# 1. Mértékelméleti összefoglaló

Legyen $\mathcal{A}$ egy $S$ halmaz részhalmazaiból álló $\sigma$-algebra.

## 1.1. Közönséges mértékek és valós függvények

Az $\mathcal{A}$-n adott $\mu$ (közönséges) mérték egy nemnegatív értékű $\sigma$-additív leképezés, amely a végtelen értéket is felveheti. ($\sigma$-additív: megszámlálható sok diszjunkt halmaz uniójának a mértéke a halmazok mértékének az összege).

A $\sigma$-additivitásból következik, hogy a mérték alulról és felülről félig folytonos, azaz monoton növő halmazsorozat uniójának, illetve monoton csökkenő halmazsorozat metszetének a mértéke a halmazok mértékéből álló sorozat határértéke.

Egy $E \in \mathcal{A}$ halmazt $\mu$-nullának hívunk, ha $\mu(E) = 0$.

A $\mu$-majdnem mindenütt – egyszerűsített írással $\mu$-mm. – azt jelenti, hogy egy $\mu$-nulla halmaz kivételével. Például az $f$ és $g$ függvény $\mu$-mm. egyenlő, ha az a halmaz, ahol nem egyenlők, $\mu$-nulla.

Egy

$$\phi := \sum_i c_i \chi_{E_i} \tag{1}$$

alakú függvényt $\mathcal{A}$-lépcsős függvénynek hívunk, ha $i$ tetszőleges véges halmazt fut végig, $c_i \in \mathbb{R}$, $E_i \in \mathcal{A}$ és $E_i \cap E_j = \emptyset$ $i \neq j$ esetén.

Egy $f : S \to \mathbb{R}$ függvény $\mathcal{A}$-mérhető, ha minden valós Borel-halmaz $f$ általi őSképe $\mathcal{A}$-ban van. Ez egyenérték azzal, hogy $f$ $\mathcal{A}$-lépcsős függvények sorozatának pontonkénti határértéke.

A fenti alakú $\mathcal{A}$-lépcsős függvény $\mu$-integrálható, ha $\sum_i |c_i|\mu(E_i) < \infty$; ekkor $\int_S \phi d\mu := \sum_i c_i \mu(E_i)$.

Az $f : S \to \mathbb{R}$ függvény $\mu$-integrálható, ha van olyan $\phi_n$ $(n \in \mathbb{N})$ $\mu$-integrálható $\mathcal{A}$-lépcsős függvény sorozat, amely $\mu$-mm. konvergál $f$-hez, és $\lim_{nm} \int_S |\phi_n - \phi_m| d\mu = 0$, és ekkor

$$\int_S f d\mu := \lim_n \int_S \phi_n d\mu.$$

Ez a definíció szemléletesen, jól mutatja az integrálhatóság lényegét, azonban az integrálemélet különféle felépítéseiben más definíciókat használnak, és ott állításként jelenik meg, hogy egy függvény pontosan akkor $\mu$-inh, ha a fenti tulajdonsággal rendelkezik (ugyanis ebből a definícióból nem sikerül közvetlenül származtatni az integrálás alapvető tételeit).

A szokásos felépítesek egyik lépése, amit mi többször is ki fogunk használni az az, hogy egy nem negatív $f$ mérhető függvényhez mindig létezik $\mathcal{A}$-lépcsős függvények monton növő $\phi_n$ sorozata úgy, hogy $f = \lim_n \phi_n$, és a lépcsős függvények integráljának a határértéke, ha létezik, lesz az $f$ integrálja.

$\mu$-integrálható függvények összege és számszorosa is $\mu$-integrálható.

Egy $f$ függvény $\mu$-integrálható az $E \in \mathcal{A}$ halmazon, ha $\chi_E f$ $\mu$-integrálható , és ekkor

$$\int_E f d\mu := \int_S \chi_E f d\mu.$$

Egyszerű tények:

– ha $f, g$ $\mu$-integrálható és $f \leq g$ $\mu$-mm., akkor $\int_S f d\mu \leq \int_S g d\mu$,

– $f$ akkor és csak akkor $\mu$-integrálható , ha $|f|$ $\mu$-integrálható , és ekkor $\left|\int_S f d\mu\right| \leq \int_S |f| d\mu$.

Az integrálás alaptételei a következők.

**1. Állítás.** *(B. Levi tétele)*

*1. Legyen $f_n$ $\mu$-integrálható , $f_n \leq f_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ és létezzen $\lim_n \int_S f_n d\mu$. Ekkor létezik $\mu$-mm. $\lim_n f_n$, amely $\mu$-integrálható , és*

$$\int_S (\lim_n f_n) d\mu = \lim_n \int_S f_n d\mu.$$

*2. Legyen $g_n$ $\mu$-integrálható $(n \in \mathbb{N})$ és $\sum_n \int_S |g_n| d\mu < \infty$. Ekkor a $\sum_n g_n$ függvénysor $\mu$-mm. abszolút konvergens, $\sum_n g_n$ $\mu$-integrálható és*

$$\int_S (\sum_n g_n) d\mu = \sum_n \int_S g_n d\mu.$$

**2. Állítás.** *(Lebesgue tétele)*

*Legyen $f_n$ $\mu$-integrálható és létezzen $g$ $\mu$-integrálható úgy, hogy $|f_n| \leq g$ $(n \in \mathbb{N})$, továbbá létezzen $\mu$-mm. $\lim_n f_n$. Ekkor létezik $\lim_n \int_S f_n d\mu$, továbbá $\lim_n f_n$ $\mu$-integrálható, és*

$$\int_S (\lim_n f_n) d\mu = \lim_n \int_S f_n d\mu.$$

**3. Állítás.** *(Fatou lemmája)*

*Legyen $0 \leq f_n$ $\mu$-integrálható és létezzen olyan $a \in \mathbb{R}^+$, hogy $\int_S f_n d\mu \leq a$ $(n \in \mathbb{N})$. Ha létezik $\mu$-mm. $\lim_n f_n$, akkor ez integrálható, és*

$$\int_S (\lim_n f_n) d\mu \leq \liminf_n \int_S f_n d\mu.$$

## 1.2. Komplex mértékek és komplex függvények

Az $\mathcal{A}$-n adott $\mu$ **komplex mérték** egy komplex értékű $\sigma$-additív leképezés. Ez annyival bonyolultabb a korábban tárgyalt (közönséges) mértéknél, hogy komplex értékű, de annyival egyszerűbb, hogy végtelen értéke nem lehet.

A $\mu$ komplex mérték **teljes variációja** a $|\mu|$ közönséges mérték, amelyet a

$$|\mu|(E) := \sup\{\sum_i |\mu(E_i)| : A = \bigcup_i E_i,\ E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j\}$$

formula határoz meg, ahol a szuprémum az $E$ összes lehetséges véges diszjunkt feloszására vonatkozik.

Megjegyezzük, hogy $\mu(E) = 0$ egyenértékű azzal, hogy $|\mu|(A) = 0$.

Az $f : S \to \mathbb{C}$ függény **$\mathcal{A}$-mérhető**, ha mind a valós, mind a képzetes része $\mathcal{A}$-mérhető. Ez egyenértékű azzal, hogy minden komplex Borel-halmaz $f$ általi ősképe $\mathcal{A}$-ban van.

A komplex értékű **$\mathcal{A}$-lépcsős függvények** (1) alakúak úgy, hogy az együtthatók komplex számok.

Egy komplex értékű $\mathcal{A}$-lépcsős függvény **$\mu$-integrálható**, ha $\sum_i |c_i||\mu|(E_i) < \infty$; ekkor $\int_S \phi d\mu := \sum_i c_i \mu(E_i)$.

Az $f : S \to \mathbb{C}$ függvény $\mu$-integrálható, ha van olyan $\phi_n$ $(n \in \mathbb{N})$ $\mu$-integrálható komplex értékű $\mathcal{A}$-lépcsős függvény sorozat, amely $\mu$-mm. konvergál $f$-hez, és $\lim_{nm} \int_S |\phi_n - \phi_m| d|\mu| = 0$, és ekkkor

$$\int_S f d\mu := \lim_n \int_S \phi_n d\mu.$$

$\mu$-integrálható függvények összege és számszorosa is $\mu$-integrálható.

Egy $f$ függvény $\mu$-integrálható az $E \in \mathcal{A}$ halmazon, ha $\chi_E f$ $\mu$-integrálható , és ekkor

$$\int_E f d\mu := \int_S \chi_E f d\mu.$$

Egyszerű tény, hogy $f$ akkor és csak akkor $\mu$-integrálható , ha $|f|$ $|\mu|$-integrálható , és ekkor $\left|\int_S f d\mu\right| \le \int_S |f| d|\mu|$.

Az alapvető integráltételek – értelemszerűen – igazak maradnak. Nevezetesen, B. Levi tételének az 1. változata nem értelmes (a rendezés miatt), a 2. változata úgy, hogy $\sum_n \int_S |g_n| d|\mu| < \infty$, Lebesgue tétele érvényes, Fatou lemmája nem értelmes.

**4. Állítás.** *Ha $h : S \to \mathbb{C}$ $\mu$-integrálható , akkor*

$$h\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}, \quad E \mapsto \int_E h d\mu$$

*komplex mérték, amelyre $|h\mu| = |h||\mu|$ teljesül, azaz $|h\mu|(E) = \int_E |h| d|\mu|$.*

*Továbbá, az $f : S \to \mathbb{C}$ függvény pontosan akkor $h\mu$-integrálható, ha $fh$ $\mu$-integrálható, és ekkor $f(h\mu) = (fh)\mu$.*

# 2. Projektormértékek

## 2.1. Orto-$\sigma$-homomorfizmusok

A kvantummechanikában egy fizikai rendszer eseményeit egy $\mathcal{P}(\mathbf{H})$ Hilbert-hálóval modellezzük. Egy véges dimenziós $V$ vektortér értékű fizikai mennyiség $\mathcal{B}(V) \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ orto-$\sigma$-homomorfizmus.

A továbbiakban a mértékelmélet fogalmait fogjuk használni, ezért egy kicsit általánosabb keretek között tárgyaljuk a fizikai mennyiségeket. Legyen tehát adott egy $S$ halmaz részhalmazaiból álló $\mathcal{A}$ $\sigma$-algebra, és $P : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ orto-$\sigma$-homomorfizmus (itt tehát $P$ nem egy projektort jelöl, hanem egy projektor értékű leképezést). Tudjuk, hogy

$$P(S) = I \tag{2}$$

és persze

$$P(\emptyset) = 0, \quad P(E^{\diamond}) = I - P(E);$$

mivel $P$ értékkészlete disztributív, tehát kommutatív, így előző eredményeink alapján

$$P(E \cap F) = P(E)P(F)$$

minden $E, F \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén. Továbbá, ha $E_n$ ($n \in \mathbb{N}$) páronként diszjunkt Borel-halmazok, akkor

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = (s)\sum_{n\in\mathbb{N}} P(E_n). \tag{3}$$

A felsorolt tulajdonságokat – amelyek az orto-$\sigma$-homomorfizmusság következményei – fogjuk minduntalan használni. (2) és (3) alapján a matematikában meghonosodott elnevezés szerint $P$-t **projektormértéknek** fogjuk hívni; ez a két tulajdonság már maga után vonja a többit:

**5. Állítás.** *Legyen $P : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ olyan leképezés, amely teljesíti a* (2) *és* (3) *egyenlőségeket. Ekkor $P$ orto-$\sigma$-homomorfizmus.*

*Bizonyítás* Az üres halmaz önmagától diszjunkt, ezért $P(\emptyset) = P(\cup_n \emptyset) = (s)\sum_n P(\emptyset)$, amiből $P(\emptyset) = 0$. Következésképpen $P$ additív is, nem csak $\sigma$-additív (véges sok diszjunkt halmaz unióját kiegészítve megszámlálható sokszor a üres halmaz uniójával).

Ezért – a továbbiakban $E, F \in \mathcal{A}$ – $I = P(E \cup E^{⫰}) = P(E) + P(E^{⫰})$, azaz

$$P(E^{⫰}) = I - P(E) = P(E)^{\perp}. \tag{4}$$

Továbbá, ha $E \subset F$, akkor $P(F) = P(E \cup (F \setminus E)) = P(E) + P(F \setminus E)$ amikből egyrészt

$$P(E) \leq P(F),$$

másrészt

$$P(F \setminus E) = P(F) - P(E)$$

következik.

