# 1. Általános valószínűségelmélet

## 1.1. Események

Valyamely fizikai (vagy egyéb, például gazdasági) rendszer leírásához intuitív képünk van arról, mik lehetnek a rendszer lehetséges eseményei és az azok közötti kapcsolatok. A legegyszerűbben, a szokásos módon a kockadobálással világíthatjuk meg az idevágó fogalmakat. A lehetséges események az 1-től a 6-ig a számok (ezek az úgynevezett elemi események), aztán a 4-nél kisebb szám, a 2-nél nagyobb szám, páros szám, stb. Röviden: az $\{1, \ldots, 6\}$ halmaz összes lehetséges részhalmaza. Az egész halmaz (bármely szám) a biztos esemény, az üres halmaz (semmilyen szám) a lehetetlen esemény. Tudjuk, mit jelent

– az hogy, egy esemény maga után von egy másik eseményt (ha 2, akkor páros),
– két esemény együttese (4-nél kisebb és 2-nél nagyobb),
– két esemény akármelyike (4-nél nagyobb vagy 2-nél kisebb),
– egy esemény ellentettje (a 4-nél kisebb ellentettje a 4-nél nagyobb vagy egyenlő).

Általában sokkal több (végtelen sok) esemény van. A klasszikus valószínűségelméletben azt teszik fel, az események egy alaphalmaz – jelöljük $T$-vel – bizonyos halmazainak $\sigma$-algebrája – jelöljük ezt $\mathcal{B}(T)$-vel –, ami azt jelenti, hogy az egész halmaz, az üres halmaz benne van $\mathcal{B}(T)$-ben, továbbá a $\mathcal{B}(T)$ megszámlálható sok elemének a közös része és egyesítése is benne van $\mathcal{B}(T)$-ben, valamint a $\mathcal{B}(T)$ minden elemének a komplementere is benne van $\mathcal{B}(T)$-ben. Ekkor, ha $A, B \in \mathcal{B}(T)$, $A_n \in \mathcal{B}(T) \quad (n \in \mathbb{N})$, akkor

– $A \subset B$ fejezi ki, hogy az $A$ esemény maga után vonja a $B$ eseményt,
– $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ jelenti az események együttesét,
– $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ jelenti az események akérmelyikét,
– $A^{\circ} := T \setminus A$ az $A$ ellentettje.

Egy ilyen $\sigma$-algebrának alapvető tulajdonsága (a halmazelméleti műveletek tulajdonsága szerint) a disztributivitás:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cup C) \cap (A \cup C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cap C) \cup (A \cap C).$$

A kvantummechanika a klasszikus valószínűségelmélet eredményeitől eltérő eredményekre vezetett. Ezért általánosítani kell az események fenti struktúráját a következőképpen.

Egy $S$ halmazon egy **rendezés** a $\leq$ szimbólummal jelölt reláció, amely
– reflexív, azaz $a \leq a$,
– antiszimmetrikus, azaz ha $a \leq b$ és $b \leq a$, akkor $a = b$,
– tranzitív, azaz ha $a \leq b$ és $b \leq c$, akkor $a \leq c \leq b$

az $S$ bármely $a, b, c$ elemére. **Korlátosnak** mondjuk a rendezést, ha van az $S$-nek egy $\mathbf{1}$-gyel és egy $\mathbf{0}$-val jelölt legnagyobb, illetve legkisebb eleme, azaz minden más $a$ elemre $a \leq \mathbf{1}$ és $\mathbf{0} \leq a$ teljesül.

Az $a, b$ elemek **legkisebb felső korlátja**, ha létezik, az az $a \vee b$-vel jelölt elem, amely nagyobb-egyenlő mind $a$-nál és $b$-nél, és az ilyen tulajdonságú elemek közül a legkisebb; hasonlóan értelmezzük $a \wedge b$-t, az $a$ és $b$ **legnagyobb felső korlátját**. Hangsúlyozzuk, nem akármilyen rendezés esetén léteznek bármely két elemre az így értelmezett korlátok. Hasonlóképpen értelmezzük nem csak kettő, hanem akárhány elem legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátját.

**1. Definíció.** *Az $\mathcal{L}$ halmazt* **ortomoduláris $\sigma$-hálónak** *hívjuk, ha adott rajta*

*– egy korlátos rendezés úgy, hogy bármely megszámlálható sok elemnek létezik legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátja azaz minden $a_n \in \mathcal{L}$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén létezik*

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} a_n \qquad \text{és} \qquad \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n,$$

*– egy $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$, $a \mapsto a^\perp$* **ortokomplementáció** *az*

*(i) $(a^\perp)^\perp = a$,*

*(ii) ha $a \le b$, akkor $b^\perp \le a^\perp$,*

*(iii) $a \wedge a^\perp = \mathbf{0}$, $\qquad a \vee a^\perp = \mathbf{1}$*

*valamint az* **ortomodularitásnak** *nevezett*

*(iv) ha $a \le b$, akkor $b = a \vee (b \wedge a^\perp)$*

*tulajdonsággal.*

$a \le b$ esetén használjuk a $b \setminus a := b \wedge a^\perp$ jelölést.

Ha $a \le b^\perp$ (és ezzel egyidejűleg $b \le a^\perp$), akkor azt mondjuk, hogy $a$ és $b$ **ortodiszjunkt**, jelölésben $a \perp b$.

Igen egyszerű belátni, hogy $\mathbf{0}^\perp = \mathbf{1}$, $\mathbf{1}^\perp = \mathbf{0}$. Továbbá, ha $a \perp b$, akkor $a \wedge b = 0$. Fontos viszont, hogy fordítva nem feltétlenül igaz: $a \wedge b$ nem vonja maga után, hogy $a \perp b$.

Nyilvánvaló, hogy egy halmaz-$\sigma$-algebra ortromoduláris $\sigma$-háló a halmazelméleti rendezéssel és komplementációval. Az a fontos, hogy általában egy ortomoduláris $\sigma$-háló nem disztributív, azaz például $a \vee (b \wedge c)$ nem feltétlenül egyezik meg $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$-vel. Az ortomodularitás a disztributivitásnak egy igen gyengített változata, ugyanis ha a definiáló tulajdonságot kifejtjük a disztributivitás szerint, egyenlőséget kapunk: $a \vee (b \wedge a^\perp) = (a \vee b) \wedge (a \vee a^\perp) = b \wedge \mathbf{1} = b$.

**1. Állítás.** *Ha $a_n \in \mathcal{L}$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor*

$$\left(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} a_n\right)^\perp = \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n^\perp, \qquad \left(\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n\right)^\perp = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} a_n^\perp.$$

*Bizonyítás* Az első egyenlőséget bizonyítjuk, a második már következik ebből az ortokomplementáció tulajdonságaiból.

Minden $m$-re $a_m \le \bigvee_{n\in\mathbb{N}} a_n$, ezért $\left(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} a_n\right)^\perp \le a_m^\perp$, amiből $\left(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} a_n\right)^\perp \le \bigwedge_{m\in\mathbb{N}} a_m^\perp$.

Másrészt minden $n$-re $\bigwedge_{m\in\mathbb{N}} a_m^\perp \le a_n^\perp$, ezért $a_n \le \left(\bigwedge_{m\in\mathbb{N}} a_m^\perp)\right)^\perp$, amiből $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} a_n \le \left(\bigwedge_{m\in\mathbb{N}} a_m^\perp)\right)^\perp$, azaz $\bigwedge_{m\in\mathbb{N}} a_m^\perp \le \left(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} a_n\right)^\perp$.

**2. Definíció.** *Az $\mathcal{L}$ ortomoduláris $\sigma$-háló egy $\mathcal{L}_o$ részhalmazát* **részobjektumnak** *hívjuk, ha minden $a, a_n \in \mathcal{L}_o$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén $a^\perp$, $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} a_n$ és $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n$ is a $\mathcal{L}_o$ eleme.*

Egyszerű tény, hogy a fenti definícióban szereplő első és második tulajdonságból következik a harmadik, illetve az első és harmadik tulajdonságból következik a második.

Nyilvánvaló, hogy részobjektumok metszete részobjektum, ezért értelmes az $\mathcal{L}$ bármely $\mathcal{R}$ részhalmaza által **generált részobjektum**, mint az $\mathcal{R}$-et tartalmazó legszűkebb részobjektum.

Érdemes megjegyezni, hogy egy $\mathcal{R}$ részhalmaz elemeiből a $\wedge$, $\vee$ és $\perp$ műveletekkel képezett összes lehetséges elem benne lesz az $\mathcal{R}$ által generált részobjektumban, de általában annak nem minden eleme állítható elő így.

