

1. Általános valószínűségelmélet

1.1. Események

Valyamely fizikai (vagy egyéb, például gazdasági) rendszer leírásához intuitív képünk van arról, mik lehetnek a rendszer lehetséges eseményei és az azok közötti kapcsolatok. A legegyszerűbben, a szokásos módon a kockadobálással világíthatjuk meg az idevágó fogalmakat. A lehetséges események az 1-től a 6-ig a számok (ezek az úgynevezett elemi események), aztán a 4-nél kisebb szám, a 2-nél nagyobb szám, páros szám, stb. Röviden: az $\{1, \dots, 6\}$ halmaz összes lehetséges részhalmaza. Az egész halmaz (bármely szám) a biztos esemény, az üres halmaz (semmilyen szám) a lehetetlen esemény. Tudjuk, mit jelent

- az hogy, egy esemény maga után von egy másik eseményt (ha 2, akkor páros),
- két esemény együttese (4-nél kisebb és 2-nél nagyobb),
- két esemény akármelyike (4-nél nagyobb vagy 2-nél kisebb),
- egy esemény ellentettje (a 4-nél kisebb ellentettje a 4-nél nagyobb vagy egyenlő).

Általában sokkal több (végtelen sok) esemény van. A klasszikus valószínűségelméletben azt tesszük fel, az események egy alaphalmaz – jelöljük S -sel – bizonyos halmazainak σ -algebrája – jelöljük ezt $\mathcal{B}(T)$ -vel –, ami azt jelenti, hogy az egész halmaz, az üres halmaz benne van $\mathcal{B}(T)$ -ben, továbbá a $\mathcal{B}(T)$ megszámlálható sok elemének a közös része és egyesítése is benne van $\mathcal{B}(T)$ -ben, valamint a $\mathcal{B}(T)$ minden elemének a komplementere is benne van $\mathcal{B}(T)$ -ben. Ekkor, ha $A, B \in \mathcal{B}(T)$, $A_n \in \mathcal{B}(T)$ ($n \in \mathbb{N}$), akkor

- $A \subset B$ fejezi ki, hogy az A esemény maga után vonja a B eseményt,
- $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ jelenti az események együttesét,
- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ jelenti az események akármelyikét,
- $A^c := S \setminus A$ az A ellentettje.

Egy ilyen σ -algebrának alapvető tulajdonsága (a halmazelméleti műveletek tulajdonsága szerint) a disztributivitás:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

A kvantummechanika a klasszikus valószínűségelmélet eredményeitől eltérő eredményekre vezetett. Ezért általánosítani kell az események fenti struktúráját a következőképpen.

Egy S halmazon egy **rendezés** a \leq szimbólummal jelölt reláció, amely

- reflexív, azaz $a \leq a$,
- antiszimmetrikus, azaz ha $a \leq b$ és $b \leq a$, akkor $a = b$,
- tranzitív, azaz ha $a \leq b$ és $b \leq c$, akkor $a \leq c$.

az S bármely a, b, c elemére. **Korlátosnak** mondjuk a rendezést, ha van az S -nek egy **1**-gyel és egy **0**-val jelölt legnagyobb, illetve legkisebb eleme, azaz minden más a elemre $a \leq \mathbf{1}$ és $\mathbf{0} \leq a$ teljesül.

Az a, b elemek **legkisebb felső korlátja**, ha létezik, az az $a \vee b$ -vel jelölt elem, amely nagyobb-egyenlő mind a -nál és b -nél, és az ilyen tulajdonságú elemek közül a legkisebb; hasonlóan értelmezzük $a \wedge b$ -t, az a és b **legnagyobb alsó korlátját**. Hangsúlyozzuk, nem akármilyen rendezés esetén léteznek bármely

két elemre az így értelmezett korlátok. Hasonlóképpen értelmezzük nem csak kettő, hanem akárhány elem legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátját.

1. Definíció. Az \mathcal{L} halmazt **ortomoduláris σ -hálónak** hívjuk, ha adott rajta
– egy korlátos rendezés úgy, hogy bármely megszámlálható sok elemnek létezik legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátja azaz minden $a_n \in \mathcal{L}$ ($n \in \mathbb{N}$) esetén létezik

$$\bigvee_{n \in \mathbb{N}} a_n \quad \text{és} \quad \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_n,$$

- egy $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$, $a \mapsto a^\perp$ **ortokomplementáció** az
(i) $(a^\perp)^\perp = a$,
(ii) ha $a \leq b$, akkor $b^\perp \leq a^\perp$,
(iii) $a \wedge a^\perp = \mathbf{0}$, $a \vee a^\perp = \mathbf{1}$
valamint az **ortomodularitásnak** nevezett
(iv) ha $a \leq b$, akkor $b = a \vee (b \wedge a^\perp)$
tulajdonsággal.

$a \leq b$ esetén használjuk a $b \setminus a := b \wedge a^\perp$ jelölést.

Ha $a \leq b^\perp$ (és (ii) miatt ezzel egyidejűleg $b \leq a^\perp$), akkor azt mondjuk, hogy a és b **ortodiszjunkt**, jelölésben $a \perp b$.

Igen egyszerű belátni, hogy $\mathbf{0}^\perp = \mathbf{1}$, $\mathbf{1}^\perp = \mathbf{0}$. Továbbá, ha $a \perp b$, akkor $a \wedge b = \mathbf{0}$. Fontos viszont, hogy fordítva nem feltétlenül igaz: $a \wedge b = \mathbf{0}$ nem vonja maga után, hogy $a \perp b$.

Nyilvánvaló, hogy egy halmaz- σ -algebra ortomoduláris σ -háló a halmazelméleti rendezéssel és komplementációval. Az a fontos, hogy általában egy ortomoduláris σ -háló nem disztributív, azaz például $a \wedge (b \vee c)$ nem feltétlenül egyezik meg $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ -vel. Az ortomodularitás a disztributivitásnak egy igen gyengített változata, ugyanis ha a definiáló tulajdonságot kifejtjük a disztributivitás szerint, egyenlőséget kapunk: $a \vee (b \wedge a^\perp) = (a \vee b) \wedge (a \vee a^\perp) = b \wedge \mathbf{1} = b$.

1. Állítás. Ha $a_n \in \mathcal{L}$ ($n \in \mathbb{N}$), akkor

$$\left(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} a_n \right)^\perp = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_n^\perp, \quad \left(\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_n \right)^\perp = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} a_n^\perp.$$

Bizonyítás Az első egyenlőséget bizonyítjuk, a második már következik ebből az ortokomplementáció tulajdonságaiból.

Minden m -re $a_m \leq \bigvee_{n \in \mathbb{N}} a_n$, ezért $(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} a_n)^\perp \leq a_m^\perp$, amiből $(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} a_n)^\perp \leq \bigwedge_{m \in \mathbb{N}} a_m^\perp$.

Másrészt minden n -re $\bigwedge_{m \in \mathbb{N}} a_m^\perp \leq a_n^\perp$, ezért $a_n \leq (\bigwedge_{m \in \mathbb{N}} a_m^\perp)^\perp$, amiből $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} a_n \leq (\bigwedge_{m \in \mathbb{N}} a_m^\perp)^\perp$, azaz $\bigwedge_{m \in \mathbb{N}} a_m^\perp \leq (\bigvee_{n \in \mathbb{N}} a_n)^\perp$.

2. Definíció. Az \mathcal{L} ortomoduláris σ -háló egy \mathcal{L}_o részhalmazát **részobjektumnak** hívjuk, ha minden $a, a_n \in \mathcal{L}_o$ ($n \in \mathbb{N}$) esetén a^\perp , $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} a_n$ és $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_n$ is a \mathcal{L}_o eleme.

Egyszerű tény, hogy a fenti definícióban szereplő első és második tulajdonságból következik a harmadik, illetve az első és harmadik tulajdonságból következik a második.

Nyilvánvaló, hogy részobjektumok metszete részobjektum, ezért értelmes az \mathcal{L} bármely \mathcal{R} részhalmaza által **generált részobjektum**, mint az \mathcal{R} -et tartalmazó legszűkebb részobjektum.

Érdemes megjegyezni, hogy egy \mathcal{R} részhalmaz elemeiből a \wedge , \vee és \perp műveletekkel képezett összes lehetséges elem benne lesz az \mathcal{R} által generált részobjektumban, de általában annak nem minden eleme állítható elő így.

3. Definíció. Az \mathcal{L} ortomoduláris σ -háló egy e elemét **atomnak** hívjuk, ha abból, hogy $a \leq e$, $a = e$ vagy $a = \mathbf{0}$ következik.

Halmaz- σ -algebrákban az egy pont-halmazok az atomok.

4. Definíció. Legyen \mathcal{K} és \mathcal{L} ortomoduláris σ -háló. Egy $u : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ leképezést **orto- σ -homomorfizmusnak** hívunk, ha

- $u(h^\perp) = u(h)^\perp$,
 - $u\left(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} h_n\right) = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} u(h_n)$,
 - $u\left(\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} h_n\right) = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} u(h_n)$
- minden $h, h_n \in \mathcal{K}$ ($n \in \mathbb{N}$) esetén.

Egyszerű tény, hogy a fenti definícióban szereplő első és második tulajdonságból következik a harmadik, illetve az első és harmadik tulajdonságból következik a második. Ez azért fontos, mert ha egy leképezésről be akarjuk látni, hogy orto- σ -homomorfizmus, akkor elég az első és második, vagy első és harmadik tulajdonságot bizonyítani.

Igen egyszerű belátni, hogy $u(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $u(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, és ha $a \leq b$, akkor $u(a) \leq u(b)$.

Továbbá u értékészlete az \mathcal{L} részobjektuma; fontos tudnivaló, hogy ha az u értelmezési tartománya disztributív, akkor az értékészlete disztributív részobjektum.

Ugyancsak egyszerű belátni, hogy ha az u és v orto- σ -homomorfizmusok megegyeznek egy halmazon, akkor megegyeznek a halmaz által generált részobjektumon is.

Feltesszük, hogy a fizikára alkalmazott általános valószínűségelméletben az események egy \mathcal{L} ortomoduláris σ -hálót alkotnak. Eszerint a továbbiakban \mathcal{L} -t egyszerűen **eseményalgebrának** elemeit **eseményeknek** nevezzük; az atomok az **elemi események**. Az ortodiszjunkt eseményeket **egymást kizárónak** mondjuk.

1.2. Fizikai mennyiségek

Egy véges dimenziós V vektortér (sőt affin tér) Borel-halmazainak $\mathcal{B}(V)$ -vel jelölt összessége a nyílt halmazok által generált σ -algebra; nyilvánvalóan ez megegyezik a zárt halmazok generálta σ -algebrával.

A klasszikus valószínűségelméletben – ahol az eseményalgebra $\mathcal{B}(T)$, amelyről (ezért is jelöltük így) feltesszük, hogy Borel-féle σ -algebra – valószínűségi változónak a S -en értelmezett valós értékű Borel-mérhető függvényeket neveznek; általánosabban, valószínűségi vektorváltozó a S -en értelmezett V értékű Borel-mérhető függvény. Egy $f : S \rightarrow V$ függvény Borel-mérhető, ha minden $E \in \mathcal{B}(V)$ esetén $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(T)$. Tudjuk – és egyszerűen bizonyítható –, hogy f^{-1}

megtartja a halmazműveleteket, azaz halmazok metszetének, uniójának az f általi ősképe az ősképek metszete, illetve uniója, egy halmaz komplementerének az ősképe az őskép komplementere. Más szóval $f^{-1} : \mathcal{B}(V) \rightarrow \mathcal{B}(T)$ orto- σ -homomorfizmus.

A klasszikus mechanika és statisztikus fizika szokásos megfogalmazásában az események a fázistér Borel-halmazai, és a fizikai mennyiségek a fázistéren értelmezett vektor értékű függvények. A fizikai mennyiségektől bizonyos jó tulajdonságokat – például folytonosság, differenciálhatóság – szokás megkövetelni. A legáltalánosabb ilyen követelmény a Borel-mérhetőség.

Tehát a klasszikus fizikai mennyiségek a valószínűségelmélet fogalmaival valószínűségi vektorváltozók.

Ennek megfelelően, a fizikára alkalmazott általános valószínűségelmélet \mathcal{L} eseményalgebrája esetén **fizikai mennyiségnek** egy $u : \mathcal{B}(V) \rightarrow \mathcal{L}$ orto- σ -homomorfizmust nevezünk.

5. Definíció. Egy $u : \mathcal{B}(V) \rightarrow \mathcal{L}$ fizikai mennyiség tartója a

$$\text{Supp}(u) := \{v \in V \mid u(G) \neq \mathbf{0}, v \in G, G \text{ nyílt}\}$$

halmaz.

$s \in V$ az u éles pontja, ha $u(\{s\}) \neq \mathbf{0}$; az éles pontok összességét a $\text{Sharp}(u)$ jelöli.

Egyszerű tények a következők:

- $\text{Sharp}(u) \subset \text{Supp}(u)$,
- $\text{Supp}(u)^\delta = \bigcup \{G \text{ nyílt} \mid u(G) = \mathbf{0}\}$,
- $\text{Supp}(u) = \bigcap \{F \text{ zárt} \mid u(F) = \mathbf{1}\}$.

Egy éles pont jelentése: van olyan esemény, amelynek bekövetkeztekor a fizikai mennyiség a szóban forgó értékét veszi fel.

Egy tartóbeli pont jelentése: van olyan esemény, amelynek bekövetkeztekor a fizikai mennyiség „lényegében” a szóban forgó értékét veszi fel; pontosan: a tartó adott pontját tartalmazó bármely (kis) nyílt halmazhoz van olyan esemény, amelynek bekövetkeztekor a fizikai mennyiség az értékét abban a nyílt halmazban veszi fel.

Ha $\mathcal{L} = \mathcal{B}(T)$ és $u = f^{-1}$, akkor $\text{Sharp}(u) = \text{Ran}(f)$ és $\text{Supp}(u) = \overline{\text{Ran}(f)}$.

A klasszikus valószínűségelméletben valószínűségi változók (a klasszikus fizikában fizikai mennyiségek) egymáshoz való viszonyát is szokták vizsgálni úgy, hogy az $f_i : S \rightarrow V_i$ ($i = 1, \dots, n$) függvények $f := (f_1, \dots, f_n) : S \rightarrow V_1 \times \dots \times V_n$ együttes függvényt tekintik. Jelölje $pr_i : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow V_i$ az i -dik komponensre való vetítést. Nyilvánvaló, hogy $f_i = pr_i \circ f$, amiből $f_i^{-1} = f^{-1} \circ pr_i^{-1}$.

Ez indokolja a következő meghatározásunkat, ahol n természetes szám.

6. Definíció. Az $u_i : \mathcal{B}(V_i) \rightarrow \mathcal{L}$ ($i = 1, \dots, n$) fizikai mennyiségek együttese egy olyan $u : \mathcal{B}(V_1 \times \dots \times V_n) \rightarrow \mathcal{L}$ orto- σ -homomorfizmus, amelyre $u_i = u \circ pr_i^{-1}$ teljesül minden i esetén.

Általában fizikai mennyiségek együttese nem feltétlenül létezik. Ha létezik, akkor egyértelmű, ugyanis a definícióból következően meg van határozva a szorzattér Borel-oldalú tégláin, amelyek generálják a szorzattér Borel-halmazait (ugyanis például \mathbb{R}^n bármely nyílt halmaza előáll a benne levő racionális koordinátájú pontok körüli nyílt téglák megszámlálható uniójaként).

$\text{Ran}(u_i)$ mindegyike disztributív részobjektum, és – ha u létezik – benne van az ugyancsak $\text{Ran}(u)$ disztributív részobjektumban. Ezért a fizikai mennyiségek együttese csak akkor létezhet, ha az u_i -k kompatibilisek az alábbi meghatározás szerint.

7. Definíció. Az u_i ($i = 1, \dots, n$) fizikai mennyiségek **kompatibilisek**, ha a $\bigcup_i \text{Ran}(u_i)$ generálta részobjektum disztributív.

Tehát az együttes fizikai mennyiség létezésének szükséges – de általában nem elégséges – feltétele a kompatibilitás.

A klasszikus valószínűségelméletben valószínűségi változók összegét, szorzatát is szokták tekinteni. Az $f_1 : S \rightarrow V$ és $f_2 : S \rightarrow V$ függvények összege nem más, mint a függvények $f := (f_1, f_2)$ együttesének a $+$: $V \times V \rightarrow V$ összeadással vett kompozíciója. Áttérve a teljes inverzekre látjuk, hogy ennek megfelelően az $u_1 : \mathcal{B}(V) \rightarrow \mathcal{L}$ és $u_2 : \mathcal{B}(V) \rightarrow \mathcal{L}$ fizikai mennyiségek összege akkor értelmezhető, ha létezik a mennyiségek u együttese, és ekkor az összegük az $u \circ +^{-1} : \mathcal{B}(V) \rightarrow \mathcal{L}$ fizikai mennyiség. Értelmszerűen hasonlóan határozzuk meg valós fizikai mennyiségek szorzatát, két vektori fizikai mennyiség skaláris szorzatát (ha V -n adott skaláris szorzat), stb.

1.3. Állapotok

A klasszikus valószínűségelméletben az események bekövetkezésének relatív gyakoriságát egy a $\mathcal{B}(T)$ -n értelmezett, értékeit a $[0, 1]$ intervallumban felvevő mértékkel jellemzik. Ez a valószínűségi mérték függ a vizsgált rendszer aktuális körülményeitől. Gondoljunk a kockadobálásra: ha a szokásosan végezzük, akkor minden elemi esemény valószínűsége $\frac{1}{6}$; ha úgy ejtjük le a kockát körülbelül 4 cm magasról, hogy kezdetben mindig a 6-os van felül, akkor a 6-os valószínűsége jóval nagyobb lesz $\frac{1}{6}$ -nál, az 1-es valószínűsége pedig elenyészően kicsi. A havazás, szélvihar stb. valószínűsége a légkör aktuális viszonyaitól – állapotától – függ.

A mondottak indokolják a következő meghatározást.

8. Definíció. Az \mathcal{L} eseményalgebrán egy $p : \mathcal{L} \rightarrow [0, 1]$ leképezést **állapotnak** hívunk, ha

- $p(\mathbf{1}) = 1$,
- ha a_n ($n \in \mathbb{N}$) egymást páronként kizáró események, akkor

$$p\left(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} a_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p(a_n).$$

$p(a)$ az a **valószínűsége** a p állapotban.

2. Állítás. Ha p állapot, akkor

- (i) $p(\mathbf{0}) = 0$,
- (ii) $a \leq b$ esetén $p(a) \leq p(b)$.

Bizonyítás (i) $\mathbf{0} \perp \mathbf{1}$, így $p(\mathbf{1}) = p(\mathbf{0} \vee \mathbf{1}) = p(\mathbf{0}) + p(\mathbf{1})$.

(i) Az ortomodularitás szerint $b = a \vee (b \wedge a^\perp)$ és nyilván $a \perp (b \wedge a^\perp)$, ezért $p(b) = p(a) + p(b \wedge a^\perp)$.

9. Definíció. Egy állapotot **szórásmentesnek** hívunk, ha csak a 0 és 1 értéket vesz fel.

10. Definíció. A páronként különböző p_n ($n \in \mathbb{N}$) állapotok σ -konvex kombinációja egy $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n p_n$ alakú, „pontonként” értelmezett függvény, ahol $\lambda_n \geq 0$ és $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n = 1$. **Triviális** a σ -konvex kombináció, ha egy kivételével az összeg minden tagja nulla.

3. Állítás. Állapotok σ -konvex kombinációja állapot.

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy $\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n p_n\right)(\mathbf{1}) = 1$. Továbbá egymást kizáró események esetén – a pontonkénti értelmezés szerint –

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n p_n\right) \left(\bigvee_{m \in \mathbb{N}} a_m\right) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n p_n \left(\bigvee_{m \in \mathbb{N}} a_m\right) = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \sum_{m \in \mathbb{N}} p_n(a_m) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n p_n\right)(a_m). \end{aligned}$$

□

Megjegyezzük azt az egyszerű tényt, hogy ahol egy σ -konvex kombináció az 1, illetve a 0 értéket veszi fel, ott a benne szereplő nem nulla együtthatójú állapotok is az 1, illetve a 0 értéket veszik fel.

11. Definíció. Egy állapotot **tisztának** hívunk, ha nem áll elő nem triviális σ -konvex kombinációként.

Az előbbi megjegyzésünkből azonnal következik:

4. Állítás. Szórásmentes állapot tiszta.