Ezután bármely $E, F$ esetén

$$P(E \cup F) = P(E \cup (F \setminus (E \cap F)) = P(E) + P(F) - P(E \cap F).$$

Átrendezve, majd négyzetre emelve és kihasználva, hogy egy projektornak egy nála nagyobb egyenlővel vett bármely sorrendű szorzata egyenlő a projektoral, ezt kapjuk:$P(E \cap F) = P(E) + P(F) + P(E \cup F) + P(E)P(F) + P(F)P(E) - 2P(E) - 2P(F)$, amiből $2P(E \cap F) = P(E)P(F) + P(F)P(E)$. Minthogy a bal oldalon az $E$ és $F$ szerepe szimmetrikus, végül arra jutunk, hogy

$$P(E \cap F) = P(E)P(F) = P(F)P(E).$$

Ennek következményeként véges sok halmaz metszetéhez rendelt projektor az egyes halmazokhoz rendelt projektrok szorzata, megszámlálható sok halmaz metszetéhez rendelt projektort pedig a korábban bizonyított állítás szerint a véges metszetek erős limeszeként kapjuk; így végül

$$P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} P(E_n). \tag{5}$$

Az (4) és (5) tulajdonság biztosítja, hogy $P$ valóban orto-$\sigma$-homomorfizmus.

## 2.2. Projektormértékkel kapcsolatos komplex mértékek

Legyen $P : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ projektormérték és $y, x \in \mathbf{H}$. Ekkor

$$\mu_{y,x} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}, \qquad E \mapsto \langle y, P(E)x \rangle$$

nyilvánvalóan komplex mérték, amelyre $\mu_{y,x} = \mu^*_{x,y}$ teljesül,

Rögzített $y$ esetén $x \mapsto \mu_{y,x}$ lineáris, és rögzített $x$ esetén $y \mapsto \mu_{y,x}$ konjugált lineáris.

Az is világos, hogy $\mu_{x,x}$ közönséges mérték és $\mu_{x,x}(S) = \|x\|^2$, továbbá $\mu_{cx,cx} = |c|^2 \mu_{x,x}$ minden $c$ komplex számra.

Egyszerű számolás adja a $\mu_{x+y,x+y} + \mu_{x-y,x-y} = 2\mu_{x,x} + 2\mu_{y,y}$ „négyszögegyenlőséget”, amiből

$$\mu_{x+y,x+y}(E) \leq 2\mu_{x,x}(E) + 2\mu_{y,y}(E).$$

Ugyancsak egyszerű tény, hogy

$$|\mu_{y,x}(E)|^2 = |\langle y, P(E)x \rangle|^2 = |\langle P(E)y, P(E)x \rangle^2 \leq \\ \leq \|P(E)y\|^2 \; \|P(E)x\|^2 = \mu_{y,y}(E)\mu_{x,x}(E).$$

**6. Állítás.** $|\mu_{y,x}|(E) \leq \sqrt{\mu_{y,y}(E)}\sqrt{\mu_{x,x}(E)}$.

*Bizonyítás* Legyen $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$ diszjunkt unió. Ekkor

$$\sum_{i=1}^n |\mu_{y,x}(E_i)| \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{\mu_{y,y}(E_i)}\sqrt{\mu_{x,x}(E_i)} \leq \\ \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \mu_{y,y}(E_i)}\sqrt{\sum_{i=1}^n \mu_{x,x}(E_i)} = \sqrt{\mu_{y,y}(E)}\sqrt{\mu_{x,x}(E)}.$$

A második egyenlőtlenségnél az $\mathbb{R}^n$-beli Cauchy-egyenlőtlenséget használtuk. A jobb oldal független az $E$ diszjunkt felosztásától, ezért a felosztásokra vett szuprémumra is fennáll az egyenlőtlenség.

**7. Állítás.** $\chi_E \mu_{y,x} = \mu_{y,P(E)x} = \mu_{P(E)y,x} = \mu_{P(E)y,P(E)x}$.

*Bizonyítás* $(\chi_E \mu_{y,x})(F) := \mu_{y,x}(E \cap F) = \langle y, P(E \cap F)x$; ezután azt kell kihasználni, hogy $P(E \cap F) = P(E)P(F) = P(F)P(E) = P(E)P(F)P(E)$ és $P(E)^* = P(E)$.

**8. Állítás.** *Ha $g : S \to \mathbb{C}$ négyzetesen integrálható a $\mu_{y,y}$ mérték szerint és $f : S \to \mathbb{C}$ négyzetesen integrálható a $\mu_{x,x}$ mérték szerint, akkor $gf$ integálható a $\mu_{y,x}$ komplex mérték szerint, és*

$$\int_S |gf| d|\mu_{y,x}| \leq \sqrt{\int_S |g|^2 d\mu_{y,y}}\sqrt{\int_S |f|^2 d\mu_{x,x}}.$$

*Bizonyítás* Tekintsünk először a $g$ helyébe a $\phi$ és az $f$ helyébe a $\psi$ nemnegatív lépcsős függvényt. Ekkor léteznek olyan $E_i$ diszjunkt halmazok, hogy

$$\phi = \sum_{i=n}^{2} b_i \chi_{E_i}, \qquad \psi = \sum_{i=n}^{2} a_i \chi_{E_i}.$$

Ekkor

$$\int_S gfd|\mu_{y,x}| = \sum_{i=1}^{n} b_i c_i |\mu_{y,x}|(E_i) \le \sum_{i=1}^{n} b_i \sqrt{|\mu_{y,y}|(E_i)} a_i \sqrt{|\mu_{x,x}|(E_i)} \le$$
$$\le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2 |\mu_{y,y}|(E_i)} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 |\mu_{x,x}|(E_i)} =$$
$$= \sqrt{\int_S |\phi|^2 d\mu_{y,y}} \sqrt{\int_S |\psi|^2 d\mu_{x,x}}.$$

Legyen ezután $\phi_n$ és $\psi_n$ $(n \in \mathbb{N})$ olyan monoton növekvő lépcsősfüggvénysorozat, amely $|g|$-hez, illetve $|f|$-hez konvergál. Ekkor $\phi_n\psi_n|$ monoton növekvő, a $|gf|$-hez konvergáló sorozat, és

$$\int_S |\phi_n\psi_n|d|\mu_{y,x}| \le \sqrt{\int_S |\phi_n|^2 d\mu_{y,y}} \sqrt{\int_S |\psi_n|^2 d\mu_{x,x}} \le$$
$$\le \sqrt{\int_S |g|^2 d\mu_{y,y}} \sqrt{\int_S |f|^2 d\mu_{x,x}}.$$

Ezért B.Levi tétele értelmében a függvénysorozat határértéke, azaz $|gf|$ $|\mu_{y,x}|$-integrálható , és az integráljára igaz a kívánt egyenlőség.

Az integrálhatóságra vonatkozó ismereteink szerint a bebizonyítottakból már következik, hogy $gf$ integrálható $\mu_{y,x}$ szerint. □

Vegyük az előbbi eredményünkban a $g = 1$ függvényt, és alkalmazzuk az integrálok abszolút értékére az ismert becslést, hogy megkapjuk a következő eredményt:

**9. Állítás.** *Ha $f$ négyzetesen integrálható $\mu_{x,x}$ szerint, akkor $f$ integrálható $\mu_{y,x}$ szerint minden $y$ esetén, és*

$$\left| \int_S f d\mu_{y,x} \right| \le \int_S |f|d|\mu_{y,x}| \le \sqrt{\int_S |f|^2 d\mu_{x,x}} \|y\|.$$

## 2.3. Integrálás projektormérték szerint

Legyen $f : S \to \mathbb{C}$ $\mathcal{A}$-mérhető függvény.

Definiáljuk $f$-hez az

$$E_n := \{s \in S| \mid |f(s)| \le n\} \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{6}$$

halmazokat, amelyek az $\mathcal{A}$ elemei. Nyilvánvaló, hogy $E_n \subset E_{n+1}$ és $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = S$.

Vezessük be

$$D_f := \{x \in \mathbf{H} \mid f \in L^2(\mu_{x,x})\}$$

jelölést.

**10. Állítás.** *$D_f$ mindenütt sűrű lineáris altér.*

*Bizonyítás* A „négyszögegyenlőségből" következő egyenlőtlenség alapján $L^2(\mu_{x,x}) \cap L^2(\mu_{y,y}) \subset L^2(\mu_{x+y,x+y}$; ebből és a $\mu_{cx,cx} = |c|^2\mu_{x,x}$ egyenlőségből következik, hogy $D_f$ lineáris altér.

Legyen $E_n$ az (6)-ben adott halmaz. Ekkor $P(E_n)x \in D_f$ minden $x$-re, ugyanis $\mu_{P(E_n)x,P(E_n)x} = \chi_{E_n}\mu_{x,x}$ és $|f|^2$ $\mu_{P(E_n)x,P(E_n)x}$-integrálhatósága egyenértékű az $|f|^2\chi_{E_n}$ (korlátos) mérhető függvénynek a (korlátos) $\mu_{x,x}$ mérték szerinti integrálhatóságával, és ez utóbbi nyilvánvaló.

Viszont

$$\|x - P(E_n)x\|^2 = \|P(S \setminus E_n)x\|^2 = \mu_{x,x}(S \setminus E_n),$$

és a mértékek félig folytonossága szerint $\lim_n \mu_{x,x}(S \setminus E_n) = 0$; tehát minden $x$ előáll $D_f$-beli sorozat határértékeként, így $D_f$ mindenütt sűrű. $\square$

Megemlítendő, hogy ha $f$ korlátos, akkor $D_f = \mathbf{H}$.

A 9 állítás alapján értelmes a

$$\mathbf{H} \times D_f \to \mathbb{C}, \qquad (y,x) \mapsto \int_S f d\mu_{y,x}$$

leképezés, amely a második változójában lineáris, az első változójában konjugált lineáris és korlátos; ez utóbbi miatt a Riesz-féle reprezentációs tétel szerint létezik egyértelműen egy $\hat{P}(f)x$-szel jelölt vektor úgy, hogy

$$\langle y, \hat{P}(f)x \rangle = \int_S f d\mu_{y,x} \qquad (y \in \mathbf{H}, x \in D_f). \tag{7}$$

Az említett linearitás miatt $x \mapsto \hat{P}(f)x$ lineáris. Összefoglalva:

**11. Állítás.** *Minden $f$ mérhető függvényhez létezik egyértelműen egy $D_f$-en értelmezett $\hat{P}(f)$ operátor úgy, hogy (7) teljesül.*

$\hat{P}(f)$ elnevezése: $f$-nek a $P$ szerinti integrálja. A $\hat{P}(f)$ jelölés „házi" használatú, a matematikai irodalomban ismert, $\int_S f dP$ jelölés helyett.

Egyszerű tény, hogy az $E$ mérhető halmazra $\hat{P}(\chi_E) = P(E)$.

Ennek megfelelő a 7 állítás általánosítása:

**12. Állítás.** *$f\mu_{y,x} = \mu_{y,\hat{P}(f)x}$ minden $y \in \mathbf{H}$, $x \in D_f$ esetén.*

*Bizonyítás*

$$\begin{aligned}(f\mu_{y,x})(E) :=& \int_S f\chi_E d\mu_{y,x} = \int_S f d\chi_E\mu_{y,x}) = \int_S f d\mu_{P(E)y,x} = \\ =& \langle P(E)y, \hat{P}(f)x\rangle = \langle y, P(E)\hat{P}(f)x\rangle = \mu_{y,\hat{P}(f)x}(E).\end{aligned}$$

$\square$

Teljesen hasonlóan, ha $y$ a $D_g$ eleme, akkor $g^*\mu_{y,x} = \mu_{\hat{P}(g)y,x}$.

Vegyük azt is észre, hogy ezek szerint $\langle y, \hat{P}(f)x\rangle = \mu_{y,\hat{P}(f)x}(S)$.

