LIE-CSOPORTOK

1. Affin terek

1.1. Alapvető tulajdonságok

Egy **affin tér** egy $(\mathrm{V}, \mathbf{V}, -)$ hármas, ahol
– V nem üres halmaz,
– $\mathbf{V}$ vektortér,
– $-$ leképzés $\mathrm{V} \times \mathrm{V}$-ről $\mathbf{V}$-re, amelyet

$$(x, y) \mapsto x - y$$

formában írunk, és amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:
1) minden $o \in \mathrm{V}$ esetén az $O_o : \mathrm{V} \to \mathbf{V}$, $x \mapsto x - o$ hozzárendelés bijekció,
2) $(x - y) + (y - z) + (z - x) = \mathbf{0}$ minden $x, y, z \in \mathrm{V}$ esetén.

O_o szokásos neve: V-nek o **kezdőpontú (origójú) vektorizációja**.

A szokásnak megfelelően az affin teret egyetlen betűvel jelöljük, és azt mondjuk, V affin tér $\mathbf{V}$ vektortér fölött, és a $-$ leképezést **kivonásnak** hívjuk.

Speciálisan egy vektortér, a vektori kivonással, affin tér önmaga fölött.

Az V affin tér **dimenziója** az alulfekvő $\mathbf{V}$ vektortér dimenziója. V **irányított** ha $\mathbf{V}$ irányított.

A fenti 1) és 2) tulajdonságból azonnal adódik, hogy minden $x, y \in \mathrm{V}$ esetén
– $x - y = \mathbf{0}$ akkor és csak akkor, ha $x = y$,
– $x - y = -(y - x)$;
továbbá bármely $n \geq 3$ egész számra és a V-nek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elemére

$$(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \ldots . + (x_n - x_1) = \mathbf{0}.$$

Adott $o \in \mathrm{V}$ esetén, az O_o leképezés inverzét

$$\mathbf{V} \to \mathrm{V}, \qquad \mathbf{x} \mapsto o + \mathbf{x} \tag{*}$$

formában jelöljük.

Tehát, definíció szerint a V minden x, y elemére

$$y + (x - y) = x.$$

Jegyezzük jól meg:
– értelmes az összeg, a különbség és a számmal szorzás vektorok között, az eredmény vektor;
– értelmes a különbség két affin térbeli elem között, az eredmény vektor (nem értelmes az összeg és a számmal szorzás!),
– értelmes egy affin térbeli elem és egy vektor összege, az eredmény affin térbeli elem.

A jelölések úgy vannak meghatározva, hogy a szokásos műveleti szabályok érvényben maradjanak, amennyiben az elvégzett műveletnek van értelme.

Tehát például igaz, hogy $(x + \mathbf{x}) + \boldsymbol{y} = x + (\mathbf{x} + \boldsymbol{y})$ (az összeadás jele a bal oldalon kétszer a $(*)$ műveletet jelöli, a jobb oldalon egyszer ezt a műveletet, egyszer a vektorok összeadását).

Ugyancsak igaz, hogy $(x - y) + (u - v) = (x - v) - (y - u)$, ezzel szemben $(x - y) + (u - v) = (x + u) - (y + v)$ nem helytálló, ugyanis a jobb oldalnak – affin térbeli elemek összegének – nincs értelme.

1.2. Affin leképezések

Legyen U és V affin tér az $\mathbf{U}$, illetve a $\mathbf{V}$ vektortér fölött. Egy $L : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$ leképezést **affinnak** hívunk, ha létezik egy $\boldsymbol{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ lineáris leképezés úgy, hogy

$$L(y) - L(x) = \boldsymbol{L} \cdot (y - x) \qquad (x, y \in \mathrm{V}).$$

Az $\boldsymbol{L}$ lineáris leképezés egyértelmű. Azt mondjuk, hogy L affin leképezés $\boldsymbol{L}$ fölött. A fenti formula egyenértékű azzal, hogy

$$L(x + \mathbf{x}) = L(x) + \boldsymbol{L} \cdot \mathbf{x} \qquad (x \in \mathrm{V}, \mathbf{x} \in \mathbf{V}).$$

Az affin leképezés L pontosan akkor injektív vagy szürjektív, ha $\boldsymbol{L}$ olyan; ha L bijekció, akkor L^{-1} affin leképezés $\boldsymbol{L}^{-1}$ fölött. Ha L bijekció és V is, U is irányított, L **irányítástartó**, ha $\boldsymbol{L}$ olyan.

Affin altérnek affin leképezés általi képe affin altér; affin altérnek affin leképezés általi őse affin altér.

Speciálisan az L affin leképezés értékkészletében levő minden u esetén

$$\{x \in \mathrm{V} \mid L(x) = u\}$$

az $\boldsymbol{L}$ magja vezette affin altér.

Ha $L, K : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$ affin leképezések $\boldsymbol{L}$, illetve $\boldsymbol{K}$ fölött, akkor a pontonként értelmezett különbségük,

$$L - K : \mathrm{V} \to \mathbf{U}, \qquad x \mapsto L(x) - K(x)$$

afin leképezés $\boldsymbol{L} - \boldsymbol{K}$ fölött (emlékezzünk, hogy $\mathbf{U}$ affin tér önmaga fölött).

Nyilvánvaló, hogy lineáris leképezés – az affin tereknek tekintett vektorterek között – affin leképezés önmaga fölött.

A $\mathbf{V}$ és $\mathbf{U}$ vektorterek (mint affin terek) közötti L affin leképezés az alatta lveő $\boldsymbol{L}$ lineáris leképezéssel és az $\mathbf{U}$ egy egyértelműen meghatározott $\boldsymbol{a}$ elemével

$$L(\mathbf{x}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{L}\mathbf{x}$$

adható meg. Más szóval, az ilyen affin leképezések $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{L})$ pár alakjában adhatók.

1.3. Differenciálás affin terekben

Ismertnek tételezzük fel az analízis alapvető fogalmait: nyílt halmaz, zárt halmaz, konvergencia, folytonosság stb.