Klasszikus esetben egy állapot $p : \mathcal{B}(T) \rightarrow [0, 1]$ szokásos mérték. A tartóját azok a $s \in S$ elemek alkotják, amelyekre igaz, hogy bármely az s -et tartalmazó N nyílt halmazra $p(N) \neq 0$.

Különösen érdekesek a Dirac-féle mértékek, amelyeknek a tartója egyetlen pont. δ_t -vel jelöljük azt a Dirac-mértéket, amelynek a tartója $\{s\}$, azaz bármely $E \in \mathcal{B}(T)$ esetén $p(E) = 1$, ha $s \in E$ és $p(E) = 0$, ha $s \notin E$.

5. Állítás. Klasszikus esetben egy állapotra a következő igaz:

$$\text{Dirac-féle} \iff \text{szórásmentes} \iff \text{tiszta}.$$

Bizonyítás Dirac-féle állapot nyilván szórásmentes, az pedig tiszta. Tehát csak azt kell, belátnunk, hogy egy tiszta állapot Dirac-féle.

Tegyük fel, hogy a p tiszta állapot nem Dirac-féle, azaz a tartójában van két különböző t_1 és t_2 pont. Legyen N_1 és N_2 olyan diszjunkt nyílt halmaz, hogy $t_1 \in N_1$, $t_2 \in N_2$. Ekkor $p(N_1) \neq 0$, $p(N_1^\complement) \geq p(N_2) \neq 0$. Definiáljuk a

$$p_1(E) := \frac{p(E \cap N_1)}{p(N_1)}, \quad p_2(E) := \frac{p(E \cap N_1^\complement)}{p(N_1^\complement)}$$

állapotokat. Nyilván $p_1 \neq p_2$ és $p = p(N_1)p_1 + p(N_1^\complement)p_2$, azaz p nem tiszta, ami ellentmondás.

1.4. Várható érték, szórás

Klasszikus valószínűségelméletben az $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változónak a p valószínűségi mértékre vonatkozó m -ik momentumát az f^m -nek ($m \in n \in \mathbb{N}$) a p szerinti integráljaként értelmezik (feltéve, hogy az integrál létezik). Az ismert integráltranszformációs formula szerint

$$\int_S f^m(s) dp(s) = \int_{\mathbb{R}} r^m d(p \circ f^{-1})(r).$$

Valószínűségi vektorváltozókra is értelmezhetők a momentumok, de az $1 < m$ esetben a definíció körülményesebb; az egyszerűség kedvéért maradunk a valós esetben, a lényegét ez is jól mutatja.

A mondottak alapján fogadjuk el a következő meghatározásokat.

12. Definíció. Az $u : \mathcal{B}(V) \rightarrow \mathcal{L}$ fizikai mennyiségnek a $p : \mathcal{L} \rightarrow [0, 1]$ állapotbeli eloszlása a $p \circ u : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ valószínűségi mérték.

13. Definíció. Az u valós fizikai mennyiségnek a p állapotbeli

– m -ik momentuma $\eta_p^{(m)}(u) := \int_{\mathbb{R}} id_{\mathbb{R}}^m d(p \circ u)$, feltéve, hogy az integrál létezik,

– várható értéke az első momentuma, $\eta_p(u) := \eta_p^{(1)}(u)$,

– szórása $\sigma_p(u) := \sqrt{\eta_p^{(2)}(u) - (\eta_p(u))^2}$.

6. Állítás. Szórásmentes állapotban bármely valós fizikai mennyiség

– eloszlása Dirac-féle mérték,

– szórása nulla.

Bizonyítás Mivel a p szórásmentes állapot csak a 0 és 1 értéket veszi fel, igaz ez $p \circ u$ -ra is bármely u esetén, tehát ez Dirac-mérték. Ha $\{t\}$ a $p \circ u$ tartója, akkor $\eta_p^{(m)}(u) = t^m$, amiből következik, hogy a szórás nulla.

2. Kvantumvalószínűség

Ebben a fejezetben \mathbf{H} egy komplex Hilbert-teret jelöl. I a \mathbf{H} identitás-operátora. A Hilbert-tér operátorai vonatkozó alapvető ismeretek a mellékletben találhatóak.

2.1. Események: zárt lineáris alterek

Legyen $\mathcal{M}(\mathbf{H})$ a Hilbert-tér zárt lineáris altereinek összessége. Jól ismert, hogy egy \mathbf{M} zárt lineáris altér ortogonális kiegészítője szintén zárt lineáris altér, amelyet szokásosan \mathbf{M}^\perp jelöl. Ha a zárt lineáris alterek között értelmezzük a rendezést a halmazelméleti tartalmazással, az ortokomplementációt az ortogonális kiegészítővel, akkor $\mathcal{M}(\mathbf{H})$ ortomoduláris σ -háló lesz:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} \leq \mathbf{N} &:= \mathbf{M} \subset \mathbf{N}, \\
\mathbf{1} &= \mathbf{H}, \\
\mathbf{0} &= \{0\}, \\
\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{M}_n &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{M}_n, \\
\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{M}_n &= \text{Span} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{M}_n \right), \\
\mathbf{M}^\perp &= \mathbf{M}^\perp,
\end{aligned}$$

ahol $\text{Span}(\cdot)$ az adott halmaz által generált zárt lineáris alteret jelöli, és nyilvánvalóan igaz, hogy ha $\mathbf{M} \leq \mathbf{N}$, akkor $\mathbf{N} = \mathbf{M} \vee (\mathbf{N} \wedge \mathbf{M}^\perp)$.

Igen fontos, hogy ha $\dim \mathbf{H} > 1$, akkor (\mathbf{H}) **nem disztributív**. Legyen ugyanis \mathbf{M} és \mathbf{N} olyan különböző egy dimenziós altér, amelyek nem ortogonálisak egymásra. Ekkor $\mathbf{M} \wedge \mathbf{N} = \{0\}$, $\mathbf{N} \vee \mathbf{M}^\perp = \mathbf{H}$, és ezért

$$(\mathbf{M} \wedge \mathbf{N}) \vee \mathbf{M}^\perp = \mathbf{M}^\perp \neq \mathbf{H} = (\mathbf{M} \vee \mathbf{M}^\perp) \wedge (\mathbf{N} \vee \mathbf{M}^\perp).$$

Megjegyezzük, $\mathcal{M}(\mathbf{H})$ teljes ortomoduláris háló, azaz nem csak megszámlálható sok, hanem tetszőleges számosságú zárt lineáris altérnek is létezik legkisebb felső korlátja és legnagyobb alsó korlátja.

Az elemi események az egy dimenziós lineáris alterek.

2.2. Események: ortogonális projektorok

14. Definíció. A $P : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ folytonos operátort ortogonális projektornak nevezzük, ha $P^2 = P$ és $P^* = P$.

Érdemes megjegyezni a definícióból eredő következő, gyakran használt összefüggéseket:

$$\langle y, Px \rangle = \langle Py, x \rangle = \langle Py, Px \rangle$$

minden $x, y \in \mathbf{H}$ esetén, aminek speciális eseteként

$$\langle x, Px \rangle = \|Px\|^2.$$

7. Állítás. Ha P ortogonális projektor, akkor $\text{Ran}(P) = \{x \in \mathbf{H} \mid Px = x\}$.

Bizonyítás Ha $Px = x$, akkor $x \in \text{Ran}(P)$; ha pedig $x \in \text{Ran}(P)$ akkor van olyan y , hogy $x = Py$, és $Px = P^2y = Py = x$. \square

8. Állítás. Ha P ortogonális projektor, akkor $\text{Ran}(P)$ és $\text{Ker}(P)$ zárt lineáris alterek és $\text{Ran}(P)^\perp = \text{Ker}(P)$.

Bizonyítás Folytonos operátor magja zárt lineáris altér. Ezért $\text{Ker}(P)$ zárt lineáris altér, $\text{Ran}(P)$ pedig az előzők szerint az $I - P$ operátor magtere.

A minden $x \in \mathbf{H}$ esetére fennálló $0 = \langle y, Px \rangle = \langle Py, x \rangle$ egyenlőségből azonnal adódik, hogy $y \in \text{Ran}(P)^\perp$ pontosan akkor, ha $y \in \text{Ker}(P)$. \square

Eredményeinkből rögtön következik, hogy $P \neq 0$ esetén $\|P\| = 1$ és $Px = x$ pontosan akkor, ha $\|Px\| = \|x\|$. Ugyanis $\|x\|^2 = \|Px + (I - P)x\|^2 = \|Px\|^2 + \|(I - P)x\|^2$, amiből általában $\|Px\| \leq \|x\|$ adódik, és ha $\|Px\| = \|x\|$, akkor $(I - P)x = 0$.

Ha \mathbf{M} zárt lineáris altér, akkor a Riesz-féle felbontási tétel szerint létezik egyértelműen egy $x_{\mathbf{M}} \in \mathbf{M}$ és egy $x_{\mathbf{M}^\perp} \in \mathbf{M}^\perp$ vektor úgy, hogy $x = x_{\mathbf{M}} + x_{\mathbf{M}^\perp}$.

9. Állítás. *Ha \mathbf{M} zárt lineáris altér, akkor a $P_{\mathbf{M}}: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$, $x \mapsto x_{\mathbf{M}}$ leképezés ortogonális projektor, $\text{Ran}(P_{\mathbf{M}}) = \mathbf{M}$ és $\text{Ker}(P_{\mathbf{M}}) = \mathbf{M}^\perp$.*

Bizonyítás Egyszerű tény, hogy $P_{\mathbf{M}}$ lineáris. Definíciója szerint minden $y \in \mathbf{H}$ esetén $P_{\mathbf{M}}(y) \in \mathbf{M}$ az egyetlen olyan vektor, melyre $y - P_{\mathbf{M}}(y) \in \mathbf{M}^\perp$ teljesül. Ezért minden $x \in \mathbf{H}$ esetén

$$P_{\mathbf{M}}(x) - P_{\mathbf{M}}(P_{\mathbf{M}}(x)) \in \mathbf{M} \cap \mathbf{M}^\perp = \{0\},$$

következésképpen $P_{\mathbf{M}}(x) = P_{\mathbf{M}}(P_{\mathbf{M}}(x))$, azaz $P_{\mathbf{M}}^2 = P_{\mathbf{M}}$.

Továbbá minden $x, y \in \mathbf{H}$ esetén $\langle y, P_{\mathbf{M}}x \rangle = \langle y_{\mathbf{M}} + y_{\mathbf{M}^\perp}, x_{\mathbf{M}} \rangle = \langle y_{\mathbf{M}}, x_{\mathbf{M}} \rangle = \langle y_{\mathbf{M}}, x_{\mathbf{M}} + x_{\mathbf{M}^\perp} \rangle = \langle P_{\mathbf{M}}y, x \rangle$, ami azt mutatja, hogy $P_{\mathbf{M}}^* = P_{\mathbf{M}}$, tehát $P_{\mathbf{M}}$ valóban ortogonális projektor.

Nyilvánvaló, hogy $\text{Ran}(P_{\mathbf{M}}) = \mathbf{M}$. Továbbá $P_{\mathbf{M}}(x) = 0$ definíció szerint ekvivalens azzal, hogy $x \in \mathbf{M}^\perp$, ezért $\text{Ker}(P_{\mathbf{M}}) = \mathbf{M}^\perp$. \square

Tehát a zárt lineáris alterek és az ortogonális projektorok kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak. Ugyanis, ha \mathbf{M} zárt lineáris altér, akkor $P_{\mathbf{M}}$ olyan ortogonális projektor, hogy $\text{Ran}(P_{\mathbf{M}}) = \mathbf{M}$. Ha P ortogonális projektor, akkor $\text{Ran}(P)$ zárt lineáris altér és $P_{\text{Ran}(P)} = P$.

Ezért az ortogonális projektorok összessége ortomoduláris σ -háló a zárt lineáris alterek műveleteinek az átvételével:

$$\begin{aligned} P \leq Q &:= \text{Ran}(P) \leq \text{Ran}(Q), \\ \mathbf{1} &= I, \\ \mathbf{0} &= 0, \\ \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} P_n &= \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \text{Ran}(P_n) \text{ projektora,} \\ \bigvee_{n \in \mathbb{N}} P_n &= \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \text{Ran}(P_n) \text{ projektora,} \\ P^\perp &= (\text{Ran}(P))^\perp \text{ projektora.} \end{aligned}$$

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért csak projektort mondunk ortogonális projektor helyett; összességüket $\mathcal{P}(\mathbf{H})$ fogja jelelni.

10. Állítás. *$P \leq Q$ pontosan akkor, ha $PQ = QP = P$*

Bizonyítás Az értelmezés szerint $P \leq Q$ egyenértékű azzal, hogy $QP_x = P_x$ minden x vektorra, azaz $QP = P$. Továbbá $PQ = P^*Q^* = (QP)^* = P^* = P$. \square

11. Állítás. (i) $P^\perp = I - P$,

(ii) Ha $PQ = QP$, akkor $P \wedge Q = PQ$ és $P \vee Q = P + Q - PQ$,

(iii) $P \leq Q$ esetén $Q \setminus P := Q \wedge P^\perp = Q - P$,

(iv) $P \perp Q$ akkor és csak akkor, ha $PQ = QP = 0$.

Bizonyítás (i) Nyilvánvaló az eddigiekből.

(ii) Ha $PQ = QP$, akkor $(PQ)^2 = PQ$ és $(PQ)^* = PQ$, azaz $PQ = QP$ projektor,

– amelynek az értékkészlete része $\text{Ran}(P)$ -nek és $\text{Ran}(Q)$ -nak is, tehát $PQ \leq P \wedge Q$,

– amelynek az értékkészlete tartalmazza $\text{Ran}(P)$ és $\text{Ran}(Q)$ metszetét, ugyanis ha $Px = x$ és $Qx = x$, akkor $PQx = x$, tehát $P \wedge Q \leq PQ$.

Továbbá $P \vee Q = (P^\perp \wedge Q^\perp)^\perp = I - (I - P)(I - Q) = P + Q - PQ$.

(iii) Nyilvánvaló az előzőekből.

(iv) $P \leq Q^\perp$ akkor és csak akkor, ha $P = P(I - Q)$ azaz $P = P - PQ$, ami egyenértékű azzal, hogy azaz $PQ = 0$. P és Q szerepét felcserélve kapjuk a másik egyenlőséget.

12. Állítás. *A P és Q projektorra $P \leq Q$ pontosan akkor teljesül, ha $\langle x, Px \rangle \leq \langle x, Qx \rangle$, vagy ami ugyanaz, $\|Px\|^2 \leq \|Qx\|^2$ minden $x \in \mathbf{H}$ esetén.*

Bizonyítás Ha $P \leq Q$, akkor $\langle x, Qx \rangle = \langle x, Q(P + (I - P))x \rangle = \langle x, Px \rangle + \langle x, (Q - P)x \rangle \geq \langle x, Px \rangle$.

Ha $\langle x, Px \rangle \leq \langle x, Qx \rangle$, akkor $x \in \text{Ran}(P)$ esetén $\|x\| = \|Px\| \leq \|Qx\| \leq \|x\|$, tehát mindenütt egyenlőségnek kell állnia, ami azt jelenti, hogy $x \in \text{Ran}(Q)$. \square

13. Állítás. (i) *Legyen P_n projektor, $P_n \geq P_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$). Ekkor*

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} P_n = (s) \lim_n P_n,$$

(ii) *Legyen P_n projektor, $P_n \leq P_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$). Ekkor*

$$\bigvee_{n \in \mathbb{N}} P_n = (s) \lim_n P_n,$$

ahol $(s) \lim$ a pontonkénti (úgynevezett „erős”) limeszt jelöli.

Bizonyítás A második összefüggést mutatjuk meg, az első másikat teljesen hasonlóan kezelhetjük.

Azt kell tehát belátnunk, hogy minden x -re létezik $\lim_n P_n x =: Px$, az így definiált P projektor, amely a P_n -ek legnagyobb alsó korlátja.

$n \mapsto \langle x, P_n x \rangle \geq 0$ monoton csökkenő, alulról korlátos számsorozat, tehát konvergens. Következésképpen Cauchy-féle, azaz $|\langle x, P_n x \rangle - \langle x, P_m x \rangle|$ „elég kicsi, ha n és m elég nagy”. Ezt átírva $|\langle x, (P_n - P_m)x \rangle| = \|(P_n - P_m)x\|^2$ adódik, hiszen $P_n - P_m$ illetve $P_m - P_n$ projektor, ha $n \leq m$, illetve $m \leq n$. Ebből az következik, hogy $n \mapsto P_n x$ Cauchy-sorozat a Hilbert-térben, tehát konvergens.

A határtékkal definiált P korlátos (folytonos), mert $\|Px\| = \|\lim_n P_n x\| = \lim_n \|P_n x\| \leq \lim_n \|x\| = \|x\|$.

Önadjungált, mert

$$\begin{aligned} \langle y, Px \rangle &= \langle y, \lim_n P_n x \rangle = \lim_n \langle y, P_n x \rangle = \lim_n \langle P_n y, x \rangle = \\ &= \langle \lim_n P_n y, x \rangle = \langle Py, x \rangle. \end{aligned}$$

Idempotens is (a négyzete önmaga), mert

$$\begin{aligned} P^2x &= P \lim_n P_n x = \lim_n P P_n x = \lim_n (\lim_m P_m P_n x) = \lim_n (\lim_m P_m x) = \lim_n P x = \\ &= P x. \end{aligned}$$

Az utolsó előtti egyenlőségénél azt használtuk ki, hogy ha $m \geq n$, akkor a monoton csökkenés miatt $P_m \leq P_n$.

P tehát projektor. Mint az előbb, $P P_n x = \lim_m P_m P_n x = \lim_m P_m x = P x$, ami azt jelenti, hogy $P \leq P_n$ minden n -re, azaz $P \leq \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} P_n$. Ha $x \in \text{Ran} P_n$ minden n -re, akkor $P_n x = x$ és így $P x = \lim_n P_n x = x$, ami azt jelenti, hogy $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} P_n \leq P$. \square

14. Állítás. (i) Legyenek P_n ($n \in \mathbb{N}$) páronként felcserélhető projektorok. Ekkor

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} P_n = (s) \lim_n \prod_{n \in \mathbb{N}} P_n.$$

(ii) Legyenek P_n ($n \in \mathbb{N}$) páronként egymásra ortogonális projektorok. Ekkor

$$\bigvee_{n \in \mathbb{N}} P_n = (s) \sum_{n \in \mathbb{N}} P_n.$$

Bizonyítás (i) A jobb oldali szimbólum az $n \mapsto Q_n := P_1 P_2 \dots P_n$ sorozat pontonkénti határértékét jelenti. Korábbi eredményünk szerint $Q_n = \bigwedge_{i=1, \dots, n} P_i$ és $Q_{n+1} \leq Q_n$, és $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} P_n = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} Q_n = \lim_n Q_n$.

(ii) A jobb oldali szimbólum az $n \mapsto Q_n := P_1 + P_2 + \dots + P_n$ sorozat pontonkénti határértékét jelenti. Korábbi eredményünk szerint $Q_n = \bigvee_{i=1, \dots, n} P_i$ és $Q_n \leq Q_{n+1}$, és $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} P_n = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} Q_n = \lim_n Q_n$. \square

Két felcserélhető projektorra \wedge és \vee egyszerű algebrai műveletekkel kifejezhető. Nem felcserélhetőkre is ismert egy formula (nem lesz szükségünk rá), amelyet bizonyítás nélkül közlünk:

$$P \wedge Q = (s) \lim_n (PQ)^n = (s) \lim_n (QP)^n = (s) \lim_n (QPQ)^n = (s) \lim_n (PQP)^n.$$

15. Állítás. A $\mathcal{P}(\mathbf{H})$ egy részobjektuma akkor és csak akkor disztributív, ha kommutatív.

Bizonyítás Ha a részobjektum kommutatív, akkor az előző eredményeink alapján $(P \vee R) \wedge (Q \vee R) = (P + R - PR)(Q + R - QR) = PQ + PR - PQR + RQ + R^2 - RQR - PRQ - PR^2 + PRQR = PQ + R - PQR = (P \wedge Q) \vee R$.

Ha a részobjektum disztributív, akkor bármely P, Q eleme esetén $P \wedge (P \wedge Q)^\perp = P \wedge (P^\perp \vee Q^\perp) = (P \wedge P^\perp) \vee (P \wedge Q^\perp) = P \wedge Q^\perp \leq Q^\perp$. tehát $P \wedge (P \wedge Q)^\perp = P - P \wedge Q$ ortogonális Q -ra, tehát $(P - P \wedge Q)Q = Q(P - P \wedge Q) = 0$, amiből $(P \wedge Q)Q = Q(P \wedge Q) = P \wedge Q$ alapján $PQ = QP$.