Az előzekből adódóan minden $E$ mérhető halmaz esetén

$$P(E)\hat{P}(f) \subset \hat{P}(f)P(E) = \hat{P}(f\chi_E) \tag{8}$$

teljesül. Ugyanis a következő kijelentések egyenértékűek:
$x \in D_{f\chi_E}$ – $f\chi_E \in L^2(\mu_{x,x})$ – $f \in L^2(\chi_E\mu_{x,x})$ –
$f \in L^2(\mu_{PE)x,P(E)x})$ – $P(E)x \in D_f$;
továbbá

$$\begin{aligned}\langle y, \hat{P}(f)P(E)x\rangle &= \left(f\mu_{y,P(E)x}\right)(S) = \left(f\chi_E\mu_{y,x}\right)(S) = \\ &= \left(\chi_E\mu_{y,\hat{P}(f)x}\right)(S) = \langle y, P(E)\hat{P}(f)x.\end{aligned}$$

**13. Állítás.** *Ha $x \in D_f$, akkor*

$$\|\hat{P}(f)x\|^2 = \int_S |f|^2 d\mu_{x,x}$$

*Bizonyítás*

$$\begin{aligned}\|\hat{P}(f)x\|^2 =&\langle\hat{P}(f)x, \hat{P}(f)x\rangle = \mu_{\hat{P}(f)x,\hat{P}(f)x}(S) = \left(f^* f\mu_{x,x}\right)(S) = \\ =& \int_S |f|^2 d\mu_{x,x}.\end{aligned}$$

**14. Állítás.** $\hat{P}(f)^* = \hat{P}(f^*)$, *ahol – természetesen a bal odalon a csillag az adjungáltat, a jobb oldalon a komplex konjugáltat jelöli.*

*Bizonyítás* Ha $y, x \in D_f$, akkor a (7) formula szerint $\langle y, \hat{P}(f)x\rangle = \langle\hat{P}(f^*)y, x\rangle$, ami azt mondja, hogy $\hat{P}(f^*) \subset \hat{P}(f)$.

Korlátos $f$-re egyenlőség áll, mert ekkor $D_f = \mathbf{H}$.

Az (6) $E_n$ halmazokkal $f\chi_{E_n}$ korlátos, tehát $\hat{P}(f^*\chi_{E_n}) = \hat{P}(f\chi_{E_n})^*$, amiből $\hat{P}(f^*)P(E_n) = \left(\hat{P}(f)P(E_n)\right)^*$, majd $\hat{P}(f^*)P(E_n) \supset P(E_n)\hat{P}(f)^*$ következik. Ha tehát $x$ a $\hat{P}(f)^*$ értelmezési tartományának eleme, akkor $\lim_n \hat{P}(f^*)P(E_n)x = \hat{P}(f)^*x$. Ezek után azt kell csak megmutatnunk, hogy $x$ benne van $\hat{P}(f^*)$ értelmezési tartományában, és a bal olal határtéke $\hat{P}(f^*)x$. Íme: létezik $\lim_n \|\hat{P}(f^*)P(E_n)x\|^2 = \int_S |f|^2\chi_{E_n} d\mu_{x,x}$; az integrandus monoton növő sorozat, ezért B. Levi tétele szerint a határérték-függvény $\mu$-integrálható , azaz $x \in D_f = D_{f^*}$; továbbá $\|\hat{P}(f^*)x - \hat{P}(f^*)P(E_n)x\|^2 = \|\hat{P}(f^*)(I - P(E_n))x\|^2 = \int_S |f|^2(1 - \chi_{E_n})d\mu_{x,x}$, és Lebesgue tétele szerint a jobb oldal a nullához tart, miközben $n$ tart a végtelenhez.

Egy egyszerű példa a projektormérték szerinti integrálásra a következő.

Legyenek $P_n$ ($n \in \mathbb{N}$) páronként egymásra merőleges projektorok úgy, hogy $(s)\sum_n P_n = I$, továbbá $\lambda_n \in \mathbb{C}$, és

$$P : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(\mathbf{H}), \qquad E \mapsto (s) \sum_{\{n|\lambda_n \in E\}} P_n.$$

Ekkor $\mu_{y,x} = \sum_n\langle y, P_n x\rangle\delta_{\lambda_n}$ (Dirac-delták) és $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ esetén $x \in D_f$ pontosan akkor, ha $\sum_n |f(\lambda_n)|^2\|P_n x\|^2 \leq \infty$, és ekkor $\hat{P}(f)x = \sum_n f(\lambda_n)P_n x$.

Ennek egyszerűsített változata, ha $\lambda_n = n$, és a természetes számok halmazát önmagában tekintjük, nem a komplex számok részhalmazának, továbbá $\mathbf{H} = l^2$ és $P_n$ az $x \in l^2$ sorozathoz azt a sorozatot rendeli, amelynek az $n$-ik tagja $x_n$, az összes többi taja nulla; ekkor $\mu_{y,x} = \sum_n y_n^* x_n\delta_n$ (Dirac-delta) és $x \in D_f$ pontosan akkor, ha $\sum_n |f(n)|^2|x_n^2| \leq \infty$; ekkor $\hat{P}(f)x = \left(f(n)x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

## 2.4. A projektormérték szerinti integrálás algebrai tulajdonságai

**15. Állítás.** *Legyen $f$ és $g$ mérhető függvény. Ekkor*
*(i)* $\hat{P}(cf) = c\hat{P}(f) \qquad (0 \neq c \in \mathbb{C})$,
*(ii)* $\hat{P}(f+g) \supset \hat{P}(f) + \hat{P}(g)$,
*(iii)* $\hat{P}(fg) \supset \hat{P}(f)\hat{P}(g)$, *és* $\mathrm{Dom}\big(\hat{P}(f)\hat{P}(g)\big) = \mathrm{Dom}\big(\hat{P}(fg)\big) \cap \mathrm{Dom}\big(\hat{P}(g)\big)$.

*Bizonyítás* (i) nyilvánvaló; azért kell kizárni a nullát, mert ekkor a bal oldalon a mindenütt értelmezett nulla operátor áll, míg a jobb oldalon csak a $D_f$ halmazon értelmezett nulla operátor.

(ii) Mivel négyzetesen integrálható függvények összege is négyzetesen integrálható, $D_f \cap D_g \subset D_{f+g}$ igaz, vagyis a jobb oldal értelmezési tartománya része a bal oldal értelmezési tartományának. Ha $x \in D_f \cap D_g$, akkor bármely $y$-ra

$$\langle y, \big(\hat{P}(f) + \hat{P}(g)\big)x\langle = \int_S f d\mu_{y,x} + \int_S g d\mu_{y,x} = \int_S (f+g) d\mu_{y,x} = \langle y, \hat{P}(f+g)x\rangle.$$

(iii) Először bebizonyítjuk az értelmezési tartományokra vonatkozó állítást. Ha $x$ a bal oldal eleme, akkor $|g|^2$ $\mu_{x,x}$-integrálható és $|f|^2$ integrálható a $\mu_{\hat{P}(g)x,\hat{P}(g)x} = |g|^2\mu_{x,x}$ mérték szerint, ami azt jelenti, hogy $|f|^2|g|^2 = |fg|^2$ $\mu_{x,x}$-ih, azaz $x$ benne van a jobb odalban is. Ha viszont $x$ a jobb oldal eleme, azaz $|fg|^2$ és $|g|^2$ is $\mu_{x,x}$-integrálható, akkor $|f|^2$ integrálhgató a $|g|^2\mu_{x,x} = \mu_{\hat{P}(g)x,\hat{P}(g)x}$ mérték szerint, azaz $x$ benne van a bal oldalban is. Ha $x \in \mathrm{Dom}\big(\hat{P}(f)\hat{P}(g)\big)$, akkor bármely $y$-ra

$$\langle y, \hat{P}(f)\hat{P}(g)x\rangle = \int_S fg d\mu_{y,x} = \int_S f d(g\mu_{y,x}) = \int_S f d\mu_{y,\hat{P}(g)x} = \langle y, \hat{P}(f)\hat{P}(g)x\rangle.$$

□

Egyszerű adódnak az egyenlőségekre vonatkozó következő összefüggések:

(i) $\hat{P}(f+g) = \hat{P}(f) + \hat{P}(g)$ pontosan akkor, ha $D_{f+g} \subset D_f$ vagy $D_{f+g} \subset D_g$; speciálisan egyenlőség áll, ha $\hat{P}(f)$ vagy $\hat{P}(g)$ közül az egyik mindenütt értelmezett.

(ii) $\hat{P}(fg) = \hat{P}(f)\hat{P}(g)$ pontosan akkor, ha $D_{fg} \subset D_g$; speciálisan egyenlőség áll, ha $\hat{P}(g)$ mindenütt értelmezett.

Megjegyezzük, hogy persze $f$ és $g$ sorrendje felcserélhető, ezért úgy érdemes megjegyezni az eredményünket, hogy egyenlőség áll, ha a szorzatban „második" operátor mindenütt értelmezett. Előfordulhat, hogy $\hat{P}(fg) = \hat{P}(f)\hat{P}(g)$, de $\hat{P}(fg) \neq \hat{P}(g)\hat{P}(f)$; ezt láttuk például (8)-ben.

## 2.5. A projektor-integrálással előállított operátorok jellemzése

**16. Állítás.** *Bármely $f$ mérhető függvény esetén $\hat{P}(f)$ normális operátor, azaz*
*(i) $\hat{P}(f)$ értelmezési tartománya mindenütt sűrű, és egyenlő a $\hat{P}(f)^*$ értelmezési tartományával,*
*(ii) $\hat{P}(f)$ zárt operátor,*
*(iii)* $\hat{P}(f)^*\hat{P}(f) = \hat{P}(f)\hat{P}(f)^*$.

*Bizonyítás* (i) és (ii) egyszerű, mert $D_f = D_{f^*}$ sűrű, továbbá $\hat{P}(f) = \hat{P}(f^*)^*$, és egy adjungált operátor zárt.

(iii) sem nehéz: mivel $xx$ véges mérték, $D_{|f|^2} \subset D_f$ igaz, ezért az előző eredményeink szerint $\hat{P}(f)\hat{P}(f)^* = \hat{P}(f)\hat{P}(f^*) = \hat{P}(|f|^2)$ és $\hat{P}(f)^*\hat{P}(f) = \hat{P}(f^*)\hat{P}(f) = \hat{P}(|f|^2)$. □

A zártgrafikon-tételből azonnal adódik:

**17. Állítás.** *$\hat{P}(f)$ akkor és csak akkor folytonos, ha $D_f = \mathbf{H}$.*

## 2.6. Majdnem mindenütt

Egy $E$ mérhető halmazt $P$-nullának mondunk, ha $P(E) = 0$. Igen egyszerű tény, hogy a következők ekvivalensek egy mérhető halmazra:

(i) $P$-nulla,

(ii) $\mu_{x,x}$-nulla minden $x$ esetén,

(iii) $\mu_{y,x}$-nulla és egyben $|\mu_{y,x}|$-nulla minden $y, x$ essetén.

Ugyanúgy, mint a mértékelméletben, bevezetjük a $P$-mm. fogalmát: „egy $P$-nulla halmaz kivételével".

**18. Állítás.** *Az $f$ és $g$ mérhető fügvényre $\hat{P}(f) = \hat{P}(g)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $f = g$ $P$-mm.*

*Bizonyítás* Ha $f = g$ $P$-mm., akkor az előző (ii) pont értelmében $D_f = D_g$, továbbá (iii) szerint

$$\int_S f d\mu_{y,x} = \int_S g d\mu_{y,x}$$

minden $y \in \mathbf{H}$ és $x \in D_f = D_g$ esetén.

Ha $\hat{P}(f) = \hat{P}(g)$, akkor $D_f = D_g$ és igaz az integrálokra a fenti egyenlőség, amiből ismét a (iii) szerint $f = g$ $P$-mm. □

Megjegyezzük, $\hat{P}(f) = \hat{P}(g)$ helyett elég megkövetelni, hogy $\hat{P}(f)x = \hat{P}(g)x$ teljesüljön minden $x \in D_f \cap D_g$ esetén.

Az előző és az itteni eredményeink alapján nyilvávnaló:

**19. Állítás.** *A $\hat{P}(f)$ operátor akor és csak akkor*

*(i) önadjungált, ha $f = f^*$ $P$-mm.,*

*(ii) unitér, ha $ff^* = 1$ azaz $|f| = 1$ $P$-mm.,*

*(iii) projektor, ha $f^2 = f$ $P$-mm., azaz van olyan $E$ mérhető halmaz, hogy $f = \chi_E$ $P$-mm.*

Az $f$ mérhető függvényt $P$-mm. korlátosnak mondjuk, ha van olyan $\alpha$ pozitív szám, hogy $\{s \in S \mid |f(s)| > \alpha\}$ $P$-nulla halmaz, és ekkor

$$\|f|_\infty := \inf_\alpha \{s \in S \mid |f(s)| > \alpha\}.$$

Minthogy

$$\{s \in S \mid |f(s)| > \|f|_\infty\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{s \in S \mid |f(s)| > \|f|_\infty + \frac{1}{n}\}$$

és a jobb oldalon $P$-nulla halmazok uniója áll, a bal oldal is $P$-nulla.

