,y}$-integrálható, ekkor az állítás szerint $\forall x \in \mathcal{H} : f$ $\mu_{x,y}$-integrálható, és

$$\left|\int_T f d\mu_{x,y}\right| \leq \|x\| \sqrt{\int_T |f|^2 d\mu_{y,y}}$$

vagyis a $\mathcal{H} \ni x \mapsto \int_T f d\mu_{x,y} \in \mathbb{C}$ függvény folytonos.

Jelölés. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert tér, T topologikus tér, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérték, $\forall x, y \in \mathcal{H}$ párra $\mu_{x,y} : B(T) \to \mathbb{C}$ $E \mapsto \langle x, P(E)y\rangle$, és $f : T \to \mathbb{C}$ mérhető. Ekkor

$$D_P(f) := \{y \in \mathcal{H} | |f|^2 \ \mu_{y,y}\text{-integrálható}\}$$

azon y-ok halmaza, amelyre $|f|^2$ $\mu_{y,y}$-integrálható.

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert tér, T topologikus tér, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérék, $f : T \to \mathbb{C}$ mérhető függvény. Ekkor $D_P(f) \subseteq \mathcal{H}$ sűrű lineáris altér.*

Bizonyítás. A parallelogramma-azonosság szerint $\mu_{x+y,x+y}(E) + \mu_{x-y,x-y}(E) = 2\mu_{x,x}(E) + 2\mu_{y,y}(E)$, emiatt $0 \leq \mu_{x+y,x+y}(E) \leq 2\mu_{x,x}(E) + 2\mu_{y,y}(E)$. Tehát ha egy függvény integrálható $\mu_{x,x}$ és $\mu_{y,y}$ szerint, akkor $\mu_{x+y,x+y}$ szerint is, azaz $D_P(f)$ valóban lineáris altér.

Tekintsük a $E_n := \{t \in T | |f(t)| \leq n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ halmazsorozatot, amire nyilván $E_n \subseteq E_{n+1}$, $\cup_n E_n = T$, tehát a projektormérték tulajdonságai szerint $P(E_n) \leq P(E_{n+1})$ és $(s)\lim_n P(E_n) = id_{\mathcal{H}}$. Ha most veszünk egy tetszőleges $x \in \mathcal{H}$ elemet, akkor a $P(E_n)x$ sorozat x-hez konvergál és $D_P(f)$-ben halad, mert $\mu_{P(E_n)x,P(E_n)x} = 1_{E_n}\mu_{x,x}$, $\mu_{x,x}$ véges mérték, f pedig korlátos E_n-n, tehát f $1_{E_n}\mu_{x,x}$-integrálható. □

Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert tér, T topologikus tér, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérék, $f : T \to \mathbb{C}$ mérhető függvény. Ekkor a

$$\mathcal{H} \times D_P(f) \to \mathbb{C} \quad (x, y) \mapsto \int_T f d\mu_{x,y}$$

leképezés rögzített y mellett x-ben folytonos, konjugált lineáris, tehát Riesz tétele szerint minden $y \in D_P(f)$-hez létezik egyértelmű $\hat{P}(f)y \in \mathcal{H}$ elem, amire

$$\int_T f d\mu_{x,y} = \langle x, \hat{P}(f)y \rangle$$

Az $y \mapsto \hat{P}(f)y$ leképezés lineáris, az így értelmezett $\hat{P}(f) : D_P(f) \to \mathcal{H}$ lineáris operátor az f függvény P projektormérték szerinti integrálja.

Idézzük fel, mit jelent egy sűrű altéren értelmezett nem korlátos operátor adjungáltja.

Definíció. Legyn $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ sűrűn értelmezett lineáris operátor. A^* az A operátor adjungáltja, ha $\mathrm{Dom}\, A^* = \{x \in \mathcal{H} | y \mapsto \langle x, Ay \rangle \text{ folytonos}\}$ és $x \in \mathrm{Dom}\, A^*$ esetén $\mathcal{H} \ni y \mapsto \langle A^*x, y \rangle$ a $\mathrm{Dom}\, A \ni y \mapsto \langle x, Ay \rangle$ egyértelmű kiterjesztése $\mathcal{H}$-ra.

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $A, B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ két sűrű altéren értelmezett lineáris operátor, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ekkor*

(1) $(A + B)^* \supset A^* + B^*$

(2) $(AB)^* \supset B^*A^*$

(3) $(A^*)^* \supset A$

(4) $(\alpha A)^* = \alpha^* A^*$

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, T topologikus tér, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérték, $f : T \to \mathbb{C}$ mérhető függvény. Ekkor ha $y \in D_P(f)$, akkor $f\mu_{x,y} = \mu_{x,\hat{P}(f)y}$.*

Bizonyítás. $(f\mu_{x,y})(E) = \int_T 1_E d(f\mu_{x,y}) = \int_T f d(1_E \mu_{x,y}) = \langle P(E)x, \hat{P}(E)y \rangle = \mu_{x,\hat{P}(f)y}(E)$ ☐

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, T topologikus tér, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérték, $f, g : T \to \mathbb{C}$ mérhető függvények, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ekkor*

(1) $\hat{P}(\alpha f) = \alpha \hat{P}(f)$

(2) $\hat{P}(f + g) \supset \hat{P}(f) + \hat{P}(g)$

(3) $\hat{P}(fg) \supset \hat{P}(f)\hat{P}(g)$ *és* $\mathrm{Dom}\, \hat{P}(fg) \cap \mathrm{Dom}\, \hat{P}(g) = \mathrm{Dom}\, \hat{P}(f)\hat{P}(g)$

(4) $\hat{P}(f^*) = \hat{P}(f)^*$

Bizonyítás. (1) $|f|^2$ pontosan akkor $\mu_{y,y}$-integrálható, ha $\alpha|f|^2$ $\mu_{y,y}$-integrálható, és $\int_T \alpha f d\mu_{x,y} = \alpha \int_T f d\mu_{x,y}$.

(2) Ha $|f|^2$ $\mu_{y,y}$-integrálható, és $|g|^2$ $\mu_{y,y}$-integrálható, akkor $|f+g|^2$ $\mu_{y,y}$-integrálható, és $\int_T (f+g) d\mu_{x,y} = \int_T f d\mu_{x,y} + \int_T g d\mu_{x,y}$.

(3) Ha $|g|^2$ $\mu_{y,y}$-integrálható, és $|f|^2$ $\mu_{\hat{P}(g)y,\hat{P}(g)y}$-integrálható, akkor $|fg|^2$ $\mu_{y,y}$-integrálható, mivel az előző állítás szerint $\mu_{\hat{P}(g)y,\hat{P}(g)y} = |g|^2\mu_{y,y}$. Ha viszont y benne van $Dom\hat{P}(f)\hat{P}(g)$-ben, akkor $\int_T (fg) d\mu_{x,y} = \int_T f d(g\mu_{x,y}) = \langle x, \hat{P}(f)\hat{P}(g)y\rangle$.