16. Állítás. $\mathcal{P}(\mathbf{H})$ páronként felcserélhető projektorokból álló \mathcal{R} részhalmaza által generált részobjektum disztributív.

Bizonyítás Az \mathcal{R} által generált az \mathcal{A} egységelemes operátoralgebra kommutatív. Ennek az erős topológiában vett $\overline{\mathcal{A}}$ lezártja is kommutatív; ugyanis, ha $A, B \in \overline{\mathcal{A}}$, akkor $A = (s) \lim_i A_i$, $B = (s) \lim_j B_j$, ahol $A_i, B_j \in \mathcal{A}$ átalánosított sorozatok elemei, és a szorzás meg az erős limesz felcserélhetősége szerint

$AB = BA$. Az eddigi eredményeink alapján az $\overline{\mathcal{A}}$ -beli projektorok összessége disztributív részobjektuma $\mathcal{P}(\mathbf{H})$ -nak, amely tartalmazza \mathcal{R} -et. \square

A Hilbert-hálók orto- σ -homorfizmusairól kevés jól használható eredmény van, kivéve egy igen fontosat, amelyet bizonyítás nélkül közlünk.

Ismert: Hilbert-terek közötti skalárszorzat-tartó lineáris bijekciót unitérnek hívunk.

15. Definíció. Legyen \mathbf{H} és \mathbf{H}' Hilbert-tér. Egy $U : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}'$ leképezés **antiunitér**, ha

- bijekció,
- konjugált lineáris, azaz $U(\alpha x + \beta y) = \alpha^* Ux + \beta^* Uy$,
- skalárszorzat-fordító, azaz $\langle Ux, Uy \rangle = \langle y, x \rangle$.

Ha $U : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}'$ unitér, vagy antiunitér, akkor nyilvánvaló, hogy $\mathcal{M}(\mathbf{H}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbf{H}')$, $\mathbf{M} \mapsto U[\mathbf{M}]$ orto- σ -izomorfizmus, továbbá U és λU ugyanazt az orto- σ -izomorfizmust határozza meg minden λ egységnyi abszolút értékű komplex szám esetén. Ennek bizonyos fordítottja is igaz:

17. Állítás. (Wigner tétele) Legyen \mathbf{H} és \mathbf{H}' kettőnél nagyobb dimenziós Hilbert-tér, és $S : \mathcal{M}(\mathbf{H}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbf{H}')$ orto- σ -izomorfizmus. Ekkor egységnyi abszolút értékű szorzó erejéig egyértelműen létezik $U : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}'$ unitér vagy antiunitér leképezés úgy, hogy $S(\mathbf{M}) = U[\mathbf{M}]$.

A projektorokra átvive, az izomorfizmusra a

$$\mathcal{P}(\mathbf{H}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{H}'), \quad P \mapsto UPU^{-1}$$

képletet kapjuk. Ugyanis ha az \mathbf{M} altér projektora P , az $U[\mathbf{M}]$ projektora P' , akkor $x' \in U[\mathbf{M}]$ esetén $P'x' = x'$, $PU^{-1}x' = U^{-1}x'$ és $UPU^{-1}x' = x'$.

Két dimenziós Hilbert-térre nem igaz az állítás. Íme az ellenpélda: legyen \mathbf{M}_0 egy dimenziós altér; az $\mathbf{M}_0 \mapsto \mathbf{M}_0^\perp$, $\mathbf{M} \mapsto \mathbf{M}$ ($\mathbf{M} \neq \mathbf{M}_0$) leképezés orto- σ -izomorfizmus, de nyilvánvalóan nem lehet unitér vagy antiunitér operátorral megadni.

2.3. Fizikai mennyiségek

Az általános definíciónak megfelelően a $\mathcal{P}(\mathbf{H})$ eseményalgebra esetén egy fizikai mennyiség valamely véges dimenziós V vektortér (vagy affin tér) Borel-halmazain értelmezett $\mathcal{P}(\mathbf{H})$ értékű orto- σ -homomorfizmus, vagyis projektormérték.

A projektormértékekre vonatkozó és a hozzájuk kapcsolódó fontos tudnivalók a mellékletben találhatóak.

A spektráltétel szerint valós projektormértékek és önadjungált operátorok között természetes kölcsönösen egyértelmű kapcsolat áll fenn az $\text{id}_{\mathbb{R}}$ -nek a projektormérték szerint integrálása által.

Ez magyarázza, miért bukkannak fel önadjungált operátorok a kvantummechanikában. Meg kell azonban jegyezni, hogy a nem valós projektormértékhez nem lehet önadjungált operátort társítani. Például a sokat használt (nemrelativisztikus) helyzetvektor fizikai mennyisége $Q : \mathcal{B}(\mathbf{E}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{H})$ projektormérték, ahol \mathbf{E} az abszolút térszerű vektorok összessége. Persze, ha egy bázis szerint koordinátázunk és $K_i : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ az i -ik koordinátafüggvény, akkor a helyzet i -ik

koordinátája a $\widehat{Q_i} := Q \circ K_i^{-1}$ valós projektormérték, amelyhez tartozó önadjungált operátor $Q \circ K_i^{-1}(\text{id}_{\mathbb{R}}) = \widehat{Q}(K_i)$. Hasonló mondható az impulzusról, amely $P : \mathcal{B}(\mathbf{E}^*) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{H})$ projektormérték.

Egy fizikai mennyiség – projektormérték – éles pontjainak és tartójának a jelentését ismerjük. Ez magyarázza egy önadjungált operátor sajátértékeinek és spektrumának valószínűségelméleti jelentőségét: ezek a spektrálfelbontásának az éles pontjai, illetve a tartója.

Két önadjungált operátor mint fizikai mennyiség akkor kompatibilis, ha erősen felcserélhető. Fontos, hogy a formális felcserélhetőségből nem következik az erős felcserélhetőség. Ezt azért érdemes hangsúlyozni, mert fizikai alkalmazásokban formális felcserélhetőséget szoktak tekinteni (mert azt egyszerű bizonyítani), és abból állítják, hogy a mennyiségek kompatibilisek.

A fizikai mennyiségek kompatibilitása – projektormértékek felcserélhetősége – elegendő ahhoz, hogy legyen együttesük (amit a projektormértékek szorzatának szokás nevezni).

Legyen P a P_1 és P_2 (az egyszerűség kedvéért valós) felcserélhető projektormértékek szorzata. Ez $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ -n van értelmezve és az jellemzi, hogy $P(E_1 \times E_2) = P_1(E_1)P_2(E_2)$; természetesen $P_i = P \circ \text{pr}_i^{-1}$ ($i = 1, 2$). Ha önadjungált operátorban gondolkozunk, akkor $S_i := \widehat{P}_i(\text{id}_{\mathbb{R}}) = \widehat{P}(\text{pr}_i)$.

Általában értelmeztük két olyan fizikai mennyiség összegét, amelyeknek van együttese. Tehát az előbbi P_1 és P_2 felcserélhető projektormértékek mint fizikai mennyiségek összege a $P \circ +^{-1}$ projektormérték (ahol persze $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ az összeadás-függvény). Önadjungált operátorokban: $S := \widehat{P}(+)$ és $S_1 + S_2 \subset S$. Vagyis általában nem az önadjungált operátorok összege maga fizikai mennyiség, hanem az összeg egy önadjungált kiterjesztése.

Érdekes, hogy nem kommutáló S és T önadjungált operátoroknak, mint fizikai mennyiségeknek az összegét is tudjuk értelmezni bizonyos feltételek mellett. Kínálja magát az $S + T$ összeg, csak hogy ez általában nem önadjungált, csak szimmetrikus ($(S + T)^* \supset S^* + T^* = S + T$). Az összeg fizikai mennyiség csak akkor értelmezhető, ha $S + T$ -nek van önadjungált kiterjesztése. Viszont általában az ilyen kiterjesztés nem egyértelmű, tehát kérdéses, melyik kiterjesztést fogadjuk el fizikailag értelmesnek. Kivétel, ha $S + T$ lényegében önadjungált, azaz egyetlen önadjungált kiterjesztése van.

2.4. Állapotok

2.4.1. Az állapotok jellemzése

Legyen $e \in \mathbf{H}$, $\|e\| = 1$. Egyszerű tény, hogy

$$p_e : \mathcal{P}(\mathbf{H}) \rightarrow [0, 1], \quad P \mapsto \langle e, Pe \rangle = \|Pe\|^2 \quad (1)$$

σ -additív leképezés, azaz állapot. Ez az állapot az e által kifeszített egy dimenziós altér projektorán az 1 értéket veszi veszi fel, az erre ortogonális projektorokon a 0 értéket; minden egyéb projektoron pedig 0-nál nagyobb, de 1-nél kisebb értéket. Tehát egy ilyen állapot nem szórásmentes.

Világos, hogy $p_e = p_{e'}$ akkor és csak akkor, ha $e' = \alpha e$, ahol $|\alpha| = 1$.

Ilyen állapotok σ -konvex kombinációja is állapot. Nem bizonyítjuk a következő igen fontos eredményt:

18. Állítás. (Gleason tétele) Ha \mathbf{H} szeparábilis és $\dim \mathbf{H} > 2$, akkor $\mathcal{P}(\mathbf{H})$ -n minden állapot egységvektorok meghatározta állapotok σ -konvex kombinációja.

Két dimenziós Hilbert-térre nem igaz az állítás. Legyen ugyanis P_0 egy dimenziós projektor; az az állapot ad egy ellenpéldát, amely P_0 -hoz és 0 -hoz nullát P_0^\perp -hoz és I -hez 1 -et rendel, minden más P projektorhoz $1/2$ -et.

19. Állítás. Kettőnél nagyobb dimenziós Hilbert-tér esetén nincs szórásmentes állapot. Az egységvektorok meghatározta állapotok tiszták.

Bizonyítás A nem-szórásmentesség nyilvánvaló.

Tegyük fel, hogy az e egységvektorhoz léteznek e_n ($n \in \mathbb{N}$) egységvektorok és $0 \leq \lambda_n \leq 1$ számok, $\sum_n \lambda_n = 1$ úgy, hogy $p_e = \sum_n \lambda_n p_{e_n}$. Ekkor az e kifeszítette altér P projektorára $1 = \sum_n \lambda_n \|Pe_n\|$, ami csak úgy lehet, hogy $\|Pe_n\| = 1$, azaz $e_n = \alpha_n e$ ($|\alpha_n| = 1$), ha $\lambda_n \neq 0$, tehát $p_{e_n} = p_e$: a szóban forgó állapot tiszta. \square

Ellentétben a klasszikus esettel, kettőnél nagyobb dimenziós szeparábilis Hilbert-tér esetén Gleason tétele értelmében

- nincsenek szórásmentes állapotok,
- minden állapot tiszta állapotok σ -konvex kombinációja.

Általában egy állapot nem határozza meg egyértelműen azokat a tiszta állapotokat, amelyeknek a σ -konvex kombinációja. Valóban, legyen például e_1 és e_2 nem párhuzamos egységvektor, és $p := \frac{1}{2}(p_{e_1} + \frac{1}{2}p_{e_2})$. A $\xi := \langle e_2, e_1 \rangle$ jelöléssel az

$$e'_1 := \frac{1}{2\sqrt{1-|\xi|}} \left(e_1 - \frac{\xi}{|\xi|} e_2 \right), \quad e'_2 := \frac{1}{2\sqrt{1+|\xi|}} \left(\frac{\xi}{|\xi|} e_1 + e_2 \right)$$

egységvektorok ortogonálisak egymásra, és

$$p = \frac{\sqrt{1-|\xi|}}{2} p_{e'_1} + \frac{\sqrt{1+|\xi|}}{2} p_{e'_2}.$$

Egy kicsit kényelmesebben kezelhető formába öntjük az állapotokat. Idézzük fel az operátorok nyomára vonatkozó ismerteinket. Jelölje $|e\rangle\langle e|$ az e egységvektor alterére vetítő projektort. Ekkor bármely P projektorra $P|e\rangle\langle e|$ nyomoperátor, hiszen tetszőleges x_i ($i \in \mathbb{N}$) teljes ortonormált rendszer esetén

$$\sum_i \langle x_i, P|e\rangle\langle e|x_i \rangle = \sum_i \langle x_i, Pe \rangle \langle e, x_i \rangle = \langle e, Pe \rangle$$

a Parseval-formula szerint; ezért

$$p_e(P) = \langle e, Pe \rangle = \text{Tr}(P|e\rangle\langle e|).$$

Tehát a p_e állapotot az $|e\rangle\langle e|$ önadjungált nyomoperátorral reprezentálhatjuk úgy, hogy az általa meghatározott valószínűségeket a fenti nyom-képpel számíthatjuk.

A $\sum_n \lambda_n p_{e_n}$ σ -konvex kombinációhoz pedig a

$$(s) \sum_n \lambda_n |e_n\rangle\langle e_n|$$

önadjungált nyomoperátort rendelhetjük úgy, hogy a valószínűségek operátorok nyomaként jelenik meg. (Nyomoperátorokra vonatkozóan lásd a mellékletet.)

Ezzel átfogalmazhatjuk Gleason tételét:

20. Állítás. Ha \mathbf{H} szeparábilis és $\dim \mathbf{H} > 2$, akkor $\mathcal{P}(\mathbf{H})$ -n minden p állapothoz létezik egy egyértelműen meghatározott W_p egység nyomú önadjungált nyomoperátor – neve: Gleason-operátor – úgy, hogy bármely P esemény (projektor) valószínűségét

$$p(P) = \text{Tr}(PW_p) = \text{Tr}(W_pP)$$

adja meg.

A továbbiakban kényelmes lesz magát a W Gleason-operátort állapotnak hívni, és az általa meghatározott valószínűséget p_W -vel jelölni.

A Gleason-operátorokra vonatkozó alapvető tudnivalók a mellékletben találhatóak.

Egy Gleason-operátor a spektráltétel szerint előáll

$$(u) \sum_n \lambda_n |e_n\rangle \langle e_n|$$

alakba, ahol a λ_n -k a sajátértékei (multiplicitással számítva) és az e_n -ek saját-egységvektorai. Ez mutatja, hogy egy nem tiszta állapotot mindig felfoghatunk egymásra ortogonális egységvektorokhoz tartozó tiszta állapotok σ -konvex kombinációjának. Ha a Gleason-operátornak valamely nem-nulla sajátértékének a multiplicitása nagyobb 1-nél, akkor nem egyértelműek azok a tiszta állapotok, amelyek a σ -konvex kombinációban szerepelnek.

A tiszta állapotok és az elemi események között a fentiek szerint természetes egy-egy értelmű kapcsolat van. Az $|e\rangle \langle e|$ tiszta állapotban egy P esemény valószínűségét a (1) képlet adja meg. Ha P elemi esemény, azaz $P = |x\rangle \langle x|$ valamely x egységvektorral, akkor

$$p_e(|x\rangle \langle x|) = |\langle e, x \rangle|^2. \quad (2)$$

$|e\rangle \langle e|$ tiszta állapot helyett értelemszerűen mindig tekinthetjük az e egységvektort; így szokás a fizikában. Ezért a fenti képletet két állapot egymásra vonatkozó relációjának, úgynevezett átmeneti valószínűségnek nevezik (erről majd még szót ejtünk).

2.4.2. Szuperpozíció és keverék

Tekintsük a ψ és φ egységvektoroknak megfelelő tiszta állapotokat; ezeknek

– egy *szuperpozíciója* egy $a\psi + b\varphi$ alakú egységvektornak megfelelő tiszta állapot, ahol a, b nemnulla komplex számok úgy, hogy $|a|^2 + 2\text{Re}(a^*b\langle\psi, \varphi\rangle) + |b|^2 = 1$

– egy *keveréke* egy $\alpha|\psi\rangle \langle\psi| + \beta|\varphi\rangle \langle\varphi|$ Gleason-operátor, ahol α, β pozitív számok úgy, hogy $\alpha + \beta = 1$.

Nem kell magyarázni, hogy a szuperpozíció és keverék lényegesen különböző, de érdemes ezt konkrét formálákkal megmutatni. A P esemény (projektor) valószínűsége a szuperpozícióban

$$|a|^2 \|P\psi\|^2 + 2\text{Re}(a^*b\langle P\psi, P\varphi\rangle) + |b|^2 \|P\varphi\|^2,$$

a keverékben

$$\alpha \|P\psi\|^2 + \beta \|P\varphi\|^2.$$

Ezek nem lehetnek egyenlők minden P esetén.

Ha $P\psi$ és $P\varphi$ ortogonálisak, és $\alpha = |a|^2$, $\beta = |b|^2$, akkor persze egyenlőség áll. Speciálisan, ha ψ és φ ortogonálisak, és P a ψ vagy a φ által meghatározott elemi esemény. Ez a néhány egyenlőség azonban nem jelenti a két állapot egyenlőségét.

Arról nem is szólva, hogy egy tiszta állapotot sokféleképpen lehet szuperpozícióként előállítani, így ugyanazon állapotnak sokféle keverék volna megfeleltethető; melyik az „igazi”? Lássunk egy konkrét példát! Tekintsük \mathbb{C}^3 -ban a $v := (0, 0, 1)$ vektor meghatározta tiszta állapotot. Legyen

$$v_1^+ := \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad v_1^- := \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$v_2^+ := \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad v_2^- := \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right);$$

ekkor v egyenlő a

$$\frac{1}{\sqrt{2}}v_1^+ + \frac{1}{\sqrt{2}}v_1^- \quad \text{és} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}v_2^+ + \frac{1}{\sqrt{2}}v_2^-$$

szuperpozíciókkal. Az ezeknek megfelelő keverékek Gleason-operátora

$$\frac{1}{2}|v_1^+\rangle\langle v_1^+| + \frac{1}{2}|v_1^-\rangle\langle v_1^-|, \quad \text{illetve} \quad \frac{1}{2}|v_2^+\rangle\langle v_2^+| + \frac{1}{2}|v_2^-\rangle\langle v_2^-|,$$

amelyek a v_1^+ és v_1^- által generált sík projektora, illetve a v_2^+ és v_2^- által generált, az előzőre merőleges sík projektora.

2.5. Várható érték, szórás

Mint tudjuk, egy valós fizikai mennyiség (valószínűségi változó) egy $P(\cdot) : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{H})$ projektormérték. Legyen $A := \hat{P}(\text{id}_{\mathbb{R}})$ a hozzá tartozó önadjungált operátor. Az általános definíció szerint a fizikai mennyiség eloszlása a $W = \sum_n \lambda_n |e_n\rangle\langle e_n|$ állapotban az

$$E \mapsto \text{Tr}(P(E)W) = \sum_n \lambda_n \langle e_n, P(E)e_n \rangle$$

valószínűségi mérték.

Legyen $\mu_n(E) := \langle e_n, P(E)e_n \rangle$ (a projektormérték szerint integrálásnál használt jelöléssel $\mu_n = \mu_{e_n, e_n}$). A fizikai mennyiség eloszlását tehát $\sum_n \lambda_n \mu_n$ alakba írhatjuk.

Az A önadjungált operátorral reprezentált fizikai mennyiség m -ik momentuma a W állapotban

$$\eta_W^{(m)}(A) = \int_{\mathbb{R}} \text{id}_{\mathbb{R}}^m d \left(\sum_n \lambda_n \mu_n \right),$$

feltéve, hogy az integrál létezik.

Ebből azonnal adódik, hogy ha W véges összeg, és minden e_n benne van az A^m értelmezési tartományában vannak, akkor létezik az m -ik momentum (lásd a projektormérték szerinti integrálást):

$$\eta_W^{(m)}(A) = \sum_{n=1}^N \langle e_n, A^m e_n \rangle = \text{Tr}(A^m W).$$

Ami $\text{Tr}(A^m W)$ -t illeti, a mellékletben szereplő formulát kell alkalmazni véges összegre, az eredmény nyilvánvaló.

Vigyázat! Ha A nem mindenütt értelmezett, akkor $\text{Tr}(WA^m)$ biztosan nem létezik, mert ekkor választható olyan teljes ortonormált rendszer, amelynek legalább egy tagja nincs benne A értelmezési tartományában.