**20. Állítás.** *A $\hat{P}(f)$ operátor akkor és csak akkor korlátos (másként: folytonos), ha $f$ $P$-mm. korlátos, és ekkor $\|\hat{P}(f)\| = \|f|_\infty$.*

*Bizonyítás* Ha $f$ $P$-korlátos, akkor nyivánvaló, hogy $D_f = \mathbf{H}$, továbbá

$$\left|\int_S f d\mu_{y,x}\right| \le \int_S |f| d|\mu_{y,x}| \le \|f|_\infty \|y\| \; \|x\|,$$

tehát $\hat{P}(f)$ korlátos és $\|\hat{P}(f)\| \le \|f|_\infty$.

Ha $\hat{P}(f)$ korlátos, akkor $D_f = \mathbf{H}$. Legyen $\epsilon > 0$ és $E_\epsilon := \{s \in S \mid |f(s)| > \|f|_\infty + \epsilon\}$. Ekkor minden $x$ esetén egyrészt

$$\|\hat{P}(f\chi_{E_\epsilon})\|^2 = \|\hat{P}(f)P(E_\epsilon)\|^2 \le \|\hat{P}(f)\|^2 \mu_{x,x}(E_\epsilon),$$

másrészt

$$\|\hat{P}(f\chi_{E_\epsilon})\|^2 = \int_S |f|^2 \chi_{E_\epsilon} d\mu_{x,x} \ge \left(\|\hat{P}(f)\| + \epsilon\right)^2 \mu_{x,x}(E_\epsilon).$$

Ez a két egyenlőtlenség egyszerre csak úgy állhat fenn, ha $\mu_{x,x}(E_\epsilon) = 0$ minden $x$-re, azaz $E_\epsilon$ $P$-nulla; következésképpen $f$ $P$-mm. korlátos és $\|f|_\infty \le \|\hat{P}(f)\|$.

## 2.7. Karakterisztikus projektormértékek

Legyen adott egy $\mu$ (közönséges) mérték az $\mathcal{A}$ $\sigma$-algebrán.

$L^2(\mu)$-ben az $f : S \to \mathbb{C}$ mérhető függvénnyel való szorzás $M_f$ operátorát a következőképpen definiáljuk:

$$\mathrm{Dom}(M_f) := \{\varphi \in L^2(\mu) \mid f\varphi \in L^2(\mu)\}, \qquad M_f\varphi := f\varphi.$$

A $K : \mathcal{A} \to \mathcal{P}\big(L^2(\mu)\big)$, $E \mapsto M_{\chi_E}$ projektormértéket az $L^2(\mu)$ **karakterisztikus projektormértékének** hívjuk.

Az első nyilvánvaló megállapításunk, hogy egy $E$ halmaz akkor és csak akkor $K$-nulla, ha $\mu$-nulla.

A korábbi jelöléssel összehangban

$$\mu_{\psi,\varphi}(E) := \langle \psi, K(E)\varphi \rangle = \int_S \psi^* \chi_E \varphi d\mu.$$

Minthogy a fenti integrált átírhatjuk $\int_S \chi_E d(\psi * \varphi\mu)$ alakba, megállapíthatjuk, hogy $\mu_{\psi,\varphi} = \psi^*\varphi\mu$.

**21. Állítás.** $\hat{K}(f) = M_f$.

*Bizonyítás* A két oldal értelmezési tartománya egyenlő:

$$\mathrm{Dom}(\hat{K}(f) = \big\{\varphi \mid f \in L^2(\mu_{\varphi,\varphi})\big\} = \big\{\varphi \mid f \in L^2(|\varphi|^2\mu\big\} = \mathrm{Dom}(M_f),$$

tehát ha $\psi \in L^2(\mu)$ és $\varphi$ a a közös értelemzési tartomány eleme, akkor

$$\langle \psi, \hat{K}(f) = \int_S f d\mu_{\psi,\varphi} = \int_S f\psi^*\varphi d\mu = \langle \psi, M_f\varphi \rangle.$$

□

Ezek után, eddigi ismerteink birtokában, állíthatjuk az $M_f$ operátorról:
– normális, és $M_f^* = M_{f^*}$,

– akkor és csak akkor önadjungált, ha $f^* = f$ $\mu$-mm.,

– akkor és csak akkor unitér, ha $f^*f = 1$ azaz $|f| = 1$ $\mu$-mm.,

– akkor és csak akkor projektor, ha $f^2 = f$ $\mu$-mm., azaz van olyan $E$ mérhető halmaz, hogy $f = \chi_E$ $\mu$-mm.,

– akkor és csak akkor korlátos, ha $f$ $\mu$-mm. korlátos,

Speciális példaként, ha $\mu$ a valós egyenes Lebesgue-mértéke és $f$ folytonos függvény, akkor $M_f$ spektruma az $f$ értékkészlete, sajátértéke pedig mindazon szám, amely az $f$ konstans értéke valamely intervallumon.

A 2.3 pont végén példaként szereplő projektormérték speciális változata a $l^2$ karakterisztikus projektormértéke. Ekkor az $f$ függvény (azaz sorozat) esetén $M_f$ sajátértékei az $f$ sorozat értékei, $M_f$ spektruma pedig a sajátértékek halmazának a lezártja.

Legyen most $V$ véges dimenziós vektortér, azon adott egy $\bullet$-tal jelölt skaláris szorzás (azaz $V$ véges dimenziós Hilbert-tér). $L^2(\mu, V)$ azoknak a $\varphi : S \to V$ függvényeknek az összessége, amelyekre $\varphi \bullet \varphi$ $\mu$-ih.

Itt formailag ugyanúgy értelmezhető az $f : S \to \mathbb{C}$ függvénnyel való szorzás $M_f$ operátora, valamint a $K$ karakterisztikus projektormérték. $\mu_{\psi,\varphi} = \psi \bullet \varphi\mu$ teljesül, és érvényben marad a $\hat{K}(f) = M_f$ egyenlőség, valamint az $M_f$-re tett állításaink.

Tekintsük a következő speciális példákat!

1. Legyen $N$ természetes szám és $S := \{1, 2, \cdot, N\}$, $\mathcal{A}$ az $S$ összes részhalmaza, és $\mu$ a számláló mérték (azaz $mu(\{i\}) = 1$ $(i = 1, \dots, N)$.

Egy $\varphi : S \to \mathbb{C}$, $i \mapsto \varphi(i)$ függvény természetszerűleg a $cc^N$ elemének tekinthető. Minden ilyen függvény négyzetesen integrálható $\mu$ szerint, ezért $L^2(\mu) = \mathbb{C}^N$ a szokásos skaláris szorzattal.

Az $f = (f(i))_{i=1,\dots,N} : S \to \mathbb{C}$ függvénnyel való szorzás operátora lineáris leképezés $\mathbb{C}^N$-en, azaz a szokásos felfogásban egy $N \times N$-es mátrix. Minthogy definíció szerint $(f\varphi)(i) = f(i)\varphi(i)$, látjuk, hogy $M_f$ diagonális mátrix, a diagonális elemei az $f$ komponensei.

A $K$ karakterisztikus projektormértékre $K(\{i\})$ az a mátrix, amelynek $ii$-ik tagja 1, a többi nulla.

2. Legyen $n$ természetes szám és $S := \{1, 2, \cdot, n\}$, $\mathcal{A}$ az $S$ összes részhalmaza, és $\mu$ a számláló mérték; legyen továbbá $m$ is természetes szám és $V := \mathbb{C}^m$.

Egy $\varphi : S \to \mathbb{C}^m$, $i \mapsto \varphi(i)$ függvény természetszerűleg a $(\mathbb{C}^m)^n$ elemének tekinthető. Minden ilyen függvény négyzetesen integrálható $\mu$ szerint, ezért $L^2(\mu, V) = (\mathbb{C}^m)^n \equiv \mathbb{C}^N$ a szokásos skaláris szorzattal, ahol $N := mn$.

Az $f = (f(i))_{i=1,\dots,N} : S \to \mathbb{C}$ függvénnyel való szorzás operátora lineáris leképezés ($\mathbb{C}^N$-en, azaz a szokásos felfogásban egy $N \times N$-es mátrix. Minthogy definíció szerint $(f\varphi)(i) = f(i)\varphi(i)$, látjuk, hogy $M_f$ diagonális $N \times N$-es mátrix, amely $n$ darab $m \times m$-es blokkra tagolható, és az $i$-ik blokk az $m \times m$-es egységmátrix $f(i)$-szerese.

A $K$ karakterisztikus projektormértékre $K(\{i\})$ az a mátrix, amelynek $i$-ik blokkja az $m \times m$-es egységmátrix, minden más tagja nulla.

3. Legyen $S$ mint az előző példában, és legyen adott minden $i = 1, 2, \cdot, n$ esetén egy $m_i$ természetes szám, $N := m_1 + \dots + m_n$, és tekintsük $\mathbf{H} := \mathbb{C}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{C}^{m_n} \equiv \mathbb{C}^N$ Hilbert-teret a szokásos skaláris szorzattal.

Adjuk meg a $P : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ projektormértéket úgy, hogy $P(\{i\})$ legyen az a mátrix, amelynek a diagonálisában a „megfelelő helyen” az $m_i \times m_i$-es egységmátrix áll, minden más tagja nulla. Ez nem karakterisztikus projektormérték, csak valami hasonló.

Az $f = (f(i))_{i=1,\dots,n} : S \to \mathbb{C}$ függvénnyel való szorzás operátorának itt nincs természetes értelme, de integrálhatjuk $f$-et $P$ szerint. $\hat{P}(f)$ az a diagonális $N \times N$-es mátrix, amely $m_1 \times m_1$-es, … $m_n \times m_n$-es blokkokra tagolható, és az $i$-ik blokk az $m_i \times m_i$-es egységmátrix $f(i)$-szerese.

## 2.8. Projektormérték transzformáltjai

Legyen $P$ mint eddig, továbbá $\mathcal{B}$ egy $T$ részhalmazaiból álló $\sigma$-algebra és $\Phi : S \to T$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ mérhető függvény. Ekkor $P \circ \overset{-1}{\Phi} : \mathcal{B} \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ projektormérték.

**22. Állítás.** *Ha $h : T \to \mathbb{C}$ $\mathcal{B}$-mérhető függvény, akkor*

$$\widehat{P \circ \overset{-1}{\Phi}}(h) = \hat{P}(h \circ \Phi).$$

*Bizonyítás* Legyen $\nu_{y,x}$ a $P \circ \overset{-1}{\Phi}$ meghatározta komplex mérték $\mathcal{B}$-n. Nyilvánvaló, hogy $\nu_{y,x} = \mu_{y,x} \circ \overset{-1}{\phi}$.

A bal oldalon álló operátor értelmezési tartománya $\{x \mid h \in L^2(\nu_{x,x})\}$, a jobb oldalon állóé $\{x \mid h \circ \Phi \in L^2(\mu_{x,x})\}$. A helyettesítéses integrálás alapképlete,

$$\int_T |h|^2 d\left(\mu_{y,x} \circ \overset{-1}{\phi}\right) = \int_S \left(|h|^2 \circ \Phi\right) d\mu_{x,x}$$

szerint a két értelmezési tartomány megegyezik. Ezután a komplex mértékekre alkalmazva a helyettesítéses integrálás alapképletét megkapjuk az operátorok egyenlőségét. □

Tudjuk, hogy ha $U : \mathbf{H} \to \mathbf{H}'$ unitér vagy antiunitér operátor, akkor $\mathcal{A} \to \mathcal{P}(\mathbf{H}')$, $E \mapsto UP(E)U^{-1}$ projektormérték.

**23. Állítás.** $\widehat{UPU^{-1}}(f) = U\hat{P}(f)U^{-1}$ *ha $U$ unitér,*
$\widehat{UPU^{-1}}(f) = U\hat{P}(f^*)U^{-1}$ *ha $U$ antiunitér.*

*Bizonyítás* A bizonyítást antiunitérre végezzük el, unitérre hasonlóan, csak még egyszerűbben érvelhetünk.