Véges dimenziós vektortéren bármely két norma ekvivalens, vagyis ugyanazokat a nyílt halmazokat, zárt halmazokat, konvergens sorozatokat, folytonos függvényeket, stb. határozzák meg, ezért beszélhetünk ezekről norma konkrét megadása nélkül. Lineáris, bilineáris, multilineáris leképezések automatikusan folytonosak (véges dimenzió esetén!).

Ha $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ véges dimenziós vektortér, ordo : $\mathbf{V} \rightarrowtail \mathbf{U}$ olyan függvényt jelöl, amely

- definiálva van a $\mathbf{0} \in \mathbf{U}$ egy környezetében,
- $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \mathbf{0}} \frac{\mathrm{ordo}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{V}$-n adott valamely (tehát minden) $\|\cdot\|$ norma esetén.

Ha V affin tér a (véges dimenziós valós) $\mathbf{V}$ vektortér fölött, és $\|\ \|$ norma $\mathbf{V}$-n, akkor $\mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathbb{R}$, $\qquad (x, y) \mapsto \|x - y\|$ metrika V-n. Ezzel a V-n is beszélhetünk nyílt halmazokról, folytonosságról stb. Affin leképezések automatikusan folytonosak.

Legyen V és U affin tér. Egy $F : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$ függvény **differenciálható** az értelmezési tartományának egy x belső pontjában, ha létezik egy $\mathrm{D}F(x) : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ lineáris leképezés – más szóval az $\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}^*$ eleme – úgy, hogy

$$F(y) - F(x) = \mathrm{D}F(x) \cdot (y - x) + \mathrm{ordo}(y - x).$$

$\mathrm{D}F(x)$ az F **deriváltja** x-ben.

F **differenciálható**, ha differenciálható az értelmezési tartományának minden pontjában.

F **folytonosan differenciálható**, ha differenciálható, és a $\mathrm{V} \to \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{U})$, $x \mapsto \mathrm{D}F(x)$ függvény folytonos.

F **kétszer differenciálható**, ha differenciálható, és a $\mathrm{V} \to \mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$, $x \mapsto \mathrm{D}F(x)$ függvény differenciálható (aminek a fenti definíció szerint van értelme, hiszen a $\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$ véges dimenziós vektortér). Az F második deriváltja x-ben, amelyet $\mathrm{D}^2F(x)$-szel jelölünk, az $(\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}^*) \otimes \mathbf{V}^* = \mathbf{U} \otimes (\mathbf{V}^* \otimes \mathbf{V}^*)$ eleme.

Magasabb rendű diferenciálhatóság hasonlóan értelmezhető. Az F n-ik deriváltja x-ben, amelyet $\mathrm{D}^nF(x)$-szel jelölünk, az $\mathbf{U} \otimes (\mathbf{V}^*)^{\otimes n}$ eleme.

Simának mondunk egy akárhányszor („végtelenszer") differenciálható függvényt.

Minthogy egy vektortér affin tér önmaga fölött, értelemszerűen U és/vagy V helyett **U** és/vagy **V** is vehető.

Affin leképezés differenciálható, a deriváltja minden pontban az alulfekvő lineáris leképezés. Ezért végtelenszer differenciálható, minden magasabb rendű deriváltja nulla.

2. Részsokaságok

Véges dimenziós affin terek részsokaságainak értelmezésével és alapvető tulajdonságaival foglalkozunk; V mindvégig egy véges $N > 1$ dimenziós valós affin teret teret jelöl a **V** vektortér fölött.

2.1. Görbék

A V egy C részhalmaza **görbe** vagy **vonal**, ha létezik egy $p : \mathbb{R} \to \mathrm{V}$ függvény, amelyet a C **paraméterezésének** hívunk, úgy, hogy

– a p értelmezési tartománya nyílt intervallum, értékkészlete C,

– p folytonosan differenciálható, és a deriváltja, $\dot{p}(\xi) \in \mathbf{V}$ nem nulla az értelmezési tartományában levő minden ξ-re,

– p injektív és p^{-1} folytonos.

Legyen x a C görbe eleme. A $\dot{p}(p^{-1}(x))$ vektorral párhuzamos vektorokat (más szóval a $\dot{p}(p^{-1}(x))$ számszorosait) a görbe x-beli **érintővektorainak** nevezzük; összességük az x fölötti **érintőtér**.

Noha az érintővektorokat egy paraméterezéssel definiáltuk, függetlenek a paraméterezéstől: megmutatható, hogy ha p és q a C görbe paraméterezése, akkor $p^{-1} \circ q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, továbbá minden $x \in \mathrm{C}$ esetén $\dot{p}(p^{-1}(x))$ és $\dot{q}(q^{-1}(x))$ párhuzamos egymással.

2.2. Több dimenziós részsokaságok

Legyen $N > 2$, és m olyan természetes szám, amelyre $1 \leq m \leq N$ teljesül.

A V egy H részhalmaza m **dimenziós egyszerű részsokaság**, ha létezik egy $p : \mathbb{R}^m \to$ V függvény, amelyet a H **paraméterezésének** hívunk, úgy hogy
– a p értelmezési tartománya nyílt és összefüggő, értékkészlete H,
– p folytonosan differenciálható, és $\mathrm{D}p(\xi)$ injektív az értelmezési tartományában levő minden ξ-re,
– p injektív és p^{-1} folytonos.

Az értelmezés szerint tehát a görbék egydimenziós egyszerű részsokaságok; az $N-1$ dimenziós egyszerű részsokaságot **hiperfelületnek** hívjuk.

A V egy H részhalmaza m **dimenziós részsokaság**, ha minden x pontjának van olyan $G(x)$ környezete V-ben, hogy $G(x) \cap \mathrm{H}$ m dimenziós egyszerű részsokaság; egy ilyennek a paraméterezését a H **lokális paraméterezésének** hívjuk.

Egy lokális paraméterezés inverzét **lokális koordinátázásnak** nevezzük.