**3. Definíció.** *Az $\mathcal{L}$ ortomoduláris $\sigma$-háló egy $e$ elemét* **atomnak** *hívjuk, ha abból, hogy $a \le e$, $a = e$ vagy $a = \mathbf{0}$ következik.*

Halmaz-$\sigma$-algebrákban az egypont-halmazok az atomok.

**4. Definíció.** *Legyen $\mathcal{K}$ és $\mathcal{L}$ ortomoduláris $\sigma$-háló. Egy $u : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ leképezést* **orto-$\sigma$-homomorfizmusnak** *hívunk, ha*

– $u(h^\perp) = u(h)^\perp$,

– $u\left(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} h_n\right) = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} u(h_n)$,

– $u\left(\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} h_n\right) = \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} u(h_n)$

*minden $h, h_n \in \mathcal{K}$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén.*

Egyszerű tény, hogy a fenti definícióban szereplő első és második tulajdonságból következik a harmadik, illetve az első és harmadik tulajdonságból következik a második. Ez azért fontos, mert ha egy leképezésről be akrjuk látni, hogy orto-$\sigma$-homomorfizmus, akkor elég az első és második, vagy első és harmadik tulajdonságot bizonyítani.

Igen egyszerű belátni, hogy $u(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $u(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, és ha $a \le b$, akkor $u(a) \le u(b)$.

Továbbá $u$ értékkészlete az $\mathcal{L}$ részobjektuma; fontos tudnivaló, hogy ha az $u$ értelmezési tartománya disztributív, akkor az értékkészlete disztributív részobjektum.

Ugyancsak egyszerű belátni, hogy ha az $u$ és $v$ orto-$\sigma$-homomorfizmusok megegyeznek egy halmazon, akkor megegyeznek a halmaz által generált részobjektumon is.

Feltesszük, hogy a fizikára alkalmazott általános valószínűségelméletben az események egy $\mathcal{L}$ ortomoduláris $\sigma$-hálót alkotnak. Eszerint a továbbiakban $\mathcal{L}$-t egyszerűen **eseményalgebrának** elemeit **eseményeknek** nevezzük; az atomok az **elemi események**. Az ortodiszjunkt eseményeket **egymást kizárónak** mondjuk.

## 1.2. Fizikai mennyiségek

Egy véges dimenziós $V$ vektortér (sőt affin tér) Borel-halmazainak $\mathcal{B}(V)$-vel jelölt összessége a nyílt halmazok által generált $\sigma$-algebra; nyilvánvalóan ez megegyezik a zárt halmazok generáltal $\sigma$-algebrával.

A klasszikus valószínűségelméletben – ahol az eseményalgebra $\mathcal{B}(T)$, amelyről (ezért is jelöltük így) feltesszük, hogy Borel-féle $\sigma$-algebra – válószínűségi változónak a $T$-n értelmezett valós értékű Borel-mérhető függvényeket neveznek; általánosabban, valószínűségi vektorváltozó a $T$-n értelmezett $V$ értékű Borel-mérhető függvény. Egy $f : T \to V$ függvény Borel-mérhető, ha minden $E \in \mathcal{B}(V)$ esetén $\overset{-1}{f}(E) \in \mathcal{B}(T)$. Tudjuk – és egyszerűen bizonyítható –, hogy $\overset{-1}{f}$

megtartja a halmazművele-teket, azaz halmazok metszetének, uniójának az $f$ általi ősképe az ősképek metszete, illetve uniója, egy halmaz komplementerének az ősképe az őskép komplementere. Más szóval $\overset{-1}{f} : \mathcal{B}(V) \to \mathcal{B}(T)$ orto-$\sigma$-homomorfizmus.

A klasszikus mechanika és statisztikus fizika szokásos megfogalmazásában az események a fázistér Borel-halmazai, és a fizikai mennyiségek a fázistéren értelmezett vektor értékű függvények. A fizikai menyiségektől bizonyos jó tulajdonságokat – például folytonosság, differenciálhatóság – szokás megkövetelni. A legáltalánosabb ilyen követelmény a Borel-mérhetőség.

Tehát a klasszikus fizikai mennyiségek a valószínűségelmélet fogalmaival valószínűségi vektorváltozók.

Ennek megfelelően, a fizikára alkalmazott általános valószínűségelmélet $\mathcal{L}$ eseményalgebrája esetén **fizikai mennyiségnek** egy $u : \mathcal{B}(V) \to \mathcal{L}$ orto-$\sigma$-homomor-fizmust nevezünk.

**5. Definíció.** *Egy $u : \mathcal{B}(V) \to \mathcal{L}$ fizikai mennyiség* **tartója** *a*

$$\mathrm{Supp}(u) := \{v \in V \mid u(G) \neq \mathbf{0}, v \in G, G \text{ nyílt}\}$$

*halmaz.*

*$s \in V$ az $u$* **éles pontja**, *ha $u(\{s\}) \neq \mathbf{0}$; az éles pontok összességét a* Sharp$(u)$ *jelöli.*

Egyszerű tények a következők:
– Sharp(u) $\subset$ Supp$(u)$,
– Supp$(u)^{\complement} = \bigcup\{G \text{ nyílt} \mid u(G) = \mathbf{0}\}$,
– Supp$(u) = \bigcap\{F \text{ zárt} \mid u(F) = \mathbf{1}\}$.

Egy éles pont jelentése: van olyan esemény, amelynek bekövetkeztekor a fizikai mennyiség a szóban forgó értékét veszi fel.

Egy tartóbeli pont jelentése: van olyan esemény, amelynek bekövetkeztekor a fizikai mennyiség „lényegében"a szóban forgó értékét veszi fel; pontosan: a tartó adott pontját tartalmazó bármely (kis) nyílt halmazhoz van olyan esemény, amelynek bekövetkeztekor a fizikai mennyiség az értékét abban a nyílt halmazban veszi fel.

Ha $\mathcal{L} = \mathcal{B}(T)$ és $u = \overset{-1}{f}$, akkor Sharp$(u) = \mathrm{Ran}(f)$ és Supp$(u) = \overline{\mathrm{Ran}(f)}$.

A klasszikus valószínűségelméletben valószínűségi változók (a klasszikus fizikában fizikai mennyiségek) egymáshoz való viszonyát is szokták vizsgálni úgy, hogy az $f_i : T \to V_i$ $(i = 1, \dots, n)$ függvények $f := (f_1, \dots, f_n) : T \to V_1 \times \cdots \times V_n$ együttes függvényt tekintik. Jelölje $pr_i : V_1 \times \cdots \times V_n \to V_i$ az $i$-dik komponensre való vetítést. Nyilvánvaló, hogy $f_i = pr_i \circ f$, amiből $\overset{-1}{f_i} = \overset{-1}{f} \circ \overset{-1}{pr_i}$.

Ez indokolja a következő meghatározásunkat, ahol $n$ természetes szám.

**6. Definíció.** *Az $u_i : \mathcal{B}(V_i) \to \mathcal{L}$ $(i = 1, \dots, n)$ fizikai mennyiségek* **együttese** *egy olyan $u : \mathcal{B}(V_1 \times \cdots \times V_n) \to \mathcal{L}$ orto-$\sigma$-homomorfizmus, amelyre $u_i = u \circ \overset{-1}{pr_i}$ teljesül minden $i$ esetén.*

Általában fizikai mennyiségek együttese nem feltétlenül létezik. Ha létezik, akkor egyértelmű, ugyanis a definícióból következően meg van határozva a szorzattér Borel-oldalú tégláin, amelyek generálják a szorzattér Borel-halmazait (ugyanis például $\mathbb{R}^n$ bármely nyílt halmaza előáll a benne levő racionális koordinátájú pontok körüli nyílt téglák megszámlálható uniójaként).

$\mathrm{Ran}(u_i)$ mindegyike disztributív részobjektum, és – ha $u$ létezik – benne van az ugyancsak $\mathrm{Ran}(u)$ disztributív részobjektumban. Ezért a fizikai mennyiségek együttese csak akkor létezhet, ha az $u_i$-k kompatibilisek az alábbi meghatározás szerint.

**7. Definíció.** *Az $u_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ fizikai mennyiségek* **kompatibilisek**, *ha a $\bigcup_i \mathrm{Ran}(u_i)$ generálta részobjektum disztributív.*

Tehát az együttes fizikai mennyiség létezésének szükséges – de általában nem elégséges – feltétele a kompatibilitás.