Legyen $\nu_{y',x'}$ a $UPU^{-1}$ meghatározta komplex mérték, $y', x' \in \mathbf{H}'$. Ekkor $\langle y, UP(E)U^{-1}\rangle' = \langle P(E)U^{-1}x, U^{-1}y\rangle$, amiből $\nu_{y',x'} = \mu_{U^{-1}x',U^{-1}y'}$ adódik.

A bal oldalon álló operátor értelmezési tartománya $\{x' \mid f \in L^2(\nu_{x',x'})\}$ megegyezik a jobb oldalon állónak az $\{x' \mid f^* \in L^2(\mu_{U^{-1}x',U^{-1}x'})\}$ értelmezési tartományával. Továbbá

$$\begin{aligned}\langle y', \widehat{UPU^{-1}}(f)\rangle' = \int_S f d\nu_{y',x'} = \int_S f d\mu_{U^{-1}x',U^{-1}y'} = \\ = \left(\int_S f^* d\mu_{U^{-1}y',U^{-1}x'}\right)^* = \langle U^{-1}x', \hat{P}(f)U^{-1}y'\rangle^* = \\ = \langle y', U\hat{P}(f)U^{-1}x\rangle. \quad \square\end{aligned}$$

## 2.9. Spektrumok jellemzése

**24. Állítás.** $\operatorname{Ker}(\hat{P}(f)) = \operatorname{Ran}\big(P(\overset{-1}{f}(\{0\}))\big)$.

*Bizonyítás* $x \in \operatorname{Ker}(\hat{P}(f))$ pontosan akkor, ha $0 = \|\hat{P}(f)x\|^2 = \int_S |f|^2 d\mu_{x,x}$, azaz $f = 0$ $\mu_{x,x}$-mm.. $x \in \operatorname{Ran}\big(P(\overset{-1}{f}(\{0\}))\big)$ pontosan akkor, ha $x = P(\overset{-1}{f}(\{0\}))x$, azaz $0 = \|P(\mathbb{C} \setminus \overset{-1}{f}(\{0\}))x\|^2 = \mu_{x,x}(P(\mathbb{C} \setminus \overset{-1}{f}(\{0\}))$ vagyis $f = 0$ $\mu_{x,x}$-mm..

Emlékeztetünk arra, hogy az orto-$\sigma$-homomorfizmusokra elfogadott meghatározás szerint egy $R : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ projektormértéknek $c \in \mathbb{C}$ az éles pontja, ha $R(\{s\}) \neq \mathbf{0}$; az éles pontok összességét a $\operatorname{Sharp}(R)$ jelöli.

Az előző állítást ezért úgy is megfogalmazhatjuk, hogy $\hat{P}(f)$ pontosan akkor injektív, ha $0 \notin \operatorname{Sharp}(P \circ \overset{-1}{f})$.

**25. Állítás.** *Ha $\hat{P}(f)$ injektív, akkor az*

$$\frac{1_0}{f}(s) := \begin{cases} \frac{1}{f(s)} & ha \quad f(s) \neq 0, \\ 0 & ha \quad f(s) = 0 \end{cases}$$

*egyenlőséggel értelmezett függvénnyel* $\hat{P}\left(\frac{1_0}{f}\right) = \hat{P}(f)^{-1}$.

*Bizonyítás* Ha $\hat{P}(f)$ injektív, akkor $P(\overset{-1}{f}(\{0\})) = 0$, tehát $f\frac{1_0}{f} = 1$ $P$-mm., és így

$$\hat{P}(f)\hat{P}\left(\frac{1_0}{f}\right) \subset I, \qquad \hat{P}\left(\frac{1_0}{f}\right)\hat{P}(f) \subset I,$$

továbbá az operátorok szorzatának az értelmezesi tartománya megegyezik a „hátul állónak" az értelmezési tartományával. □

Emlékeztetünk arra, hogy az orto-$\sigma$-homomorfizmusokra elfogadott meghatározás szerint egy $R : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ projektormérték tartója a

$$\operatorname{Supp}(R) := \{c \in \mathbb{C} \mid K(G) \neq \mathbf{0}, c \in G, G \text{ nyílt}\}$$

halmaz.

**26. Állítás.** *A $\hat{P}(f)$ operátornak akkor és csak akkor létezik mindenütt értelmezett folytonos inverze, ha* $0 \notin \operatorname{Supp}(P \circ \overset{-1}{f})$.

*Bizonyítás* A folytonos inverz létezése egyenértékű azzal, hogy $\hat{P}\left(\frac{1_0}{f}\right)$ folytonos, ami meg azzal, hogy $\frac{1_0}{f}$ $P$-mm. korlátos; ez azt jelenti, hogy van olyan $\alpha > 0$ szám, amellyel $\left|\frac{1_0}{f}\right| \leq \alpha$ $P$-mm., ami viszont – mivel $P(\overset{-1}{f}(\{0\}) = 0$ – azzal egyenértékű, hogy $|f| \geq \frac{1}{\alpha}$ $P$-mm.. Más szóval, a nullának az $\frac{1}{\alpha}$ sugarú környezete $P \circ \overset{-1}{f}$-nulla halmaz, azaz 0 nincs benne $P \circ \overset{-1}{f}$ tartrójában. □

Emlékeztetünk arra, hogy egy $A$ operátornak a $\lambda$ szám a **sajátértéke**, ha $A - \lambda I$ nem injektív, és ekkor a $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ altér nemnulla elemei az $A$-nak a $\lambda$-hoz tartozó sajátvektorai. Jelölje $\operatorname{Eig}(A)$ az $A$ sajátértékeinek halmazát.

Továbbá a $\lambda$ szám az $A$ operátor **reguláris értéke**, ha az $A - \lambda I$ operátor

(i) injektív,
(ii) értékkészlete sűrű,
(iii) inverze folytonos;
az $A$ **spektruma** a

$$\mathrm{Sp}(A) := \{\lambda \mid \lambda \quad \text{nem reguláris érték}\}$$

halmaz.

**27. Állítás.** *(i)* $\mathrm{Eig}(\hat{P}(f)) = \mathrm{Sharp}(P \circ \overset{-1}{f})$, *és a* $\lambda$ *sajátértékhez tartozó sajátaltér prjektora* $(P \circ \overset{-1}{f})(\{\lambda\})$,

*(ii)* $\mathrm{Sp}(\hat{P}(f)) = \mathrm{Supp}(P \circ \overset{-1}{f})$.

*Bizonyítás* Fogalmazzuk át az előzőket a $\hat{P}(f) - \lambda I = \hat{P}(f - \lambda)$ operátorra, figyelembe véve, hogy $(\overset{-1}{f - \lambda})(\{0\} = \overset{-1}{f}(\{\lambda\})$.

Tehát $\lambda \in \mathrm{Eig}(\hat{P}(f))$ pontosan akkor, ha $\hat{P}(f - \lambda)$ nem injektív, azaz $P(\overset{-1}{f}(\{\lambda\}) \neq 0$, más szóval $\lambda \in \mathrm{Sharp}(P \circ \overset{-1}{f})$.

Továbbá $\lambda \notin \mathrm{Sp}(\hat{P}(f))$ pontosan akkor, ha $\hat{P}(f-\lambda)$-nak mindenütt értelmezett folytonos inverze van, azaz 0 nincs benne $P \circ (\overset{-1}{f - \lambda})$ tartójában, vagyis $\lambda \notin \mathrm{Supp}(P \circ \overset{-1}{f})$. $\square$

$L^2(\mu)$-n az $f$ mérhető függvénnyel való szorzás operátorának

– spektruma a $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mu(\overset{-1}{f}(G) \neq 0,\ G \text{ nyílt},\ \lambda \in G\}$ halmaz,

– sajátértékeinek a halmaza $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid (M_f) = \mu(\overset{-1}{f}(\{\lambda\}) \neq 0\}$.

A 2.3 pont végén példaként szereplő projektormérték esetén

– $\mathrm{Eig}(\hat{P}(f)) = \overline{\{f(\lambda_n) \mid n \in \mathbb{N}\}}$,

– $\mathrm{Sp}(\hat{P}(f)) = \overline{\mathrm{Eig}(\hat{P}(f))}$.

Egy kicsit többet is tudunk mondani a spektrumról, ha a projektormérték Borel-féle halmazalgebrán van értelmezve.

**28. Állítás.** *Legyen* $P : \mathcal{B}(V) \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ *projektormérték és* $f : V \to \mathbb{C}$ *folytonos függvény. Ekkor* $\mathrm{Sp}(\hat{P}(f)) = \overline{f[\mathrm{Supp}(P)]}$.

*Bizonyítás* A $\lambda$ komplex szám akkor és csak akkor nincs benne $\hat{P}(f)$ spektrumában, ha van olyan $G$ nyílt halmaz, $\lambda \in G$, hogy $P(\overset{-1}{f}(G)) = 0$. Mivel $f$ folytonos, $\overset{-1}{f}(G)$ is nyílt, ezért $\overset{-1}{f}(G) \cap \mathrm{Supp}(P) = \emptyset$, ami azzal egyenértékű, hogy $G \cap f[G] = \emptyset$, és ez pontosan akkor teljesül, ha $\lambda$ nincs az $f[G]$ lezártjában.

**29. Állítás.** *Legyen* $P : \mathcal{B}(V) \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ *projektormérték, és* $f : V \to \mathbb{C}$ *P-mm. korlátos, folytons függvény. Ekkor* $\|f|_\infty = \sup\{|f(v)| \ \mid v \in \mathrm{Supp}(P)\}$.

*Bizonyítás* A $\{v \mid |f(v)| > \|f|_\infty\}$ halmaz nyílt, és a 20 állítás előtti megjegyzés szerint $P$-nulla halmaz, tehát diszjunkt $P$ tartójától, így $\sup\{|f(v)| \ \mid v \in \mathrm{Supp}(P)\} \leq \|f|_\infty$. Tehát minden $v\mathrm{Supp}(P)$ esetén $|f(v)| \leq \|f|_\infty$.

Minthogy $P(\mathrm{Supp}(P)) = I$, tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén a $\{v \mid |f(v)| > \|f|_\infty - \epsilon\}$ nyílt halmaz nem $P$-nulla, ezért a metszete a $P$ tartójáva nem üres. Így van olyan $v \in \mathrm{Supp}(P)$, hogy $|f(v)| > \|f|_\infty - \epsilon$, amiből $\sup\{|f(v)| \ \mid v \in \mathrm{Supp}(P)\} \geq \|f|_\infty$. $\square$

Annyit kell megjegyezni az előbbi bizonyításhoz, hogy $P(s(P)) = I$ azért áll fenn, mert a spektrumban nem levő bármely pontnak van $P$-nulla nyílt környezete, és a spektrum komplementere előáll megszámlálható sok ilyen nyílt környezet uniójaként, így $P\left(\operatorname{Supp}(P)^{\complement}\right) = 0$.

Most visszatérhetünk $P : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ projektormérték, és $f : S \to \mathbb{C}$ mérhető függvényre. Ekkor a $P \circ \overset{-1}{f} : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ projektormértékre alkalmazhatjuk az előző eredményeinket, és a $\hat{P}(f) = \widehat{P \circ \overset{-1}{f}}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$ összefüggés alapján a következőket mondhatjuk.

**30. Állítás.** *(i)* $\hat{P}(f)$ *akkor és csak akkor folytonos, ha a spektruma kompakt,*
*(ii) ha* $\hat{P}(f)$ *folytonos, akkor* $\|\hat{P}(f)\| = \max\{\lambda \mid \lambda \in \operatorname{Sp}(\hat{P}(f))\}$.

*Bizonyítás* $\hat{P}(f)$ akkor és csak akkor folytonos, ha $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ $P \circ \overset{-1}{f}$-korlátos, azaz $\sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \operatorname{Supp}(P \circ \overset{-1}{f})\} < \infty$; minthogy $\operatorname{Sp}(\hat{P}(f)) = \operatorname{Supp}(P \circ \overset{-1}{f})$, bebizonyítottuk, (i)-t, és ebből, valamint a korábbiakból már egyszerűen következik (ii).

## 2.10. Felcserélési tulajdonságok

Tudjuk, hogy a $P$ projektormérték értékkészletében felcserélhető projektorok vannak.

Azt mondjuk hogy egy $A$ korlátos operátor **felcserélhető** $P$-vel, ha $AP(E) = P(E)A$ minden $E$ esetén.

A $P_1$ és $P_2$ projektormértéket **felcserélhetőnek** mondjuk, ha $P_1$ értékészletében levő minden projektor felcserélhető a $P_2$ értékkészletében levő minden projektorral.