(4) $x \in D_P(f^*) = D_P(f)$ esetén a $\langle x, \cdot\rangle \circ \hat{P}(f)$ leképzés folytonos, $\langle x, \hat{P}(f)y\rangle = \int_T f d\mu_{x,y} = \int_T d\mu_{\hat{P}(f^*)x,y} = \langle \hat{P}(f^*)x, y\rangle$, tehát $\hat{P}(f^*) \subset \hat{P}(f)^*$. Speciálisan ha f korlátos, akkor $\hat{P}(f^*) = \hat{P}(f)^*$, mert $\operatorname{Dom}\hat{P}(f^*) = \mathcal{H}$. Legyen $E_n := \{t \in T | |f(t)| \leq n\}$. Minden $n \in \mathbb{N}$-re $f1_{E_n}$ korlátos, és

$$P(E_n)\hat{P}(f^*) \subset \hat{P}(f^* 1_{E_n}) = \hat{P}(f 1_{E_n})^* = (\hat{P}(f)P(E_n))^* \supset P(E_n)\hat{P(f)}^*$$

$y \in \operatorname{Dom}\hat{P}(f^*)$ esetén pedig $P(E_n)\hat{P}(f^*)y = P(E_n)\hat{P}(f)^*y$.

□

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, T topologikus tér, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérték, $f : T \to \mathbb{C}$ mérhető függvény. Ekkor $x \in D_P(f)$ esetén $\|\hat{P}(f)x\|^2 = \int_T |f|^2 d\mu_{x,x}$.*

Bizonyítás. $\int_T |f|^2 d\mu_{x,x} = \int_T d(ff^*\mu_{x,x}) = \int_T d\mu_{\hat{P}(f)x,\hat{P}(f)x} = \mu_{\hat{P}(f)x,\hat{P}(f)x}(T)$ □

Speciálisan ha f korlátos, akkor $\hat{P}(f)$ mindenhol értelmezett, korlátos lineáris operátor.

Az eddigiekből azt láthatjuk, hogy a $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérték szerinti integrálás *-algebra-morfizmus a $T \to \mathbb{C}$ korlátos, mérhető függvények *-algebrájából $\mathcal{L}(\mathcal{H})$-ba.

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, T topologikus tér, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérték, $f : T \to \mathbb{C}$ mérhető függvény. Ekkor $\hat{P}(f)\hat{P}(f^*) = \hat{P}(f^*)\hat{P}(f) = \hat{P}(|f|^2)$.*

Bizonyítás. Láttuk, hogy $\hat{P}(|f|^2) \supset \hat{P}(f^*)\hat{P}(f)$, azt kell még belátni, hogy $\operatorname{Dom}\hat{P}(|f|^2) \cap \operatorname{Dom}\hat{P}(f) = \operatorname{Dom}\hat{P}(|f|^2)$. Ez viszont következik abból, hogy $\mu_{x,x}$ véges mérték, így $\{x | |f|^4\ \mu_{x,x}\text{-integrálható}\} \subset \{x | |f|^2\ \mu_{x,x}\text{-integrálható}\}$ □

Definíció. Az $N : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ lineáris operátor normális, ha

(1) sűrű altéren értelmezett

(2) zárt

(3) $\operatorname{Dom} N^* = \operatorname{Dom} N$

(4) $NN^* = N^*N$

Állítás. *Ha az $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ lineáris operátor a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér sűrű alterén értelmezett, akkor A^* zárt.*

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathcal{H}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\operatorname{Dom} A^*$-ban haladó sorozat, amelynek határértéke $\lim_n x_n = x$, és $z := \lim_n Ax_n$. Ekkor $\forall y \in \operatorname{Dom} A : \langle y, A^*x\rangle = \langle Ay, x_n\rangle$. A bal oldal határértéke $\langle y, z\rangle$ a jobb oldalé $\langle Ay, x\rangle$, tehát az adjungált definíciója alapján $x \in \operatorname{Dom} A^*$ és $A^*x = z$. □

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, T topologikus tér, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérték. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(1) $P(E) = 0$

(2) $\forall x, y \in \mathcal{H} : \mu_{x,y}(E) = 0$

(3) $\forall x \in \mathcal{H} : \mu_{x,x}(E) = 0$

(4) $\forall x, y \in \mathcal{H} : |\mu_{x,y}|(E) = 0$

Bizonyítás. Az (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) következtetések a definíciók alkalmazásával közvetlenül adódnak, (4) $\Rightarrow$ (1) belátásához azt kell meggondolni, hogy $\forall x, y \in \mathcal{H}$:

$$0 = |\mu_{x,y}|(E) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |\mu_{x,y}(E_k)| \middle| E = \dot{\bigcup_k} E_k\right\}$$

miatt $|\mu_{x,y}(E)| = 0$, azaz $0 = \mu_{x,y}(E) = \langle x, P(E)y\rangle$, tehát $P(E) = 0$. □

Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, T topologikus tér, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérték. $E \in B(T)$ P-nullhalmaz, ha $P(E) = 0$.

Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, T topologikus tér, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérték. A $f : T \to \mathbb{C}$ mérhető függvény $P-$lényeges szuprémuma $\|f|_P := \inf\{\alpha | P\{|f| > \alpha\} = 0\}$.

A következő állítás bizonyításához felhasználjuk a zárt gráf-tételt, amelyet emlékeztetőül ki is mondunk:

Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ sűrű altéren értelmezett lineáris operátor. Ekkor a következő állítások közül bármely kettő teljesülése maga után vonja a harmadikat:*

(1) $\operatorname{Dom} A$ *zárt*

(2) A zárt

(3) A folytonos

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, T topologikus tér, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérték, $f : T \to \mathbb{C}$ mérhető függvény. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(1) $\hat{P}(f)$ *korlátos*

(2) $\operatorname{Dom}\hat{P}(f) = \mathcal{H}$

(3) f *P-majdnem mindenütt korlátos.*

Bizonyítás. Láttuk az előzőkeben, hogy $\hat{P}(f)$ zárt, innen (1) $\iff$ (2) a zárt gráf-tételből adódik.

Ha f P-majdnem mindenütt korlátos, akkor $\|\hat{P}(f)x\| = \int_T |f|^2 \mu_{x,x}$ minden $x \in \mathcal{H}$-ra értelmes és legfeljebb $\|f|_p^2\|x\|$.