Ha W nem véges rangú, de A korlátos operátor (a P spektrálfelbontása kompakt tartójú), akkor fel lehet cserélni az integrálás és összegzés sorrendjét B.Levi tétele alapján, és ekkor

$$\eta_W^{(m)}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, A^m e_n \rangle = \text{Tr}(A^m W) = \text{Tr}(WA^m).$$

21. Állítás. (Heisenberg-féle határozatlanság) Legyen A , B és C önadjungált operátor (azaz valós fizikai mennyiség). Teljesüljenek a következők:

(i) létezik egy $\mathcal{D} \subset \text{Dom}A \cap \text{Dom}B \cap \text{Dom}C$ mindenütt sűrű lineáris altér, amely invariáns mindhárom operátorra,

(ii) $(AB - BA)x = iCx$ ($x \in \mathcal{D}$).

(iii) Legyen továbbá $W = \sum_n \lambda_n |e_n\rangle\langle e_n|$ olyan állapot, amely véges rangú, ha A, B, C valamelyike nem korlátos, és $e_n \in \mathcal{D}$ minden n -re.

Ekkor

$$\sigma_W(A)\sigma_W(B) \geq \frac{1}{2} |\eta_W(C)|. \quad (3)$$

Bizonyítás Az adott feltételek mellett léteznek a szóban forgó szórások és várható érték. Ezért az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\eta_W(A) = \eta_W(B) = 0$. Ugyanis, ha nem így volna, akkor az $A' := A - \eta_W(A)I$, $B' := B - \eta_W(B)I$ (I az egységoperátor) mennyiségek várható értéke nulla, és A', B', C teljesítik a fenti feltételeket.

Vezessük be tetszőleges α valós számra a $T_\alpha := A + \alpha B$ operátort; \mathcal{D} benne van ennek az értelmezési tartományában, és invariáns rá. Az adjungálás ismert tulajdonsága szerint $T_\alpha^* \supset A - i\alpha B$, és $T_\alpha^* T_\alpha$ is értelmezve van \mathcal{D} -n. Ezért létezik

$$\text{Tr}(T_\alpha^* T_\alpha W) = \sum_n \lambda_n \langle e_n, T_\alpha^* T_\alpha e_n \rangle = \sum_n \lambda_n \langle T_\alpha e_n, T_\alpha e_n \rangle \geq 0.$$

Kifejtve a bal oldalt,

$$\text{Tr}(A^2 W) + i\alpha \text{Tr}(ABW) - i\text{Tr}(BAW) + \alpha^2 \text{Tr}(B^2 W) \geq 0.$$

A középső két tag helyett $-\alpha \text{Tr}(CW)$ írható. Az α -ban másodfokú kifejezés nem lehet negatív, tehát a diszkriminánsa nem lehet pozitív, azaz

$$\text{Tr}(CW)^2 - 4\text{Tr}(A^2 W) \text{Tr}(B^2 W) \leq 0.$$

Ezzel igazoltuk az állítást, hiszen $\text{Tr}(CW)^2 = \eta_W(C)^2$, $\text{Tr}(A^2 W) = (\sigma_W(A))^2$ és $\text{Tr}(B^2 W) = (\sigma_W(B))^2$. \square

Igen erős ennek a határozatlansági relációnak a mondandója, ha C az egységoperátor c számszorosa. Ekkor a két fizikai mennyiség szórásának a szorzata bármely, a feltételnek eleget tevő állapotban nagyobb vagy egyenlő, mint $\frac{|c|}{2}$.

Viszont jó tudni, hogy ez utóbbi esetben A és B nem lehet korlátos, tehát korántsem kell minden állapotra teljesülnie a Heisenberg-féle határozatlanságnak. Íme:

22. Állítás. Legyen A és B mindenütt értelmezett korlátos operátor úgy, hogy $AB - BA = cI$ valamely c számra. Ekkor $c = 0$.

Bizonyítás $A^2B - BA^2 = A^2B - ABA + ABA - BA^2 = 2cA$. Teljes indukcióval arra jutunk, hogy

$$A^n B - BA^n = cnA^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ha A nilpotens, azaz létezik n természetes szám úgy, hogy $A^n = 0$ de $A^{n-1} \neq 0$, akkor nyilván $c = 0$.

Ha $A^n \neq 0$ minden n -re, akkor véve a fenti egyenlőség mindkét oldalának a normáját, a $2\|A\| \|A^{n-1}\| \|B\| \geq |c| n\|A^{n-1}\|$ becslésből

$$|c| \leq \frac{2\|A\| \|B\|}{n}$$

adódik minden n -re, azaz $c = 0$. □

3. Elmélet és valóság

3.1. Modellalkotás

Vizsgáljuk meg most egy kicsit alaposabban azt, hogyan jutunk el az események, fizikai mennyiségek, állapotok fogalmához.

A valóság egy bizonyos, jól elkülöníthető részének – egy „rendszernek” – a jelenségeit, történéseit akarjuk leírni. Itt az első bökkenő: soha, semmi sem különíthető el teljesen a valóság többi részétől. Tehát kérdés, mi is az a **rendszer**. A fizikát tekintve a valóság szembeötlő objektumait első közelítésként két csoportra vágjuk szét: „tárgyakra” és „fényekre”. Természetesen, tapasztalataink szerint, ezen csoportok objektumai nem függetlenek egymástól, kölcsönhatnak egymással. Az első csoportba tartoznak a mechanikai rendszerek, amelyekkel foglalkozni fogunk. Mondandónk eleve akkor lesz érvényes, ha ezeknek az elektromágneses mezővel (fényvel) való kapcsolata elhanyagolható.

Ha le akarjuk írni a jelenségeket, akkor információt kell róluk gyűjtenünk, az pedig csak úgy lehetséges, ha mi – legalábbis olykor-olykor – kapcsolatban állunk a rendszerrel. Ezen kapcsolat révén kapunk intuitív képet arról, hogy mik történhetnek meg a rendszerrel; ezeket a **rendszer eseményeinek** nevezzük. A szükséges információkhoz bizonyos mérésekkel jutunk. A mérések arra irányulnak, „bekövetkezett-e” egy esemény vagy sem: úgy fogjuk fel, hogy a mérés az esemény bekövetkezésére vonatkozó **igen-nem** kérdésre adott válasz. Itt az újabb, nagy bökkenő: mit jelent a bekövetkezés, mikor állíthatjuk, hogy egy esemény bekövetkezett.

A rendszer bizonyos eseményei „azonos jellegűek”, egy ilyen jelleg szerint csoportosított eseményekkel jutunk el a **fizikai mennyiség** fogalmához.

A méréseket bizonyos megadott eljárásokkal végrehajtott „előkészítések” után végezzük. Egy ilyen előkészítés létrehozza a **rendszer egy állapotát**. Sok-sok azonos előkészítés utáni – tehát azonos állapotbeli – mérésekkel megállapítjuk az események relatív gyakoriságát, amivel jellemezzük az állapotot.

A méréseket az előkészítés után, tehát bizonyos idő elteltével végezzük; arról is van valami tudomásunk, elképzelésünk, hogy a rendszer hogyan változik az idő múlásával, szokásos szóval élve, milyen a **rendszer időfejlődése**.

A mondottakban mindenütt ott van a *bizonyos*. Így ez nesze semmi fogd meg jól.

Megfoghatóvá tesszük úgy, hogy matematikai modellt alkotunk, vagyis pontos matematikai struktúrába foglaljuk tapasztalatunkat. Igen fontos:

(i) a matematikai modell nem a valóság, hanem annak – sőt csak egy részének – az égi mása,

(ii) a modell nem tükrözi a teljes valóságrészt, és tartalmazhat olyan matematikai objektumokat, amelyek nem feleltethetők meg tapasztalatainknak,

(iii) a modellen kívül esik az, hogy a benne szereplő matematikai fogalmaknak milyen valóság-interpretációt adunk,

(iv) a modell nem írja le a modell-alkotásban alapvető szerepet játszó információszerzésünk mikéntjét, vagyis a méréseket,

(v) miután megalkottuk a modellt, szigorúan ragaszkodnunk kell a benne foglaltakhoz, nem szabad kívülről behozott fogalmakkal érvelnünk.

Az eddig tanulmányainknak megfelelően egy mechanikai modell egy

$$(\mathcal{L}, \mathcal{F}, \mathcal{P}, T)$$

rendezett négyes, ahol

1. \mathcal{L} egy ortomoduláris σ -háló, elemei a **rendszer eseményei**,

2. $\mathcal{F} = \{(u_k : \mathcal{B}(S_k) \rightarrow \mathcal{L} \mid k \in H)\}$, ahol H valamely véges halmaz, u_k -k orto- σ -homomorfizmusok, a **rendszer fizikai mennyiségei**, amelyek értékkészletei generálják \mathcal{L} -t („elég sokan vannak a rendszer eseményeinek a jellemzére”), (Ha \mathcal{L} halmazalgebra, akkor a fizikai mennyiségek függvények teljes inverzei, ezért kényelmes magukat a függvényeket tekinteni fizikai mennyiségeknek.)

3. \mathcal{P} az \mathcal{L} -n adott valószínűségi mértékek egy σ -konvex halmaza, a **rendszer állapotai**, amelyek szétválasztják \mathcal{L} elemeit, azaz ha $a, b \in \mathcal{L}$, akkor van olyan $p \in \mathcal{P}$, hogy $p(a) \neq p(b)$,

4. $T : I \times I \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, $(t, s, p) \mapsto T_{t,s,p}$ a **rendszer időfejlődése**, ahol I az időpontok halmaza, és jelentését tekintve $T_{t,s,p}$ az a t pillanatbeli állapot, amely az s pillanatbeli p állapotból jött létre.

Itt meg kell jegyeznünk, amiről eddig még nem szóltunk: ahhoz, hogy minden a helyén legyen, a téridőről is kell valamit mondanunk, mert csak ezzel nyer pontos értelmet az, hogy én - egy megfigyelő - csinálom a kísérleteket, tehát valójában nem a rendszer önmagában való eseményeiről van szó, hanem az általam észlelt eseményekről; más, más eseményeket észlelhet. Továbbá az idő fogalma is megjelenik a modellalkotásban; ilyen formában *csak a nemrelatívisztikus téridőben helytálló*.

Alapvető elvárásunk, hogy tapasztalataink szerint különböző, de „ugyanolyan” rendszereknek modelljei, illetve egy rendszernek különféle megfigyelők felállította modelljei legyenek „ugyanolyanok”, matematikai nyelven „izomorfak”, különbözőké pedig legyenek különbözők, azaz nem izomorfak.

Azt mondjuk, hogy az $(\mathcal{L}, \mathcal{F}, \mathcal{P}, T)$ és $(\mathcal{L}', \mathcal{F}', \mathcal{P}', T')$ mechanikai modell **izomorf**, ha – értelemszerű jelöléssel –

(i) létezik $h : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ orto- σ -izomorfizmus,

(ii) létezik $r : H \rightarrow H'$ bijekció,

(iii) minden $k \in H$ esetén létezik $f_k : S'_{r(k)} \rightarrow S_k$ bijekció, úgy, hogy

$$1. \quad f_k^{-1} : \mathcal{B}(S_k) \rightarrow \mathcal{B}(S'_{r(k)}),$$

$$2. \quad h \circ u_k = u'_{r(k)} \circ f_k^{-1},$$

3. $\mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$, $p' \mapsto p' \circ h$ bijekció,
4. $(T'_{t,s}p') \circ h = T_{t,s}(p' \circ h)$ minden t, s és p' esetén.

3.2. Szemléltetés

A kockadobálás „rendszerei” nem mechanikai rendszerek, de kiválóan alkalmasak arra, hogy az időfejlődést kivéve szinte mindent jól megmagyarázzunk velük.

Vegyünk egy szokásos kockát, oldalain a pontozásokkal, és dobjuk egy sima, vízszintes lapra. Tapasztalatunk szerint egy darabig pattog, gurul, aztán megáll. Nem érdekel minket, mennyit pattog, gurul, csak az, hogy megáll, és melyik lapja néz fölfelé: ezek az elemi eseményei, vagyis az események összessége a $\{\{\bullet\}, \{\bullet \bullet\}, \dots\}$ hat elemű halmaz összes részhalmaza. Egyetlen fizikai mennyisége az L identitása. Állapotai a dobások minőségét jelentik: attól függően, hogyan készítjük elő dobást, jól megrázva elég magasról, vagy épp ellenkezőleg, elég alacsonyról, meghatározott állásból, más és más lesz az események relatív gyakorisága.

Vegyünk egy másik kockát, amelyiknek az oldalai arab számokkal vannak megjelölve, minden mást ugyanúgy tegyünk vele, mint az előzővel. Ez más rendszer lesz, de izomorf az előzővel. Az is ezekkel izomorf rendszer lesz, ha a oldalak különböző színűek.

Vegyünk most egy olyan kockát, amelynek szemben levő oldalain az 1,2,3 számok szerepelnek, és a szemben levő oldalak közül az egyik fehér, a másik fekete. Ennek a rendszernek az elemi eseményei az $L := \{1, 2, 3\} \times \{\text{fehér, fekete}\}$ halmaz elemei. Két fizikai mennyisége van: az $L \rightarrow \{1, 2, 3\}$ és az $L \rightarrow \{\text{fehér, fekete}\}$ kanonikus projekció teljes inverze. Állapotait ugyanúgy határozzuk meg, mint előbb. Ez a rendszer nem izomorf az előzőekkel, mert ott egy, itt két fizikai mennyiség van.

Vegyünk most egy olyan kockát, az egyszerűségért arab számokkal, amely „nem tisztességes”: egy kis ólomgolyó van benne a középponttól valamelyik oldal irányában. Az események maradnak, amik voltak, az állapotok is, de adott előkészítéshez (rázás) más állapot (relatív gyakoriság) jön létre, mint az előzőeknél. Ezt azzal tudjuk kifejezni a modellben, hogy új fizikai mennyiségeket vezetünk be, amely jellemzik a golyó tömegét és helyzetét; a tömeget a kocka tömegéhez viszonyított arányával, egy $L \rightarrow [0, 1]$ konstans függvénnyel jellemezzük, helyzetét pedig egy $a : L \rightarrow [-1, 1]$ függvénnyel, úgy hogy például $a(2) = a(4) = a(3) = a(5) = 0$, $a(1) = 0,2$, $a(6) = -0,2$ azt jelenti, hogy a golyó a 6-os oldal felé a középponttól a távolság ötödén helyezkedik el.

Eddigi példáink azt mutatták, ugyanolyan körülmények között más-más objektumok alkottak más-más rendszert. A következő példa arra világít rá, hogy ugyanaz az objektum különféle körülmények között különféle rendszert eredményez.

Maradjunk a szokásos kockánál, az egyszerűség kedvéért arab számokkal. Azonban ne sima lapra dobjuk, hanem olyanra, amelyen bevágások vannak, és ezeknek a következtében a kocka megállhat úgy is, hogy egy éle van felfelé. Egy ilyen élet a két összefutó oldal számaival jellemezzük. Ekkor tehát a rendszer elemi eseményei az $\{1, \dots, 6, (1, 2), (1, 3), \dots, (5, 6)\}$ halmaz, vagyis az $L \cup ((L \times L) \setminus \{(1, 6), (2, 5), (3, 4)\})$ halmaz elemei. Az eseményeket „jellegüknél” fogva két csoportra oszthatjuk: lapok és élek. Ezért két fizikai mennyiséget vezetünk be:

$$f_1(i) := i, \quad f_1(i, k) := 0,$$

$$f_2(i) := 0, \quad f_2(i, k) := (i, k).$$

Az állapotelőkészítések ugyanazok, mint előbb, de az állapotok merőben mások, hiszen itt lényegesen több az esemény.

A tárgyalt rendszerek mechanikai analogonjai:

1. ugyanolyan körülmények között különböző tömegpontok: például ugyanazon a két-réses falon áthaladó elektron, illetve proton,
2. különböző körülmények között ugyanaz a tömegpont: például egy-réses, illetve két-réses falon áthaladó elektron, más-más rendszerek, és ugyanolyan állapotelőkészítés után más-más az állapot (amit az ernyőn a különböző eloszlás mutat).

Még egy megjegyzés kívánkozik ide: egy mechanikai rendszer sok-sok azonos eljárással előkészített példányának összességét **statisztikai sokaságnak** nevezük, egy példányt pedig a sokaság egy **egyedének**. A szóban forgó értelmezéssel nyilvánvaló, hogy az állapot a sokaságra vonatkozik, nem az egyedekre külön-külön. Kérdéses tehát, *jogos-e azt mondani a sokaság egy elemére, hogy az adott állapotban van*; már pedig ez szokásos.

3.3. Klasszikus leírás

A klasszikus mechanika megalkotta a fázistér fogalmát, azt a színteret, ahol a történések zajlanak. A klasszikus statisztikus fizika is a fázistérre épít, azon ad meg eloszlásokat, amellyel valószínűségi formulákat határoz meg. Egyszerű tény, hogy

1. egy mechanikai rendszer eseményei a fázistérnek Borel-halmazai,
2. fizikai mennyiségei a fázistéren értelmezett függvények (teljes inverzei)
3. állapotai közönséges valószínűségi mértékek a fázistéren,
4. időfejlődését a Newton-egyenlet (vagy a Hamilton-egyenlet) megoldásai adják meg.

Egy kicsit közelebről: egy kényszermentes tömegpont fázistere a helyzetek \mathbf{E} és az impulzusok \mathbf{E}^* terének Descartes-szorzata, $\mathbb{F} : \mathbf{E} \times \mathbf{E}^*$. A fizikai mennyiségek között mindenképpen szerepel a helyzet és az impulzus, a $\mathbf{Q} : \mathbb{F} \rightarrow \mathbf{E}$ és a $\mathbf{P} : \mathbb{F} \rightarrow \mathbf{E}^*$ kanonikus projekciók, ezek teljes inverzeinek értékkészlete generálja a fázistér Borel-halmazait. Az állapotok az összes valószínűségi mérték.

Eddig minden ugyanaz minden tömegpontra. A modellben tükröződnie kell annak, hogy különböző tömegű pontokról lehet szó, különböző körülmények között (erőhatások alatt).

Ezt a Hamilton-függvénnyel valósítjuk meg: egyrészt, mint a helyzeten és impulzuson túl egy új fizikai mennyiséggel, másrészt mint az időfejlődést generáló függvénnyel.

Két tömegpont fázistere az egy-pont fázisterek Descartes-szorzata, így nyilvánvaló, hogy két tömegpont esemény-hálója (Borel-halmazainak összessége) nem izomorf egy tömegpont esemény-hálójával, tehát semmilyen két tömegpontú rendszer nem lehet izomorf egy tömegpontú rendszerrel.

Végül még szóba kell hoznunk valamit. Nevezetesen, helyzete és impulzusa egy tömegpontnak önmagában nem létezik, csak helyzete és impulzusa egy megfigyelőhöz képest. A fázistér tehát nem a részecskék önnön jellemzője. A fázistér Borel-halmazai nem a részecske eseményei, hanem az eseményei, ahogy egy megfigyelő észleli. Más megfigyelő szerint mások a helyzetek, az impulzusok, más a

fázistér, sőt más az időfejlődés is. Persze a különböző megfigyelők szerint ugyanarra rendszerre megalkotott modellek izomorfak a megfigyelőket összekapcsoló Noether- (Galilei-)transzformáció által.

Továbbá, ha téridőn megfigyelő-mentes megfogalmazást akarunk adni, akkor kiderül, hogy át kell értékelni az eddig mondottakat, nevezetesen egy tömegpont elemi eseménye nem egy helyzet- és impulzusérték, (nem „itt van és ennyi az impulzusa”), hanem egy folyamat („ez történik vele”), vagyis az időfejlődés az események „belső tulajdonsága”.

3.4. Kvantumos leírás

A kvantummechanikában a fázistér helyett megjelenik egy Hilbert-tér, és a következő mondható.

1. Egy kvantummechanikai rendszer eseménytere egy szeparábilis Hilbert-tér projektorhálójá,
2. fizikai mennyiségei projektormértékek,
3. állapotai Gleason-operátorok (által meghatározott valószínűségi mértékek),
4. időfejlődését a Schrödinger-egyenlet megoldásai adják meg.

Egy tömegpont fizikai mennyiségei, analógiában a klasszikus esettel, a $Q : \mathcal{B}(\mathbf{E}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{H})$ helyzet és a $P : \mathcal{B}(\mathbf{E}^*) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{H})$ impulzus, amelyeket a Heisenberg-féle felcserélés (pontosabban a Fourier-transzformáció) köt össze, és amelyek generálják az eseményteret; továbbá az energia (Hamilton-operátor), és ez utóbbi határozza meg az időfejlődést is. Ily módon a különböző tömegpontoknak különböző körülmények közötti modelljei nem izomorfak.