A klasszikus valószínűségelméletben valószínűségi változók összegét, szorzatát is szokták tekinteni. Az $f_1 : T \to V$ és $f_2 : T \to V$ függvények összege nem más, mint a függvények $f := (f_1, f_2)$ együttesének a $+ : V \times V \to V$ összeadásssal vett kompozíciója. Áttérve a teljes inverzekre látjuk, hogy ennek megfelelően az $u_1 : \mathcal{B}(V) \to \mathcal{L}$ és $u_2 : \mathcal{B}(V) \to \mathcal{L}$ fizikai mennyiségek összege akkor értelmezhető, ha létezik a mennyiségek $u$ együttese, és ekkor az összegük az $u \circ \overset{-1}{+} : \mathcal{B}(V) \to \mathcal{L}$ fizikai mennyiség. Értelemszerűen hasonlóan határozzuk meg fizikai mennyiségek szorzatát.

## 1.3. Állapotok

A klasszikus valószínűségelméletben az események bekövetkezésének relatív gyakoriságát egy a $\mathcal{B}(T)$-n értelmezett, értékeit a $[0, 1]$ intervallumban felvevő mértékkel jellemzik. Ez a valószínűségi mérték függ a vizsgált rendszer aktuális körülményeitől. Gondoljunk a kockadobálásra: ha a szokásosan végezzük, akkor minden elemi esemény valószínűsége $\frac{1}{6}$; ha úgy ejtjük le a kockát körülbelül 4 cm magasról, hogy kezdetben mindig a 6-os van felül, akkor a 6-os valószínűsége jóval nagyobb lesz $\frac{1}{6}$-nál, az 1-es valószínűsége pedig elenyészően kicsi. A havazás, szélvihar stb. valószínűsége a légkör aktuális viszonyaitól – állapotától – függ.

A mondottak indokolják a következő meghatározást.

**8. Definíció.** *Az $\mathcal{L}$ eseményalgebrán egy $p : \mathcal{L} \to [0, 1]$ leképezést* **állapotnak** *hívunk, ha*

– $p(\mathbf{1}) = 1$,
– *ha $a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ egymást páronként kizáró események, akkor*

$$p\left(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} a_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p(a_n).$$

$p(a)$ *az $a$* **valószínűsége** *a $p$ állapotban.*

**2. Állítás.** *Ha $p$ állapot, akkor*
*(i)* $p(\mathbf{0}) = 0$,
*(ii)* $a \le b$ *esetén* $p(a) \le p(b)$.

*Bizonyítás* (i) $\mathbf{0} \perp \mathbf{1}$, így $p(\mathbf{1}) = p(\mathbf{0} \vee \mathbf{1}) = p(\mathbf{0}) + p(\mathbf{1})$.

(i) Az ortomodularitás szerint $b = a \vee (b \wedge a^\perp)$ és nyilván $a \perp (b \wedge a^\perp)$, ezért $p(b) = p(a) + p(b \wedge a^\perp)$.

**9. Definíció.** *Egy állapotot* **szórásmentesnek** *hívunk, ha csak a* 0 *és* 1 *értéket veszi fel.*

**10. Definíció.** *A páronként különböző $p_n$ $(n \in \mathbb{N})$ állapotok* **$\sigma$-konvex kombinációja** *egy $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n p_n$ alakú, „pontonként” értelmezett függvény, ahol $\lambda_n \geq 0$ és $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n = 1$.* **Triviális** *a $\sigma$-konvex kombináció, ha egy kivételével az összeg minden tagja nulla.*

**3. Állítás.** *Állapotok $\sigma$-konvex kombinációja állapot.*

*Bizonyítás* Nyilvánvaló, hogy $\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n p_n\right)(\mathbf{1}) = 1$. Továbbá egymást kizáró események esetén – a pontonkénti értelmezés szerint –

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n p_n\right)\left(\bigvee_{m\in\mathbb{N}} a_m\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \; p_n\left(\bigvee_{m\in\mathbb{N}} a_m\right) =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \sum_{m\in\mathbb{N}} p_n(a_m) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n p_n\right)(a_m).$$

□

Megjegyezzük azt az egyszerű tényt, hogy ahol egy $\sigma$-konvex kombináció az 1, illetve a 0 értéket veszi fel, ott a benne szereplő nem nulla együtthatójú állapotok is az 1, illetve a 0 értéket veszik fel.

**11. Definíció.** *Egy állapotot* **tisztának** *hívunk, ha nem áll elő nem triviális $\sigma$-konvex kombinációként.*

Az előbbi megjegyzésünkből azonnal következik:

**4. Állítás.** *Szórásmentes állapot tiszta.*

Klasszikus esetben egy állapot $p : \mathcal{B}(T) \to [0,1]$ szokásos mérték. A tartóját azok a $t \in T$ elemek alkotják, amelyekre igaz, hogy bármely a $t$-t tartalmazó $N$ nyílt halmazra $p(N) \neq 0$.

Különösen érdekesek a Dirac-féle mértékek, amelyeknek a tartója egyetlen pont. $\delta_t$ -vel jelöljük azt a Dirac-mértéket, amelynek a tartója $\{t\}$, azaz bármely $E \in \mathcal{B}(T)$ esetén $p(E) = 1$, ha $t \in E$ és $p(E) = 0$, ha $t \notin E$.

**5. Állítás.** *Klasszikus esetben egy állapotra a következő igaz:*

$$\textit{Dirac-féle} \iff \textit{szórásmentes} \iff \textit{tiszta.}$$

*Bizonyítás* Dirac-féle állapot nyilván szórásmentes, az pedig tiszta. Tehát csak azt kell, belátnunk, hogy egy tiszta állapot Dirac-féle.

Tegyük fel, hogy a $p$ tiszta állapot nem Dirac-féle, azaz a tartójában van két különböző $t_1$ és $t_2$ pont. Legyen $N_1$ és $N_2$ olyan diszjunkt nyílt halmaz, hogy $t_1 \in N_1$, $t_2 \in N_2$. Ekkor $p(N_1) \neq 0$, $p(N_1{}^{\rotatebox[origin=c]{-90}{$\multimap$}}) \geq p(N_2) \neq 0$. Definiáljuk a

$$p_1(E) := \frac{p(E \cap N_1)}{p(N_1)}, \qquad p_2(E) := \frac{p(E \cap N_1{}^{\rotatebox[origin=c]{-90}{$\multimap$}})}{p(N_1{}^{\rotatebox[origin=c]{-90}{$\multimap$}})}$$

állaptokat. Nyilván $p_1 \neq p_2$ és $p = p(N_1)p_1 + p(N_1{}^{\rotatebox[origin=c]{-90}{$\multimap$}})p_2$, azaz $p$ nem tiszta, ami ellentmondás.

### 1.4. Várható érték, szórás

Klasszikus valószínűségelméletben az $f : T \to \mathbb{R}$ valószínűségi változónak a $p$ valószínűségi mértékre vonatkozó $m$-ik momentumát az $f^m$-nek ($m \in n \in \mathbb{N}$) a $p$ szerinti integráljaként értelmezik (feltéve, hogy az integrál létezik). Az ismert integráltranszformációs formula szerint

$$\int_T f^m(t)dp(t) = \int_{\mathbb{R}} r^m d(p \circ \overset{-1}{f})(r).$$

Valószínűségi vektorváltozókra az $1 < m$-ik momentum definíciója körülményesebb; az egyszerűség kedvvért maradunk a valós esetnél, a lényeget ez is jól mutatja.

A mondottak alapján fogadjuk el a következő meghatározásokat.

**12. Definíció.** *Az $u : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}$ fizikai mennyiségnek a $p : \mathcal{L} \to [0,1]$ állapotbeli* **eloszlása** *a $p \circ u : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ valószínűségi mérték.*

**13. Definíció.** *Az $u$ fizikai mennyiségnek a $p$ állapotbeli*

– $m$**-ik momentuma** $\eta_p^{(m)}(u) := \int_{\mathbb{R}} id_{\mathbb{R}}^m d(p \circ u)$*, feltéve, hogy az integrál létezik,*

– **várható értéke** *az első momentuma,* $\eta_p(u) := \eta_p^{(1)}(u)$,

– **szórása** $\sigma_p(u) := \sqrt{\eta_p^{(2)}(u) - \big(\eta_p(u)\big)^2}$.

**6. Állítás.** *Szórásmentes állapotban bármely fizikai mennyiség*

– *eloszlása Dirac-féle mérték,*

– *szórása nulla.*

*Bizonyítás* Mivel a $p$ szórásmentes állapot csak a 0 és 1 értéket veszi fel, igaz ez $p \circ u$-ra is bármely $u$ esetén. Ha $\{s\}$ a $p \circ u$ tartója, akkor $\eta_p^{(m)}(u) = s^m$, amiből következik, hogy a szórás nulla.