Ha viszont $\hat{P}(f)$ korlátos, akkor tekintsük minden $\varepsilon > 0$ számhoz az $E_\varepsilon := \{t||f(t)| \geq \|\hat{P}(f)\| + \varepsilon\}$ Borel-halmazt. Erre

$$\begin{aligned}(\|\hat{P}(f)\| + \varepsilon)^2 \mu_{x,x}(E_\varepsilon) &\leq \int_T |f 1_{E_\varepsilon}|^2 d\mu_{x,x} \\ &= \|\hat{P}(f 1_{E_\varepsilon})x\|^2 \\ &= \|\hat{P}(f)P(E_\varepsilon)x\|^2 \\ &\leq \|\hat{P}(f)\|^2 \mu_{x,x}(E_\varepsilon)\end{aligned}$$

miatt $\mu_{x,x}(E_\varepsilon) = 0$ igaz minden $x \in \mathcal{H}$ vektorra, tehát f P-majdnem mindenütt korlátos. □

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, T topologikus tér, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérték, $f : T \to \mathbb{C}$ mérhető függvény. Ekkor* $\operatorname{Ker}\hat{P}(f) = P(f^{-1}(\{0\}))\mathcal{H}$

Bizonyítás. A $0 = \hat{P}(f 1_{f^{-1}\{0\}}) = \hat{P}(f)P(f^{-1}\{0\}) \supset P(f^{-1}\{0\})\hat{P}(f)$ tartalmazás miatt $\operatorname{Ker}\hat{P}(f) \supset P(f^{-1}\{0\})$.

Ha viszont $x \in \operatorname{Ker}\hat{P}(f)$, akkor $0 = \|\hat{P}(f)x\|^2 = \int_T |f|^2 d\mu_{x,x}$, amiből $f = 0$ $\mu_{x,x}$-majdnem mindenütt, azaz $\mu_{x,x}((f^{-1}\{0\})^{\complement}) = 0$. Eszerint $\|x - P(f^{-1}\{0\})x\| = 0$, tehát $x \in \operatorname{Ran} P(f^{-1}\{0\})$ □

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, T topologikus tér, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérték, $f : T \to \mathbb{C}$ mérhető függvény. $\hat{P}(f)$ pontosan akkor injektív, ha $P(f^{-1}\{0\}) = 0$, és ekkor $\hat{P}(f)^{-1} = \hat{P}(\frac{1_0}{f})$ ahol*

$$\frac{1_0}{f}(t) = \begin{cases} \frac{1}{f(t)} & f(t) \neq 0 \\ 0 & f(t) = 0 \end{cases}$$

Következmény. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, T topologikus tér, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérték, $f : T \to \mathbb{C}$ olyan mérhető függvény, hogy $\hat{P}(f)$ injektív. Ekkor $\hat{P}(f)$ inverze pontosan akkor folytonos, ha $\frac{1_0}{f}$ P-majdnem mindenütt korlátos.

Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ lineáris operátor. $\lambda \in \mathbb{C}$ az A sajátértéke, ha $\exists x \in \operatorname{Dom} A \setminus \{0\} : Ax = \lambda x$. A sajátértékeinek halmaza $\operatorname{Eig}(A)$.

Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ lineáris operátor. A spektruma a $\mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C}|(A - \lambda id_{\mathcal{H}})$ injektív, $\operatorname{Ran}(A - \lambda id_{\mathcal{H}})$ sűrű, $(A - \lambda id_{\mathcal{H}})^{-1}$ folytonos$\}$ halmaz, amelyet $\operatorname{Sp}(A)$-val jelölünk.

Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, T topologikus tér, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérték. $t \in T$ **éles értéke** P-nek, ha $\{t\} \in B(T)$ és $P(\{t\}) \neq 0$. P éles értékeinek halmazát $\mathrm{Sharp}(P)$ jelöli. $\mathrm{supp}(P) := \{t | \forall G \in \mathcal{T} : (t \in G \Rightarrow P(G) \neq 0)$ **P tartója**.

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, T topologikus tér, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérték, $f : T \to \mathbb{C}$ mérhető függvény. Ekkor* $\mathrm{Eig}\,\hat{P}(f) = \mathrm{Sharp}(P \circ f^{-1})$ *és* $\mathrm{Sp}\,\hat{P}(f) = \mathrm{supp}(P \circ f^{-1})$.

Bizonyítás. Mivel $\hat{P}(f) - \lambda id_{\mathcal{H}} = \hat{P}(f - \lambda)$, ezért $\mathrm{Ker}\,\hat{P}(f - \lambda) = \mathrm{Ran}\,P((f - \lambda)^{-1}\{0\}) = \mathrm{Ran}\,P(f^{-1}\{\lambda\}) = \mathrm{Ran}((P \circ f^{-1})\{\lambda\})$.

$\mathrm{Sp}(\hat{P}(f))^{\complement} = \{\lambda | (\hat{P}(f) - \lambda id_{\mathcal{H}})$ bijektív, inverze folytonos$\}$. □

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, T topologikus tér, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérték, $f, g : T \to \mathbb{C}$ mérhető függvények. Ekkor $\hat{P}(f) = \hat{P}(f) \iff f = g$ P-majdnem mindenütt.*

Bizonyítás. A vissza irány nyilvánvaló, az oda irány pedig azért igaz, mert tetszőleges $\mathrm{Dom}\,\hat{P}(f)$-beli x vektorra $(\hat{P}(f) - \hat{P}(g))x = 0$, amiből $\hat{P}(f) - \hat{P}(g) \subseteq \hat{P}f - g$ miatt $\hat{P}^{f-g} = 0$, így $\int_T |f - g|^2 d\mu_{x,x} = 0$, azaz $f = g$ $\mu_{x,x}$-majdnem mindenütt. □

Következmény. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, T topologikus tér, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérték, $f : T \to \mathbb{C}$ mérhető függvény. Ekkor

(1) $\hat{P}(f)$ önadjungált $\iff$ $f = f^*$ P-majdnem mindenütt.

(2) $\hat{P}(f)$ unitér $\iff$ $f^* = f^{-1}$ P-majdnem mindenütt. (vagyis $|f| = 1$ P-majdnem mindenütt)

(3) $\hat{P}(f)$ projektor $\iff$ $f = f^* = f^2$ P-majdnem mindenütt. (vagyis $\exists E \in B(T) : f = 1_E$ P-majdnem mindenütt)

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, T megszámlálható bázisú topologikus tér, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérték, $f : T \to \mathbb{C}$ folytonos komplex értékű függvény. Ekkor* $\mathrm{Sp}\,\hat{P}(f) = \overline{f[\mathrm{supp}\,P]}$.