Két tömegponttal kapcsolatban egy kicsit mással találjuk magunkat szembe, mint klasszikusan, ugyanis minden esetben az eseménytér egy szeparábilis Hilbert-tér projektor-hálójá, és ezek izomorfak. Igaz, ha egy tömegpont Hilbert-tere \mathbf{H} , akkor két tömegpont Hilbert-terét $\mathbf{H} \otimes \mathbf{H}$ alakban szokás venni, azonban \mathbf{H} és $\mathbf{H} \otimes \mathbf{H}$ mindkettő szeparábilis, ezért létezik közöttük unitér leképezés, így a projektorhálóik izomorfak.

Itt nagyon hatásosan a fizikai mennyiségek különböztetik meg a rendszereket. Nevezetesen, két tömegpont esetén $Q_1 := Q \otimes I : (\mathbf{E}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{H} \otimes \mathbf{H})$, $Q_2 := I \otimes Q$, $P_1 := P \otimes I$ és $P_2 := I \otimes P$ generálják az esemény-hálót, amelyet azért állítunk elő tenzorszorzat alakban, hogy ezeket a fizikai mennyiségeket kényelmesen tudjuk megadni.

Természetesen itt is felmerül a kérdés a megfigyelőtől való függés, és hasonlóképp (csak matematikailag bonyolultabban) kapjuk, hogy a különböző megfigyelők szerint ugyanarra rendszerre megalkotott modellek izomorfak.

3.5. A klasszikus mechanika ideológiája

Tekintsünk tömegpontok rendszerét. A rendszer állapot-előkészítése a helyzet- és impulzusértékek megadása. Ez elvben lehetséges; ha csak egy-két tömegpontról van szó, akkor lényegében gyakorlatilag is lehetséges. Nagyon sok tömegpontra – egy test molekuláira – azonban már gyakorlatilag lehetetlen. A klasszikus statisztikus mechanika felfogása szerint a sok-részecske rendszer valójában pontosan meghatározott, a leírásra használt valószínűség csak gyakorlati szükség-szerűség, amely a mi tudásunk hiányában jelenik meg. Persze nem csak sok részecskére, hanem egyetlenre is felmerülhet a gyakorlatban a valószínűség.

Egy statisztikus sokaság nem tiszta állapotát úgy lehet elképzelni, hogy pontosan meghatározott különféle tiszta állapotú egyedekből áll.

Összefoglalva:

C.1. *Egy klasszikus rendszer létezésének folyamata bizonytalanságtól mentes; elvben ezt a bizonyosságot a tiszta, azaz szórásmentes állapotok tükrözhetik (ezek Dirac-mértékek). A nem tiszta azaz nem szórásmentes állapotok csak tudásunk hiányát tükrözik: a valószínűség szubjektív jellegű. Egy statisztikus sokaság pontosan meghatározott különféle egyedekből áll.*

A klasszikus mechanika a látható, kézzel fogható – makroszkopikus – objektumok leírásával alakult ki, ezért fogalmai is ezekhez a objektumokhoz kötődik. Ezért nem szokás mérésről beszélni a klasszikus mechanikában; a mérés nem okoz problémát: látjuk, tapintjuk, mi történik, és ez nem befolyásolja a rendszer létezésének a folyamatát. Egy madár röpte, egy labda gurulása lényegtelen változást szenved azáltal, hogy egy fénycsóva vetül rá.

Összefoglalva:

C.2. *Egy rendszeren végrehajtott mérés nem zavarja meg (nem befolyásolja) a rendszert.*

Ez maga után vonja, hogy elvben nem csak igen-nem kísérlet valósítható meg: egymásutáni (gyors) eldöntendő kérdésekre kapott igen-nem feletekkel megválaszolható kérdést is eldönthetünk, mint a barkochbában.

Ebből az elvből származik az *állapotbeugrás* képzete. Tekintsünk ugyanis egy rendszert, amelyről hiányos az információnk, azaz nem-tiszta állapottal írjuk le. Ha végrehajtunk rajta egy mérést, a méréssel kapott információ segítségével módosítjuk a leíró állapotot: az állapot *beugrik* egy másik, a mérés által meghatározott állapotba. Ez állapotbeugrás azonban nem a rendszer valóságos fizikai történése, hiszen a rendszerrel semmi sem történt, a mérés nem befolyásolta; a tudatunkban történt változás: a beugrás, csak úgy, mint a valószínűség, *szubjektív*.

3.6. A kvantummechanika ideológiája

A kvantummechanikában nincs szórásmentes állapot, tehát elvben is lehetetlen mindent pontosan meghatározni. Egy állapot előkészítésében persze a tudásunk, képességeink korlátai is okozhatnak bizonytalanságot. Egy statisztikus sokaság nem tiszta állapotát nem lehet úgy elképzelni, hogy különféle pontosan meghatározott tiszta állapotú egyedekből áll (egy Gleason-operátort sokféleféleképpen lehet tiszta állapotok σ -konvex kombinációja).

Összefoglalva:

Q.1. *Egy kvantum rendszer létezésének folyamata mindig magában foglal valamely bizonytalanságot; ezt az objektív bizonytalanságot a tiszta állapotok tükrözhetik. A nem tiszta állapotokban a szubjektív és objektív valószínűség összekeveredik: egy statisztikus sokaság nem pontosan meghatározott különféle egyedekből áll.*

Tekintsünk csak egyetlen részecskét. Szemléletesen azt mondhatjuk, hogy a tiszta állapotok objektív valószínűsége azt jelenti, hogy maga a részecske se tudja pontosan, mi van vele. A kevert állapotok szubjektív-objektív valószínűsége azt jelenti, hogy mi még azt sem tudjuk, amit tudhatnánk.

A kvantumállapotok fizikai valóságának elképzelése azonban olykor szinte lehetetlen (a klasszikus fogalmaink beidegződése miatt).

Egy szokásos hullámcsomagot (tiszta állapot) még csak elképzelünk, elég szemléletes: a részecske ott kószál, maga sem tudja pontosan miként, a hullámcsomag középpontja körül. De hogyan képzeljük el azt a tiszta állapotot, amely két egymástól igen távoli középponttal rendelkező „két púpú” hullámcsomag? A részecske maga sem tudja, hogy itt kószál-e vagy kétszáz kilométerrel arrébb?

Ezt a „lehetetlenséget” szokták kivédeni azáltal, hogy arra gondolnak: a részecske tudja, hogy itt vagy ott kószál, csak mi nem. Közelebről: egy szuperpozíciót (például két „egy púpú” hullámcsomagét) keveréknak fognak fel. Ez azonban mindenképpen kétséges, amint azt 2.4.2-ben láttuk.

A kvantummechanika közvetlenül nem érzékelhető – mikroszkopikus – objektumok leírására vonatkozik. Ezért itt a mérés mikéntje alapvető fontosságú elvi kérdés, amely még ma sincs tisztázva. Rengeteg próbálkozás van a méréseknek a kvantummechanikán belüli megfogalmazására; ez azonban eleve kudarcra ítélt igyekezet, hiszen, mint azt az általános keretek között is mondtuk, a mérések kívül esnek a modelleken. Márcsak azért is, mert kvantummechanika érvényességi körén kívül eső fizikai jelenségeket, objektumokat használnak fel a mérések, például a fényt.

A mérés általában erősen befolyásolja a rendszer létezésének a folyamatát. Egy elektron lényegesen megváltoztatja a pályáját, ha ütközik egy fotonnal.

Összefoglalva:

Q.2. *Egy rendszeren végrehajtott mérés általában megzavarja (befolyásolja) a rendszert.*

Emiatt megválaszolando kérdésekre általában nincs felelet.

A kvantummechanika szokásos tárgyalásaiban elfogadott képzet (sőt olykor posztulátum), hogy ha egy igen-nem kérdésre a mérés válszt ad, akkor a rendszer állapota beugrik a válasznak megfelelő állapotba (lásd alább). Ez a klasszikus szubjektív beugrásnak (amikor valójában semmi sem történik a rendszerrel) az indokolatlan átvitele egy objektív beugrásra; a mérés során ugyan valóban történik valami a rendszerrel, hiszen a mérés megzavarja, de általában semmi sem indokolja, hogy ez a megzavarás egyértelműen a rendszer mondott új állapotát valósítja meg. Már csak azért sem, mert a legtöbb mérés (például detektorba történő becsapódás) nem új állapotot, hanem új rendszert hoz létre.

Sokszor mondják, hogy kétféle állapotváltozás van a kvantummechanikában: az egyik, a folytonos, amelyet a Schrödinger-egyenlet állapot ír le, a másik a diszkrét, amikor mérésnél átugrik más állapotba. Erre nekem az a kérdésem: **honnan tudja a részecske, hogy most nem méri, tehát folytonosan kell változnia, most meg méri, tehát ugrania kell?** És az az állításom, hogy ha ragaszkodunk ahhoz, hogy **ne beszéljünk olyanról, ami nincs a modellben**, más szóval, minden, amiről beszélünk, formalizálva legyen a matematikai modellben, már pedig ragaszkodunk, akkor **vagy hagyjuk el a beugrás képzetét, vagy adjunk pontos definíciót a mérésre** (de ez utóbbi eleve kudarcra van ítéelve).

Legyen P projektor (esemény), és $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ tiszta állapot. Azt mondják, hogy ha P bekövetkezik (egy mérésben az igen választ adja a megfelelő kérdésre, azaz $P\varphi \neq 0$), akkor a rendszer beugrik a $\frac{|P\varphi\rangle\langle P\varphi|}{\|P\varphi\|^2}$ állapotba. Speciálisan, ha $P = |\psi\rangle\langle\psi|$ („ ψ egy fizikai mennyiség sajátvektora”), akkor az új állapot $|\psi\rangle\langle\psi|$ („a részecske beugrik a megfelelő sajátállapotba”).

Ezért honosodott meg a helytelen átmeneti valószínűség elnevezés is. Valójában $|\langle\varphi, \psi\rangle|^2$ annak a valószínűsége, hogy a φ által jellemzett állapotban a ψ által

jellemzett esemény bekövetkezik, és nem annak, hogy a rendszer a mérésnél beugrik (átmegy) a φ által jellemzett állapotból a ψ által jellemzett állapotba.

3.7. A mechanikák érvényességi köre

A klasszikus mechanika az első fizikai elmélet, amely régóta igen jól kidolgozott, pontos matematikai alapokon nyugszik. Nagy sikere arra indította elődeinket, hogy azt higgyék, a világot a klasszikus fizika törvényszerűségei igazgatják. Az a meggyőződés alakult ki, hogy a világ determinisztikus, azaz bizonytalanság, valószínűség csak a tudásunk hiányának a következménye. Továbbá a folyamatok reverzibilisek, ami azt jelenti, hogy egy jelen állapotból egyértelműen meg lehet határozni bármely múltbeli állapotát.

A klasszikus statisztikus mechanika az igen nagy részecskeszámú rendszerek elméletéként alakult ki. Alapul azt fogadták el, hogy a részecskerendszer folyamatait a Hamilton-egyenlet (Newton-egyenlet) igazgatja, de képtelenség a 10 a sokadikon adatot mind ismernünk, tehát kénytelenek vagyunk valószínűséghez folyamodni. A „molekuláris káosz” feltételezése és bizonyos elhanyagolások, transzformációk után a statisztikus mechanika magyarázatot ad az indeterminisztikus és irreverzibilis jelenségekre. Ez azonban logikai nonszensz: ha a kindulási elv determinisztikus és reverzibilis, akkor semmilyen tisztességes manipuláció nem indokol indeterminisztikus vagy irreverzibilis eredményt.

Épp fordítva áll a helyzet. A valóságban a folyamatok nem tisztán mechanikaiak, a részecskék a kölcsönhatásuk során elektromágneses sugárzást bocsátanak ki, nyelnek el. Ezek a folyamatok eleve indeterminisztikusak és irreverzibilisek, sajnos azonban egyelőre nincs egyenletünk a leírásukra. Ha elhanyagoljuk a sugárzást (amely viszont egy mikroszkopikus részecskékből álló rendszerben igencsak jelentős tényezője a folyamatoknak), akkor jutunk klasszikusan a determinisztikus és reverzibilis Hamilton-egyenlethez, kvantumosan a Schrödinger-egyenlethez.

Mind a klasszikus mechanika, mind a kvantummechanika akkor ad jó leírást, ha az elektromágneses sugárzás (és egyéb nem mechanikai, például gyenge, erős kölcsönhatás) elhanyagolható.

Ez az elhanyagolás elfogadható makroszkopikus testek alkotta rendszerek esetén, tehát a klasszikus mechanika, a Hamilton-egyenletek érvényességi köre viszonylag széles.

Mikroszkopikus testekre azonban ez az elhanyagolás már csak nagyon speciális esetekben alkalmazható. A kvantummechanika érvényességi köre igen szűk. A Schrödinger-egyenlet csak akkor ad megfelelő eredményt, ha a sugárzás kicsi; ez lényegében csak az alacsony energiás szórásoknál, valamint a stacionárius állapotoknál (amikor egyáltalán nincs sugárzás) teljesül. Ez utóbbi szemléletesen így fogalmazható meg: egy atomban az elektron energia-értékeit – a Hamilton-operátor sajátértékeit – jól adja meg a kvantummechanika; azonban a fény elnyelését (az atom gerjesztését) és a fény kisugárzását (a gerjesztés megszűnését) már nem írja le (lásd később).

3.8. Együttes rendszerek

3.8.1. Egyesítés, szétbontás

Tapasztalataink szerint a valóságban előfordul, hogy korábban különálló, kölcsön nem ható részecskék elég közel kerülnek egymáshoz („megérik egymást”), és kölcsönhatásba lépnek egymással, azaz egy új, együttes rendszert alkotnak. Fordítva is, eredetileg kölcsönható részecskék eléggé eltávolodva egymástól megszűnnek kölcsönhatni, és így új egyedi rendszereket alkotnak.

Kérdéses, hogyan lehet leírni ilyen folyamatokat. Ami fontos az az, hogy az együttes rendszer nem egyszerű összetevése az egyedi rendszereknek, illetve az egyedi rendszerek nem egyszerű szétbontásai az együttesnek. Ezt jól láthatjuk mind klasszikusan, mind kvantumosan, mert a kölcsönhatást leíró potenciál (ha egyáltalán leírható így a kölcsönhatás) nem tehető össze egy-pont fizikai mennyiségekből, és az együttes időfejlődése merőben más, mint kölcsönhatás nélkül volna.

Ezeket a kérdéseket vizsgáljuk meg most közelebbről.

3.8.2. Klasszikus eset

Vegyünk két klasszikus rendszert F_1 , illetve F_2 fázistérrel. Ekkor egy ezekből „összetett” (idézőjel azért, mert valójában nem összetett, épp az előzőekben mondtak szerint) együttes rendszer fázistere $F_1 \times F_2$; jelölje pr_1 és pr_2 a megfelelő kanonikus projekciókat. Ekkor

$$\text{pr}_1^{-1} : \mathcal{B}(F_1) \rightarrow \mathcal{B}(F_1 \times F_2), \quad A_1 \mapsto A_1 \times F_2,$$

$$\text{pr}_2^{-1} : \mathcal{B}(F_2) \rightarrow \mathcal{B}(F_1 \times F_2), \quad A_2 \mapsto F_1 \times A_2$$

beinjektálja az egyedi eseményeket (Borel-halmazokat) az együttes események közé; természetesen ezeken túl igen sok más együttes esemény is létezik.

Az A_1 és A_2 egyedi esemény együttese $(A_1 \times F_2) \cap (F_1 \times A_2) = A_1 \times A_2$.

Ha $\{a_1\}$ és $\{a_2\}$ elemi egyedi események, akkor

$$(\{a_1\} \times F_2) \cap (F_1 \times \{a_2\}) = \{(a_1, a_2)\},$$

vagyis

„*elemi egyedi események együttese elemi együttes esemény*”,

és

„*minden együttes elemi esemény elemi egyedi események együttese*”.

Ha f_1 az első rendszer fizikai mennyisége, azaz F_1 -en értelmezett függvény, akkor $f_1 \circ \text{pr}_1$ az együttes rendszer fizikai mennyisége, és hasonló mondhatunk a második rendszerre vonatkozóan. Hogy még jobban lássuk, miről van szó, írjuk fel a fizikai mennyiségek eredeti meghatározásának megfelelően a teljes inverzeket is:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \text{pr}_1 & f_1 \end{pmatrix} (E_1) = f_1^{-1}(E_1) \times F_2,$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \text{pr}_2 & f_2 \end{pmatrix} (E_2) = F_1 \times f_2^{-1}(E_2).$$

Világos, hogy nem minden, az $F_1 \times F_2$ -n értelmezett függvény – például az, amely a kölcsönhatást írja le (ha egyáltalán leírható így) – ilyen alakú.

Ha p_1 és p_2 az első, illetve a második rendszer állapota, azaz F_1 , illetve F_2 Borel-halmazain értelmezett valószínűségi mérték, akkor a

$$(p_1 \otimes p_2)(A_1 \times A_2) := p_1(A_1)p_2(A_2)$$

formulával értelmezett mérték (kiterjesztve az összes Borel-halmazra) állapot az együttes fázistéren. Nyilvánvaló, hogy ott nem minden állapot ilyen szorzat alakú.

Fordítva, ha p állapot az együttes fázistéren, akkor

$$A_1 \mapsto p_1(A_1) := (p \circ \text{pr}_1^{-1})(A_1) = p(A_1 \times F_2),$$

$$A_2 \mapsto p_2(A_2) := (p \circ \text{pr}_2^{-1})(A_2) = p(F_1 \times A_2)$$

állapotok az egyedi fázistereken, és általában $p \neq p_1 \otimes p_2$.

Igen fontos: különböző együttes állapotokból így származtatott egyedi állapotok megegyezhetnek, azaz a p -ből származó p_1 és p_2 nem határozza meg p -t; ugyanis például az együttes $p_1 \otimes p_2$ is ugyanazokat az egyedi állapotokat adja, mint p . Fitikailag ez azt jelenti hogy egy együttes állapotot nem tudunk megállapítani azáltal, hogy csak a részrendszerek eseményeinek valószínűségét (relatív gyakoriságát) mérjük ki.

Tekintsük az egyedi rendszerek δ_{a_1} és δ_{a_2} tiszta állapotát. Az ezeknek megfelelő együttes állapot $\delta_{a_1} \otimes \delta_{a_2} = \delta_{a_1, a_2}$ szintén tiszta.

Vegyük most az együttes rendszer δ_{a_1, a_2} tiszta állapotát. Ennek megfelelő egyedi állapotok,

$$\delta_{a_1, a_2} \circ \text{pr}_1^{-1} = \delta_{a_1},$$

$$\delta_{a_1, a_2} \circ \text{pr}_2^{-1} = \delta_{a_2}$$

szintén tiszták.

Tehát

„az egyedi rendszerek tiszta állapotainak szorzata az együttes rendszer tiszta állapota”,

„minden együttes tiszta állapot egyedi tiszta állapotok szorzata”,

„az együttes rendszer minden tiszta állapotának megfelelő egyedi állapotok szintén tiszták”.

3.8.3. Kvantumos eset

Vegyük két kvantumos rendszert H_1 , illetve H_2 Hilbert-térrel. Ekkor egy ezekből „összetett” (idézőjel mint előbb) együttes rendszer Hilbert-terét $H_1 \otimes H_2$ -nek tekintjük oly módon, hogy

$$h_1 : \mathcal{P}(H_1) \rightarrow \mathcal{P}(H_1 \otimes H_2), \quad P_1 \mapsto P_1 \otimes I_2,$$

$$h_2 : \mathcal{P}(H_2) \rightarrow \mathcal{P}(H_1 \otimes H_2), \quad P_2 \mapsto I_1 \otimes P_2$$

injektálja be az egyedi eseményeket (projektorokat) az együttes események közé, ahol I -k az identitások (egységoperátorok); természetesen ezeken túl igen sok más együttes esemény is létezik.

A P_1 és P_2 egyedi esemény együttese $(P_1 \otimes I_2) \wedge (I_1 \otimes P_2) = P_1 \otimes P_2$.

Ha $P_1 := |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|$ és $P_2 := |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|$ elemi egyedi események, akkor

$$P_1 \otimes P_2 = (|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|) \otimes (|\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|) = |\varphi_1 \otimes \varphi_2\rangle\langle\varphi_1 \otimes \varphi_2|,$$

vagyis

„elemi egyedi események együttese elemi együttes esemény”,

de

„de nem minden együttes elemi esemény elemi egyedi események együttese”,

hiszen $H_1 \otimes H_2$ nem minden eleme tenzorszorzat alakú.