## 2. Kvantumvalószínűség

Ebben a fejezetben $\mathbf{H}$ egy komplex Hilbert-teret jelöl. $I$ a $\mathbf{H}$ identititás-operátora.

### 2.1. Események: zárt lineáris alterek

Legyen $\mathcal{M}(\mathbf{H})$ a Hilbert-tér zárt lineáris altereinek összessége. Jól ismert, hogy egy $\mathbf{M}$ zárt lineáris altér ortogonális kiegészítője szintén zárt lineáris altér, amelyet szokásosan $\mathbf{M}^{\perp}$ jelöl. Ha a zárt lineáris alterek között értelmezzük a rendezést a halmazelméleti tartalmazással, az ortokomplementációt az ortogonális kiegészítővel, akkor $\mathcal{M}(\mathbf{H})$ ortomoduláris $\sigma$-háló lesz:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M} \leq \mathbf{N} &:= \mathbf{M} \subset \mathbf{N}, \\
\mathbf{1} &= \mathbf{H}, \\
\mathbf{0} &= \{0\}, \\
\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{M}_n &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{M}_n, \\
\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{M}_n &= \operatorname{Span}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{M}_n\right), \\
\mathbf{M}^{\perp} &= \mathbf{M}^{\perp},
\end{aligned}
$$

ahol $\operatorname{Span}(\cdot)$ az adott halmaz által generált zárt lineáris alteret jelöli, és nyilvánvalóan igaz, hogy ha $\mathbf{M} \leq \mathbf{N}$, akkor $\mathbf{N} = \mathbf{M} \vee (\mathbf{N} \wedge \mathbf{M}^{\perp})$.

Igen fontos, hogy ha $\dim \mathbf{H} > 1$, akkor $(\mathbf{H})$ **nem disztributív**. Legyen ugyanis $\mathbf{M}$ és $\mathbf{N}$ olyan különböző egy dimenziós altér, amelyek nem ortogonálisak egymásra. Ekkor $\mathbf{M} \wedge \mathbf{N} = \{0\}$, $\mathbf{N} \vee \mathbf{M}^{\perp} = \mathbf{H}$, és ezért

$$
(\mathbf{M} \wedge \mathbf{N}) \vee \mathbf{M}^{\perp} = \mathbf{M}^{\perp} \neq \mathbf{H} = (\mathbf{M} \vee \mathbf{M}^{\perp}) \wedge (\mathbf{N} \vee \mathbf{M}^{\perp}).
$$

Megjegyezzük, $(\mathbf{H})$ teljes ortomoduláris háló, azaz nem csak megszámlálható sok, hanem tetszőleges számosságú zárt lineáris altérnek is létezik legkisebb felső korlátja és legnagyobb alsó korlátja.

Az elemi események az egy dimenziós lineáris alterek.

## 2.2. Események: ortogonális projektorok

**14. Definíció.** *A $P : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ folytonos operátort* **ortogonális projektornak** *nevezzük, ha $P^2 = P$ és $P^* = P$.*

Érdemes megjegyezni a definícióból eredő következő, gyakran használt összefüggéseket:

$$
\langle y, Px\rangle = \langle Py, x\rangle = \langle Py, Px\rangle
$$

minden $x, y \in \mathbf{H}$ esetén.

**7. Állítás.** *Ha $P$ ortogonális projektor, akkor $\operatorname{Ran}(P)$ és $\operatorname{Ker}(P)$ zárt lineáris alterek és $\operatorname{Ran}(P)^{\perp} = \operatorname{Ker}(P)$.*

*Bizonyítás* Folytonos operátor magja zárt lineáris altér, értékészlete lineáris altér. Ezért $\operatorname{Ker}(P)$ zárt lineáris altér. Ha $Px = x$, akkor $x \in \operatorname{Ran}(P)$; és ha $x \in \operatorname{Ran}(P)$ akkor van olyan $y$, hogy $x = Py$, és $Px = P^2y = Py = x$. Tehát $\operatorname{Ran}(P)$ az $I - P$ operátor magtere, és így zárt.

A minden $x \in \mathbf{H}$ esetére fennálló $0 = \langle y, Px\rangle = \langle Py, x\rangle$ egyenlőségből azonnal adódik, hgoy $y \in \operatorname{Ran}(P)^{\perp}$ pontosan akkor, ha $y \in \operatorname{Ker}(P)$. $\square$

Eredményeinkből rögtön következik, hogy ha $P \neq 0$, akkor $\|P\| = 1$, és $Px = x$ pontosan akkor, ha $\|Px\| = \|x\|$.

Ha $\mathbf{M}$ zárt lineáris altér, akkor a Riesz-féle felbontási tétel szerint létezik egyértelműen egy $x_{\mathbf{M}} \in M$ és egy $x_{\mathbf{M}^{\perp}} \in \mathbf{M}^{\perp}$ vektor úgy, hogy $x = x_{\mathbf{M}} + x_{\mathbf{M}^{\perp}}$.

**8. Állítás.** *Ha* $\mathbf{M}$ *zárt lineáris altér, akkor a* $P_{\mathbf{M}}$:$\mathbf{H}\to\mathbf{H}$, $x\mapsto x_{\mathbf{M}}$ *leképezés ortogonális projektor,* $\mathrm{Ran}(P_{\mathbf{M}})=\mathbf{M}$ *és* $\mathrm{Ker}(P_{\mathbf{M}})=\mathbf{M}^{\perp}$.

*Bizonyítás* Egyszerű tény, hogy $P_{\mathbf{M}}$ lineáris. Definícója szerint $P_{\mathbf{M}}(x)\in\mathbf{M}$ az egyetlen olyan vektor, melyre $x-P_{\mathbf{M}}(x)\in\mathbf{M}^{\perp}$ teljesül. Ezért minden $x\in\mathbf{H}$ esetén

$$P_{\mathbf{M}}(x)-P_{\mathbf{M}}(P_{\mathbf{M}}(x))\in\mathbf{M}\cap\mathbf{M}^{\perp}=\{0\},$$

következésképpen $P_{\mathbf{M}}(x)=P_{\mathbf{M}}(P_{\mathbf{M}}(x))$, azaz $P_{\mathbf{M}}$ projektor. Nyilvánvaló, hogy $\mathrm{Ran}(P_{\mathbf{M}})=\mathbf{M}$. Továbbá $P_{\mathbf{M}}(x)=0$ definíció szerint ekvivalens azzal, hogy $x\in\mathbf{M}^{\perp}$, tehát $\mathrm{Ker}(P_{\mathbf{M}})=\mathbf{M}^{\perp}$. □

Tehát a zárt lineáris alterek és az ortogonális projektorok kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetôk egymásnak. Ugyanis, ha $\mathbf{M}$ zárt lineáris altér, akkor $P_{\mathbf{M}}$ olyan ortogonális projektor, hogy $\mathrm{Ran}(P_{\mathbf{M}})=\mathbf{M}$. Ha $P$ ortogonális projektor, akkor $\mathrm{Ran}(P)$ zárt lineáris altér és $P_{\mathrm{Ran}(P)}=P$.

Ezért az ortogonális projektorok összessége ortomoduláris $\sigma$-háló a zárt lineáris alterek műveleteinek az átvételével:

$$\begin{aligned}
P\le Q &:= \mathrm{Ran}(P)\le\mathrm{Ran}(Q),\\
\mathbf{1} &= I,\\
\mathbf{0} &= 0,\\
\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} P_n &= \bigwedge_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Ran}(P_n)\ \text{projektora},\\
\bigvee_{n\in\mathbb{N}} P_n &= \bigvee_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Ran}(P_n)\ \ \text{projektora},\\
P^{\perp} &= (\mathrm{Ran}(P))^{\perp}\text{projektora}.
\end{aligned}$$

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért csak projektort mondunk ortogonális projektor helyett; összességüket $\mathcal{P}(\mathbf{H})$ fogja jelelölni.

Az eddigiekből nyilvánaló, hogy $P^{\perp}=I-P$.

**9. Állítás.** $P\le Q$ *pontosan akkor, ha* $PQ=QP=P$

*Bizonyítás* Az értelmezés szerint $P\le Q$ egyenértékű azzal, hogy $QPx=Px$ minden $x$ vektorra, azaz $QP=P$. Továbbá $PQ=P^{*}Q^{*}=(QP)^{*}=P^{*}=P$. □

**10. Állítás.** *(i) Ha* $PQ=QP$, *akkor* $P\wedge Q=PQ$ *és* $P\vee Q=P+Q-PQ$,
*(ii)* $P\le Q$ *esetén* $Q\setminus P:=Q\wedge P^{\perp}=Q-P$,
*(iii)* $P\perp Q$ *akkor és csak akkor, ha* $Q=QP=0$.