Ha $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérték, $\Phi : T \to S$ mérhető, akkor nyilván $P \circ \Phi^{-1} : B(S) \to Pr(\mathcal{H})$ is projektormérték. A két projektormérték szerinti integrál kapcsolatáról szól a következő állítás:

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, T, S topologikus terek, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérték, $\Phi : T \to S$ és $g : S \to \mathbb{C}$ mérhető függvények. Ekkor* $\hat{P}(g \circ \Phi) = (\widehat{P \circ \Phi^{-1}})(g)$.

Bizonyítás. A két oldal értelmezési tartománya $\{x | |g|^2\ \mu_{x,x}^{P \circ \Phi^{-1}}$-integrálható$\}$ és $\{x | |g \circ \Phi|^2\ \mu_{x,x}^{P}$-integrálható$\}$, ezek

$$\int_S |g|^2 d(\mu_{x,x}^P \circ \Phi^{-1}) = \int_T \underbrace{|g|^2 \circ \Phi}_{|g \circ \Phi|^2} d\mu_{x,x}^P$$

miatt megegyeznek, ami azért igaz, mert ha $F \in B(S)$, akkor $\mu_{x,x}^{P\circ\Phi^{-1}}(F) = \|P(\Phi^{-1}(F))x\|^2 = (\mu_{x,x}^P \circ \Phi^{-1})(F)$.

$$\langle x, \widehat{P\circ\Phi^{-1}}(g)y\rangle = \int_S g \; \underbrace{d\mu_{x,y}^{P\circ\Phi^{-1}}}_{d(\mu_{x,y}^P\circ\Phi^{-1})}$$

□

Következmény. Ha $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, T topologikus tér, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérték, $f : T \to \mathbb{C}$ mérhető függvény, akkor $\hat{P}(f) = (\widehat{P\circ f^{-1}})(id_{\mathbb{C}})$, azaz minden projektormérték szerinti integrálként előálló operátor előlállítható az identitás integráljaként is egy alkalmas projektormérték szerint.

Most a projektorhálók közti homomorfizmusokat vizsgáljuk. Belátható, hogy ha $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek, és létezik $Pr(\mathcal{H}) \to Pr(\mathcal{K})$ injektív homomorfizmus, akkor $\dim\mathcal{H} | \dim\mathcal{K}$. Speciálisan izomorfizmus létezése esetén a két dimenzió megegyezik.

Ha a $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek közt adott egy $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ unitér ($\langle Ux, Uy\rangle_{\mathcal{K}} = \langle x, y\rangle_{\mathcal{H}}$) vagy antiunitér ($\langle Ux, Uy\rangle_{\mathcal{K}} = \langle y, x\rangle_{\mathcal{H}}$) lineáris leképzés, akkor az izomorfizmust generál az altérhálók közt: $\mathfrak{M}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{M}(\mathcal{K}); M \mapsto U[M]$, hiszen metszet- és ortogonalitástartó. Ezzel kaptunk a projektorhálók közt is egy izomorfizmust a $Pr(\mathcal{H}) \to Pr(\mathcal{K}); P \mapsto UPU^{-1}$ hozzárendeléssel. $|\alpha| = 1$ esetén αU is unitér, és ugyanazt a háló-izomorfizmust generálja. A következő tétel szerint lényegében minden izomorfizmus így áll elő:

Tétel (Wigner)**.** *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér,* $\dim\mathcal{H} \neq 2$. *Ekkor minden $Pr(\mathcal{H}) \to Pr(\mathcal{H})$ izomorfizmus $P \mapsto UPU^{-1}$ alakú, ahol U unitér vagy antiunitér.*

Két dimenzióban például a kövekező módon kaphatunk nem ilyen alakú izomorfizmust: válasszunk ki két ortogonális 1 rangú projektort, a leképzés hagyja helyben a tőlük különböző elemeket, ezt a kettőt pedig cserélje meg. Könnyű meggondolni, hogy így izomorfizmushoz jutunk, és nem áll elő a fenti alakban (sőt, tetszőleges lineáris operátort megengedve sem).

A következő állítás arról szól, hogy az izomorfizmusok során hogyan transzformálódik a projektormérték szerinti integrál.

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-tér, $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ unitér vagy antiunitér, T topologikus tér, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérték, $f : T \to \mathbb{C}$ mérhető függvény. Ekkor*

$$\widehat{UPU^{-1}}(f) = \begin{cases} U\hat{P}(f)U^{-1} & \text{ha } U \text{ unitér} \\ U\hat{P}(f^*)U^{-1} & \text{ha } U \text{ antiunitér} \end{cases}$$

Bizonyítás. Ha U unitér, $E \in B(T)$, akkor $\mu_{x,y}^{UPU^{-1}}(E) = \langle x, UP(E)U^{-1}y\rangle = \langle P(E)U^{-1}x, U^{-1}y\rangle = \mu_{U^{-1}x,U-1y}^P(E)$, a két oldal értelmezési tartománya pedig $\{x | |f|^2\ \mu_{x,x}^{UPU^{-1}}\text{-integrálható}\}$ és $\{x | |f|^2\ \mu_{U^{-1}x,U^{-1}x}^P\text{-integrálható}\}$.

Ha pedig U antiunitér, $E \in B(T)$, akkor $\mu_{x,y}^{UPU^{-1}}(E) = \langle x, UP(E)U^{-1}y\rangle = \langle P(E)U^{-1}y, U^{-1}x\rangle = \mu_{U^{-1}y,U-1x}^P(E)$, a megfelelő értelmezési tartományok pedig $\{x | |f|^2\ \mu_{x,x}^{UPU^{-1}}\text{-integrálható}\}$ és $\{x | |f^*|^2\ \mu_{U^{-1}x,U^{-1}x}^P\text{-integrálható}\}$. □

Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ Hilber-tér, $B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ korlátos, $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tetszőleges lineáris operátor. A és B **felcserélhető**, ha $AB \supset BA$.

Legyen továbbá T topologikus tér, $P, Q : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérték. P és B **felcserélhető**, ha B felcserélhető P értékkészletének minden elemével. P és Q **felcserélhető** projektormértékek, ha P értékkészletének minden eleme felcserélhető Q értékkészletének minden elemével.