Ha $P_1(\cdot)$ az első rendszer fizikai mennyisége, azaz $\mathcal{P}(H_1)$ értékű projektormérték

$$(h_1 \circ P_1)(E_1) = P_1(E_1) \otimes I_2,$$

$$(h_2 \circ P_2)(E_2) = I_1 \otimes P_2(E_2)$$

az együttes rendszer fizikai mennyiségei.

Önadjungált operátorban gondolkozva projektormérték helyett, az S_1 és S_2 egyedi önadjungált operátoroknak így az $S_1 \otimes I_2$, illetve $I_1 \otimes S_2$ együttes önadjungált operátor felel meg.

Világos, hogy nem minden, a $\mathcal{P}(H_1 \otimes H_2)$ értékű projektormérték ($H_1 \otimes H_2$ -n értelmezett önadjungált operátor) ilyen alakú.

Ha W_1 és W_2 az első, illetve a második rendszer Gleason-operátora, akkor $W_1 \otimes W_2$ az együttes rendszer Gleason-operátora, és

$$= \text{Tr}((W_1 \otimes W_2)(P_1 \otimes P_2)) = \text{Tr}((W_1 P_1) \otimes (W_2 P_2)) = \text{Tr}(W_1 P_1) \text{Tr}(W_2 P_2),$$

ami azáltal látható be, hogy ha $\varphi_{1,n}$ és $\varphi_{2,m}$ az egyes Hilbert-terek ortonormált bázisa, akkor $\varphi_{1,n} \otimes \varphi_{2,m}$ ($n, m \in \mathbf{N}$) a Hilbert-terek tenzorszorzatának ortonormált bázisa. Nyilvánvaló, hogy nem minden együttes Gleason-operátor ilyen szorzat alakú.

Fordítva, ha W Gleason-operátor az együttes Hilbert-téren, akkor

$$P_1 \mapsto \text{Tr}(W(P_1 \otimes I_2)), \quad P_2 \mapsto \text{Tr}(W(I_1 \otimes P_2))$$

állapotok az egyedi Hilbert-tereken, tehát van olyan W_1 és W_2 Gleason-operátor, hogy $\text{Tr}(W_1 P_1) = \text{Tr}(W(P_1 \otimes I_2))$ és $\text{Tr}(W_2 P_2) = \text{Tr}(W(I_1 \otimes P_2))$, és általában $W \neq W_1 \otimes W_2$.

Igen fontos: különböző együttes állapotokból így származtatott egyedi állapotok megegyezhetnek, azaz a W -ből származó W_1 és W_2 nem határozza meg W -t; ugyanis például az együttes $W_1 \otimes W_2$ is ugyanazokat az egyedi állapotokat adja, mint W . Fitikailag ez azt jelenti hogy egy együttes állapotot nem tudunk megállapítani azáltal, hogy csak a részrendszerek eseményeinek valószínűségét (relatív gyakoriságát) mérjük ki.

Részletesen kifejtve a következőket mondhatjuk.

Legyen $W_1 := |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|$ és $W_2 := |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|$ az első, illetve a második rendszer tiszta állapota, azaz Gleason-operátor H_1 -en, illetve H_2 -n. Ekkor, az elemi eseményeknél már levezetett formula szerint

$$W_1 \otimes W_2 = |\varphi_1 \otimes \varphi_2\rangle\langle\varphi_1 \otimes \varphi_2|,$$

vagyis egyedi tiszta állapotok szorzata tiszta együttes állapota. Világos, hogy az együttes rendszer nem minden tiszta állapota ilyen szorzat alakú.

Teljesen hasonlóan láthatjuk kevert állapotokra is, hogy

$$\begin{aligned} W_1 \otimes W_2 &= \left(\sum_n \lambda_{1,n} |\varphi_{1,n}\rangle \langle \varphi_{1,n}| \right) \otimes \left(\sum_m \lambda_{2,m} |\varphi_{2,m}\rangle \langle \varphi_{2,m}| \right) = \\ &= \sum_{n,m} \lambda_{1,n} \lambda_{2,m} |\varphi_{1,n} \otimes \varphi_{2,m}\rangle \langle \varphi_{1,n} \otimes \varphi_{2,m}|. \end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg az együttes rendszer egy $|\phi\rangle\langle\phi|$ tiszta állapotának megfelelő egyedi állapotokat. A szóban forgó vektor előállítható

$$\phi := \sum_n \alpha_n \varphi_{1,n} \otimes \varphi_{2,n}$$

alakban, ahol $\|\varphi_{1,n}\| = 1$ $n \in \mathbb{N}$ és $\langle \varphi_{2,n}, \varphi_{2,m} \rangle = \delta_{nm}$ ($n, m \in \mathbb{N}$), valamint $\sum_n |\alpha_n|^2 = 1$.

Mivel

$$\begin{aligned} (P_1 \otimes I_2) \left(\sum_n \alpha_n \varphi_{1,n} \otimes \varphi_{2,n} \right) &= \left(\sum_n \alpha_n P_1 \varphi_{1,n} \otimes \varphi_{2,n} \right), \\ \langle \phi, (P_1 \otimes I_2) \phi \rangle &= \sum_n |\alpha_n|^2 \langle \varphi_{1,n}, P_1 \varphi_{1,n} \rangle, \end{aligned}$$

vagyis a $|\phi\rangle\langle\phi|$ együttes tiszta állapotnak megfelelő első egyedi állapot kevert, amelynek a

$$W_1 := \sum_n |\alpha_n|^2 |\varphi_{1,n}\rangle \langle \varphi_{1,n}| \quad (*)$$

Gleason-operátor felel meg. Felhívjuk a figyelmet, hogy itt a különböző φ -k nem szükségképpen ortognálisak.

Természetesen hasonló mondható a második egyedi állapotról is; akkor ϕ -t úgy állítjuk elő, hogy $\varphi_{1,n}$ -ek alkotnak ortonormált rendszert.

Az is látszik persze, hogy ha ϕ szorzat alakú – azaz csak egy α nem nulla –, akkor, és csak akkor, az egyedi állapotok is tiszták.

Összefoglalva:

„az egyedi rendszerek tiszta állapotainak szorzata az együttes rendszer tiszta állapota,

„nem minden együttes tiszta állapot egyedi tiszta állapotok szorzata,

„az együttes rendszer tiszta állapotának megfelelő egyedi állapotok akkor és csak akkor tiszták, ha az együttes állapot az egyedi rendszerek tiszta állapotainak szorzata.

Jegyezzük meg tehát azt a fontos tényt, hogy ha valamiképp szétbomlik a tiszta állapotban levő együttes rendszer egyedi rendszerekre, azok állapota már általában keverék lesz, ellentétben a klasszikus esettel.

Végül felhívjuk a figyelmet arra, hogy azonos részecskék valami misztikus kölcsönhatással érzik meg egymást, és bonyolultabb eset az együttesük, mert akkor az egyedi Hilbert-terek szimmetrikus vagy antiszimmetrikus tenzorszorzata szerepel.

4. A kvantummechanikai mérésekről

4.1. Egyszerre mérés?

Valamely mennyiség többszöri mérésével kapott eredményeink sohasem adnak egyetlen eredményt, hanem általában több, egymáshoz többé-kevésbé közeli „szórt” értékeket. Ennek a jelenségnek két szélsőséges magyarázata a következő:

1. A mérendő mennyiség pontosan meghatározott értékkel bír, az eredmények ingadozása a mérőeszközünk pontatlanságának a következménye,
2. A mérőeszközünk pontos, az eredmények ingadozása a mérendő mennyiség pontatlan meghatározottságának a következménye.

Természetesen lehet – sőt ez a legáltalánosabb –, hogy sem a mennyiség, sem a mérőeszköz nem pontos.

A modellek felépítésében figyelembe vett tényezőknél hallgatólagosan abszolút pontos mérési eredményeket feltételezünk. Tehát egy fizikai mennyiség szórása, ahogy a modellben definiáltuk, a fizikai mennyiségnek az adott állapotbeli határozatlanságát jellemzi.

A Heisenberg-féle (3) határozatlansági relációban szórások szerepelnek. Ezért teljesen világos, hogy tarthatatlan a relációnak az a szokásos értelmezése, hogy „nem felcserélhető fizikai mennyiségek egyszerre nem mérhetők tetszőleges pontossággal”.

Hangsúlyozzuk, ez a határozatlansági reláció téves felfogása: a valószínűség – ezáltal a szórás és a várható érték is – a méréseken keresztül a relatív gyakorisággal van kapcsolatban, amelynek értelmezése

- nem szól egyidejű vagy különidejű mérésről,
- elvben pontos méréseket feltételez,
- a szórás a fizikai mennyiségre vonatkozik és nem a mérés hibájára.

Szokás még tovább menni, és a pontatlanságot kihagyva azt is állítani, hogy „nem felcserélhető fizikai mennyiségek egyszerre nem mérhetők”. Erről sincs szó a kvantummechanikában.

Ezek az alaptalan képzetek sok félreértésre vezettek.

Van viszont egy érdekes eredmény, amely ide kívánczik, már csak ezért is, mert a Heisenberg-féle határozatlansági relációt leggyakrabban a helyzetre és az impulzusra emlegetik.

23. Állítás. *Legyen Q az $L^2(\mathbb{R}^3)$ karakterisztikus projektormértéke (helyzet) és P ennek a Fourier-transzformáltja (impulzus); ha E és F korlátos Borel-halmaz, akkor $Q(E) \wedge P(F) = 0$.*

Szavakban: lehetetlen az az esemény, hogy a helyzet értéke is és az impulzus értéke is korlátos halmazba esik.

A lehetetlen esemény a modell fogalmain belül maradva azt jelenti, hogy a valószínűsége bármely állapotban nulla, vagyis bármely körülmények között az igen-nem kísérletre a válasz mindig „nem”. Ez nem azt, jelenti, hogy lehetetlen mérni az eseményt, azaz hogy nincs, nem lehet rá igen-nem kísérletet előállítani.

A fenti meglepő eredmény – lehetetlen például az az esemény, hogy egy részecske Európában van és sebességének a nagysága kisebb a fénysebesség felénél – nem azt mondja, hogy lehetetlen azt mérnünk, azt kérdeznünk, Európában van-e és a sebessége kisebb-e a fénysebesség felénél, hanem azt, hogy erre kérdésre a részecske bármely állapotában a válasz „nem”.

Persze tudnunk kell, hogy a modell nem a valóság. Ha esetleg mégis kapunk „igen” választ a fenti kérdést feltevő kísérletben, az csak a valóság és a modell eltérését mutatja. Ha az eltérés nem lényeges, nem kell ügyet vetnünk rá. Ha lényeges, akkor változtatnunk kell a modellen.

4.2. Méréselmélet?

4.2.1. Igen-nem kísérletek?

Elvben könnyű beszélni az igen-nem mérésekről és relatív gyakoriságról, gyakorlatilag azonban a mérések egészen másfélék, és a mérési eredményekből levont következtetések sokszor kétségesek.

Tekintsük például a hidrogénatom energiaszintjeinek mérését. Azt az eldöntendő kérdést tesszük fel az atomban valamely állapotban levő elektronnak, hogy „ennyi az energiaértéked?” Dehogy! Fénnyel bevilágítjuk az alapállapotú hidrogénatomot (valójában sokat egyszerre, így valósítva meg a sokaságot), aztán megmérjük a kibocsátott fény frekvenciáját és intenzitását. A kibocsátott fény intenzitása adja meg annak a valószínűségét, hogy a frekvenciájának megfelelő energia-érték esemény bekövetkezett.

Emögé szokás tenni azt a képet, hogy a bevilágítás gerjeszti az atomot, az elektron a fényből elnyel bizonyos (jól meghatározott) frekvenciájú összetevőket, ezáltal átugrik egy másik állapotba (de ez nem a korábbiakban említett, a mérés eredménye által létrejött beugrás!), majd fény kisugárzása közben visszaugrik az alapállapotba (ez sem olyan beugrás), és a kisugárzott fény intenzitása adja meg az átugrás valószínűségét. Ez igen szemléletes, minden bizonnyal valami hasonló történik, csak a kvantummechanika nem tudja ezt a folyamatot leírni, amint azt a perturbációkról szóló alfejezetben látjuk.

Hasonlóan, a spinmérésekkel kapcsolatos következő, részletesebb vizsgálataink is azt mutatják, hogy a valódi kísérletek távol állnak az igen-nem mérésektől.

4.2.2. Mérés a modellben?

A kvantummechanika elvi kérdéseinek tisztázására irányuló kutatások egyik fő fejezete az úgynevezett méréselmélet, amely a méréseket akarja megmagyarázni a kvantummechanika keretein belül. A méréselméleti törekvések során számos paradoxon született, amelyekkel kétségbe vonják, hogy jó elmélet a kvantummechanika. Pedig csak az ilyesféle méréselmélet helyénvalóságát tagadják. Ugyanis

- a kísérletek, mérések eredményei adják azokat az intuíciókat, amelyek alapján felállítjuk egy elmélet modelljeit, tehát a méréseknek az elméleten belüli magyarázata fából vaskarika,
- a mérőeszközök működése nem korlátozódik mechanikai jelenségekre (a fény mindig szerepet játszik), már csak emiatt sem lehetne a méréseket a kvantummechanikai modellek keretei között tárgyalni,
- a méréselmélet sokszor ködös fogalmakat használ, ezért bizonyos jól hangzó állításai értelmetlenek.

Végül egy kérdés: miért nincs méréselmélet a klasszikus mechanikában, miért nem akarják leírni a méréseket a klasszikus mechanika keretei között?

4.2.3. Spinoperátorok

A mérésekkel kapcsolatos szokásos elvi kérdések és kísérletek többnyire a spinhez kapcsolódnak, ezért most áttekintjük az ide vonatkozó tudnivalókat az úgynevezett feles spinek esetén.

Minden $a \in \mathbb{R}^3$, $|a| = 1$ esetén adott egy a irányú S_a spinoperátor \mathbb{C}^2 -n úgy, hogy $S_a S_b - S_b S_a = i S_{a \times b}$ ($\hbar := 1$) és $S_{\alpha a + \beta b} = \alpha S_a + \beta S_b$, speciálisan $S_{-a} = -S_a$.

Minden a esetén S_a sajátértékei $\frac{1}{2}$ és $-\frac{1}{2}$, sajátvektorai kifeszítik \mathbb{C}^2 -t. Az S_a -nak a pozitív értékű sajátvektorát a szerint „fel”, a másikat a szerint „le” sajátvektornak nevezzük az elterjedt szóhasználatot követve. Természetesen, ami a szerint „fel”, az $-a$ szerint „le”.

Ha v_c és v_{-c} az S_c -nek „fel”, illetve „le” sajátvektora, akkor S_a sajátvektorai

$$v_a = \alpha_+ v_c + \alpha_- v_{-c} \quad v_{-a} = -\alpha_- v_c + \alpha_+^* v_{-c}, \quad (*)$$

ahol az együtthatókat úgy választottuk meg, hogy α_- valós.

A Pauli mátrixok

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ameyekre

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = 3 \mathbf{1}$$

($\mathbf{1}$ az egységmátrix) és

$$\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_3, \quad \text{stb.}$$

teljesül.

Ha választunk három merőleges irányt, és az ezen irányú spinoperátoroknak a Pauli-mátrixok 1/2-szeresét rendeljük, akkor

$$S_a = \frac{1}{2}(a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 \sigma_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix}.$$

Vegyük a * egyenlőségben szereplő c -nek a „harmadik” irányt, azaz legyen $v_c = (1, 0)$, $v_{-c} = (0, 1)$; ekkor

$$\alpha_+ = \frac{a_1 + ia_2}{\sqrt{2(1 - a_3)}} \quad \alpha_- = \sqrt{\frac{1 - a_3}{2}}$$

Ebből azonnal adódik, hogy

$$|\langle v_a, v_c \rangle|^2 = \left| \frac{a_1 + ia_2}{\sqrt{2(1 - a_3)}} \right|^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2}{2(1 - a_3)} = \frac{1 + a_3}{2} = \frac{1 + a \cdot c}{2}$$

és

$$|\langle v_a, v_{-c} \rangle|^2 = \frac{1 - a_3}{2} = \frac{1 - a \cdot c}{2},$$

ahol végül megszabadultunk a speciális irány-előállítástól, hiszen a_3 az a iránynak a c irányra való vetülete, amit az \mathbb{R}^3 -beli \cdot skalárszorzattal tudunk jól kifejezni.

Egy feles spinű részecske Hilbert-tere $H \otimes \mathbb{C}^2$, ahol H egy tömegpont Hilbert-tere, úgy, hogy $Q : \mathcal{B}(\mathbf{E}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{H})$ és $P : \mathcal{B}(\mathbf{E}^*) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{H})$ a tömegpont helyzete és impulzusa. Ekkor a részecske helyzete és impulzusa

$$\bar{Q} := Q \otimes \mathbf{1}, \quad \bar{P} := P \otimes \mathbf{1},$$

a irányú spinje

$$\bar{S}_a := I \otimes S_a.$$

Igen fontos: a helyzet és impulzus létező fizikai mennyiségek, amelyek komponensei valamely koordináta-rendszerben az

$$\int \text{pr}_k d\bar{Q}, \quad \int \text{pr}_k d\bar{P} \quad (k = 1, 2, 3)$$

önadjunált operátorok, viszont **nincs egy spin fizikai mennyiség, amelynek komponensei volnának S_k -k**, hiszen ezek az operátorok nem felcserélhetők. Viszont **van spinnagyság fizikai mennyiség**: a három merőleges irányú spin négyzetének összege az identitás többszöröse.

Leggyakrabban a tömegpont Hilbert-terének $L^2(\mathbb{R}^3)$ -t vesszük úgy, hogy a helyzet a karakterisztikus projektormérték, az impulzus ennek a Fourier-transzformáltja. Ekkor a feles spinű részecske Hilbert-tere $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2)$ (a \mathbb{C}^2 értékű négyzetesen integrálható függvények tere), és ha $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ ilyen függvény, akkor

$$(\bar{S}_a \phi)(x) = S_a(\phi(x)).$$

4.2.4. Spinmérés?

Vizsgáljuk meg a Stern–Gerlach-kísérletet, amelyről azt szokás mondani, hogy a spin mérését teszi lehetővé. Azonnal szögezzük le, hogy ez félrevezető szóhasználat, mert nincs spin fizikai mennyiség.

A kísérlet a következő. Egy adott spinállapotú részecskenyalábot keresztül bocsátanak egy térrészen, amelyben közelítőleg homogén mágneses mező van. A térrész mögötti ernyőn detektáljuk a részecskék becsapódását, amelyek általában két jól elkülönülő pont körül koncentrálnak. Ha az egyik becsapódási pontnál az ernyőt egy másik mágneses mezővel helyettesítik, és hátrébb új ernyőt helyeznek el, akkor az új ernyőn egy vagy két becsapódási pont lesz attól függően, hogy az új mágneses mező párhuzamos-e az eredetivel vagy sem.

Ebből arra következtetnek, a mágneses mező beugratja a spint a mágneses mezővel párhuzamos („felfelé”), illetve azzal ellentétes („lefelé”) irányba; a nyaláb eszerint két részre bomlik, a részecskék egy része „fent” csapódik be, egy másik része meg „lent”; a becsapódások mennyiségi aránya azt mutatja, milyen volt az eredeti nyaláb spinállapota, vagyis mi a valószínűsége az eredeti spinállapotból a „fel”, illetve a „le” állapotba való átmenetnek. A kép szemléletes, minden bizonnyal valami hasonló történik, de a kvantummechanika nem így írja le a folyamatot.

Ugyanis a kísérlet kvantummechanikai leírása – legalábbis a becsapódásokig – jól ismert.

Legyenek v_c , illetve v_{-c} a mágneses mező c irányával párhuzamos irányú spinoperátor „fel”, illetve „le” sajátvektorai.

Tegyük fel, hogy a részecske kezdetben valamely a irányú spinnek a $(*)$ -beli v_a vektorral leírt saját-állapotában van, azaz egy

$$\psi(\alpha_+v_c + \alpha_-v_{-c})$$

térben négyzetesen integrálható függvénnyel leírt tiszta állapotban, ahol ψ egy hullámcsomag. A Schrödinger-egyenlet szerint a részecske állapotát minden pillanatban

$$\psi_+v_c + \psi_-v_{-c}$$

alakú függvény írja le. Elég hosszú idő után ψ_+ és ψ_- lényegében egy-egy, egymástól távoli középpontú hullámcsomag számszorosa. Vagyis, feltéve, hogy ψ_+ és ψ_- már teljesen szétváltak, sehohsem fedik egymást, az állapotot

$$\beta_+\varphi_+v_c + \beta_-\varphi_-v_{-c} \quad (**)$$

írja le, ahol $\beta_{\pm}\varphi_{\pm} := \psi_{\pm}$ és $\beta_{\pm} := \|\psi_{\pm}\|$.e Az eredmény egy „két púpú” hullámcsomag, egy „felfelé” spinirányú és egy „lefelé” spinirányú hullámcsomag *szuperpozíciója*, vagyis egy tiszta állapot.