Legyen x a p lokális paraméterezés értékkészletében. Emlékezzünk, hogy $\mathrm{D}p(\xi) : \mathbb{R}^m \to \mathbf{V}$ lineáris leképezés. A $\mathrm{D}p(p^{-1}(x))$ értékkészletében levő elemeket a H x-beli **érintővektorainak** nevezzük; összességük az x fölötti **érintőtér**,

$$\mathrm{T}_x(\mathrm{H}) := \mathrm{Ran}\left(\mathrm{D}p(p^{-1}(x))\right).$$

Noha az érintővektorokat egy paraméterezéssel definiáltuk, függetlenek a paraméterezéstől: megmutatható, hogy ha p és q olyan lokális paraméterezés, hogy az értékkészletük metszete nem üres, akkor $p^{-1} \circ q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ folytonosan differenciálható, továbbá minden $x \in \mathrm{Ran}p \cap \mathrm{Ran}q$ esetén,

$$\mathrm{Ran}\left(\mathrm{D}p(p^{-1}(x))\right) = \mathrm{Ran}\left(\mathrm{D}q(q^{-1}(x))\right).$$

A részsokaság érintőterei a **V**-nek m dimenziós lineáris alterei.

Legyen U affin tér, $\dim \mathrm{U} = N - m$, és $S : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$ olyan folytonosan differenciálható függvény hogy $\mathrm{D}S(x)$ szürjektív minden x-re az S értelmezési tartományából. Ha $u \in \mathrm{Ran}S$, akkor

$$\mathrm{H} := \{x \in \mathrm{V} \mid S(x) = u\}$$

m dimenziós részsokaság V-ben, amelyre

$$\mathrm{T}_x(\mathrm{H}) = \mathrm{Ker}\mathrm{D}S(x).$$

Szavakban: az S szintfelületei részsokaságok.

Fordítva, megmutatható, hogy egy részsokaság minden pontjának van olyan környezete, amelyben szintfelületként állítható elő.

2.3. Differenciálható leképezések

Legyen H a V m dimenziós részsokasága. Az $f : \mathrm{H} \to \mathbb{R}$ függvény **differenciálható**, ha minden $p : \mathbb{R}^m \to \mathrm{H}$ paraméterezés esetén az $f \circ p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható.

Értelemszerűen bevezethetjük azokat a fogalmakat, hogy folytonosan differenciálható, kétszer differenciálható, stb.

Ezen értelmezés szerint a részsokaság bármely paraméterezésének az inverze folytonosan differenciálható: ha p paraméterezés akkor minden q paraméterezés esetén $p^{-1} \circ q$ folytonosan differenciálható.

Ha f differenciálható, akkor az $x \in \mathrm{H}$ pontban a **deriváltja** a

$$\mathrm{D}f(x) := \mathrm{D}(f \circ p)(p^{-1}(x)) \left(\mathrm{D}p(p^{-1}(x))\right)^{-1} : \mathrm{T}_x(\mathrm{H}) \to \mathbb{R}$$

lineáris leképezés, ahol p tetszőleges paraméterezés, amelyre $x \in Ran(p)$.

A derivált, noha paraméterezéssal van definiálva, független attól.

Legyen most $f : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ekkor f leszűkítése H-ra differenciálható, és

$$\mathrm{D}(f|_{\mathrm{H}})(x) = \mathrm{D}f(x)|_{T_x(\mathrm{H})}$$

.

Végül legyen H a V affin tér m dimenziós részsokasága, H' a V' affin tér m' dimenziós részsokasága. Az $F : \mathrm{H} \to \mathrm{H}'$ függvény **differenciálható**, ha $(p')^{-1} \circ F \circ p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m'}$ függvény differenciálható bármely p' és p paraméterezésre. Az F deriváltja az x pontban az előzőek mintájára értelemszerűen definiált

$$\mathrm{D}F(x) : \mathrm{T}_x(\mathrm{H}) \to \mathrm{T}_{F(x)}(\mathrm{H}')$$

lineáris leképezés.

3. Groups of linear bijections

3.1.

Let $\mathbf{V}$ be an N dimensional real vector space.

Then $\mathrm{Lin}(\mathbf{V})$, the set of $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ linear maps is an N^2 dimensional real vector space.

As usual, the symbol of composition between elements of $\mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ will be omitted, i.e. we write $\boldsymbol{AB} := \boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}$ for $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$.

Since $\mathbf{V}$ is finite dimensional, all norms on it are equivalent, i.e. all norms give the same open subsets. Given a norm $\| \quad \|$ on $\mathbf{V}$, a norm is defined on $\mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ by

$$\|\boldsymbol{A}\| := \sup_{\|\boldsymbol{v}\|=1} \|\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v}\|$$

for which $\|\boldsymbol{AB}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| \ \|\boldsymbol{B}\|$ holds ($\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$).

We introduce the notation

$$\mathcal{GL}(\mathbf{V}) := \{\boldsymbol{F} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}) |\ \boldsymbol{F} \text{ is bijective}\}.$$

Endowed with the multiplication $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}) \mapsto \boldsymbol{FG}$ (composition), $\mathcal{GL}(\mathbf{V})$ is a group whose identity (neutral element) is

$$\boldsymbol{I} := \mathrm{id}_{\mathbf{V}}.$$

3.2.

One can prove without difficulty that if $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V}), \qquad \|\boldsymbol{A}\| < 1$, then $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} \in \mathcal{GL}(\mathbf{V})$ and

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^n.$$

In other words, if $\boldsymbol{K} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$, $\quad \|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}\| < 1$, then $\boldsymbol{K} \in \mathcal{GL}(\mathbf{V})$ and

$$\boldsymbol{K}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K})^n.$$

Proposition. Let $\boldsymbol{F} \in \mathcal{GL}(\mathbf{V})$. If $\boldsymbol{L} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ and $\|\boldsymbol{F} - \boldsymbol{L}\| < \frac{1}{\|\boldsymbol{F}^{-1}\|}$ then $\boldsymbol{L} \in \mathcal{GL}(\mathbf{V})$.

Proof. $\|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{L}\| = \|\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{L})\| \leq \|\boldsymbol{F}^{-1}\| \; \|\boldsymbol{F} - \boldsymbol{L}\| < 1$, thus $\boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{L}$ is bijective. $\boldsymbol{F}$ is bijective by assumption, hence $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{L}$ is bijective as well. ■

As a corollary of this result we have that $\mathcal{GL}(\mathbf{V})$ is an open subset of $\mathrm{Lin}(\mathbf{V})$.

3.3.