*Bizonyítás* (i) Ha $PQ=QP$, akkor $(PQ)^2=PQ$ és $(PQ)^{*}=PQ$, azaz $PQ=QP$ projektor,

– amelynek az értékkészelete része $\mathrm{Ran}(P)$-nek és $\mathrm{Ran}(Q)$-nak is, tehát $PQ\le P\wedge Q$,

– amelynek az értékkészlete tartalmazza $\mathrm{Ran}(P)$ és $\mathrm{Ran}(Q)$ metszetét (ugyanis ha $Px=x$ és $Qx=x$, akkor $PQx=x$), tehát $P\wedge Q\le PQ$.

Továbbá $PQ\vee Q=(P^{\perp}\wedge Q^{\perp})^{\perp}=I-(I-P)(I-Q)=P+Q-PQ$.

(ii) Nyilvánvaló az előzőekből.

(iii) $P\le Q^{\perp}$ akkor és csak akkor $P=P(I-Q)$ azaz $P=P-PQ$, ami egyenértékű azzal, hogy azaz $PQ=0$.

**11. Állítás.** *A $P$ és $Q$ projektorra $P \leq Q$ pontosan akkor teljesül, ha $\langle x, Px\rangle \leq \langle x, Qx\rangle$ minden $x \in \mathbf{H}$ esetén.*

*Bizonyítás* Ha $P \leq Q$, akkor $\langle x, Qx\rangle = \langle x, Q(P + (I - P))x\rangle = \langle x, Px\rangle + \langle x, (Q - P)x\rangle \geq \langle x, Px\rangle$.

Ha $\langle x, Px\rangle \leq \langle, Qx\rangle$, akkor $x \in \mathrm{Ran}(P)$ esetén $\|x\| = \|Px\| \leq \|Qx\| \leq \|x\|$, tehát mindenütt egyenlőségnek kell állnia, ami azt jelenti, hogy $x \in \mathrm{Ran}(Q)$.

Emlékeztetünk arra, hogy az $S$ és $T$ pozitív önadjungált operátorra az $S \leq T$ relációt azzal szokás definiálni, hogy $\langle x, Sx\rangle \leq \langle x, Tx\rangle$ minden $x$-re. Továbbá, ha $S_n$ ($n \in \mathbb{N}$) pozitív önadjungált operátorok monoton növekvő (csökkenő), felülről (alulról) korlátos sorozata, akkor létezik $(s)\lim_n S_n$, amely szintén pozitív önadjungált operátor.

Láttuk, hogy a projektorok (amelyek pozitív önadjungált operátorok) rendezése megegyezik a az idézett rendezéssel. Ezt használjuk fel az alábbiakban.

**12. Állítás.** *Tekinsük a $P_n$ ($n \in \mathbb{N}$) projektorsorozatot, amelyben $P_nP_m = P_mP_n$ minden $n, m$ esetén. Ekkor*

*(i)*

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} P_n = (s)\lim_n \prod_{n\in\mathbb{N}} P_n.$$

*(ii)*

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} P_n = (s)\sum_{n\in\mathbb{N}} P_n.$$

*Bizonyítás* (i) A jobb oldali szimbólum az $n \mapsto Q_n := P_1P_2\dots P_n$ sorozat pontonkénti határértékét jelenti. Előző erdményeink szerint $Q_n = \underset{i=1,\dots,n}{\wedge} P_i$ és $0 \leq Q_{n+1} \leq Q_n$. Ezért létezik a $P := (s)\lim_n Q_n$ önadjungált operátor. Továbbá $P^2 = P$ is teljesül, mert

$$PQ_m = \big((s)\lim_n Q_n\big)Q_m = (s)\lim_n Q_nQ_m = (s)\lim_n Q_n = P \qquad (*)$$

minden $m$-re (ugyanis $Q_nQ_m = Q_n$ ha $n \geq m$), és ezért

$$P^2 = P(s)\lim_n Q_n = (s)\lim_n(PQ_n) = P.$$

$P$ tehát projektor,

– amely $(*)$ szerint kisebb-egyenlő, mint $Q_m$ minden $m$-re, tehát

$$P \leq \bigwedge_{m\in\mathbb{N}} Q_m = \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} P_n.$$

– amelynek az értékkészlete tartalmazza $\mathrm{Ran}(Q_m)$-ek metszetét (ugyanis ha $Q_mx = x$ minden $m$-re, akkor $Px = (s)\lim_m Q_mx = x$), tehát

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} P_n = \bigwedge_{m\in\mathbb{N}} Q_m \leq P.$$

(ii) A jobb odlali szimbólum az $n \mapsto Q_n := P_1 + P_2 + \dots + P_n$ sorozat pontonkénti határértékét jelenti. Előző erdményeink szerint $Q_n = \underset{i=1,\dots,n}{\vee} P_i$ és $Q_n \leq Q_{n+1} \leq I$. Ezért létezik a $P := (s)\lim_n Q_n$ önadjungált operátor. Továbbá $P^2 = P$ is teljesül ugyanúgy, mint az (i) pontban, és teljesen hasonló érvelések szerint vezetnek a szükséges végereményhez. $\square$

Az előbbiekhez hasonlóan könnyen adódik:

**13. Állítás.** *Legyen* $P_n$ $(n \in \mathbb{N})$ *olyan projektorsorozat, hogy* $P_n \le P_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$*. Ekkor*

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} P_n = (s)\lim_n P_n.$$

Két felcserélhető projektorra $\wedge$ és $\vee$ egyszerű algebrai műveletekkel kifejezhető. Nem felcserélhetőkre is ismert egy formula (nem lesz szükségünk rá), amelyet bizonyítás nélkül közlünk:

$$P \wedge Q = (s)\lim_n (PQ)^n = (s)\lim_n (QP)^n = (s)\lim_n (QPQ)^n = (s)\lim_n (PQP)^n.$$

**14. Állítás.** *A* $\mathcal{P}(\mathbf{H})$ *egy részobjektuma akkor és csak akkor disztributív, ha kommutatív.*

*Bizonyítás* Ha a részobjektum kommutatív, akkor az előző eredményeink alapján $(P \vee R) \wedge (Q \vee R) = (P + R - PR)(Q + R - QR) = PQ + PR - PQR + RQ + R^2 - RQR - PRQ - PR^2 + PRQR = PQ + R - PQR = (P \wedge Q) \vee R$.

Ha a részobjektum disztributív, akkor bármely $P, Q$ eleme esetén $P \wedge (P \wedge Q)^\perp = P \wedge (P^\perp \vee Q^\perp) = (P \wedge P^\perp) \vee (P \wedge Q^\perp) = P \wedge Q^\perp \le Q^\perp$. tehát $P \wedge (P \wedge Q)^\perp = P - P \wedge Q$ ortogonális $Q$-ra, tehát $(P - P \wedge Q)Q = Q(P - P \wedge Q) = 0$, amiből $(P \wedge Q)Q = Q(P \wedge Q) = P \wedge Q$ alapján $PQ = QP$.

**15. Állítás.** $\mathcal{P}(\mathbf{H})$ *páronként felcserélhető projektorokból álló* $\mathcal{R}$ *részhalmaza által generált részobjektum disztributív.*

*Bizonyítás* Az $\mathcal{R}$ által generált az $\mathcal{A}$ egységelemes operátoralgebra kommutatív. Ennek az erős topológiában vett $\overline{\mathcal{A}}$ lezártja is kommutatív; ugyanis, ha $A, B \in \overline{\mathcal{A}}$, akkor $A = (s)\lim_i A_i$, $B = (s)\lim_j B_j$, ahol $A_i, B_j \in \mathcal{A}$ álalánosított sorozatok elemei, és a szorzás meg az erős limesz felcserélhetősége szerint $AB = BA$. Az eddigi eredményeink alapján az $\overline{\mathcal{A}}$-beli projektorok összessége disztributí részobjektuma $\mathcal{P}(\mathbf{H})$-nak, amely tartalmazza $\mathcal{R}$-et. □

A Hilbert-hálók orto-$\sigma$-homorfizmusairól kevés jól használható eredmény van, kivéve egy igen fontosat, amelyet bizonyítás nélkül közlünk.

Ismert: Hilbert-terek közötti skalárszorzat-tartó lineáris bijekciót unitérnek hívunk.

**15. Definíció.** *Legyen* $\mathbf{H}$ *és* $\mathbf{H}'$ *Hilbert-tér. Egy* $U : \mathbf{H} \to \mathbf{H}'$ *leképezést* **antiunitérnek** *hívunk, ha*

– *bijekció,*
– *konjugált lineáris, azaz* $U(\alpha x + \beta y) = \alpha^* UIx + \beta^* Uy$,
– *skalárszorzat-fordító, azaz* $\langle Ux, Uy\rangle' = \langle y, x\rangle$.