Azt mondják, hogy a Stern–Gerlach-kísérlettel megmérjük a spint: a „felfelé” haladó nyalábban a „fel” spinállású (állapotú) részecskék vannak, a másikban pedig a „le” spinállásúak. Ez az interpretáció, helyesen fogalmazva (azaz kerülve a spin megmérése, a spin állása félrevezető kifejezéseket) akkor lehetne helytálló, ha az állapot nem a hullámcsomagok szuperpozíciója, hanem

$$\beta_+^2|\varphi_+v_c\rangle\langle\varphi_+v_c| + \beta_-^2|\varphi_-v_{-c}\rangle\langle\varphi_-v_{-c}|$$

keveréke volna.

Mi több: *a kísérletben nem is spinirányt, hanem helyzetet mérünk!* Pontosan fogalmazva, a kísérlet nem azt az igen-nem kérdést teszi fel, hogy „felfelé” áll-e a szóban forgó irányú spined, hanem azt, hogy itt vagy-e az ernyőnek ezen a részén.

Vizsgáljuk meg ezt a kérdést közelebbről!

Az előbbi pontban mondottak szerint egy spines részecske formálisan olyan, mintha egy H Hilbert-terű tömegpont meg egy \mathbb{C}^2 Hilbert-terű „spinrendszer” együttese volna. Ha csak a tömegpont eseményeire kérdezzük rá, például a helyzetének az eseményeire, mint a Stern–Gerlach-kísérletben, akkor a a 3.8.3-beli $(*)$ eredményt alkalmazva azt kapjuk, hogy a részecske $(**)$ tiszta állapotának a tömegpont

$$\beta_+^2|\varphi_+\rangle\langle\varphi_+| + \beta_-^2|\varphi_-\rangle\langle\varphi_-|$$

kevert állapota felel meg.

Tehát a helyzetmérés szempontjából valóban úgy tűnik, mintha szuperpozíció helyett két hullámcsomag keverékével volna dolgunk.

Hasonlóan, ha valóban csak a spinirányt mérnénk (de nem tudok ilyen kísérletről), akkor – a spinirányra a

$$\beta_+^2|v_c\rangle\langle v_c| + \beta_-^2|v_{-c}\rangle\langle v_{-c}|$$

kevert állapotot kapnánk.

Hogy egy tiszta állapot miként jelenik meg nekünk kevertékként, ha csak egy-egy oldalról vizsgáljuk, nehezen (vagy sehogysem?) fogható fel a klasszikusra edzett agyunkkal.

4.2.5. Spinkorrelációs kísérlet

Tekintsünk két feles spinű részecskéből összetett rendszert, és egyelőre vegyük úgy, a szokásnak megfelelően, mintha a spin-eseményeken kívül semmi más eseményük nem volna, vagyis a Hilbert-tér $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$.

Az a irányú összspin $S_a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes S_a$.

Egyszerűen meggyőződhetünk arról, hogy minden a és c irány esetén

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(v_a \otimes v_{-a} - v_{-a} \otimes v_a) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_c \otimes v_{-c} - v_{-c} \otimes v_c).$$

Ez az összetett vektor minden irányú összspinnek nulla sajátértékű sajátvektora. Az ennek megfelelő tiszta állapotot szokás szinglettnak nevezni.

Most $v_a \otimes v_c$ egységvektor kifeszítette altér az az esemény, hogy a „bal oldali” a irányú spin értéke is, a „jobb oldali” c irányú spin értéke is pozitív (azaz „fel”). Ennek az eseménynek a valószínűsége a szinglett állapotban

$$\frac{1}{2} |\langle v_c \otimes v_{-c} - v_{-c} \otimes v_c, v_a \otimes v_c \rangle|^2 = \frac{1}{2} |\langle v_{-c}, v_a \rangle|^2 = \frac{1 - a \cdot c}{2} \quad (*)$$

a 4.2.3 formulái szerint.

Az $a = c$ eset a két oldalon a c irányú „fel” spinértékek eseményének a valószínűségét adja; ez nulla. Az $a = -c$ eset a jobb oldalon a c irányú „fel” és a bal oldalon a c irányú „le” spinértékek eseményének a valószínűségét adja; ez $1/2$.

Teljesen hasonlóan, két oldalon a c irányú „le” spinértékek eseményének a valószínűsége nulla, és a jobb oldalon a c irányú „le” és a bal oldalon a c irányú „fel” spinértékek eseményének a valószínűsége $1/2$.

Összegezve: nulla a valószínűsége a két oldalon azonos irányú spinértékek eseményének, és 1 a valószínűsége a két oldalon ellentétes irányú spinértékek eseményének.

A szokásos kísérletben két feles spinű részecske szinglett állapotban indul egy „forrásból”, az egyik „jobbra”, a másik „balra”, az egyik áthalad egy c irányú mágneses mezőn, a másik egy a irányún, és aztán számlálják egy-egy ernyőn az egyidejű „fenn-fenn” és „fenn-lenn”-nek a a gyakoriságát számlálják. Az eredmények igazolni látszanak a (*) értékeket.

Tárgyaljuk pontosan a kísérletet! A kezdőállapotot

$$\psi(\leftarrow)\psi(\rightarrow) \frac{1}{\sqrt{2}}(v_a \otimes v_{-a} - v_{-a} \otimes v_a) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi(\leftarrow)v_a \otimes \psi(\rightarrow)v_{-a} - \psi(\leftarrow)v_{-a} \otimes \psi(\rightarrow)v_a]$$

írja le, ahol ψ egy hullmcsoomag, és \leftarrow , illetve \rightarrow a „bal”, illetve „jobb” oldali részecske helyzet-változóját jelképezi.

Haladjon át a „bal oldali” részecske egy a irányú mágneses mezőn, a „jobb oldali” egy c irányún. Ekkor, mint az előző pontban láttuk, az idő múlásával az állapot

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_+(\leftarrow)v_a \otimes (\varphi_+(\rightarrow)v_{-c} + \varphi_-(\rightarrow)v_c) - \varphi_-(\leftarrow)v_{-a} \otimes (\varphi_+(\rightarrow)v_c + \varphi_-(\rightarrow)v_{-c})]$$

állapottá fejlődik.

Az együttes rendszernek az az eseménye, hogy a „bal oldali” részecske a irányú spin értéke is, a „jobb oldali” részecske c irányú spin értéke is pozitív

(azaz „fel”), bárhol vannak is a részecskék, $(I \otimes |v_a\rangle\langle v_a|) \otimes (I \otimes |v_c\rangle\langle v_c|)$. Ennek valószínűsége *bármely pillanatban* a $(*)$ érték.

Eddig rendben van. Csakhogy, mint a Stern–Gerlach kísérletben is, nem spinirányt mérünk, hanem helyzetet. Legyen $P_+(\leftarrow)$ és $P_+(\rightarrow)$ az az esemény, hogy a „bal oldali” részecske, illetve a „jobb oldali” részecske a „felső” térrészben van. Ekkor $(P_+(\leftarrow) \otimes \mathbf{1}) \otimes (P_+(\rightarrow) \otimes \mathbf{1})$ az az esemény, hogy az együttes rendszerben a mondott térrészben vannak, tekintet nélkül a spinirányokra. Ennek az eseménynek a valószínűsége, *elég idő elteltével*, vagyis a fenti állapotban ugyancsak a $(*)$ érték.

Vagyis a helyméréssel megkapjuk ugyanazokat a valószínűségeket, mintha spinirányokat mérnénk, amire, egyelőre nincs módszerünk. Hangsúlyozom, két okból is rossz a kísérlettel kapcsolatban a szokásos szöveg, miszerint megmérjük a részecskék spinjét ilyen-olyan irányban. Az első csak a már említett félrevezető fogalmazási hiba; helyesen úgy hangzana, hogy mérést végzünk ilyen-olyan spinirányokra vonatkozóan. A második azonban lényeges: nem spinirányok, hanem helyzetek mérése történik a kísérletben.

4.2.6. Paradoxonok?

A kvantummechanikával kapcsolatban megfogalmazott paradoxonok a fogalmak tisztázatlanságából, az elméletnek a határain túli alkalmazásából erednek.

Az úgynevezett méréselméleti paradoxon arról szól, hogy a kvantummechanikai unitér (Schrödinger-féle) állapotfejlődés szerint „a mérés elvégzése után a mérőeszköz nem egy meghatározott mutatóállású állapotban marad vissza, hanem mutatóállás-állapotok szuperpozíciójában”, ellentétben a tapasztalattal. Ezt a „paradoxont” feloldja az állapotbeugrás szokásos, de elfogadhatatlan képzet, amiről már korábban szót ejtettünk.

A mutatóállási paradoxonnak Schrödingertől származó meghökkentő megfogalmazása, amikor a mutató egy macska, amelynek két „állása” van: „élő” és „halott”, és a mérés eredménye ezeknek az állásoknak megfelelő állapotok szuperpozíciója (amely szerint a macska egy kicsit él is, meg nem is). Azon túl, hogy egy macska nem mechanikai rendszer, itt nagyon jól látszik, hogy az állapot hétköznapi, *egy egyedre* vonatkozó értelmét – mint például dühös, jó kedvű, lázas, ittas, élő, halott stb. – keverik össze a kvantummechanikai, *sokaságra* vonatkozó állapotfogalommal, amely egy valószínűségi mérték. Ez sok más érvelésben is tetten érhető,

Beszélni sok mindenről lehet. De komolyan csak akkor lehetne venni az efféle megfontolásokat, ha legalább egy konkrét kísérleti berendezésnek felállítanák a kvantummechanikai modelljét (mint ahogy például a hidrogénatomét): melyik konkrét Hilbert-térben mik a mutatóállások mint események, illetve állapotok, konkrétan hogyan játszódik le a mérés. Ez nem megy, mert a mérőberendezések vastagon nem csupán mechanikai rendszerek. Persze, hogy a kvantummechanika nem írja le az érvényességi körén kívüli jelenségeket, nincs ebben semmi paradoxon.

Tegyük fel újra a kérdést: miért nem akarják tárgyalni a mérést a klasszikus mechanika keretein belül? Ott le lehet írni azt, hogy a mérőeszköz mutatója végül megáll egy meghatározott pozícióban? Dehogy! A potenciálokkal leírható hatások, kölcsönhatások esetén a klasszikus időfejlődés sem eredményez egy végállapotot, és egy mérőeszközben lejátszódó folyamatok kívül esnek a mechanikán. A kvantummechanika a potenciálok esetén alkalmazható klasszikus

kanonikus formalizmusra alapozódik:

helyzet és impulzus alkotta fázistér – helyzet és impulzus felcserélése,
Hamilton-függvény – Hamilton-operátor,
Hamilton-egyenlet – Schrödinger-egyenlet.

Miért várnánk, hogy a kvantummechanika jobb a mérések tekintetében, mint a klasszikus mechanika?

És újra hangsúlyozzuk, hogy a méréseknek a kvantummechanikán (és természetesen a klasszikus mechanikán) belüli megfogalmazás eleve kudarcra ítélt igyekezet, hiszen, mint azt az általános keretek között is mondtuk, a mérések kívül esnek a modelleken.

Az Einstein–Podolsky–Rosen-paradoxon (egyszerű átfogalmazásban) a spin-korrelációs kísérlettel kapcsolatos.

Az előző pont eredményeit a mérések igazolják. Azt, hogy az ellentétes irányú spinértékek biztosan bekövetkeznek, így interpretálják:

Ha a bal oldalon „fel”, akkor a jobb oldalon „le” és ha a bal oldalon „le”, *akkor* a jobb oldalon „fel”.

Továbbá ebből azt következtetik, hogy

Ha csak a bal oldalon mérünk és az eredmény „fel”, *akkor* biztos, hogy a jobb oldalon „le”.

Ez utóbbi szerint információt szereztünk a jobb oldalról egy bal oldali méréssel; szó szerint idézzük Penrose: A császár új elméje című könyvének ide vágó részletét (E:=bal, P:=jobb):

„Feltehetjük, hogy először az E-mérő működik. Ekkor (értsd: ezután) a P-mérő olyan részecskét észlel, amelynek a spinállapota ellentétes az E-mérő által észlelttel.” „Az E-mérés megválasztása befolyásolja a P-eredményeket.” „Amikor az E spinjét mérjük, az állapotvektor úgy ugrik, hogy a P-nek már van határozott spinállapota.”

A probléma elsősorban a fenti eleve hibás interpretációban van. A kísérlet eredménye nem az a „ha ... akkor”, „először ...azután” amit mondanak, hanem az, hogy

A bal oldalon „fel” és a jobb oldalon „le” **egyidejű** kérdésre ugyanannyi az igen (és a nem) válasz, mint a bal oldalon „le” és a jobb oldalon „fel” kérdésre.

A konkrét kísérletek valóban egyidejű becsapódásokat számolnak.

Másodsorban hibás a mérésekre vonatkozó, a klasszikus beidegződésből eredő következtetésük, mert az egy oldali kérdésekre adott válaszok alapján semmi sem állítható a két oldali kérdésekre adott válaszokról. A mérések bonyolult beavatkozások a rendszerbe, amelyeket nem lehet a kvantummechanika keretein belül leírni; az egy oldali mérés is szétszakítja az együttes rendszert, ki tudja hogyan, ezért semmit sem állíthatunk arról, mi lesz a másik oldalon az egyik oldali mérés után.

Az említett interpretációkra alapozódik az úgynevezett „realitás-kritérium”, amelyet az Einstein–Podolsky–Rosen-cikkben a következőképpen fogalmaztak meg:

„Ha egy fizikai mennyiség értékét teljes biztonsággal (1 valószínűséggel) meg tudjuk jósolni anélkül, hogy a rendszert bármilyen módon megzavarnánk, akkor létezik a valóságnak egy eleme, amely e fizikai mennyiségnek felel meg.”

Az olvasóra bizzuk, próbáljon meg pontos értelmet adni az (1 valószínűségű) „teljes biztonságnak”, a „megjósolásnak”, a „valóság egy elemének”. Ha nem sikerül, ne magát okolja.

Felvetik a következő zavarba ejtő (és meg nem válaszolt) kérdést is: a relativitáselmélet alapján nincs abszolút egyidejűség, ezért ha egy megfigyelő szerint a bal oldali mérés történik előbb, akkor egy megfelelő másik szerint a jobb oldali; melyik mérés okozza hát a beugrást?

Először is nem megfigyelőt kellene itt mondani, hanem szinkronizációt (ugyanis egy megfigyelő nem csak a standard szinkronizációját használhatja, hanem akármely másikat, de ez elsikkad a szokásos tárgyalásokban). Másodszor viszont, a beugrást félretéve, a mi szempontunkból is fontos a szinkronizáció kérdése, hiszen egyidejű mérésekről beszéltünk. A válasz egyszerű. Elfogadva az impulzusmegmaradást, az egyes részecskék azonos nagyságú, elentétes irányú impulzusát tehetjük fel. Legyen a két részecske azonos tömegű. Használjuk azt a szinkronizációt, amelyben a sebességük is azonos nagyságú (ez a annak a megfigyelőnek a standard szinkronizációja, amelyben a kísérleti berendezés nyugszik). A két oldalon az ernyők legyenek azonos távolságra a forrástól.

Ehhez kapcsolódva felvetik azt a kérdést is, hogyan tudnak az egymástól esetleg nagyon távol levő részecskék „összebeszélni”: ha bal oldal így, akkor a jobb oldal úgy?

Megcsinálták a kísérletet akként, hogy a jobb és bal oldali mérés egyidejűségének pontosságát meghaladóan olyan távol legyenek egymástól az ernyők, hogy fénysebességnél gyorsabb információ-sebesség kellene az összehangolt felelethez, és így is ugyanazokat az eredményeket kapták.

Ezt úgy szokták megfogalmazni, sérül a lokalitás. A „realitás-kritériummal” együtt pedig ezt mondják (Penrose): „ellentmondás van a természet egy lokális, realiztikus képe és a kvantummechanika eredményei között”.

Mi a természet realiztikus képe? Ahogy azt Mórlicka elképzei?

A „ha ... akkor” interpretációjuk szempontjából valóban különös, hogy a részecskék egyeztetik a viselkedésüket. Viszont az idézett helyes értelmezés szerint teljesen kézenfekvő az eredmény: az lenne furcsa, ha például a /bal oldalon „fel” és a jobb oldalon „le”/ kérdésre több lenne az igen, mint a nem válasz.

És még egy fontos körülményt kell figyelembe vennünk. A fénysebessére vonatkozó ismereteink is klasszikusak: egy objektumtól egy másikig semmilyen hatás nem terjedhet gyorsabban a fénynél. Azonban a két részecske együttese *egy objektum* egészen addig, míg valami tragédia (becsapódás az ernyőre) szét nem választja őket. Ez az egységes objektum egészen más lehet, mint azt klasszikus elképzeléseink sugallják. Ezek együtt valami olyat „tudhatnak”, amit nem is sejtünk. Például azt, hogy belül a kölcsönhatás terjedése másként történik, mint gondoljuk. És ezzel nagyon jól alá lehet támasztani

4.2.7. Rejtett paraméterek?

Felvetődött az a gondolat, hogy a kvantumvalószínűségnek a szokásostól eltérő, alapvető furcasága, hogy nincsenek szórásmentes állapotok, csak azért jelenik meg, mert a „kvantummechanika a fizikai rendszerek nem teljes leírását adja”, vagyis bizonyos körülményeket nem vettünk figyelembe, „rejtve” maradtak. Ezért sokan próbálkoztak azzal, hogy úgynevezett rejtett paraméterek bevezetésével egészítsék ki a kvantummechanikát úgy, hogy a klasszikus valószínűségszámítás keretei között legyen tárgyalható. A próbálkozások és bizonyos eredmények rendszerint konkrét esetekben adott eseményekre és egyetlen állapotra (például spinkorrelációs kísérlet) vonatkoznak. Ez szinte semmitmondó.

Nem találkoztam azzal, hogy általában pontos definíciót adtak volna arra, mit jelent a kvantummechanika rejtett paraméteres elmélete. Én itt vázolok egy természetesen adódó értelmezést, amely úgy látszik, nem lehetséges. Ez persze nem zárja ki egy lehetséges értelmezés létezését.

Úgy képzeljük, hogy minden kvantummechanikai rendszer esetén van a „háttérben” egy klasszikus esemény-struktúra, amelynek csak bizonyos eseményei azok, amelyek megjelennek kvantumosan. Világos, hogy a kvantumos meg a klasszikus hálóműveletek között kapcsolatnak kell lennie. A rendezés nyilvánvalóan meg kell, hogy egyezzen a két esetben. Az „és” meg a „vagy” műveletek azonban nem lehetnek egyenlők a két esetben, mert akkor a kvantumos is disztributív háló lenne. Minthogy az „és” az legnagyobb alsó korlátot jelent, az tehető fel, hogy a háttérben van nagyobb alsó korlát, mint az előtérben. Hasonló fogalmazható meg a „vagy” műveletre. Ezekből rögtön adódik egy összefüggés a komplementer-eseményekre.

Összefoglalva, általában a következőképp fogalmazhatunk.

Legyen adott egy nem disztributív \mathcal{L} ortomoduláris σ -háló. Egy egy \mathcal{A} halmaz- σ -algebra az \mathcal{L} rejtett paraméteres kiegészítése, ha létezik egy $h : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{A}$ injekció úgy, hogy

- (i) ha $a \leq b$, akkor $h(a) \subset h(b)$,
- (ii) $h(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} a_n) \supset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h(a_n)$,
- (iii) $h(\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_n) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} h(a_n)$.
- (iv) $h(a^\perp) \subset h(a)^\delta$,
- (v) $\text{Ran}(h)$ generálja \mathcal{A} -t.

Az nem látszik azonnal, lehetséges-e ilyen konstrukció vagy sem.

Tovább lépve viszont annak is teljesülnie kell, hogy az \mathcal{L} -en értelmezett minden p valószínűségi mérték (állapot) esetén létezik az \mathcal{A} -n értelmezett P úgy, hogy $p = P \circ h$.