It is elementary to prove that the mappings

$$\mathcal{GL}(\mathbf{V}) \times \mathcal{GL}(\mathbf{V}) \to \mathcal{GL}(\mathbf{V}), \qquad (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}) \mapsto \boldsymbol{F}\boldsymbol{G},$$
$$\mathcal{GL}(\mathbf{V}) \to \mathcal{GL}(\mathbf{V}), \qquad \boldsymbol{F} \mapsto \boldsymbol{F}^{-1}$$

are smooth.

3.4.

It is a well-known fact, too, that for $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$

$$\exp \boldsymbol{A} := e^{\boldsymbol{A}} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^n}{n!}$$

is meaningful, it is an element of $\mathcal{GL}(\mathbf{V})$,

$$e^{\mathbf{0}} = \boldsymbol{I}, \qquad \left(e^{\boldsymbol{A}}\right)^{-1} = e^{-\boldsymbol{A}}.$$

Moreover, the *exponential mapping,*

$$\mathrm{Lin}(\mathbf{V}) \to \mathcal{GL}(\mathbf{V}), \qquad \boldsymbol{A} \mapsto e^{\boldsymbol{A}}$$

is smooth, its derivative at $\mathbf{0} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ is the identity map $\mathrm{Lin}(\mathbf{V}) \to \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$.

The inverse mapping theorem implies that the exponential mapping is injective in a neighbourhood of $\mathbf{0}$, its inverse regarding this neighbourhood is smooth as well.

If $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ and $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ then $e^{\boldsymbol{A}}e^{\boldsymbol{B}} = e^{\boldsymbol{B}}e^{\boldsymbol{A}} = e^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$. In particular, $e^{t\boldsymbol{A}}e^{s\boldsymbol{A}} = e^{s\boldsymbol{A}}e^{t\boldsymbol{A}} = e^{(t+s)\boldsymbol{A}}$ for $t, s \in \mathbb{R}$.

3.5.

For $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$, the function $\mathbb{R} \to \mathcal{GL}(\mathbf{V})$, $\quad t \mapsto e^{t\boldsymbol{A}}$ is smooth and

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{t\boldsymbol{A}}\right) = \boldsymbol{A}e^{t\boldsymbol{A}} = e^{t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}.$$

As a consequence, the initial value problem

$$(\boldsymbol{X} : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathrm{Lin}(\mathbf{V}))? \qquad \dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}, \qquad \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{I}$$

has the unique maximal solution

$$\boldsymbol{R}(t) = e^{t\boldsymbol{A}} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

4. Groups of affine bijections

4.1.

Let V be an affine space over the N dimensional real vector space $\mathbf{V}$. Then

$$\mathrm{Aff}(\mathrm{V},\mathbf{V}) := \{A : \mathrm{V} \to \mathbf{V} |\ A \quad \text{is affine}\},$$

endowed with the pointwise operations, is a real vector space.

Given $o \in \mathrm{V}$, the correspondence

$$\mathrm{Aff}(\mathrm{V},\mathbf{V}) \to \mathbf{V} \times \mathrm{Lin}(\mathbf{V}), \qquad A \mapsto (A(o), \boldsymbol{A}) \tag{*}$$

(where $\boldsymbol{A}$ is the linear map under A) is a linear bijection; it is evidently linear and injective and it is surjective because the affine map $\mathrm{V} \to \mathbf{V}, \quad x \mapsto \boldsymbol{A} \cdot (x - o) + \boldsymbol{a}$ corresponds to $(\mathbf{a}, \mathbf{A}) \in \mathbf{V} \times \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$.

As a consequence, $\mathrm{Aff}(\mathrm{V},\mathbf{V})$ is an $(N + N^2)$ dimensional vector space.

4.2.

We easily find that

$$\mathrm{Aff}(\mathrm{V}) := \{L : \mathrm{V} \to \mathrm{V} |\ L \quad \text{is affine}\},$$

endowed with the pointwise subtraction, is an affine space over $\mathrm{Aff}(\mathrm{V},\mathbf{V})$. Thus, according to the previous paragraph, $\mathrm{Aff}(\mathrm{V})$ is $(N + N^2)$ dimensional.

Two elements K and L of $\mathrm{Aff}(\mathrm{V})$, as well as an element A of $\mathrm{Aff}(\mathrm{V},\mathbf{V})$ and an element L of $\mathrm{Aff}(\mathrm{V})$ can be composed; the symbol of compositions will be ommitted, i.e. $KL := K \circ L$ and $AL := A \circ L$.

We introduce

$$\mathcal{GA}(\mathrm{V}) := \{F \in \mathrm{Aff}(\mathrm{V}) |\ F \quad \text{is bijective}\}.$$

Endowed with the multiplication $(F, G) \mapsto FG$ (composition), $\mathcal{GA}(\mathrm{V})$ is a group whose identity (neutral element) is

$$I := \mathrm{id}_{\mathrm{V}}.$$

4.3.

According to our knowledge on the affine maps in a vector space $\mathbf{V}$, considered as an affin space, we have that $\mathrm{Aff}(\mathbf{V}) = \mathbf{V} \times \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$.

Given $o \in \mathrm{V}$, the mapping

$$\mathrm{Aff}(\mathrm{V}) \to \mathbf{V} \times \mathrm{Lin}(\mathbf{V}), \qquad L \mapsto (L(o) - o, \boldsymbol{L})$$

is an affine bijection over the linear bijection $(*)$. Evidently, this bijection maps $\mathcal{GA}(\mathrm{V})$ onto $\mathbf{V} \times \mathcal{GL}(\mathbf{V})$. As a consequence, $\mathcal{GA}(\mathrm{V})$ is an open subset of $\mathrm{Aff}(\mathrm{V})$.

4.4.

The mappings

$$\mathcal{GA}(\mathrm{V}) \times \mathcal{GA}(\mathrm{V}) \to \mathcal{GA}(\mathrm{V}), \qquad (F, G) \mapsto FG,$$

$$\mathcal{GA}(\mathrm{V}) \to \mathcal{GA}(\mathrm{V}), \qquad F \mapsto F^{-1}$$

are smooth.

4.5.