**31. Állítás.** *Az $A$ korlátos operátor pontosan akkor cserélhető fel $P$-vel, ha* $\mu_{y,Ax} = \mu_{A^*y,x}$ *minden $y, x$ esetén.*

*Bizonyítás* Ha $A$ felcseréálhető $P$-vel, akkor $\mu_{y,Ax}(E) = \langle y, P(E)Ax\rangle = \langle y, AP(E)x\rangle = \langle A^*y, P(E)x\rangle = \mu_{A^*y,x}(E)$, tehát igaz a mértékekre vonatkozó egyenlőség.

Ha viszont igaz a mértékekre vonatkozó egyenlőség, akkor az $\langle y, P(E)Ax\rangle = \langle A^*y, P(E)x\rangle = \langle y, AP(E)x\rangle$ összefüggésre jutunk minden $y, x$ esetén, azaz $A$ és $P$ felcserélhető. □

Nem korlátos operátorok felcserélhetőségét általában nem definiáljuk. Viszont egy $A$ korlátos és egy $L$ operátort **felcserélhetőnek** mondunk, ha $AL \subset LA$; hogy jól értsük: ehhez az kell, hogy az $L$ értelmezési tartománya legyen invaráns az $A$-ra, és ezen a tartományon a két oldal megegyezzék (a jobb oldal esetleg lehet bővebben értelmezve).

**32. Állítás.** *Az $A$ korlátos operátor pontosan akkor cserélhető fel a $P$ projektormértékkel, ha felcserélhető* $\hat{P}(f)$*-fel minden $f$ mérhető függvényre.*

*Bizonyítás* Ha minden $\hat{P}(f)$-fel felcserélhető, akkor $f$-et karakterisztikus függvénynek véve láthatjuk, hogy $A$ és $P$ felcserélhető.

Ha $A$ és $P$ felcserélhető, akkor $\|P(E)Ax\|^2 = \|AP(E)x\|^2 \le \|A\|^2\|P(E)x\|^2$, amiből $\mu_{Ax,Ax} \le \|A\|^2\mu_{x,x}$, tehát ha $x \in D_f$, akkor $Ax \in D_f$. Ezután $x \in DF$

és $y \in \mathbf{H}$ esetén

$$\langle y, \hat{P}(f)Ax\rangle = \int_S f d\mu_{y,Ax} = \int_S f d\mu_{A^*y,x} = \langle A^*y, \hat{P}(f)x\rangle =$$
$$= \langle y, A\hat{P}(f)x\rangle,$$

amiből $A\hat{P}(f) \subset \hat{P}(f)A$.

## 2.11. Komplex projektormértékek

Mivel bármely $P$ projektormérték és $f$ mérhető függvény esetén $P \circ \overset{-1}{f} : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ és $\hat{P}(f) = \widehat{P \circ \overset{-1}{f}}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$, most azt vizsgáljuk, milyen kapcsolat van az $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$-nek különböző komplex projektormértékekek szerint integrálja között.

A következőkhöz két fontos tételt kell felidéznünk.

Az egyik a Stone–Weierstrass-féle approximációs tétel, amely azt mondja, hogy az $\{1, \mathrm{id}_{\mathbb{C}}, \mathrm{id}_{\mathbb{C}}^*\}$ függvényrendszer által generált komplex algebra sűrű lineáris altere a komplex sík bármely $K$ kompakt részhalmazán értelmezett folytonos függvények terének a maximum normával ellátott $C(K)$ Banach-terében. A szóban forgó komplex algebra elemei

$$p := \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} c_{ik} \mathrm{id}_{\mathbb{C}}^i (\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^*)^k$$

alakú „polinomok”.

A másik a Riesz-féle reprezentációs tétel, amely szerint $C(K)$ duálisa (vagyis a $C(K) \to \mathbb{C}$ folytonos lineáris funkcionálok tere) a $K$ Borel-halmazain adott komplex mértékek összessége; más szóval, bármely folytonos lineáris funkcionál egy egyértelműen meghatározott komplex mérték szerinti integrálással adható meg.

**33. Állítás.** *Az $A$ korlátos operátor akkor és csak akkor cserélhető fel a $P : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ projektormértékkel, ha felcserélhető $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$-vel és $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})^*$-vel*

*Bizonyítás* Ha $A$ felcserélhető $P$-vel, akkor felcserélhető minden $\hat{P}(f)$-fel, így a szóban forgó két operátorral is.

Legyen $A$ felcserélhető $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$-vel és $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})^* = \hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^*)$-gal; természetesen felcseréhető $\hat{P}(1) = I$-vel is.

1. Tegyük fel először, hogy $P$ tartója $K$ a kompakt halmaz. Ekkor $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$ korlátos operátor, ezért a projektormérték szerinti integrálás linearitása és szorzattartása miatt a szóban forgó polinomokra

$$\hat{P}(p) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} c_{ik} \hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})^i \hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^*)^k,$$

és $A$ felcserélhető $\hat{P}(p)$-vel. Tehát $\langle y, \hat{P}(p)Ax\rangle = \langle y, A\hat{P}(p)x\rangle = \langle A^*y, \hat{P}(p)x\rangle$, azaz

$$\int p \; d\mu_{A^*y,x} = \int p \; d\mu_{y,Ax}$$

minden $p$ polinomra és a Hilbert-tér $y$ és $x$ elemére. A Stone–Weierstrass-tétel és a Riesz-reprezentációs tétel szerint ez azt jelenti, hogy $\mu_{A^*y,x} = \mu_{y,Ax}$ minden

$y, x$ esetén, amiből az előző alfejezet állításából következik $A$ és $P$ felcserélhetősége.

2. Legyen most $P$ tetszőleges komplex projektormérték. Vegyük az $E_n := \{c \in \mathbb{C} \mid |c| \leq n\}$ halmazokat. Az $\mathbf{M}_n := \mathrm{Ran}(P(E_n))$ zárt lineáris altér invariáns minden $P(E)$ projektorra, mert ezek felcserélhetők $P(E_n)$-nel. Továbbá $P(E_n)\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}) \subset P(E_n)\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$, tehát $\mathbf{M}_n$ ivariáns $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$-re is.

A

$$P_n : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(\mathbf{M}_n), \qquad E \mapsto P(E)|_{\mathbf{M}_n} \tag{9}$$

meghatározással nyilvánvalóan projektormértéket értelmeztünk, amelynek a tartója az $E_n$ kompakt halmaz.

A projektormérték szerinti integrálás definíciója alapján azonnal adódik, hogy $\hat{P}_n(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}) = \hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})|_{\mathbf{M}_n}$.

Vezessük be az $A_n := P(E_n)A|_{\mathbf{M}_n} : \mathbf{M}_n \to \mathbf{M} : n$ operátorokat. Az $A\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}) \subset \hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})A$ felcserélési összefüggésből

$$P(E_n)A\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})|_{\mathbf{M}_n} \subset P(E_n)\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})A|_{\mathbf{M}_n} \subset \hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})P(E_n)A|_{\mathbf{M}_n},$$

addik, és egyrészt a $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})[\mathbf{M}_n] \subset \mathbf{M}_n$ invariancia miatt, másrészt amiatt, hogy $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})P(E_n)$ kifejezésben $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$-nek csak az $\mathbf{M}_n$-en felvett értékei szerepelnek, átírhatjuk az eredményünket $P(E_n)A|_{\mathbf{M}_n}\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})|_{\mathbf{M}_n} \subset \hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})|_{\mathbf{M}_n}P(E_n)A|_{\mathbf{M}_n}$ alakba, azaz

$$A_n\hat{P}_n(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}) = \hat{P}_n(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})A_n;$$

a tartalmazás helyett valójában egyenlőség áll, hiszen az $\mathbf{M}_n$-en mindenütt értelmezett operátorokról van szó. Ugyanígy jutunk arra is, hogy

$$A_n\hat{P}_n(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^*) = \hat{P}_n(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^*)A_n.$$

Az 1. pont szerint tehát minden $n$ esetén $An$ felcserélhető a $P_n$ projektormértékkel, vagyis $A_nP_n(E) = P_n(E)A_n =$ minden $E$-re. Ne feledjük, itt minden operátor csak az $\mathbf{M}_n$ altéren van értelmezve. Természetes módon kiterjeszthetjük őket az egész Hilbert-térre a $P(E_n)$-nel való jobbról szorzással, és így jutunk arra, hogy

$$P(E_n)AP(E)P(E_n) = P(E)P(E_n)AP(E_n).$$

Minthogy $(s)\lim_n P(E_n) = I$, határértékben megkapjuk a kívánt $AP(E) = P(E)A$ összefüggést.

**34. Állítás.** *Legyen $P$ és $Q$ olyan komplex projektormérték, hogy $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}) = \hat{Q}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$; ekkor $P = Q$.*

*Bizonyítás* Korábbi eredményink szerint $\mathrm{Sp}(\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})) = \mathrm{Supp}(P)$, ezért $P$ és $Q$ tartója megegyezik.

1. Tegyük fel először, hogy a projektormértékek tartója a $K$ kompakt halmaz. Ekkor $\hat{P}(1) = 1 = \hat{Q}(1)$ és $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^*) = \hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})^* = \hat{Q}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})^* = \hat{Q}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^*)$; a projektormérték szerinti integrálás linearitása és szorzatartása miatt ezért $\hat{P}(p) = \hat{Q}(p)$ minden az $\{1, \mathrm{id}_{\mathbb{C}}, \mathrm{id}_{\mathbb{C}}^*\}$ függvényrendszer generálta komplex algebrában levő $p$-re. Értelemszerű jelöléssel tehát minden $y, x \in \mathbf{H}$ esetén

$$\int_K p \, d\mu_{y,x}^P = \int_K p \, d\mu_{y,x}^Q.$$

A Stone–Weierstrass-tétel és a Riesz-tétel szerint ez azt jelenti, hogy a $\mu^P_{y,x}$ és a $\mu^Q_{y,x}$ mértékek leszűkítése $K$ részhalmazaira megegyezik, ami maga után vonja, hogy $P = Q$.

2. Legyen most $P$ és $Q$ tetszőleges. Vegyük az előbbi állításban szereplő $E_n$ halmazokat. $P(E_n)$ felcserélhető $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$-vel és $\hat{P}(ic)^* = \hat{P}(\mathrm{id}^*_{\mathbb{C}})$-gal, de $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}) = \hat{Q}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$, ezért az előbbi állítás szerint a kolrátos $P(E_n)$ operátor felcserélhető a $Q$ projektormértékkel. Ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{M}_n := \mathrm{Ran}(P(E_n))$ zárt lineáris altér invariáns minden $Q(E)$ projektorra.

Vezessük be a (9) szerinti $P_n$ projektormérték mellé még a

$$Q_n : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(\mathbf{M}_n), \qquad E \mapsto Q(E)|_{\mathbf{M}_n}$$

projektormértéket is; ennek a tartója az $E_n$ kompakt halmaz.

A projektormérték szerinti integrálás definíciója alapján azonnal adódik, hogy

$$\hat{P}_n(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}) = \hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})|_{\mathbf{M}_n} = \hat{Q}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})|_{\mathbf{M}_n} = \hat{Q}_n(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}).$$

Az 1. pont szerint így $P_n = Q_n$ minden $n$-re; ismét kiterjesztve a projektorokat az egész Hilbert-térre, a $P(E)P(E_n) = Q(E)P(E_n)$ összefüggésre jutunk, emyleből határértékben megkapjuk a kívánt $P = Q$ eredményt.