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, T topologikus tér, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérték, $B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ korlátos lineáris operátor. Ekkor P pontosan akkor cserélhető fel B-vel, ha $\forall x, y \in \mathcal{H} : \mu_{x,By} = \mu_{B^*x,y}$.*

Bizonyítás. Ha P felcserélhető B-vel, akkor tetszőleges $E \in B(T)$-re $\mu_{x,By}(E) = \langle x, P(E)By\rangle = \langle B^*x, P(E)y\rangle = \mu_{B^*x,y}(E)$. Megfordítva, ha $\forall x, y \in \mathcal{H} : \mu_{x,By} = \mu_{B^*x,y}$, akkor viszont $\langle x, P(E)By\rangle = \mu_{x,By}(E) = \mu_{B^*x,y}(E) = \langle B^*x, P(E)y\rangle = \langle x, BP(E)y\rangle$, tehát $P(E)B = BP(E)$. $\square$

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, T topologikus tér, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérték, $B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ korlátos lineáris operátor. Ekkor B pontosan akkor cserélhető fel P-vel, ha bármely $f : B(T) \to \mathbb{C}$ mérhető függvényre B felcserélhető $\hat{P}(f)$-fel.*

Bizonyítás. Ha B felcserélhető P-vel és $x \in \operatorname{Dom} \hat{P}(f)$, akkor $|f|^2$ $\mu_{x,x}$-integrálható, ekkor viszont $\mu_{Bx,Bx} \leq \|B\|^2 \mu_{x,x}$ miatt $|f|^2$ $\mu_{Bx,Bx}$-integrálható, azaz $Bx \in \operatorname{Dom} \hat{P}(f)$. Ilyen x-ekre és bármely $y \in \mathcal{H}$-ra $\langle y, \hat{P}(f)Bx\rangle = \int f d\mu_{y,Bx} = \langle B^*y, \hat{P}(f)x\rangle = \langle y, B\hat{P}(f)x\rangle$.

Ha viszont B bármely $f : B(T) \to \mathbb{C}$ mérhető függvényre felcserélhető $\hat{P}(f)$-fel, speciálisan $E \in B(T)$ esetén $P(E) = \hat{P}(1_E)$-vel is. $\square$

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $P, Q : B(\mathbb{C}) \to Pr(\mathcal{H})$ kompakt tartójú projektormértékek, a tartójuk uniója σ. Ha $\hat{P}(id_{\mathbb{C}}) = \hat{Q}(id_{\mathbb{C}})$, akkor $P = Q$.*

Bizonyítás. $\hat{P}(1) = \hat{Q} = id_{\mathcal{H}}$, $\hat{P}(id^*_{\mathbb{C}}) = \hat{P}(id_{\mathbb{C}})^* = \hat{Q}(id_{\mathbb{C}})^* = \hat{Q}(id^*_{\mathbb{C}})$ folytonosak, emiatt $\hat{P}$ és $\hat{Q}$ egyenlők az $\{1, id_{\mathbb{C}}, id^*_{\mathbb{C}}\}$ által generált *-algebrán, ami sűrű $C(\sigma)$-ban. Ennek a sűrű halmaznak a p elemeire $\hat{P}(p) = \hat{Q}(p)$ miatt tetszőleges $x, y \in \mathcal{H}$ esetén $\int_T p d\mu^P_{x,y} = \int_T p d\mu^Q_{x,y}$, amiből Riesz tétele szerint $\mu^P_{x,y} = \mu^Q_{x,y}$ következik, azaz $P = Q$. $\square$

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $P : B(\mathbb{C}) \to Pr(\mathcal{H})$ kompakt tartójú projektormérték, $B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ korlátos lineáris operátor. Ekkor B pontosan akkor cserélhető fel P-vel, ha felcserélhető $\hat{P}(id_{\mathbb{C}})$-vel és $\hat{P}(id^*_{\mathbb{C}})$-gal.*

Megjegyzés. Az előző állítások a kompaktsági feltétel nélkül is érvényben maradnak.

Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $x \in \mathcal{H}$, T topologikus tér, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérték. Ekkor a $\{P(E)x | E \in B(T)\}$ halmaz által generált zárt lineáris alteret az x által P-vl generált **ciklikus altérnek** nevezzük, jele $\mathcal{H}(x)$. P **ciklikus**, ha $\exists x \in \mathcal{H} : \{P(E)x | E \in B(T)\}^\perp = 0$. Ekkor x **ciklikus vektor**.

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, T topologikus tér, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérték. Ekkor $\mathcal{H}$ felbontható P szerinti ciklikus alterek direkt összegére.*

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $x \in \mathcal{H}$, T topologikus tér, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérték. Ekkor az $L^2(T, \mu_{x,x}) \to \mathcal{H}(x); f \mapsto \hat{P}(f)x$ leképezés unitér.*

Bizonyítás. $(f+g) \mapsto \hat{P}(f+g)x = \hat{P}(f)x + \hat{P}(g)x$ és $(\alpha f) \mapsto \hat{P}(\alpha f)x = \alpha\hat{P}(f)x$ miatt a leképezés lineáris, $\|f\|^2 = \int_T |f|^2 d\mu_{x,x} = \|\hat{P}(f)x\|^2$ miatt izometria, és $1_E \mapsto P(E)x$ miatt az értékkészletében van sűrű altér, tehát szürjektív is. $\square$

Következmény. Ha $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $x \in \mathcal{H}$, T topologikus tér, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérték, akkor létezik $U : \mathcal{H}(x) \to L^2(T, \mu_{x,x})$ unitér leképezés.

Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, T topologikus tér, $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ projektormérték, és $\mathcal{H} = \bigoplus_n \mathcal{H}(x_n) \simeq \bigoplus_n L^2(T, \mu_{x_n,x_n})$ a Hilbert-tér ciklikus alterek direkt összegeként való előállítása. Ekkor tehát $\mathcal{H}$ elemei olyan függvényekből álló $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok, amelyek normanégyzeteinek összege konvergens, tehát amelyekre $\|(\varphi_1, \varphi_2, \dots)\|^2 = \|\varphi_1\|^2_{\mu_{x_1,x_1}} + \|\varphi_2\|^2_{\mu_{x_2,x_2}} + \ldots < \infty$. Legyen $A_n = \operatorname{supp} \mu_{x_n,x_n}$ $(n \in \mathbb{N})$, és jelölje B_k T azon elemeinek halmazát, amelyek pontosan k db tartóban vannak benne $(k = 1, 2, \dots, \infty)$.

Legyen $\mu := \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}\mu_{x_n,x_n}$ és $\mu_{x_n,x_n} = \varrho_n \cdot \mu$. Legyen továbbá $\psi_1 : B_1 \to \mathbb{C}; \psi_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{\varrho_n}\varphi_n|_{B_1}$,

$$\psi_2 : B_2 \to \mathbb{C}^2; \psi_2 = \sum_{n<m\in\mathbb{N}} \begin{bmatrix} \sqrt{\varrho_n}\varphi_n|_{B_2} \\ \sqrt{\varrho_m}\varphi_m|_{B_2} \end{bmatrix}$$

és hasonlóan $n \in \{1, \dots, \infty\}$-re. Ezzel megadtunk egy $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} L^2(\mu_{x_n,x_n}) \to \bigoplus_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}} L^2(\mu, \mathbb{C}^n)$ leképzést $(\varphi_1, \dots) \mapsto (\psi_1, \dots, \psi_\infty)$ módon.