If $\boldsymbol{F} \in \mathcal{GL}(\mathbf{V})$ then

$$\ell_{\boldsymbol{F}} : \mathrm{Aff}(\mathrm{V}, \mathbf{V}) \to \mathrm{Aff}(\mathrm{V}, \mathbf{V}), \qquad A \to \boldsymbol{F}A$$

is a linear bijection, $(\ell_{\boldsymbol{F}})^{-1} = \ell_{\boldsymbol{F}^{-1}}$.

If $F \in \mathcal{GA}(\mathrm{V})$ then

$$\ell_F : \mathrm{Aff}(\mathrm{V}) \to \mathrm{Aff}(\mathrm{V}), \qquad L \mapsto FL$$

is an affine bijection over $\ell_{\boldsymbol{F}}$, where $\boldsymbol{F}$ is the linear map under F; moreover, $(\ell_F)^{-1} = \ell_{F^{-1}}$.

4.6.

If $A \in \mathrm{Aff}(\mathrm{V}, \mathbf{V})$ and $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ is the linear map under A then

$$\exp A := e^A := I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^{n-1}A}{n!}$$

is meaningful, it is an element of $\mathcal{GA}(\mathrm{V})$,

$$e^0 = I, \qquad \left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$$

and the linear map under e^A is $e^{\boldsymbol{A}}$.

Moreover, the *exponential mapping*

$$\mathrm{Aff}(\mathrm{V}, \mathbf{V}) \to \mathcal{GA}(\mathrm{V}), \qquad A \mapsto e^A$$

is smooth, its derivative at $0 \in \mathrm{Aff}(\mathrm{V}, \mathbf{V})$ is the identity map $\mathrm{Aff}(\mathrm{V}, \mathbf{V}) \to \mathrm{Aff}(\mathrm{V}, \mathbf{V})$.

The inverse mapping theorem implies that the exponential mapping is injective in a neighbourhood of 0, its inverse regarding this neighbourhood is smooth as well.

If $A, B \in \mathrm{Aff}(\mathrm{V}, \mathbf{V})$ and $\boldsymbol{A}B = \boldsymbol{B}A$ then $e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$. In particular, $e^{tA}e^{sA} = e^{sA}e^{tA} = e^{(t+s)A}$ for $t, s \in \mathbb{R}$.

4.7.

For $A \in \mathrm{Aff}(\mathrm{V}, \mathbf{V})$, the function $\mathbb{R} \to \mathcal{GA}(\mathrm{V}), \qquad t \mapsto e^{tA}$ is smooth and

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{tA}\right) = e^{t\boldsymbol{A}}A = Ae^{tA}.$$

As a consequence, the initial value problem

$$(X : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathrm{Aff}(\mathrm{V}, \mathbf{V}))? \qquad \dot{X} = AX, \qquad X(0) = I$$

has the unique maximal solution

$$R(t) = e^{tA} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

5. Plain Lie groups

5.1.

In general, a Lie group is defined to be a group endowed with a smooth structure in such a way that the group multiplication and the inversion are smooth mappings.

We treat only a special type of Lie groups appearing in physics; so we avoid the application of the theory of smooth manifolds. Later on we shall omit the adjective 'plain' appearing in the next definition because we shall deal only with such Lie groups. By the way, all the results we shall derive for plain Lie groups are valid for arbitrary Lie groups as well.

Definition Let V be an N dimensional real affine space. A subgroup $\mathcal{G}$ of $\mathcal{GA}(\mathrm{V})$ which is an m dimensional smooth submanifold of $\mathcal{GA}(\mathrm{V})$ is called an m *dimensional plain Lie group.* ■

The group multiplication $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}, \qquad (F, G) \mapsto FG$ and the inversion $\mathcal{G} \to \mathcal{G}$, $F \mapsto F^{-1}$ are smooth mappings.

Observe that by definition $0 < m \leq N + N^2$. $(N + N^2)$ dimensional plain Lie groups are $\mathcal{GA}(\mathrm{V})$ and its open subgroups.

5.2.

For $\boldsymbol{a} \in \mathbf{V}$, $T_{\mathbf{a}} : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$, $x \mapsto x+\mathbf{x}$ is an affine bijection, called the the *translation by* $\mathbf{a}$. It is quite evident that $T_{\boldsymbol{a}} = T_{\boldsymbol{b}}$ if and only if $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ and so

$$\mathrm{Tn}(\mathbf{V}) := \{T_{\mathbf{a}} | \ \mathbf{a} \in \mathbf{V}\},$$

called the *translation group* of V, is an N dimensional Lie group. The group multiplication in $\mathrm{Tn}(\mathbf{V})$ corresponds exactly to the addition in $\mathbf{V}$ that is why one often says that $\mathbf{V}$ — in particular $\mathbb{R}^N$ — endowed with the addition as a group multiplication is an N dimensional Lie group.

If the vector space $\mathbf{V}$ is considered to be an affine space then $\mathcal{GL}(\mathbf{V})$ is a subgroup and an N^2 dimensional submanifold of $\mathcal{GA}(\mathbf{V})$, thus $\mathcal{GL}(\mathbf{V})$ is an N^2 dimensional Lie group. Moreover, all its subgroups which are submanifolds as well, are Lie groups.

5.3.

It is obvious that

$$\mathcal{GA}(\mathrm{V}) \to \mathcal{GL}(\mathbf{V}), \qquad L \mapsto \boldsymbol{L} \qquad (\boldsymbol{L} \quad \text{is the linear map under } \ L)$$

is a smooth group homomorphism whose kernel is $\mathrm{Tn}(\mathbf{V})$ ($\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I}$ if and only if $L \in \mathrm{Tn}(\mathbf{V})$).

(i) Take a Lie group $\mathcal{G} \subset \mathcal{GA}(\mathrm{V})$. Then

$$\mathrm{under}(\mathcal{G}) := \{\boldsymbol{F} \in \mathcal{GL}(\mathbf{V}) | \ \boldsymbol{F} \ \text{ is under an } \ F \in \mathcal{G}\},$$

i.e. the image of $\mathcal{G}$ by the above group homomorphism is a Lie group.

(ii) Conversely, if $\boldsymbol{G} \subset \mathcal{GL}(\mathbf{V})$ is an m dimensional Lie group, then

$$\mathrm{over}(\boldsymbol{G}) := \{F \in \mathcal{GA}(\mathrm{V}) | \ F \ \text{ is over an } \ \boldsymbol{F} \in \boldsymbol{G}\},$$

the pre-image of $\boldsymbol{G}$ by the above group homomorphism, is an $(m + N)$ dimensional Lie group.