Ha $U : \mathbf{H} \to \mathbf{H}'$ unitér, vagy antiunitér, akkor nyilvánvaló, hogy $\mathcal{M}(\mathbf{H}) \to \mathcal{M}(\mathbf{H}')$, $\mathbf{M} \mapsto U[\mathbf{M}]$ orto-$\sigma$-izomorfizmus, továbbá $U$ és $\lambda U$ ugyanazt az orto-$\sigma$-izomorfizmust határozza meg minden $\lambda$ egységnyi abszolút értékű komplex szám esetén. Ennek bizonyos fordítottja is igaz:

**16. Állítás.** *(Wigner tétele) Legyen* $\mathbf{H}$ *és* $\mathbf{H}'$ *kettőnél nagyobb dimenziós Hilbert-tér, és* $u : \mathcal{M}(\mathbf{H}) \to \mathcal{M}(\mathbf{H}')$ *orto-$\sigma$-izomorfizmus. Ekkor egységnyi abszolút értékű szorzó erejéig egyértelműen létezik* $U : \mathbf{H} \to \mathbf{H}'$ *unitér vagy antiunitér leképezés úgy, hogy* $u(\mathbf{M}) = U[\mathbf{M}]$.

A projektorokra átvive, az izomorfizmusra a

$$\mathcal{P}(\mathbf{H}) \to \mathcal{P}(\mathbf{H}'), \quad P \mapsto UPU^{-1}$$

képletet kapjuk. Ugyanis ha az $\mathbf{M}$ altér projektora $P$, az $U[\mathbf{M}]$ projektora $P'$, akkor $x' \in U[\mathbf{M}]$ esetén $P'x' = x'$, $PU^{-1}x' = U^{-1}x'$ és $UPU^{-1}x' = x'$.

Két dimenziós Hilbert-térre nem igaz az állítás. Íme az ellenpélda: legyen $\mathbf{M}_0$ egy dimenziós altér; az $\mathbf{M}_0 \mapsto \mathbf{M}_0^{\perp}$, $\mathbf{M} \mapsto \mathbf{M}$ ($\mathbf{M} \neq \mathbf{M}_0$) leképezés orto-$\sigma$-izomorfizmus, de nyilvánvalóan nem lehet unitér vagy antiunitér operátorral megadni.

## 2.3. Fizikai mennyiségek

Az általános definíciónak megfelelően a $\mathcal{P}(\mathbf{H})$ eseményalgebra esetén egy fizikai mennyiség valamely véges dimenziós $V$ vektortér (vagy affin tér) Borel-halmazain értelmezett $\mathcal{P}(\mathbf{H})$ értékű orto-$\sigma$-homomorfizmus, vagyis projektormérték.

A spektráltétel szerint valós projektormértékek és önadjungált operátorok között természetes kölcsönösen egyértelmű kapcsolat áll fenn az $\mathrm{id}_\mathbb{R}$-nek a projektormérték szerint integrálása által.

Ez magyarázza, miért bukkannak fel önadjungált operátorok a kvantummechanikában. Meg kell azonban jegyezni, hogy a nem valós projektormértékhez nem lehet önadjungált operátort társítani. Például a sokat használt (nemrelativisztikus) helyzetvektor fizikai mennyisége $Q : \mathcal{B}(\mathbf{E}) \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ projektokrmérték, ahol $\mathbf{E}$ az abszolút térszerű vektorok összessége. Persze, ha egy bázis szerint koordinátázunk és $K_i : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ az $i$-ik koordinátafügvény, akkor a helyzet $i$-ik koordinátája a $Q_i := Q \circ \overset{-1}{K_i}$ valós projektormérték, amelyhez tartozó önadjunjgált operátor $\widehat{Q \circ \overset{-1}{K_i}}(\mathrm{id}_\mathbb{R}) = \hat{Q}(K_i)$. Hasonló mondható az impulzusról, amely $P : \mathcal{B}(\mathbf{E}^*) \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ projektormérték.

Egy fizikai mennyiség – projektormérték – éles pontjainak és tartójának a jelentését ismerjük. Ez magyarázza egy önadjungált operátor sajátértékeinek és spektrumának valószínűségelméleti jelentőségét: ezek a spektrálfebontásának az éles pontjai, illetve a tartója.

Két önadjungált operátor mint fizikai mennyiség akkor kompatibilis, ha erősen felcserélhetők. Fontos, hogy a formális felcserélhetőségből nem következik az erős felcserélhetőség. Ezt azért érdemes hangsúlyozni, mert fizikai alkalmazásokban formális felcserélhetőséget szoktak tekinteni (mert azt egyszerű bizonyítani), és abból állítják, hogy a mennyiségek kompatibilisek.

A fizikai mennyiségek kompatibilitása – projektormértékek felcserélhetősége – elegendő ahhoz, hogy legyen együttesük (amit a projektormértékek szorzatának szokás nevezni).

Legyen $P$ a $P_1$ és $P_2$ (az egyszerűség kedvéért valós) felcserélhető projektormértékek szorzata. Ez $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-n van értelmezve és az jellemzi, hogy $P(E_1 \times E_2) = P_1(E_1)P_2(E_2)$; természetesen $P_i = P \circ \overset{-1}{\mathrm{pr}_i}$ ($i = 1, 2$). Ha önadjungált operátorban gondolkozunk, akkor $S_i := \hat{P}_i(\mathrm{id}_\mathbb{R}) = \hat{P}(\mathrm{pr}_i)$.

Általában értelmeztük két olyan fizikai mennyiség összegét, amelyeknek van együttese. Tehát az előbbi $P_1$ és $P_2$ felcserélhető projektormértékek mint fizikai mennyiségek összege a $P \circ \overset{-1}{+}$ projektormérték. Önadjungált operátorokban: $S := \hat{P}(+)$ és $S_1 + S_2 \subset S$. Vagyis általában nem az önadjungált operátorok összege maga fizikai mennyiség, hanem az összeg egy önadjungált kiterjesztése.

Érdekes, hogy nem kommutáló $S$ és $T$ önadjungált operátoroknak, mint fizikai mennyiségeknek az összegét is tudjuk értelmezni bizonyos feltételek mellett. Kínálja magát az $S+T$ összeg, csakhogy ez általában nem önadjungált, csak szimmetrikus ($(S+T)^* \supset S^* + T^* = S+T$). Az összeg fizikai mennyiség csak akkor értelmezhető, ha $S+T$-nek van önadjungált kiterjesztése. Viszont általában az ilyen kiterjesztés nem egyértelmű, tehát kérdéses, melyik kiterjesztést fogadjuk el fizikailag értelmesnek. Kivétel, ha $S+T$ lényegében önbadjungált, azaz egyetlen önadjungált kiterjesztése van.

## 2.4. Állapotok

Legyen $e \in \mathbf{H}$, $\|e\| = 1$. Egyszerű tény, hogy

$$p_e : \mathcal{P}(\mathbf{H}) \to [0,1], \qquad P \mapsto \langle e, Pe \rangle = \|Pe\|^2 \tag{1}$$

$\sigma$-additív leképezés, azaz állapot. Ez az állapot az $e$ által kifeszített egy dimenziós altér projektorán az 1 értéket veszi veszi fel, az erre ortogonális projektorokon a 0 értéket; minden egyéb projektoron pedig 0-nál nagyobb, de 1-nél kisebb értéket. Tehát egy ilyen állapot nem szórásmentes.

Világos, hogy $p_e = p_{e'}$ akkor és csak akkor, ha $e' = \alpha e$, ahol $|\alpha| = 1$.

Ilyen állapotok $\sigma$-konvex kombinációja is állapot. Nem bizonyítjuk a következő igen fontos eredményt:

**17. Állítás.** *(Gleason tétele) Ha* $\mathbf{H}$ *szeparábilis és* $\dim\mathbf{H} > 2$*, akkor* $\mathcal{P}(\mathbf{H})$*-n minden állapot egységvektorok meghatározta állapotok* $\sigma$*-konvex kombinációja.*

Két dimenziós Hilbert-térre nem igaz az állítás. Legyen ugyanis $P_0$ egy dimenziós projektor; az az állapot ad egy ellenpéldát, amely $P_0$-hoz és 0-hoz nullát $P_0^\perp$-hoz és $I$-hez 1-et rendel, minden más $P$ projektorhoz 1/2-et.