A projektormérték pontosan akkor ciklikus, ha az A_i-k diszjunktak, és ekkor $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}} L^2(\mu, \mathbb{C}^n) = L^2(\mu, \mathbb{C})$. Legyen $f : T \to \mathbb{C}$ mérhető függvény, $\mathcal{K}$ Hilbert-tér, μ pedig σ-véges mérték. Ekkor bevezethetjük az M_f szorzásoperátort a következő módon: $\operatorname{Dom}(M_f) := \{\varphi \in L^2(\mu, \mathcal{K}) | f\varphi \in L^2(\mu, \mathcal{K})\}$ $M_f\varphi := f\varphi$. Ezzel definiáljuk a $K : B(T) \to Pr(L^2(\mu, \mathcal{K}))$ $K(E) := M_{1_E}$ projektormértéket.

Állítás. *Az így definiált K pontosan akkor ciklikus, ha* $\dim \mathcal{K} = 1$.

Állítás. *Ha $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ ciklikus projektormérték, $x \in \mathcal{H}$ ciklikus vektor, $U : \mathcal{H}(x) \to L^2(\mu_{x,x})$ a fenti unitér leképzés, akkor $UP(E)U^{-1} = M_{1_E}$ P-t a karakterisztikus projektormértékbe viszi.*

Bizonyítás. Legyen $f \in L^2(\mu_{x,x})$. Ekkor $UP(E)U^{-1}f = U\hat{P}(1_E f)x = 1_E f$ $\square$

Állítás. *Legyen $P : B(T) \to Pr(\mathcal{H})$ ciklikus projektormérték, $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ korlátos lineáris operátor. Ekkor A és P pontosan akkor felcserélhető, ha $\exists f :$ $A = \hat{P}(f)$.*

Bizonyítás. Ha A felcserélhető P-vel, akkor $\mathcal{H} = \mathcal{H}(x)$ alapján $\exists f : Ax = \hat{P}(f)x$. $E \in B(T)$-re $AP(E)x = P(E)Ax = P(E)\hat{P}(f)x = \hat{P}(f)P(E)x$, és $\{P(E)x | E \in B(T)\}$ generálja $\mathcal{H}$ egy sűrű alterét. $\square$

Tétel. *Ha $N : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ normális operátor, akkor létezik egyértelműen egy $P : B(\mathbb{C}) \to \mathrm{Pr}(\mathcal{H})$ projektormérték, amelyre $N = \hat{P}(id_{\mathbb{C}})$*

Speciálisan ha $N = (s)\sum_n \lambda_n P_n$, ahol a P_n-ek ortogonális projektorok, akkor $P(E) := (s)\sum_{n,\lambda_n \in E} P_n$.

Állítás. *Ha a $P_1 : B(T_1) \to \mathrm{Pr}(\mathcal{H})$ és $P_2 : B(T_2) \to \mathrm{Pr}(\mathcal{H})$ projektormértékek felcserélhetők, akkor $P : B(T_1 \times T_2) \to \mathrm{Pr}(\mathcal{H})$ $E_1 \times E_2 \mapsto P_1(E_1)P_2(E_2)$ projektormérték.*

Állítás. *Legyen $\mathcal{H} = L^2(\mu, \mathcal{K})$, $f : T \to \mathbb{C}$ mérhető függvény, $M_f : L^2(\mu, \mathcal{K}) \to L^2(\mu, \mathcal{K})$ $\varphi \mapsto f\varphi$. Vezessük be a $K : B(T) \to \mathrm{Pr}(\mathcal{H})$ projektormértéket, és a $\mu^{\mathcal{K}}_{\varphi,\psi}(E) := \langle \varphi, K(E)\psi\rangle = \int_T \langle \varphi, 1_E \psi\rangle d\mu = \int_T 1_E d(\langle \varphi, \psi\rangle_{\mathcal{K}})$ mértékeket. Ekkor $\hat{K}(f) = M_f$.*

Bizonyítás. $\mathrm{Dom}\,\hat{K}(f) = \{\varphi \in \mathcal{H} | \int f^2 d\mu^{\mathcal{K}}_{\varphi,\varphi} < \infty\}$, ami $d\mu^{\mathcal{K}}_{\varphi,\varphi} = \|\varphi\|^2 d\mu$ miatt megegyezik a jobb oldal értelmezési tartományával, és ott $\langle \varphi, K(f)\psi\rangle = \int f d\mu^{\mathcal{K}}_{\varphi,\psi} = \int f\langle \varphi, \psi\rangle_{\mathcal{K}} d\mu = \int \langle \varphi, f\psi\rangle_{\mathcal{K}} d\mu$. □

Ha H önadjungált operátor, akkor a $[-\tau, \tau] \ni t \mapsto U_t := e^{itH}$ leképzés (lokális) homomorfizmus, azaz $U_{t+s} = U_t U_s$, a kép unitér csoport. Ennek megfordításáról szól Stone tétele:

Tétel. *Ha a $[-\tau, \tau]t \mapsto U_t$ unitér értékű leképzés (s)-folytonos és $s, t, s+t \in [-\tau, \tau]$ esetén $U_{t+s} = U_t U_s$, akkor létezik pontosan egy H önadjungált operátor, amire $U_t = e^{itH}$ $(t \in [-\tau, \tau])$.*

Állítás. *Legyen $U_t = e^{itH}$ valamilyen önadjungált $H : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operátorra. Ekkor*

(1)

$$\exists lim_{t\to 0} \frac{U_t - id_{\mathcal{H}}}{t} x \iff x \in \mathrm{Dom}\,H$$

és ekkor a határérték iHx.

(2)

$$x \in \mathrm{Dom}\,H \Rightarrow \frac{dU_t x}{dt} = iHU_t$$

(3) $HU_t \supset U_t H$

(4) Minden $B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ lineáris operátorra $BH \subset HB \iff BU_t = U_t B$.