5.4.

Recall that the tangent spaces of $\mathcal{G}$ are linear subspaces of $\mathrm{Aff}(\mathrm{V},\mathbf{V})$. Every tangent space of $\mathcal{G}$ is obtained quite simply from the tangent space at I : $\mathrm{T}_F(\mathcal{G})$ is the translation' by F of $\mathrm{T}_I(\mathcal{G})$.

Proposition. Let $\mathcal{G} \subset \mathcal{GA}(\mathrm{V})$ be a Lie group. Then

$$\mathrm{T}_F(\mathcal{G}) = \boldsymbol{F}[\mathrm{T}_I(\mathcal{G})] = \{\boldsymbol{F}A|\ A \in \mathrm{T}_I(\mathcal{G})\} \qquad (F \in \mathcal{G}).$$

Proof. Take a curve in $\mathcal{G}$, parameterized by $P\mathbb{R} \to \mathcal{G}$, passing through the identity, i.e. $P(0) = I$. Then $\alpha \mapsto FP(\alpha)$ is a curve passing through F. The tangent vector of this curve at F is $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}FP(\alpha)|_{\alpha=0} = \boldsymbol{F}\dot{P}(0)$. Since $\dot{P}(0)$ can be an arbitrary element of $\mathrm{T}_I(\mathcal{G})$, this means that $\mathrm{T}_F(\mathcal{G}) \subset \boldsymbol{F}[\mathrm{T}_I(\mathcal{G}]$. $\boldsymbol{F}$ is a linear bijection, $\mathrm{T}_F(\mathcal{G})$ and $\mathrm{T}_I(\mathcal{G})$ have the dimension, thus equality must hold instead of $\subset$. ■

Consequently, we have a ralation between arbitrary tangent spaces: $\mathrm{T}_L(\mathcal{G}) = \boldsymbol{LF}^{-1}[\mathrm{T}_L(\mathcal{G})]$.

The tangent space of $\mathcal{G}$ at I plays an important role; for convenience we introduce the notation

$$\mathbf{La}(\mathcal{G}) := \mathrm{T}_I(\mathcal{G}).$$

Note that $\mathbf{La}(\mathcal{GA}(\mathrm{V})) = \mathrm{Aff}(\mathrm{V},\mathbf{V})$, $\qquad \mathbf{La}(\mathcal{GL}(\mathbf{V}) = \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$.

Moreover, $\mathbf{La}\big(\mathrm{Tn}(\mathbf{V})\big) = \mathbf{V}$ where $\mathbf{V}$ is identified with the constant maps $\mathrm{V} \to \mathbf{V}$.

5.5.

Definition. A smooth function $R : \mathbb{R} \to \mathcal{G} \subset \mathcal{GA}(\mathrm{V})$ is called a *one-parameter subgroup* in the Lie group $\mathcal{G}$ if

$$R(t+s) = R(t)R(s) \qquad (t, s \in \mathbb{R}). \qquad \square$$

In other words, a one-parameter subgroup is a smooth group homomorphism $R : \mathrm{Tn}(\mathbb{R}) \to \mathcal{G}$. Evidently, $R(0) = I$ and $R(-t) = R(t)^{-1}$.

There are three possibilites.

(i) There is a neighbourhood of $0 \in \mathbb{R}$ such that $R(t) = I$ for all t in that neighbourhood; then R is a constant function, $R(t) = I$ for all $t \in \mathbb{R}$.

(ii) There is a $T \in \mathbb{R}^+$ such that $R(T) = I$ but $R(t) \neq I$ for $0 < t < T$; then R is periodic, $R(t+T) = R(t)$ for all $t \in \mathbb{R}$.

(iii) $\quad R(t) \neq I$ for all $0 \neq t \in \mathbb{R}$.

5.6.

If $\boldsymbol{R}(t)$ denotes the linear map under $R(t)$ then $\boldsymbol{R} : \mathbb{R} \to \mathrm{under}(\mathcal{G})$ is a one-parameter subgroup; $\boldsymbol{R}(0) = \boldsymbol{I}$.

Differentiating with respect to s in the defining equality of R and then putting $s = 0$ we get

$$\dot{R}(t) = \mathbf{R}(t)\dot{R}(0) = \dot{R}(0)R(t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

which shows that if $\mathrm{Ran}R$ is not a single point (if R is not constant) then it is a one dimensional submanifold and a subgroup in $\mathcal{GA}(V)$. Thus $\mathrm{Ran}R$ is either the singleton $\{I\}$ or a one dimensional Lie group. In the case (ii) treated in the preceding paragraph, the restriction of R to an interval shorter than T is a local parametrization of Ran$R$; in the case (iii) R is a parametrization of Ran$R$.

5.7.

Proposition. Every one-parameter subgroup R in $\mathcal{G}$ has the form

$$R(t) = e^{tA} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

where $A = \dot{R}(0) \in \mathbf{La}(\mathcal{G})$.

Conversely, if $A \in \mathbf{La}(\mathcal{G}) \subset \mathrm{Aff}(\mathrm{V}, \mathbf{V})$ then $t \mapsto e^{tA}$ is a one-parameter subgroup in $\mathcal{G}$.

Proof. According to the previous paragraph, the one-parameter subgroup R is the solution of the initial value problem

$$(X : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathcal{G}a(\mathrm{V}))? \qquad \dot{X} = \mathbf{X}A, \qquad X(0) = I$$

where $A := \dot{R}(0)$; its solution is known to be $t \mapsto e^{tA}$.