Ez már láthatóan problematikus. Ugyanis az előzők szerint, ha a és b egymást kizáró események, akkor, amint azt el is várjuk, $h(a)$ és $h(b)$ is kizárják egymást, mert ha $b \leq a^\perp$, akkor $h(b) \subset h(a^\perp) \subset h(a)^\delta$. A feltétel szerint tehát

$$\begin{aligned} p(a) + p(b) &= p(a \vee b) = P(h(a \vee b)) \geq P(h(a) \cup h(b)) = \\ &= P(h(a)) + P(h(b)) = p(a) + p(b), \end{aligned}$$

ezért a \leq helyett is egyenlőségnek kell állnia, ami kétséges, hogy teljesíthető.

Ez azonban még nem minden. Hiszen egy modellhez még hozzá tartoznak a fizikai mennyiségek is. Ha $u : \mathcal{B}(T) \rightarrow \mathcal{L}$ fizikai mennyiség, akkor $h \circ u$ is az kell legyen, vagyis például

$$h(u(E)) \cup h(u(F)) = h(u(E \cup F)) = h(u(E) \vee u(F)) \supset h(u(E)) \cup h(u(F))$$

kell, hogy teljesüljön, tehát a \supset helyett egyenlőségnek kell állnia, ami végképp kétséges, hogy teljesíthető.

Szerintem le kell mondanunk arról, hogy a világ a klasszikus elképzeléseink szerint működik, azaz arról, hogy valójában nincs véletlen, csak a tudásunk hiánya miatt érezzük úgy, van. Le kell számolnunk azzal a hittal (Einstein) hogy „az Isten nem kockajátékos”.

4.2.8. Miről van szó?

Idézünk néhány részletet egy méréselmélettel foglalkozó műből annak illusztrálására, hogy pontos meghatározás nélküli fogalmak tévútra vezetnek.

„Tekintsük a következő példát: egy kalapból dobókockákat húzunk, majd dobunk velük. Jelöljük a „dobás” eseményt D -vel, az ezt követő hat lehetséges kimenetelt pedig $\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \dots, \langle 61 \rangle$ -tal. Tegyük fel, hogy a megfigyelt relatív gyakoriságok alapján azt állapítjuk meg, hogy $p(\langle 1 \rangle | D) = 0,05 \dots$ ”

A formula mutatja – de más helyen a szerző mondja is –, hogy itt feltételes valószínűségről van szó: a $|$ jel előtti eseménynek az utána levő esemény meghatározta feltételes valószínűségéről.

A klasszikus valószínűségek körében a feltételes valószínűség jól definált fogalom, amiről tudni kell:

- a feltételnek eseménynek kell lennie,
- bármely nem nulla valószínűségű eseménnyel értelmezhető minden esemény feltételes valószínűsége.

Tehát az idézetben egy kimenetel is esemény, a dobás is esemény. De akkor esemény kell legyen az „egy vagy dobás” is. Értelmes ez? Továbbá a „dobás” valószínűségének is definiálva kellene lennie; hogyan?

„Azt is mondhatnánk, hogy egy kocka az eldobás előtt rendelkezik egy *tulajdonsággal*, mondjuk a „2” tulajdonsággal Jelöljük azt az eseményt, hogy a kihúzott kocka „2” tulajdonságú, $\langle 2 \rangle$ -vel.”

A tulajdonság is esemény? Akkor van olyan esemény is, hogy „kettes tulajdonság vagy dobás”?

A kvantum-valószínűségek körében a feltételes valószínűség sokkal szűkebb értelmű:

- a feltételnek eseménynek kell lennie,
- bármely nem nulla valószínűségű eseménnyel csak a vele kompatibilis események feltételes valószínűsége értelmezhető.

Idézzünk ezután egy kvantummechanikára vonatkozó eszmefuttatást:

„A kísérlet minden egyes megismétlése során létezik a valóság egy olyan eleme, a rendszernek fennáll egy olyan $\langle \tilde{a}_i \rangle$ tulajdonsága, amely egyértelműen determinálja mérés $\langle a_i \rangle$ kimenetelét, azaz egy valószínűséggel $\langle a_i \rangle$ eredményt kapunk, ha végrehajtjuk a megfelelő a mérést, tehát $p(\langle a_i \rangle | \langle \tilde{a}_i \rangle \wedge a) = 1$.”

Ki tud értelmet adni az „ $\langle \tilde{a}_i \rangle$ tulajdonság és a mérés” eseménynek? És vajon ezzel kompatibilis-e az $\langle a_i \rangle$ esemény?

Végül egy nagyszerű idézet J. S. Bell-től, akit nagyon foglalkoztatott a kvantummechanika alapos megértése.

„Hogy lehet, hogy komoly emberek komolyan vettek olyan axiómákat, melyek mára már teljesen indokolatlannak tűnnek? A tévedés, úgy sejttem, a „mérés” szónak a kortárs elméletekben történő végzetes félreértéséből fakad. E szó erősen azt sugallja, hogy a mérés során valamilyen dolognak valamilyen előzetesen létező tulajdonságát tárjuk fel, s hogy az ehhez használt bármiféle berendezésnek csupán passzív szerepe van. A kvantummechanikai kísérletek éppen hogy nem ilyenek, mint azt – mindenekelőtt Bohrtól – megtanulhattuk. A mérés eredményére úgy kell gondolnunk, mint a „rendszerből” és „mérőberendezésből” álló teljes kísérleti elrendezés produkciójára. A „mérés” helytelen használata azonban könnyen oda vezet, hogy ezt elfelejtjük, és azt várjuk, hogy a „mérési eredmények” valamiféle egyszerű logikának engedelmessé válnak, amelyben a mérőberendezés

említésre sem kerül... Meg vagyok győződve arról, hogy a „mérés” szó mára oly mértékben meg lett erőszakolva, hogy az egész szakterület jelentős fejlődését eredményezné, ha egyszerűen megtiltanák a használatát, és helyette például azt mondanánk, hogy „kísérlet”.

Ehhez csak annyit teszek hozzá, hogy az „állapot” szót is olyan félrevezető jelentésben használják (lásd a 4.2.6 pontot), hogy a helyett is más szót lenne jó alkalmazni; csak hogy a tiltás és átnevezés nem oldana meg semmit, ugyanúgy, mint az, hogy cigány helyett romát kell mondani.

5. Néhány további kérdés

5.1. A perturbációszámításról

5.1.1. Áttekintés a szokásos tárgyalásról

Van egy H alap-Hamilton-operátor, amihez járul egy K általában időtől függő perturbáció, vagyis a tényleges Hamilton-operátor $H + K$, a Schrödinger-egyenlet $\dot{\psi} = -i(H + K)\psi$.

Legyenek φ_n -ek a H sajátvektorai az E_n sajátértékkel. A Schrödinger-egyenlet megoldása

$$\psi(t) = \sum_m c_m e^{-iE_m t} \varphi_m$$

alakú lesz. Ezt az alakot behelyettesítve az egyenletbe (feltéve, hogy a végtelen összegzés és a differenciálás felcserélhető),

$$\dot{c}_n(t) = -i \sum_m K_{nm}(t) c_m e^{i(E_n - E_m)t} \quad (4)$$

adódik, ahol $K_{nm}(t) := \langle \varphi_n, K(t)\varphi_m \rangle$ (persze feltéve, hogy minden φ_n benne van $K(t)$ értelmezési tartományában minden t -re). Ennek a differenciálegyenletnek a megoldását fokozatos közelítéssel próbálják megtalálni. Nevezetesen, valamely $c_m^{(0)}$ kezdő állapotot a jobb oldalba betéve a bal oldalon megkapjuk az első közelítés deriváltját, $\dot{c}_n^{(1)}$ -t, mint az idő konkrét függvényét, amiből integrálással adódik maga az első közelítés. Ezt betéve a jobb oldalba, kapjuk a bal oldalon a második közelítés deriváltját, mint az idő konkrét függvényét, és így tovább. Általában a kezdő állapotnak egy φ_a -t vesznek, azaz (azaz $c_a(0) = 1$, a többi együttható nulla), és azt mondják, $|c_n^{(k)}|^2$ a φ_n -be való átmenet valószínűsége (noha, mint tudjuk, szó sincs átmenetről) a k -ik közelítésben.

Különösen látványos az időtől független perturbáció esete, amikor egyszerűen ki lehet integrálni a közelítő lépéseket. Lássuk a „folklórt”!

Ekkor

$$|c_n^{(1)}(t)|^2 = 2|K_{na}|^2 \frac{1 - \cos(E_n - E_a)t}{(E_n - E_a)^2}.$$

1. „Ez a kifejezés akkor vesz fel nagy értéket, ha $E_n = E_a$. Számottevő valószínűséggel csak egyenlő energiájú állapotok közt következik be átmenet. (Az energiamegmaradás tételéről az állapotegyenlet automatikusan számot ad).”

2. „Előfordul, hogy nem egy kiszemelt sajátállapot érdekel bennünket, hanem meglegszünk annak ismeretével, hogy mi a valószínűsége bizonyos típusú állapotok bármelyikébe történő átmenetnek. Ennek kiszámításánál a bennünket

érdeklő összes végállapotra összegezni kell.”

$$W := \sum_l |c_l^{(1)}(t)|^2 = \sum_l 2|K_{la}|^2 \frac{1 - \cos(E_l - E_a)t}{(E_l - E_a)^2}.$$

„Különösen ez a helyzet akkor, ha a lehetséges végállapotok igen sűrűn (egymáshoz megkülönböztethetetlenül közel) helyezkednek el, vagy esetleg folytonos sokaságot alkotnak. Ilyen esetben $\rho(l)dE_l$ jelölje azon állapotok számát, amelyek a bennünket érdeklők közül a dE_l intervallumba esnek.” Ekkor

$$W = 2 \int_{E'}^{E''} |K_{la}|^2 \frac{1 - \cos(E_l - E_a)t}{(E_l - E_a)^2} \rho(E_l) dE_l.$$

3. Ezután $\rho(E_l)$ -t $\rho(E_a)$ -val közelítve, az $x := \frac{(E_l - E_a)t}{2}$ új integrálási változó bevezetésével

$$W = t|K_l|_{E_l=E_a}^2 \rho(E_a) \int_{(E' - E_a)t}^{(E'' - E_a)t} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} dx$$

adódik.

4. „Térjünk át a $t \rightarrow \infty$ határesetre.” Ekkor az integrál értéke 2π , tehát

$$W = 2\pi t|K_l|_{E_l=E_a}^2 \rho(E_a).$$

5. Ebből „az időegység alatt bekövetkező átmenet valószínűségeként a következő eredmény adódik:”

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W}{t} = 2\pi |K_l|_{E_l=E_a}^2 \rho(E_a).$$

Elemezzük, miről is van szó a fentiekben.

1. Ez úgy értelmes, hogy a kifejezésnek a határértékét kell venni, miközben E_n tart E_a -hoz. Az eredmény

$$|c_n^{(1)}(t)|^2 = |K_{na}|^2 t^2 \quad \text{ha} \quad E_n = E_a. \quad (5)$$

Az átmenet valószínűség t^2 -tel arányos.

2-3-4. Ez a ködösítés azért kell, hogy egy t -t lecsaljanak, vagyis az átmenet már csak t -vel látszik arányosnak. Különösen indokolatlan a 4. húzás, hiszen a differenciálegyenlet fokozatos közelítéssel való megoldása azt jelenti, hogy minden egyes lépés az előtte való lépés eredményéből kiindulva egy „kis idő múltáig” érvényes eredményt származtat; tehát az első közelítés a kezdeti időpont – a nulla – egy környezetében használható csak.

5. Ez meg azért kell, hogy még egy t -t lecsaljanak, és egy szépnek mondható eredmény álljon elő. De ha az időegységre eső átmeneti valószínűség konstans, akkor, hiába minden, elég nagy idő eltelte után a valószínűség nagyobb lesz 1-nél.

5.1.2. Egy közelítés nélküli példa

Legyen a Hilbert-tér \mathbb{C}^2 , $E, \alpha > 0$, $\omega \leq 0$, és

$$H := \begin{pmatrix} -E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & -E \end{pmatrix}, \quad K := \alpha \begin{pmatrix} 0 & e^{i\omega t} & 0 \\ e^{-i\omega t} & 0 & e^{-i\omega t} \\ 0 & e^{i\omega t} & 0 \end{pmatrix}.$$

A Schrödinger-egyenletből az (4) formula szerint az

$$\begin{aligned}i\dot{c}_1 &= \alpha c_2 e^{i(-\omega+2E)t}, \\i\dot{c}_2 &= \alpha c_1 e^{i(\omega-2E)t} + \alpha c_3 e^{i(\omega-2E)t}, \\i\dot{c}_3 &= \alpha c_2 e^{i(-\omega+2E)t}\end{aligned}$$

egyenletrendszer adódik.

Ez viszonylag egyszerűen megoldható, a $2\beta := 2E - \omega$ és $\lambda := \sqrt{\beta^2 + 2\alpha^2}$ jelöléssel a

$c_1(0) = 1, c_2(0) = c_3(0) = 0$ kezdeti feltétellel

$$\begin{aligned}c_1(t) &= \frac{1}{2} \left(1 + e^{i\beta t} \frac{\lambda \cos \lambda t - i\beta \sin \lambda t}{\lambda} \right), \\c_2(t) &= -ie^{i\beta t} \frac{\alpha}{\lambda} \sin \lambda t, \\c_3(t) &= \frac{1}{2} \left(-1 + e^{i\beta t} \frac{\lambda \cos \beta t - i\beta \sin \lambda t}{\lambda} \right),\end{aligned}$$

amiből

$$\begin{aligned}|c_1(t)|^2 &= \frac{1}{4} \left((\cos \lambda t + \cos \beta t)^2 + \left(\frac{\lambda \sin \beta t + \beta \sin \lambda t}{\lambda} \right)^2 \right), \\|c_2(t)|^2 &= \frac{\alpha^2}{\lambda^2} \sin^2 \lambda t, \\|c_3(t)|^2 &= \frac{1}{4} \left((\cos \lambda t - \cos \beta t)^2 + \left(\frac{\lambda \sin \beta t - \beta \sin \lambda t}{\lambda} \right)^2 \right).\end{aligned}$$

Az „átmeneti valószínűségek” a λ és β által meghatározott peridodikus függvények összegeként áll elő.

Érdekes a speciális eset, amikor a perturbáló frekvencia éppen az energiaszintek közötti különbség $-\omega = 2E$, azaz $\beta = 0$, tehát $\lambda = \sqrt{2}\alpha$; ekkor az „átmeneti valószínűségek” tisztán peridodikusan változnak, :

$$|c_1(t)|^2 = \frac{1}{4}(1 + \cos \lambda t)^2, \quad |c_2(t)|^2 = \frac{1}{2} \sin^2 \lambda t, \quad |c_3(t)|^2 = \frac{1}{4}(1 - \cos \lambda t)^2.$$

Szokásos szöveg: „ha a hidrogénatomot bevilágító fény energiája (frekvenciája) épp egy energiaszint-különbségnyi, akkor az elektron átugrik a megfelelő szintre”. Erről szó sincs; még arról sem, hogy ide-oda ugrál, hanem arról, hogy vacillál (oszillál) az összes szint között.

5.2. A klasszikus és kvantumos állapotfogalom szemléltése

Tekintsünk egy klasszikus, illetve kvantumos eseményrendszert, amelyet *négy különböző elemi esemény* feszít ki:

B:=Borivás, S:=Sörivás, K:=Kólaivás, T:=Tonikivás.

Állapotelőkészítések: az egyetem épületeiben megszólalnak a hangszórók, és felhívják a hallgatókat három különféle alkalommal, hogy gyülekezzenek az aulában mert

I: = Ivászat lesz,
 Sz: =Szeszivászat lesz,
 Bi: =Borivászat lesz.

Tehát háromféle állapotról van szó.

Összegyűlik – a szemléltetés kedvéért az ivás tekintetében ugyanolyannak feltételezett – hallgatók sokasága. Mérés végrehajtása: Bort innál? Sört innál? stb. eldöntendő kérdések. A válaszok relatív gyakoriságával adódnak az események valószínűségei a háromféle állapotban.

Klasszikus eset: a hallgatók abszolút pontos elhatározással érkeznek: amint meghallották például, hogy ivászat lesz, eldöntötték, mit fognak kérni. Íme a valószínűségek:

-	B	S	K	T
I	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
Sz	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
Bi	1	0	0	0

Továbbá

-	B vagy S
I	$\frac{1}{2}$
Sz	1
Bi	1

Az első két állapot kevert, a harmadik tiszta. Ehhez nem kell magyarázat.

Kvantumos eset: a hallgatók semmilyen előzetes elhatározást nem tettek, döntésüket az elhangzó kérdés pillanatában hozzák meg. Íme a valószínűségek:

-	B	S	K	T
I	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
Sz	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$
Bi	1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$

Magyarázat:

I : értelemszerű.

SZ : szeszivászatra vannak felkészülve, ezért, amikor meghallják valamelyik szeszre vonatkozó kérdést, erősen hajlanak az igen válaszra; a szeszmentesre vonatkozó kérdés meglepi őket, mert nem arról volt szó, de néhányan azt gondolják, miért ne ihatnánk mást is.

Bi: borivásra vannak felkészülve, ezért a borra vonatkozó kérdésre persze, hogy igennel felel mindenki. A többi kérdés meglepi őket, de mint az előbb, miért ne? Viszont a sör- meg a kólaivás nem népszerű, mert gondolják, majd úgyis jön a bor, és ne keverjük. A tonikot viszont szívesen veszik a remélt bor előtt.

Továbbá

-	B vagy S
I	$\frac{2}{5}$
Sz	1
Bi	1

Magyarázat:

I: ez kevésbé vonzó a konkrét italmegnevezésnél (bor, sör), esetleg attól félnék, hogy keveredik a két ital, ezért van a $\frac{2}{5} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$.

Mind a három állapot tiszta.

Másféle állapotelőkészítések: az egyetem épületeiben négy-négy emeleten egy időben megszólalnak a hangszórók, mindegyik emeleten az alábbi más-más szöveggel: gyülekeztek az aulában mert

I:= Borivászat lesz, Sörivászat lesz, Kólaivászat lesz, Tonikivászat lesz.

Aztán két-két emeleten kétféle szöveggel:

Sz':= Borivászat lesz, Sörivászat lesz.

Tehát itt két állapotról van szó.

Feltesszük, hogy mindegyik emeleten ugyanannyi hallgató volt. Összegyűlik a sokaságuk, mérés mint előbb.

Klasszikus eset:

-	B	S	K	T
I'	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
Sz'	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0

Érthető: az egyik emeletről jönnek a borra abszolút elhatározottak, a másiktól a sörre, stb, ugyanannyian. Ez ugyanaz a két kevert állapot, mint előbb.

Kvantumos eset:

-	B	S	K	T
I'	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$
Sz'	$\frac{4,5}{8}$	$\frac{4,5}{8}$	$\frac{1,5}{8}$	$\frac{1,5}{8}$

Érthető: egyenlő arányban vannak összekeverve a különféle ivászatra hívott hallgatók, a valószínűségek egyenlők. És az első állapotban nagyobbak, mint $\frac{1}{4}$, a másodikban pedig nagyobbak, mint $\frac{1}{2}$, mert noha például borra van előkészítve, szívesen elfogad mást is.

Ezek kevert állapotok.

Az esetek matematikai leírása:

Klasszikusan: az eseménytér a $\{B, S, K, T\}$ hatványhalmaza. Az állapotok a valószínűségekkel magukról beszélnek.

Kvantumosan: az eseménytér a \mathbb{R}^3 Hilbert-tér altérhálója, és az elemi események

$$B := \sim (1, 1, \sqrt{2/3}), \quad S := \sim (1, -1, \sqrt{2/3}),$$

$$K := \sim (-1, 1, \sqrt{2/3}), \quad T := \sim (-1, -1, \sqrt{2/3}),$$

ahol \sim az adott vektor által kifeszített egydimenziós altér projektorát jelöli.

Az első állapotelőkészítésnél mind a három állapot tiszta lesz, mégpedig

$$I := \sim (0, 0, 1),$$

$$Sz := \sim (1, 0, \sqrt{2/3}),$$

$$Bi := \sim (1, 1, \sqrt{2/3}).$$

A második állapotelőkészítéseknél keverék állapotok jönnek létre, mégpedig

$$I' := \frac{1}{4}(Bi+Si+Ki+Ti), \quad Sz' := \frac{1}{2}(Bi+Si),$$

ahol értelemszerűen Si (a sörivászat), az S sörivás eseményének megfelelő tiszta állapot, stb.