Bizonyítás. (1) Ha $x \in \mathrm{Dom}\,H$, akkor

$$\left\| \left(\frac{U_t - id_{\mathcal{H}}}{t} - iH \right) x \right|^2 = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{e^{it\xi} - 1}{t} - i\xi \right|^2 d\mu_{x,x}(\xi)$$

Az integrandus

$$\left|i\xi\left(\frac{\sin\frac{t\xi}{2}}{\frac{t\xi}{2}}e^{i\frac{t\xi}{2}}-1\right)\right|^2=\xi^2\left(\left(\frac{\sin\frac{t\xi}{2}}{\frac{t\xi}{2}}\right)^2-2\frac{\sin\frac{t\xi}{2}}{\frac{t\xi}{2}}+1\right)\leq\alpha\xi^2$$

bármilyen pozitív α-ra, és van integrálható majoránsa. Ha viszont

$$\exists\lim_{t\to 0}\left\|\frac{U_t-id_{\mathcal{H}}}{t}x\right\|^2=\lim_{t\to 0}\int\left|\frac{e^{it\xi}-1}{t}\right|^2 d\mu_{x,x}(\xi)$$

akkor az integrandus ξ^2-hez tart, így a Fatou-lemma szerint igaz az állítás.

(2) és

(3)

$$\lim_{s\to t}\frac{U_s-U_t}{s-t}=\lim_{s\to t}\frac{U_{s-t}-id_{\mathcal{H}}}{s-t}U_tx=\lim_{s\to t}U_t\frac{U_{s-t}-id_{\mathcal{H}}}{s-t}x$$

(4) $BH\subset HB\iff B$ felcserélhető P-vel $\iff\forall f:B\hat{P}(f)\subset\hat{P}(f)B.$

□

Ha $T=\mathbb{R}$, akkor a $P:B(T)\to\Pr(\mathcal{H})$ projektormérték valós mutatót (valószínűségi változót) ír le, amit megfeleltethetünk a $\hat{P}(id_{\mathbb{R}})$ önadjungált operátornak. Két ilyen $A=\hat{P}(id_{\mathbb{R}})$ és $B=\hat{Q}(id_{\mathbb{R}})$ mutató pontosan akkor kompatibilis, ha P és Q felcserélhetők. Ilyenkor $AB-BA\subset 0$, de a fordított irányú következtetés nem igaz.

Definíció. A $V:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ lineáris leképzés parciális izometria, ha van egy $D_V\subseteq\mathcal{H}$ zárt lineáris altér, hogy

$$\|Vx\|=\begin{cases}\|x\| & x\in D_V\\ 0 & x\perp D_V\end{cases}$$

Állítás. *Legyen $V:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ parciális izometria, ekkor V^*V D_V projektora, VV^* pedig* Ran V *projektora.*

Bizonyítás. Legyen P D_V projektora, Q pedig $\operatorname{Ran}V$ projektora. Ekkor $VP=V$, $QV=V$ és $\langle x,V^*Vy\rangle=\langle Vx,Vy\rangle=\langle VPx,VPy\rangle=\langle Px,Py\rangle=\langle x,Py\rangle$. □

Korlátos operátorok poláris felbontásáról szól a következő állítás:

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $A:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ korlátos lineáris operátor. Ekkor $\exists T\geq 0$ önadjungált operátor, és V parciális izometria, amelyre $A=VT$. Ezt nevezzük az A operátor* poláris felbontásának.

Bizonyítás. Legyen $T := \sqrt{A^*A}$ és

$$V() := \begin{cases} Ay & x = Ty \\ 0 & x \in (\operatorname{Ran} T)^\perp \end{cases}$$

Az így megadott V jól definiált, hiszen $(Tx = Ty \Rightarrow Ax = Ay) \iff (Tx = 0 \Rightarrow Ax = 0)$ és $\|Tx\|^2 = \|Ax\|^2$. □

Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér. $K : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ kompakt operátor, ha korlátos halmazt relatív kompaktba képez.

Kompakt operátor spektruma diszkrét, torlódási pont legfeljebb a 0 lehet. A korlátos operátorok *-algebrájában a kompakt operátorok *-ideált alkotnak.

Legyen $K = VT$ egy kompakt operátor poláris felbontása, $T = \hat{P}(id_{\mathbb{C}})$. A megfelelő projektormérték:

$$P(E) = (s) \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \lambda_n \in E}} P_n$$

és így

$$T = (s) \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \lambda_n \in E}} \lambda_n P_n$$

Mivel T kompakt, az utóbbi összeg normában is konvergál. Jelölje $\operatorname{Ran} P_n$ egy ortonormált bázisát $\{e_n^k\}_{k=1}^{m_n}$, $P_n = (s) \sum_{k=1}^{m_n} P_{n,k}$. A sajátértékeket, és a báziselemeket átszámozva $T = (s) \sum_m \lambda_m P_{e_m}$. Legyen $v_m := Ve_m$, ezzel

$$K = (s) \sum_m \lambda_m |v_m\rangle\langle e_m| \quad \text{adjungáltja pedig} \quad K^* = (s) \sum_m \lambda_m |e_m\rangle\langle v_m|$$

Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $K : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ kompakt lineáris operátor, sajátértékei a fenti módon átszámozva (azaz multiplicitással) λ_n ($n \in \mathbb{N}$). Ekkor K magoperátor, ha $\sum_n \lambda_n < \infty$. K nyomoperátor, ha tetszőleges $(x_i)_{i \in I}$ ortonormált bázis esetén $\exists \operatorname{Tr}(K) = \sum_{i \in I} \langle x_i.Kx_i \rangle$ és az összeg független a bázis választásától.

Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $K = \sum_n \lambda_n |v_n\rangle\langle e_n| : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ magoperátor, $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ korlátos lineáris operátor. Ekkor AK és KA nyomoperátor, és*

$$\operatorname{Tr}(AK) = \operatorname{Tr}(KA) = \sum_n \lambda_n \langle e_n, Ae_n \rangle$$

Bizonyítás. Az $AK = \sum_n \lambda_n |Av_n\rangle\langle e_n|$ előállítás felhasználásával adódik, hogy $\sum_i \langle x_i, AKx_i \rangle = \sum_i \sum_n \lambda_n \langle x_i, Av_n \rangle\langle e_n, x_i \rangle = \sum_n \lambda_n \sum_i \langle x_i, Av_n \rangle\langle en, x_i \rangle = \sum_n \lambda_n \langle e_n, Av_n \rangle$ mert $|\langle x_i, Av_n \rangle\langle e_n, x_i \rangle \leq \|A\|$ miatt az összeg abszolút konvergens. □

Következmény. Minden magoperátor nyomoperátor.

Megjegyzés. Az utóbbi kijelentés megfordítása is igaz.