**35. Állítás.** *A $P$ komplex projektormértékre $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}) = \hat{P}(\mathrm{re}) + i\hat{P}(\mathrm{im})$, és hasonlóan $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})^* = \hat{P}(\mathrm{id}^*_{\mathbb{C}}) = \hat{P}(\mathrm{re}) - i\hat{P}(\mathrm{im})$.*

*Bizonyítás* Azt tudjuk, hogy $\hat{P}(\mathrm{re})+i\hat{P}(\mathrm{im}) \subset \hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$. Ha $|\mathrm{id}_{\mathbb{C}}|^2 = \mathrm{re}^2+\mathrm{im}^2$ $\mu_{x,x}$-integrálható, akkor $\mathrm{re}^2$ és $\mathrm{im}^2$ is $\mu_{x,x}$-integrálható, vagyis $\mathrm{Dom}(\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})) \subset \mathrm{Dom}(\hat{P}(\mathrm{re})) \cap \mathrm{Dom}(\hat{P}(\mathrm{im}))$. □

## 2.12. Ciklikus projektormértékek

**1. Definíció.** *Legyen $P\mathcal{A} \to \mathbf{H}$ projektormérték. $P$-nek a $\mathbf{H}$ Hilbert-tér $x$ vektorához tartozó* **ciklikus altere** *a $\{P(E)x \mid E \in \mathcal{A}\}$ halmaz generálta zárt lineáris altér. A projektormérték* **ciklikus**, *ha van olyan $x$ úgynevezett ciklikus vektor, hogy a hozzá tartozó ciklikus altér $\mathbf{H}$.*

**36. Állítás.** *Ha $\mu$ $\sigma$-véges mérték, akkor $L^2(\mu)$ karakterisztikus projektormértéke ciklikus.*

*Bizonyítás* A $\sigma$-végesség azt jelenti, hogy vannak $E_n$ ($n \in \mathbb{N}$) páronként diszjunkt, véges mértékű halmazok, amelyek uniója az alaphalmaz. Zárjuk ki a $\mu = 0$ triviális esetet; ekkor feltehető, hogy $\mu(E_n) > 0$. A

$$\varphi := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n\sqrt{\mu(E_n)}} \chi_{E_n}$$

függvény a karakterisztikus projektormérték ciklikus vektora, hiszen a $K(E)\varphi$ ($E \in \mathcal{A}$) alakú vektorok lineáris kombinációival minden lépcsős függvény előállítható.

Persze, ha $\mu$ véges, akkor a $\varphi = 1$ (konstans) függvény is ciklikus vektor. □

A konkrét példa mutatja, hogy a ciklikus vektor általában messze nem egyértelmű.

A fenti eredménnyel ellentétben, ha $V$ legalább két dimenziós Hilbert-tér, akkor $L^2(\mu, V)$ karakterisztikus projektormértéke nem ciklikus. Legyen ugyanis $\varphi \in L^2(\mu, V)$. Ekkor minden $s \in S$ esetén van olyan $e_s$ egységvektor $V$-ben, amely merőleges $\varphi(s)$-re. Legyen $0 \neq f \in L^2(\mu)$; ekkor $s \mapsto f(s)e_s$, ha mérhető, az $L^2(\mu, V)$ nemnulla eleme, amely ortogonális minden $K(E)\varphi$-re. Az előbbi „ha"-ra vonatkozó nem triviális eredmény: mindig választhatók úgy az egységvektorok, hogy a mérhetőség teljesüljön.

Ha a $P$ projektormértéknek $s$ éles pontja, azaz $P\{s\}) \neq 0$, és $P(\{s\})$ értékkészletének dimenziója legalább 2, akkor $P$ nem ciklikus. Ugyanis ekkor bármely $x \in \mathbf{H}$ esetén van olyan $0 \neq y \in \mathbf{H}$ úgy, hogy $y = P(\{s\})y$ és $\langle y, P(\{s\})x\rangle = 0$. ez az $y$ ortogonális minden $P(E)x$-re, mert az $E$ mérhető hamaz esetén $P(\{s\})P(E)$ nullával egyenlő, ha $s \notin E$ és $P(\{s\})$-sel, ha $s \in E$, és így $\langle y, P(E)x\rangle = \langle P(\{s\})y, P(E)x\rangle = \langle y, P(\{s\})P(E)x\rangle = 0$.

A 2.7 pont 1. példájában szereplő projektormérték ciklkus, a mási kettő nem ciklikus.

**37. Állítás.** *Legyen $P$ ciklikus projektormérték, $x$ egy ciklukus vektora. Ekkor*

$$U : L^2(\mu) \to \mathbf{H}, \qquad \varphi \mapsto \hat{P}(\varphi)x$$

*unitér leképezés, és $U^{-1}P(\cdot)$ az $L^2(\mu)$ karakterisztikus projektormértéke.*

*Bizonyítás* Az $U$ linearitása a (15) állítás első két pontjából, izometrikus volta opedig a (13) állításból következik; továbbá $U$ a $\{\chi_E \mid E \in \mathcal{A}\}$ generáló halmazt a $\{P(E)x \mid E \in \mathcal{A}\}$ generáló halmazra képezi; ezekből már nyilvánvaló, hogy $U$ unitér.

**38. Állítás.** *Ha $P$ ciklikus projektormérték, $U$ az előbbi állításban szereplő unitér leképezés, akkor $U^{-1}P(\cdot)U$ az $L^2(\mu)$ karakterisztikus projektormértéke.*

Továbbá $P(E)U\varphi = P(E)\hat{P}(\varphi)x = \hat{P}(\chi_E\varphi)x = U\chi_E\varphi$, azaz $U^{-1}P(E)U = M_{\chi_E}$, amit bizonyatani akartunk.

**39. Állítás.** *Legyen $P$ ciklikus projektormérték; az $A$ folytonos lineáris operátor pontosan akkor cserélhető fel a projektormértékkel, ha van olyan $f$ mérhető függvény, hogy $A = \hat{P}(f)$.*

*Bizonyítás* $A$ és $P$ felcserélhetősége azt jelenti, hogy $AP(E) = P(E)A$ minden $E$ mérhető halmazra.

Ha $A = \hat{P}(f)$, akkor korábbi eredményeink alapján $A$ felcserélhető minden $P(E)$-vel (ehhez nem is kell a ciklikusság).

Tegyük fel, hogy $A$ felcserélhető $P$-vel. Legyen $x$ a projektormérték ciklikus vektora. Ekkor az előző állításunk szerint van olyan $f$ függvény, hogy $Ax = \hat{P}(f)x$ ($f$ ez előzőekben a $\varphi$ nevet viselte). Minthogy $P(E)\hat{P}(f) \subset \hat{P}(f)P(E)$ minden $E$ esetén, $AP(E)x = P(E)Ax = P(E)\hat{P}(f)x = \hat{P}(f)P(E)x$, amiből az operátorok linearitása folytán, $A$ megegyezik $\hat{P}(f)$-fel a $\{P(E)x \mid E \in \mathcal{A}\}$ generálta sűrű lineáris altéren. Mivel $A$ folytonos és $\hat{P}(f)$ zárt, ebből az következik, hogy $A = \hat{P}(f)$.

## 2.13. Ciklikus projektormértékek direkt összege

Láttuk, hogy a ciklikus projektormértékek igen egyszerűek, unitér ekvivalencia erejéig karakterisztikus projektormértékek. Most az mutatjuk meg, hogy minden projektormérték felépíthető ciklikusokból.

Először megemlítjük, hogy ha I tetszőleges (index)halmaz, a $\mathbf{H}_i$ ($i \in \mathrm{I}$) Hilbert-terek direkt összegeként a

$$\bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathbf{H}_i := \left\{ x := (x_i)_{i\in\mathrm{I}} \in \mathsf{X}\,\mathbf{H}_i \mid \sum_{i\in\mathrm{I}} \|x_i\| < \infty \right\}$$

vektorteret értjük az

$$\langle y, x\rangle := \sum_{i\in\mathrm{I}} \langle y_i, x_i\rangle_i$$

skaláris szorzattal.

**40. Állítás.** *Legyen $P\mathcal{A} \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ projektormérték. Ekkor $\mathbf{H}$ előáll a $P$ ciklikus altereinek direkt összegeként.*

*Bizonyítás* Legyen egy $0 \neq x_1 \in \mathbf{H}$ által generált ciklikus altér $\mathbf{M}_1$. Ha $\mathbf{M}_1 = \mathbf{H}$, akkor igaz az állítás. Ha nem, legyen egy $0 \neq x_2 \perp \mathbf{M}_1$ által generált ciklikus altér $\mathbf{M}_2$. $M_1$ és $\mathbf{M}_2$ ortogonális egymásra, hiszen minden $E, F \in \mathcal{A}$ esetén $\langle P(E)x_2, P(F)x_1\rangle = \langle x_2, P(E)P(F)x_1\rangle = \langle x_2, P(E\cap F)x_1\rangle = 0$. Ha $\mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2 = \mathbf{H}$, akkor igaz az állítás. Ha nem, ismét találunk egy ciklikus alteret, amely ortogonális $\mathbf{M}_1$-re és $\mathbf{M}_2$-re; és így tovább.

Eddig tehát beláttuk, hogy léteznek páronként ortogonális $(\mathbf{M}_j)_{j\in\mathrm{J}}$ ciklikus alterek valamely J indexhalmazzal. Nyilván több ilyen altér-összesség lehet az $x_1$, $x_2$ stb. vektoroktól függően. Legyen $M$ az a halmaz, amelynek az elemai a páronként ortogonális ciklikus alterek összességei, és vezessünk be rendezést $M$-en a halmazelméleti tartalmazással. Ekkor minden láncban van maximális elem: a láncban levő halmazrendszer uniója. Zorn-lemmája szerint tehát létezik $(\mathbf{M}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ maximális elem $M$-ben; a maximalitás miatt

$$\mathbf{H} = \bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathbf{M}_i. \quad \square$$

A projektormérték egy ciklikus altere invariáns a projektormérték értékkészletében levő projektorokra. Eszerint, a $P_i : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(\mathbf{M}_i)$, $E \mapsto P(E)|_{M_i}$ leképezés projektormérték, és úgy is szokás fogalmazni, hogy a projektormérték ciklikus projektormértékek direkt összege:

$$P = \bigoplus_{i\in\mathrm{I}} P_i.$$

A direkt összegek sokfélék lehetnek, és a szerkezetük nagyban eltérhet egymástól. Előfordulhat, hogy $P$ maga ciklikus, tehát van egyetlen elemű direkt összeg, de lehetésges több elemű direkt összege is. Példa erre a 2.7 pont 1. példája. A projektormérték ciklikus, egy ciklikus vektora $(1, 1, \ldots, 1, 1)$. Viszont $\mathbb{C}^N$ (a Hilbert-tér) az $(1, 0, \ldots, 0, 0)$, $(0, 1, \ldots, 0, 0)$ $\ldots$ $(0, 0, \ldots, 0, 1)$ vektorok által generált ciklikus alterek direkt összege is.

Most azt vizsgáljuk, hogyan lehet a „legegyszerűbb” direkt összeget megtalálni. Ehhez feltesszük, hogy $\mathbf{H}$ szeparábilis. Ekkor I megszámlálható, vegyük $\mathbb{N}$-nek.

A továbbiakban a $\equiv$ jel unitér ekvivalenciát jelöl.

Legyen $x_i$ az $\mathbf{M}_i$ ciklikus vektora. A 36 állítás szerint $P_i$ unitér ekvivalens az $L^2(\mu_{x_i,x_i})$ karakterisztikus projektormértékével, és így

$$\mathbf{H} \equiv \sum_{i\in\mathbb{N}} L^2(\mu_{x_i,x_i}), \quad P \equiv \sum_{i\in\mathbb{N}} K_i.$$

Vezessük be a

$$\mu := \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^i}\mu_{x_i,x_i}$$

mértéket. Minthogy minden $\mu_{x_i,x_i}$ abszolút folytonos $\mu$-re (azaz minden $\mu$-nulla halmaz $\mu_{x_i,x_i}$-nulla is), a Radon–Nykodim-tétel szerint léteznek olyan $0 \le \alpha_i : S \to \mathbb{R}$ mérhető függvények, hogy $\mu_{x_i,x_i} = \alpha_i\mu$.

A

$$T_i := \{s \in S \mid \alpha_i > 0\}$$

halmaz mérhető, és az

$$L^2(\mu_{x_i,x_i}) \to L^2(\chi_{T_i}\mu), \quad \varphi_i \mapsto \sqrt{\alpha_i}\varphi_i =: \phi_i$$

leképezés unitér minden $i$-re. Ezért

$$\mathbf{H} \equiv \sum_{i\in\mathbb{N}} L^2(\chi_{T_i}\mu), \quad P \equiv \sum_{i\in\mathbb{N}} K_i;$$

itt persze $K_i$ az itt szereplő $i$-ik Hilbert-tér karakterisztikus projektormértéke. Idézzük fel, hogy

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} L^2(\chi_{T_i}\mu)\text{elemei: } \phi : S \to \mathbb{C}_{i\in\mathbb{N}}, \quad \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{T_i} |\phi_i|^2 d\mu < \infty. \tag{10}$$

Ha a $T_i$-k páronként diszjunktak (elég, ha csak $\mu(T_i \cap T_j) = 0$ teljesül $i \neq j$ esetén), akkor a fenti Hilbert-tér „lényegében" $L^2(\mu)$ úgy, hogy $\phi \in L^2(\mu)$ az a függvény, amelyre $\phi|_{T_i} = \phi_i$. Ekkor tehát $P$ egyetlen karakterisztikus projektormértékkel unitér ekvalens (a projektormérték ciklikus).