**18. Állítás.** *Kettőnél nagyobb dimenziós Hilbert-tér esetén nincs szórásmentes állapot. Az egységvektorok meghatározta állapotok tiszták.*

*Bizonyítás* A nem-szórásmentesség nyilvánvaló.

Tegyük fel, hogy az $e$ egységvektorhoz léteznek $e_n$ ($n \in \mathbb{N}$) egységvektorok és $0 \le \lambda_n \le 1$ számok, $\sum_n \lambda_n = 1$ úgy, hogy $p_e = \sum_n \lambda_n p_{e_n}$. Ekkor az $e$ kifeszítette altér $P$ projektorára $1 = \sum_n \lambda_n \|Pe_n\|$, ami csak úgy lehet, hogy $\|Pe_n\| = 1$, azaz $e_n = \alpha_n e$ ($|\alpha_n| = 1$), ha $\lambda_n \neq 0$, tehát $p_{e_n} = p_e$: a szóban forgó állapot tiszta. □

Ellentétben a klasszikus esettel, kettőnél nagyobb dimenziós szeparábilis Hilbert-tér esetén Gleason tétele értelmében

– nincsenek szórásmetnes állapotok,

– minden állapot tiszta állapotok $\sigma$-konvex kombinációja.

Általában egy állapot nem határozza meg egyértelműen azokat a tiszta állapotokat, amelyeknek a $\sigma$-konvex kombinációja. Valóban, legyen például $e_1$ és $e_2$ nem párhuzamos egységvektor, és $p := \frac{1}{2}(p_{e_1} + \frac{1}{2}p_{e_2})$. A $\xi := \langle e_2, e_1 \rangle$ jelöléssel az

$$e_1' := \frac{1}{2\sqrt{1-|\xi|}}\left(e_1 - \frac{\xi}{|\xi|}e_2\right), \quad e_2' := \frac{1}{2\sqrt{1+|\xi|}}\left(\frac{\xi}{|\xi|}e_1 + e_2\right)$$

egységvektorok ortogonálisak egymásra, és

$$p = \frac{\sqrt{1-|\xi|}}{2}p_{e_1'} + \frac{\sqrt{1+|\xi|}}{2}p_{e_2'}.$$

Egy kicsit kényelmesebben kezelhető formába öntjük az állapotokat. Idézzük fel az operátorok nyomára vonatkozó ismerteinket. Jelölje $|e\rangle\langle e|$ az $e$ egységvektor alterére vetítő projektort. Ekkor bármely $P$ projektorra $P|e\rangle\langle e|$ nyomoperátor, hiszen tetszőges $x_i$ $(i \in \mathbb{N})$ teljes ortonormált rendszer esetén

$$\sum_i \langle x_i, (P|e\rangle\langle e)|x_i\rangle = \sum_i \langle x_i, Pe\rangle\langle e, x_i\rangle = \langle e, Pe\rangle$$

a Parseval-formula szerint; ezért

$$p_e(P) = \langle e, Pe\rangle = \mathrm{Tr}(P|e\rangle\langle e|).$$

Tehát a $p_e$ állapotot az $|e\rangle\langle e|$ önadjungált nyomoperátorral reprezentálhatjuk úgy, hogy az általa meghatározott valószínűségeket a fenti nyom-képettel számíthatjuk.

A $\sum_n \lambda_n p_{e_n}$ $\sigma$-konvex kombinációhoz pedig a

$$(s)\sum_n \lambda_n |e_n\rangle\langle e_n|$$

önadjungált nyomoperátort rendelhetjük úgy, hogy a valószínűségek operátorok nyomaként jelenik meg. (Nyomoperátorokra vonatkóazn lásd a mellékletet.)

Ezzel átfogalmazhatjuk Gleason tételét:

**19. Állítás.** *Ha* $\mathbf{H}$ *szeparábilis és* $\dim\mathbf{H} > 2$*, akkor* $\mathcal{P}(\mathbf{H})$*-n minden* $p$ *állapothoz létezik egy egyértelműen meghatározott* $W_p$ *egység nyomú önadjungált nyomoperátor – neve: Gleason-operátor – úgy, hogy bármely* $P$ *esemény (projektor) valószínűségét*

$$p(P)\mathrm{Tr}(PW_p) = \mathrm{Tr}(W_p P)$$

*adja meg.*

A továbbiakban kényelmes lesz magát a $W$ Gleason-operátort állapotnak hívni, és az általa meghatározott valószínűséget $p_W$-vel jelölni.

Egy Gleason-operátor a spektráltétel szerint előáll

$$(u)\sum_n \lambda_n |e_n\rangle\langle e_n|$$

alakba, ahol a $\lambda_n$-k a sajátértékei (multiplicitásssal számítva) és az $e_n$-ek sajátegységvektorai. Ez mutatja, hogy egy nem tiszta állapotot mindig felfoghatunk egymásra ortogonális egységvektorokhoz tartozó tiszta állapotok $\sigma$-konvex kombinációjának. Ha a Gleason-operátornak valamely nem-nulla sajátértékének a multiplicitása nagyobb 1-nél, akkor nem egyértelműek azok a tiszta állapotok, amelyek a $\sigma$-konvex kombinációban szerepelnek.

A tiszta állapotok és az elemi események között a fentiek szerint természetes egy-egy értelmű kapcsolat van. Az $|e\rangle\langle e|$ tiszta állapotban egy $P$ esemény valószínűségét a (1) képlet adja meg. Ha $P$ elemi esemény, azaz $P = |x\rangle\langle x|$ valamely $x$ egységvektorral, akkor

$$p_e(|x\rangle\langle x|) = |\langle e, x\rangle|^2. \tag{2}$$

$|e\rangle\langle e|$ tiszta állapot helyett értelemszerűen mindig tekinthetjük az $e$ egységvektort; így szokás a fizikában. Ezért a fenti képletet két állapot egymásra vonatkozó relációjának, úgynevezett átmeneti valószínűségnek nevezik (erről majd még szót ejtünk).

## 2.5. Várható érték, szórás

Mint tudjuk, egy valós fizikai mennyiség (valószínűségi változó) egy $P(\cdot) : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ projektormérték. Legyen $A := \hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ a hozzá tartozó önadjungált operátor. Az általános definíció szerint a fizikai mennyiség eloszlása a $W = \sum_n \lambda_n |e_n\rangle\langle e_n|$ állapotban az

$$E \mapsto \mathrm{Tr}(P(E)W) = \sum_n \lambda_n \langle e_n P(E) e_n \rangle$$

valószínűségi mérték.

Legyen $\mu_n(E) := e_n P(E) e_n\rangle$ (a projektormérték szerint integrálásnál használt jelöléssel $\mu_n = \mu_{e_n, e_n}$). A fizikai mennyiség eloszlását tehát $\sum_n \lambda_n \mu_n$ alakba írhatjuk.

Az $A$ önadjungált operátorral reprezentált fizikai menyyiség $m$-ik momentuma a $W$ állapotban

$$\eta_W^{(m)}(A) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^m d\left(\sum_n \lambda_n \mu_n\right),$$

feltéve, hogy az integrál létezik.

Ebből azonnal adódik, hogy ha $W$ véges összeg, és minden $e_n$ benne van az $A^m$ értelmezési tartományában vannak, akkor létezik az $m$-ik momentum (lásd a prjektormérték szerinti integrálást):

$$\eta_W^{(m)}(A) = \sum_{n=1}^{N} \langle e_n, A^m e_n\rangle = \mathrm{Tr}(A^m W).$$

Ami $\mathrm{Tr}(A^m W)$-t illeti, a mellékletben szereplő formulát kell alkalmazni véges összegre, az erdmény nyilvánvaló.

Vigyázat! Ha $A$ nem mindenütt értelmezett, akkor $\mathrm{Tr}(WA^m)$ biztosan nem létezik, mert ekkor választható olyan teljes ortonormált rendszer, amelynek legalább egy tagja nincs benne $A$ értelmezési tartományában.