Ha $e \in \mathcal{H}$ egységvektor, akkor $|e\rangle\langle e|$ vetít $\mathbb{C}e$-re, a $P \mapsto \mathrm{Tr}(P|e\rangle\langle e|) = \langle e, Pe\rangle = \|Pe\|^2 \in [0,1]$ leképzés törvény, mert $P_1 \perp P_2 \Rightarrow P_1 \vee P_2 = P_1 + P_2$ és ilyenkor $\|(P_1+P_2)e\|^2 = \|P_1e\|^2+\|P_2e\|^2$. Legyen $W := (s)\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n|e_n\rangle\langle e_n| \geq 0$ magoperátor, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n = 1$, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormáltak. Ekkor a $P \mapsto \mathrm{Tr}(PW) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n\langle e_n, Pe_n\rangle$ leképzés törvények σ-konvex kombinációja, tehát maga is törvény. Tehát minden pozitív önadjungált 1 nyomú magoperátor egy törvényt határoz meg. Ennek megfordításáról szól Gleason tétele:

Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér,* $\dim\mathcal{H} \neq 2$. *Ekkor minden $Pr(\mathcal{H}) \to [0,1]$ törvény $P \mapsto \mathrm{Tr}(PW)$ alakú, ahol W 1 nyomú pozitív önadjungált operátor (Gleason-operátor).*

Ha van egy $A = \hat{P}(id_{\mathbb{R}})$ önadjungált operátorunk, és egy $W = \sum_n \lambda_n|e_n\rangle\langle e_n|$ 1 nyomú pozitív operátorunk, akkor azok megadnak egy $u : B(\mathbb{R}) \to Pr(\mathcal{H})$ valós mutatót és egy $p : Pr(\mathcal{H}) \to [0,1]$ törvényt. A mutató eloszlása $p \circ u$:

$$E \mapsto \mathrm{Tr}(P(E)W) = \sum_n \lambda_n \underbrace{\langle e_n, P(E)e_n\rangle}_{\|P(E)e_n\|^2} = \sum_n \lambda_n\mu_{e_n,e_n}(E)$$

A valószínűségi változó momentumai pedig:

$$\begin{aligned}
\eta_W^{(m)}(A) &= \int_{\mathbb{R}} id_{\mathbb{R}}^m d(\sum_n \lambda_n\mu_{e_n,e_n}) \\
&= \sum_n \lambda_n \int_{\mathbb{R}} id_{\mathbb{R}}^m d\mu_{e_n,e_n} \\
&= \sum_n \lambda_n\langle e_n, \hat{P}(id_{\mathbb{R}}^m)e_n\rangle \\
&= \sum_n \lambda_n\langle e_n, A^m e_n\rangle \\
&= \mathrm{Tr}(A^m W)
\end{aligned}$$

Speciálisan $Ae = \lambda e$, $W = |e\rangle\langle e|$ esetén $\eta_W^{(m)}(A) = \lambda^m$. Szórások szorzatára ad alsó korlátot a Heisenberg-féle határozatlansági reláció:

Állítás. *Legyenek $A, B, C : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ önadjungált operátorok, $\mathcal{D} \subset \mathrm{Dom}\,A \cap \mathrm{Dom}\,B \cap \mathrm{Dom}\,C$ sűrű altér, amelyre $A\mathcal{D} \cup B\mathcal{D} \cup C\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$, $AB - BA\big|_{\mathcal{D}} = iC\big|_{\mathcal{D}}$, $W = \sum_n \lambda_n|e_n\rangle\langle e_n|$ egy törvény Gleason-operátora. Ekkor $\sigma_W(A)\sigma_W(B) \geq \frac{1}{2}|\eta_W(C)|$*

Bizonyítás. Legyen $\hat{A} := A - \eta_W(A)id_{\mathcal{H}}$ és $\hat{B} := B - \eta_W(B)id_{\mathcal{H}}$, ekkor $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\big|_{\mathcal{D}} = iC\big|_{\mathcal{D}}$ és $\eta_W(\hat{A}) = \eta_W(\hat{B}) = 0$. Minden $\lambda \in \mathbb{R}$ számra $T_\lambda := \hat{A} + i\lambda B$ sűrűn értelmezett, $T_\lambda^* \supset \hat{A} - i\lambda B$.

$$\langle e_n, T_\lambda^* T_\lambda e_n\rangle = \|T_\lambda e_n\|^2 = \|\hat{A}e_n\|^2 + \lambda^2\|\hat{B}e_n\|^2 + \underbrace{\langle \hat{A}e_n, i\lambda\hat{B}e_n\rangle + \langle i\lambda\hat{B}e_n, \hat{A}e_n\rangle}_{\lambda i\left[\langle e_n,\hat{A}\hat{B}e_n\rangle - \langle e_n,\hat{B}\hat{A}e_n\rangle\right]}$$

alapján

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(T_\lambda^* T_\lambda W) &= \sum_n \lambda_n \langle e_n, T_\lambda^* T_\lambda e_n\rangle \\
&= \sum_n \lambda_n \left(\|\hat{A} e_n\|^2 - \lambda \langle e_n, C e_n\rangle + \lambda^2 \|\hat{B} e_n\|^2 \right) \geq 0
\end{aligned}$$

minden λ-ra, tehát a fenti másodfokú polinom diszkriminánsa legfeljebb 0:

$$\eta_W(A) - 4\sigma_W(A)^2 \sigma_W(B)^2 \leq 0$$

$\square$

Speciálisan $C = id_{\mathcal{H}}$ esetén a törvénytől független alsó korlátot kapunk.

Legyen $W = (u) \sum_n \lambda_n |e_n\rangle\langle e_n|$ egy törvény Gleason-operátora, $p_W(P) := \mathrm{Tr}(PW) = \sum_n \lambda_n \langle e_n, P e_n\rangle = \sum_n \lambda_n \mathrm{Tr}(P|e_n\rangle\langle e_n|) = \sum_n \lambda_n p_{|e_n\rangle\langle e_n|}(P)$. Ha W-ben több tag van, akkor nem szélsőséges, ha csak 1 tag, akkor szélsőséges. Ekkor W projektor, az ilyen állapotok a tiszta állapotok. $\dim \mathcal{H} \geq 2$ esetén nincs szórásmentes törvény, mert az csak $W = |e\rangle\langle e|$ alakú (szélsőséges) lehetne, de $\exists x \in \mathcal{H} : \|x\| = 1$ és $0 < |\langle e, x\rangle| < 1$ és $\mathrm{Tr}(|e\rangle\langle e||x\rangle\langle x|) = |\langle e, x\rangle|^2$. A klasszikus valószínűségelméletben ugyanaz a szórásmentes, a szélsőséges és a Dirac-féle törvény, emiatt van egy természetes megfeleltetés az elemi események és a szélsőséges törvények közt. A kvantumos esetben nincs szórásmentes törvény, de itt is van természetes megfeleltetés az elemi események és a szélsőséges törvények közt.

Tárgymutató