Conversely, $t \mapsto e^{tA}$ is a one-parameter subgroup in $\mathcal{GA}(\mathrm{V})$; we have to show only that $e^{tA} \in \mathcal{G}$ for all $t \in \mathbb{R}$. Let $\mathcal{G}$ be given in a neighbourhood of the identity by a smooth map S in the form $\overset{-1}{S}(\{0\})$. Then

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S(e^{tA}) = \mathrm{D}S(e^{tA})e^{t\mathbf{A}}A = 0$$

because tha tangent space at e^{tA} is the kernel of $\mathrm{D}S(e^{tA})$ and $e^{tA}A$ is in that tangent space. Thus, $t \mapsto S(e^{tA})$ is costant and its value at $t = 0$ is zero. Consequently, e^{tA} is in $\mathcal{G}$ for sufficiently small t. A similar argument concerning to an arbitrary element instead of I we end the proof. ■

The assertions are true for *local one-parameter subgroups* as well, i.e. for smooth functions $R : \mathbb{R} \to \mathcal{G}$ defined on an interval around $0 \in \mathbb{R}$ such that $R(t + s) = R(t)R(s)$ whenever $t, s, t + s$ are in Dom$R$.

5.8.

The previous result involves that $e^A \in \mathcal{G}$ for $A \in \mathbf{La}(\mathcal{G})$, i.e. the restriction of the exponential mapping onto $\mathbf{La}(\mathcal{G})$ takes values in $\mathcal{G}$. Since the exponential mapping is smooth and injective in a neighbourhood of 0, its inverse regarding this neighbourhood is smooth as well (in particular continuous), we can state:

Proposition. Let $\mathcal{G}$ be a Lie group. Then

$$\mathbf{La}(\mathcal{G}) \to \mathcal{G}, \qquad A \mapsto e^A$$

is a parametrization of $\mathcal{G}$ in a neighbourhood of the identity I.

In particular, every element in a neighbourhood of I belongs to a one-parameter subgroup.

5.9.

Proposition. Every element of $\mathcal{G}$ in a neighbourhood of the identity is a product of elements taken from one-parameter subgroups corresponding to a basis of $\mathbf{La}(\mathcal{G})$.

Proof. Let $A_1, \dots A_m$ be a basis of $\mathbf{La}(\mathcal{G})$ and complete it to a basis $A_1, \dots, A_{N+N^2}$ of $\mathrm{Aff}(\mathrm{V}, \mathbf{V})$. Then putting $P := N + N^2$ for the sake of simplicity,

$$\Phi : \mathbb{R}^P \to \mathcal{GA}(\mathrm{V}), \qquad (t_1, t_2, \dots, t_P) \mapsto \exp(t_1 A_1) \exp(t_2 A_2) \dots \exp(t_P A_P)$$

is a smooth map, $\Phi(0, 0, \dots, 0) = I$, $\partial_k \Phi(0, 0, \dots, 0) = A_k$ $(k = 1, \dots, P)$. We can state on the basis of the inverse mapping theorem that Φ is injective in a neighbourhood of $(0, 0, \dots, 0)$, its inverse regarding this neighbourhood is smooth as well.

Thus the restriction of Φ onto $\mathbb{R}^m$ regarded as the subspace of $\mathbb{R}^P$ consisting of elements whose i-th components are zero for $i = m+1, \dots, P$ is a parametrization of $\mathcal{G}$ in a neighbourhood of I. ■

Note that in general

$$\exp(t_1 A_1) \exp(t_2 A_2) \dots \exp(t_P A_P) \neq \exp\left(\sum_{k=1}^{P} t_k A_k\right).$$

5.10.

If $\mathcal{G}$ is connected, every element of $\mathcal{G}$ is a product of elements in a neighbourhood of I, hence every element is a product of elements taken from one-parameter subgroups corresponding to a basis of $\mathbf{La}(\mathcal{G})$, since the following proposition is true.

Proposition. If $\mathcal{G}$ is connected and $\mathcal{N}$ is a neighbourhood of the identity I in $\mathcal{G}$, then

$$\mathcal{G} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{N}^n$$

where $\mathcal{N}^n := \{F_1 F_2 \dots F_n |\ F_k \in \mathcal{N},\ \ k = 1, \dots, n\}$.

Proof. Given $F \in \mathcal{G}$, the mapping $\mathcal{G} \to \mathcal{G}, \qquad G \mapsto FG$ is bijective, continuous, its inverse is continuous as well. Thus for all $F \in \mathcal{G}, \qquad F\mathcal{N} := \{FG|\ G \in \mathcal{N}\}$ is open, so $\mathcal{N}^2 = \cup_{F \in \mathcal{N}} F\mathcal{N}$ is open as well. Consequently, $\mathcal{N}^n$ is open for all n and thus $\mathcal{H} := \cup_{n \in \mathcal{N}} \mathcal{N}^n$ is open, too. We shall show that the closure of $\mathcal{H}$ in $\mathcal{G}$ equals $\mathcal{H}$; thus $\mathcal{H}$, being open and closed, equals $\mathcal{G}$.

Let L be an element of the closure of $\mathcal{H}$ in $\mathcal{G}$. Since $L\mathcal{N}^{-1}$ is a neighbourhood of L, there is an $F \in \mathcal{H}$ such that $F \in L\mathcal{N}^{-1}$ which implies $L \in F\mathcal{N}$; since $F\mathcal{N} \subset \mathcal{H}\mathcal{N} = \mathcal{H}$, the proof is complete.

6. The Lie algebra of a Lie group

6.1.

Recall that if $\mathcal{G}$ is a Lie group in $\mathcal{GA}(\mathrm{V})$ then $\mathbf{La}(\mathcal{G})$, the tangent space of $\mathcal{G}$ at $I = \mathrm{id}_{\mathrm{V}}$ is a linear subspace of $\mathrm{Aff}(\mathrm{V}, \mathbf{V})$. If $A \in \mathrm{Aff}(\mathrm{V}, \mathbf{V})$ then $\boldsymbol{A}$ denotes the underlying linear map $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$.

Proposition. Let $\mathcal{G}$ be a Lie group. If $A, B \in \mathbf{La}(\mathcal{G})$ then

$$\boldsymbol{A}B - \boldsymbol{B}A \in \mathbf{La}(\mathcal{G}).$$

Proof. Take a neighbourhood $\mathcal{N}$ of I in $\mathcal{GA}(\mathrm{V})$ and a smooth map S defined on $\mathcal{N}$ such that $\overset{-1}{S}(\{0\}) = \mathcal{G} \cap \mathcal{N}$; then $\mathbf{La}(\mathcal{G}) = \mathrm{Ker}\mathrm{D}S(I)$.