Ha $W$ nem véges rangú, de $A$ korlátos operátor (a $P$ spektrálfelbontása kompakt tartójú), akkor fel lehet cserélni az integrálás és összegzés sorrendjét B.Levi tétele alapján, és ekkor

$$\eta_W^{(m)}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, A^m e_n\rangle = \mathrm{Tr}(A^m W) = \mathrm{Tr}(WA^m).$$

**20. Állítás.** *(Heisenberg-féle határozatlanság) Legyen $A$, $B$ és $C$ önadjungált operátor (azaz valós fizikai mennyiség). Teljesüljenek a következők:*

*(i) létezik egy $\mathcal{D} \subset \mathrm{Dom}S \cap \mathrm{Dom}B \cap \mathrm{Dom}C$ mindenütt sűrű lineáris altér, amely invariáns mindhárom operátorra,*

*(ii) $(AB - BA)x = iCx$ $(x \in \mathcal{D})$.*

*Legyen továbbá $W = \sum_n \lambda_n |e_n\rangle\langle e_n|$ olyan állapot, amely*

*(iii) véges rangú, ha $A, B, C$ valamelyike nem korlátos, és $e_n \in \mathcal{D}$ minden $n$-re.*

*Ekkor*

$$\sigma_W(A)\sigma_W(B) \geq \frac{1}{2}\left|\eta_W(C)\right|.$$

*Bizonyítás* Az adott feltételek mellett léteznek a szóban forgó szórások és várható érték. Ezért az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\eta_W(A) = \eta_W(B) = 0$. Ugyanis, ha nem így volna, akkor az $A' := A - \eta_W(A)I$, $B' := B - \eta_W(B)I$ ($I$ az egységoperátor) mennyiségek várható értéke nulla, és $A', B', C$ teljesítik a fenti feltételeket.

Vezessük be tetszőleges $\alpha$ valós számra a $T_\alpha := A + \alpha B$ operátort; $\mathcal{D}$ benne van ennek az értelmezési tartományában, és invaráns rá. Az adjungálás ismert tulajdonsága szerint $T_\alpha^* \supset A - i\alpha B$, és $T_\alpha^* T_\alpha$ is értelmezve van $\mathcal{D}$-n. Ezért létezik

$$\mathrm{Tr}(T_\alpha^* T_\alpha W) = \sum_n \lambda_n \langle e_n, T_\alpha^* T_\alpha e_n \rangle = \sum_n \lambda_n \langle T_\alpha e_n, T_\alpha e_n \rangle \geq 0.$$

Kifejtve a bal odlalt,

$$\mathrm{Tr}(A^2 W) + i\alpha \mathrm{Tr}(ABW) - i\mathrm{Tr}(BAW) + \alpha^2 \mathrm{Tr}(B^2 W) \geq 0.$$

A középső két tag helyett $-\alpha \mathrm{Tr}(CW)$ írható. Az $\alpha$-ban másodfokú kifejezés nem lehet negatív, tehát a diszkriminánsa nem lehet pozitív, azaz

$$\mathrm{Tr}(CW)^2 - 4\mathrm{Tr}(A^2 W(\mathrm{Tr}(B^2 W) \leq 0.$$

Ezzel igazoltuk az állítást, hiszen $\mathrm{Tr}(CW)^2 = \eta_W(C)^2$, $\mathrm{Tr}(A^2 W) = \big(\sigma_W(A)\big)^2$ és $\mathrm{Tr}(B^2 W) = \big(\sigma_W(B)\big)^2$. □

Igen erős ennek a határozatlansági relációnak a mondandója, ha $C$ az egységoperátor $c$ számszorosa. Ekkor a két fizikai mennyiség szórásának a szorzata bármely (a feltételnek eleget tevő) állapotban nagyobb vagy egyenlő, mint $\frac{|c|}{2}$.

Viszont jó tudni, hogy ez utóbbi esetben $A$ és $B$ nem lehet korlátos, tehát korátnsem kell minden állapotra teljesülnie a Heisenberg-féle határozatlanságnak. Íme:

**21. Állítás.** *Legyen $A$ és $B$ mindenütt értelmezett korlátos operátor úgy, hogy $AB - BA = cI$ valamely $c$ számra. Ekkor $c = 0$.*

*Bizonyítás* $A^2B - BA^2 = A^2B - ABA + ABA - BA^2 = 2cA$. Teljes indukcióval arra jutunk, hogy

$$A^n B - BA^n = cnA^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ha $A$ nilpotens, azaz létezik $n$ természetes szám úgy, hogy $A^n = 0$ de $A^{n-1} \neq 0$, akkor nyilván $c = 0$.

Ha $A^n \neq 0$ minden $n$-re, akkor véve a fenti egyenlőség mindkét oldalának a normáját, a $2\|A\|\ \|A^{n-1}\|\ \|B\| \geq |c|\ n\|A^{n-1}\|$ becslésből

$$|c| \leq \frac{2\|A\|\ \|B\|}{n}$$

adódik minden $n$-re, azaz $c = 0$.

A helyzet és impulzus (mint önadjungált operátorok) felcserélési relációjára alapozva azt mondják, hogy a Heisenberg-féle határozatlansági reláció szerint a helyzet és az impulzus egyidejű pontos mérésének abszolút elvi korlátja van, másként szólva, a helyzet és az impulzus egyszerre nem mérhető tetszőleges pontossággal. Ez azonban a határozatlansági reláció téves interpretációja.

Ugyanis a valószínűség – ezáltal a szórás és a várható érték is – a méréseken keresztül a relatív gyakorisággal van kapcsolatban, amelynek értelmezése

– nem szól egyidejű vagy különidejű mérésről,
– elvben pontos méréseket feltételez.

A téves interpretáció mögött az a klasszikus elképzelés áll, hogy a mérendő mennyiség határozott értékkel bír, a mérések során kapott különféle értékek a mérőeszköz hibájából, pontatlanságából erednek.

Van egy érdekes eredmény, amely a Heisenberg-féle határozatlansági relációra hajaz. Íme:

**22. Állítás.** *Legyen $Q$ az $L^2(\mathbb{R})$ karakterisztikus projektormértéke (helyzet) és $P$ ennek a Fourier-transzformáltja (impulzus), ha $E$ és $F$ korlátos Borel-halmaz, akkor $Q(E) \wedge P(F) = 0$.*

Szavakban: lehetetlen az az esemény, hogy a helyzet értéke is és az impulzus értéke is korlátos halmazba esik.

# 3. Melléklet

Tudjuk, hogy egy kompakt operátor

– spektruma diszkrét, legfeljebb megszámlálható sok pontból áll,
– sajátértékei csak a nullához torlódhatnak,
– minden nem nulla sajátértékéhez véges dimenziós sajátaltér tartozik.

Egy $K$ kompakt operátort **nyomoperátornak** hívunk, ha tetszőleges $x_i$ $i \in I$ teljes ortonormált rendszerre létezik

$$\mathrm{Tr}(K) := \sum_{i \in I} \langle x_i, K x_i \rangle$$

és független a teljes ortonormált rendszertől.

Legyen $W$ önadjungált kompakt operátor, $\{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ a sajátértékei mulitplicitással számolva, $e_n$ a $\lambda_n$-hez tartozó sajátvektor, úgy választva, hogy a sajátvektorok ortonormált rendszert alkossanak. Ekkor

$$W = (u) \sum_n \lambda_n |e_n\rangle\langle e_n|,$$

ahol $(u)$ az uniform (operátorok normájára vonatkokzó) összegzést jelöli. A spektráltételből azonnal adódik a gyenge összegzési formula, azaz hogy miden $x$ és $y$ vektorra

$$W = \sum_n \lambda_n \langle y, e_n \rangle \langle e_n, x \rangle,$$

és ebből nem nehéz becsléssel megkapjuk a normára vonatkozó konvergenciát is.

**23. Állítás.** *Ha $W = \sum_n \lambda_n |e_n\rangle\langle e_n|$ Gleason-operátor és $A$ korlátos operátor, akkor $AW$ és $WA$ nyomoperátor, és $\mathrm{Tr}(AW) = \mathrm{Tr}(WA)$.*

*Bizonyítás* Legyen $x_i$ $(i \in I)$ teljes ortonormált rendszer. ekkor

$$\sum_{i \in I} \langle x_i, AW x_i \rangle = \sum_i \sum_n \lambda_n \langle x_i, A e_n \rangle \langle e_n, x_i \rangle.$$

Viszgáljuk meg a kettős összegzés abszolút konvergenciáját a fordított sorrendben:

$$\sum_n \lambda_n \sum_i \bigl|\langle x_i, Ae_n\rangle\bigr| \, \bigl|\langle e_n, \xi\rangle\bigr|.$$

A második összeg a Cauchy-egyenlőtlenség és a Parseval-egyenlőség folytán nem nagyobb, mint $\|Ae_n\|\|e_{\|} \le \|A\|$, így a sor konvergens, tehát az eredeti sorrendű összeg is konvergens, és megegyezik a fordított sorrendű összeggel, ami

$$\sum_n \lambda_n \sum_i \langle x_i, Ae_n\rangle\langle e_n, \xi\rangle = \sum_n \lambda_n \langle e_n, Ae_n\rangle.$$

Teljesen hasonló érveléssel láthatjuk be, hogy $\mathrm{Tr}(WA)$ is létezik, és a fenti összeggel egyenlő.