Then

$$t \mapsto S\left(e^{tA}e^{tB}\right) = 0 \qquad \text{and} \qquad t \mapsto S\left(e^{tB}e^{tA}\right) = 0$$

for t in a neighbourhood of $0 \in \mathbb{R}$. Differentiating the first function with respect to t we get

$$t \mapsto \mathrm{D}S\left(e^{tA}e^{tB}\right) \cdot \left(e^{t\boldsymbol{A}}Ae^{tB} + e^{t\boldsymbol{A}}e^{t\boldsymbol{B}}B\right) = 0.$$

Again differentiating and then taking $t = 0$ we deduce

$$\mathrm{D}^2S(I)\,(A + B, A + B) + \mathrm{D}S(I) \cdot (\boldsymbol{A}A + 2\boldsymbol{A}B + \boldsymbol{B}B) = 0.$$

Similarly we derive from the second function that

$$\mathrm{D}^2S(I)\,(B + A, B + A) + \mathrm{D}S(I) \cdot (\boldsymbol{B}B + 2\boldsymbol{B}A + \boldsymbol{A}A) = 0.$$

Let us subtract the equalities from each other to have

$$\mathrm{D}S(I) \cdot (\boldsymbol{A}B - \boldsymbol{B}A) = 0$$

which ends the proof.

6.2.

According to the previous proposition we are given the *commutator mapping*

$$\mathbf{La}(\mathcal{G}) \times \mathbf{La}(\mathcal{G}) \to \mathbf{La}(\mathcal{G}), \qquad (A, B) \mapsto \boldsymbol{A}B - \boldsymbol{B}A =: [A, B].$$

Proposition. The commutator mapping
(i) is bilinear,
(ii) is antisymmetric,
(iii) satisfies the *Jacobian identity:*

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0 \qquad\qquad (A, B, C \in \mathbf{La}(\mathcal{G})).$$

Definition. $\mathbf{La}(\mathcal{G})$ endowed with the commutator mapping is called the *Lie algebra of* $\mathcal{G}$. ■

We deduce without difficulty that for $A, B \in \mathbf{La}(\mathcal{G})$

$$[A, B] = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(e^{tA}e^{tB}e^{-tA}e^{-tB}\right)\right)|_{t=0}$$

and

$$A + B = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{tA}e^{tB}\right)|_{t=0}.$$

6.3.

The Lie algebra of $\mathcal{GA}(\mathrm{V})$ is $\mathrm{Aff}(\mathrm{V},\mathbf{V})$. We have seen that if a linear subspace $\mathbf{L}$ of $\mathrm{Aff}(\mathrm{V},\mathbf{V})$ is the tangent space at I of a Lie group then the commutator of elements from $\mathbf{L}$ belongs to $\mathbf{L}$, too; in other words, $\mathbf{L}$ is a Lie subalgebra of $\mathrm{Aff}(\mathrm{V},\mathbf{V})$. Conversely, if $\mathbf{L}$ is a Lie subalgebra of $\mathrm{Aff}(\mathrm{V},\mathbf{V})$ then there is a Lie group $\mathcal{G}$ such that $\mathbf{La}(\mathcal{G})=\mathbf{L}$: the subgroup generated by $\{e^A|\ A\in\mathbf{L}\}$. It is not so easy to verify that this subgroup is a submanifold.

6.4.

Definition. Let $\mathcal{G}$ and $\mathcal{H}$ be Lie groups. A mapping $\Phi:\mathcal{G}\rightarrowtail\mathcal{H}$ is called a local Lie group homomorphism if

(i) $\mathrm{Dom}\Phi$ is a neighbourhood of the identity of $\mathcal{G}$,

(ii) Φ is smooth,

(iii) $\Phi(FG)=\Phi(F)\Phi(G)$ whenever $F,G,FG\in\mathrm{Dom}\Phi$.

If Φ is injective and Φ^{-1} is smooth as well, then Φ is a *local Lie group isomorphism.* ■

For a local Lie group homomorphism $\Phi:\mathcal{G}\rightarrowtail\mathcal{H}$ we put

$$\mathbf{\Phi}:=\mathrm{D}\Phi(I)\in\mathrm{Lin}\left(\mathbf{La}(\mathcal{G}),\mathbf{La}(\mathcal{H})\right).$$

If $A\in\mathbf{La}(\mathcal{G})$, then $t\mapsto\Phi(e^{tA})$ is a local one-parameter subgroup in $\mathcal{H}$ and

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(e^{tA})\right)_{t=0}=\mathbf{\Phi}(A),$$

which implies

$$\Phi(e^{tA})=e^{t\mathbf{\Phi}(A)}$$

for t in a neighbourhood of $0\in\mathbb{R}$.

Proposition. $\mathbf{\Phi}:\mathbf{La}(\mathcal{G})\to\mathbf{La}(\mathcal{H})$ is a Lie algebra homomorphism, i.e. it is linear and

$$[\mathbf{\Phi}(A),\mathbf{\Phi}(B)]=\mathbf{\Phi}\left([A,B]\right)\qquad (A,B\in\mathbf{La}(\mathcal{G})).$$

Proof. Start with

$$\begin{aligned}[\mathbf{\Phi}(A),\mathbf{\Phi}(B)]=&\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(e^{t\mathbf{\Phi}(A)}e^{t\mathbf{\Phi}(B)}-e^{t\mathbf{\Phi}(B)}e^{t\mathbf{\Phi}(A)}\right)\right)_{t=0}=\\ =&\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\Phi(e^{tA}e^{tB})-\Phi(e^{tB}e^{tA})\right)\right)_{t=0}\end{aligned}$$

and then apply the formulae in the proof of the first proposition in this subsection, putting Φ in place of S.

6.5.

The previous proposition involves that locally isomorphic Lie groups have isomorphic Lie algebras. One can prove the converse, too, a fundamental theorem of the theory of Lie groups: if the Lie algebras of two Lie groups are isomorphic then the Lie groups are locally isomorphic.

6.6.

All the above results are valid for arbitrary Lie groups, of course, with convenient changes in the notions and proves. First of all, e.g., the exponential of a Lie-algebra element, though being meaningful, is not defined by a series; that is why, in the general theory $\exp(A)$ is written instead of e^A.