Tekintsük most az esetet, amikor $T_i$-k nem diszjunktak páronként.

Legyen

$$S_n := \{s \in S \mid s \text{ pontosan } n \text{ darab } i \text{ létezik úgy, hogy } s \in T_i\},$$

ahol $n \in \mathbb{N} \cup \infty$. Vegyük észre, hogy $S_n$-nek páronként diszjuktak, és

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}\cup\infty} S_n = S.$$

Továbbá legyen $s \in S$ esetén

$$i_1(s) := \min\{i \in \mathbb{N} \mid s \in T_i\}, \quad i_2(s) := \min\{i \in \mathbb{N} \setminus \{i_1(s)\} \mid s \in T_i\},$$

és így tovább,

$$i_k(s) := \min\{i \in \mathbb{N} \setminus \{i_1(s), \ldots, i_{k-1}(s)\} \mid s \in T_i\}.$$

Rendeljük hozzá a (10)-beli $\phi_{i\in\mathbb{N}}$ függvényegyütteshez

$$\Phi_1(s) := \chi_{S_1}\phi_{i_1(s)}(s),$$

$$\Phi_{21} := \chi_{S_2}\phi_{i_1(s)}(s), \quad \Phi_{22} := \chi_{S_2}\phi_{i_2(s)}(s),$$

$$\Phi_{31} := \chi_{S_3}\phi_{i_1(s)}(s), \quad \Phi_{32} := \chi_{S_3}\phi_{i_2(s)}(s), \quad \Phi_{33} := \chi_{S_3}\phi_{i_3(s)}(s)$$

és így tovább a $\Phi_{n1}, \ldots, \Phi_{nn} \ldots$ függvényeket, ahol $n \in \mathbb{N} \cup \infty$.

Ekkor $\Phi_n := (\Phi_{n1}, \ldots, \Phi_{nn}) \in L^2(\chi_{S_n}\mu, \mathbb{C}^n)$ (a $\mathbb{C}^\infty := l^2$ értelmezéssel), és

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} L^2(\chi_{T_i}\mu) \equiv \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\infty} L^2(\chi_{S_n}\mu, \mathbb{C}^n),$$

ugyanis

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{T_i} |\phi_i|^2 d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\infty} \int_{S_n} \sum_{k=1}^{n} |\phi_{i_k}|^2 d\mu,$$

tehát a projektormérték unitér ekvivelens ez utóbbi direkt összegben szereplő Hilbert-terek karakterisztikus projektormértékeinek direkt összegével.

Egyszerű látni, hogy az ilyen alakú direkt összeg „lényegében” egyértelmű: ha (értelemszerű jelöléssel)

$$\sum_{n\in\mathbb{N}\cup\infty} L^2(\chi_{S'_n}\mu', \mathbb{C}^n) \equiv \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\infty} L^2(\chi_{S_n}\mu, \mathbb{C}^n), \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\infty} K'_i \equiv \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\infty} K_n,$$

akkor $\mu'$ és $\mu$ ekvivalensek, vagyis ugyanazok a nulla-halmazaik, és $\mu(S'_n \cap S_n) = 0$.

Jegyezzük meg, hogy $S_n$-ek akármelyike üres is lehet; például ciklikus projektormérték esetén $S_n = \emptyset$ ha $n > 1$.

# 3. A spektráltétel

## 3.1. Az általános tétel

**41. Állítás.** *Legyen $N$ normális operátor a $\mathbf{H}$ Hilbert-téren. Ekkor létezik egyértelműen egy $P : \mathcal{B}(\mathbb{C}) :\to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ projektormérték úgy, hogy $N = \hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$.*

$P$-t az $N$ spektrálfelbontásának hívjuk, $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$-t pedig az $N$ spektrálelőállításának.

A spektráltételt általában nem bizonyítjuk, csak – később – unitér és önadjungált operátorra. Normális operátorra csak az alábbi speciális esetet tekintjük.

Legyen az $N$ normális operátor olyan, hogy a sajátalterei kifeszítik az egész Hilbert-teret; ekkor $N$ spektruma a $\lambda_i$ ($i \in \mathbb{N}$) sajátértékekből és ezek torlódási pontjaiból áll. Legyen $P_n$ az $n$-ik sajátaltér projektora; tudjuk, hogy az $N$ különböző sajátalterei ortogonálisak egymásra. Ekkor könnyű meggyőződni arról, hogy a

$$P(E) := (s) \sum_{\{i|\lambda_i \in E\}} P_n \qquad (E \in \mathcal{B}(\mathbb{C}))$$

formula projektormértéket határoz meg. A normális operátorokra vonatkozó ismereteink szerint ha $x \in \mathrm{Dom}(N)$, akkor

$$Nx = N\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} P_i x\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i P_i x,$$

amiből azonnal adódik, hogy $P$ az $N$ spektrálfelbontása. Ugyanis a $P$-vel kapcsolatos komplex mértékekre $\mu_{y,x} = \sum_i \langle y, P_i x\rangle \delta_{\lambda_i}$ (Dirac-delták), és így :

$$\int_{\mathbb{C}} \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \mu_{y,x} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i \langle y, P_i x\rangle = \langle y, \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i P_i x\rangle = \langle y, Nx\rangle.$$

Felsorolunk a spektráltételhez kapcsolódó néhány fontos tudnivalót, amelyek a projektromérték szerinti integrálás megismert tulajdonságaiból következnek.

Legyen $P$ az $N$ normális operátor spektrálfelbontása.

$P$ tartója megegyezik az $N$ spektrumával, $P$ éles pontjai az $N$ sajátértékeivel.

Ha $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mérhető függvény, akkor értelmezhető $f(N) := \hat{P}(f)$. Az $f(N)$ operátor értelmezési tartományában azok az $x$-ek vannak, amelyekre $f$ négyzetesen integrálható a $\mu_{x,x}$ mérték szerint. A $p = \sum_{i=0}^{n} c_i \mathrm{id}_{\mathbb{C}}^i$ polinomra $\hat{P}(p) = p(N) := \sum_{i=0}^{n} c_i N^i$.

Speciálisan értelmezhető az $N$ valós és képzetes része, egy-egy önadjungált operátor, és $N = \mathrm{re}(N) + i\mathrm{im}(N)$, $N^* = \mathrm{re}(N) - i\mathrm{im}(N)$.

A fenti példában szereplő $N$ spektrálfelbontása akkor és csak akkor ciklikus, ha $N$ minden sajértéke egyszeres (minden sajáteltere egy dimenziós). Ezért általában, bármely normális operátor spektrumát egyszeresnek mondjuk, ha a spektrálfelbontása ciklikus.

Általában az $N$ normális operátor spektrálfelbontása a 2.13 pontban mondottak szerint unitér ekvivalens $L^2(\chi_{S_n}\mu, \mathbb{C}^n)$ $(n \in \mathbb{N} \cup \infty)$ alakú Hilbert-terek karakterisztikus projektormértékeinek direkt összegével, ahol $S_n$-ek páronként diszjunktak. Ezért $N$ unitér ekvivalens identitással való szorzások direkt összegével. Láttuk a 2.7 1. példájában, hogy $\mathbb{C}^N$-en a szorzás-operátorok diagonális mátrixok; így a normális operátor előállítása identitással való szorzásként a véges dimenzióban ismert diagonalizálási eljárásnak felel meg.

Nem nehéz látni, hogy $\mathrm{Supp}(P) = \bigcup_n \in \mathbb{N} \cup \infty S_n$. Mivel $P$ tartója megegyezik $N$ spektrumával, $S_n$ elemeit a spektrum $n$-szeres multiplicitású pontjainak nevezzük.

## 3.2. A spektráltétel bizonyítása unitér operátorra

A bizonyításhoz a Stone–Weierstrass-tételt és a Riesz-reprezentációs tételt használjuk.

Tekintsük a $\mathbb{T}$ komplex egységkört. Minthogy $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ leszűkítése $\mathbb{T}$-re $\mathrm{id}_{\mathbb{T}}$, és $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^*$ leszűkítése $\mathrm{id}_{\mathbb{T}}^* = \mathrm{id}_{\mathbb{T}}^{-1}$, az $1, \mathrm{id}_{\mathbb{T}}, \mathrm{id}_{\mathbb{T}}^*$ függvények generálta komplex algebra elemei

$$p := \sum_{i=-n}^{n} c_i \mathrm{id}_{\mathbb{T}}^i$$

alakú „polinomok”.

Legyen $U$ unitér operátor. Értelmezzük a fenti polinommal a $p(U) := \sum_{i=-n}^{n} U^n$ operátort. Mivel $U^* = U^{-1}$, igaz a $p(U)^* = p^*(U)$ egyenlőség (a bal oldalon a csillag az adjungálást, a jobb oldalon a komplex konjugálást jelöli). Tudjuk, hogy a spektruma a $\mathbb{T}$ egységkör része.

A bizonyítás alaplépése, hgy megmutatjuk:

$$\mathrm{Sp}(p(U)) = p[\mathrm{Sp}(U)].$$

Ugyanis legyen $q := \mathrm{id}_{\mathbb{C}}^n p$; ez szokásos polinom. Ekkor a következők egyenértékűek sorra:

- $\lambda \in \mathrm{Sp}(p(U))$,
- $p(U) - \lambda I = U^{-n}\big(q(U) - \lambda U^n\big)$ nem invertálható,
- $q(U) - \lambda U^n$ nem invertálható,
- $0 \in \mathrm{Sp}(q(U) - \lambda U^n) = (q - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}}^n)[\mathrm{Sp}(U)]$.

Az utolsó sorban azt használtuk fel, hogy $q - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}}^n$ szokásos polinom. Az operátor-polinom spektrumára vonatkozó ismereteink szerint ez továbbá egyenértékű azzal, hogy
– van olyan $\xi \in \mathrm{Sp}(U)$, amellyel $0 = q(\xi) - \lambda\xi^n$, azaz
– $\lambda = \frac{q(\xi)}{\xi^n} = p(\xi)$. $\square$

Eredményünk következménye, hogy

$$\|p(U)\| = \max\{|p(\xi)| \mid \xi \in \mathrm{Sp}(U)\} \leq \max\{|p(\xi)| \mid \xi \in \mathbb{T}\} =: \|p\|.$$

Világos, hogy a $p \mapsto p(U)$ leképezés lineáris. Továbbá a Hilbert-tér $y, x$ elemeire $|\langle y, p(U)x\rangle| \leq \|y\| \, \|x\| \, \|p\|$, vagyis a $p \to \langle y, p(U)x\rangle$ leképezés folytonos lineáris funkcionál a maximum-normával ellátott polinomokon. A Stone–Weierstrass-tétel és a Riesz-tétel szerint ezért létezik egyértelműen egy $\mu_{y,x}$ komplex Borel-mérték $\mathbb{T}$-n úgy, hogy

$$\langle y, p(U)x\rangle = \int_{\mathbb{T}} p d\mu_{y,x}.$$

Tetszőleges $q$ polinomra

$$q\mu_{y,x} = \mu_{y,q(U)x} = \mu_{q(U)^*y,x},$$

ugyanis minden $p$-re

$$\int_{\mathbb{T}} pd(q\mu_{y,x}) = \int_{\mathbb{T}} qpd\mu_{y,x} = \begin{cases} \langle y, p(U)q(U)\rangle x = & \int_{\mathbb{T}} pd\mu_{y,p(U)x}, \\ \langle y, q(U)p(U)x\rangle = & \int_{\mathbb{T}} pd\mu_{q(U)^*y,x}. \end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy $(y, x) \mapsto \mu_{y,x}$ konjugált lineáris az első változójában és lineáris a második változójában, valamint $\mu_{y,x}^* = \mu_{x,y}$, és értelemszerűen ugyanez igaz az $(y, x) \mapsto \mu_{y,x}(E)$ leképezésre minden $E$ Borel-halmazra.

Minthogy $I = 1(U)$ (az $U$ által a konstans 1 polinomhoz rendelt operátor),

$$\langle y, x\rangle = \int_{\mathbb{T}} d\mu_{y,x} = \mu_{y,x}(\mathbb{T}).$$

Ebből

$$\mu_{x,x}(E) = \int_{\mathbb{T}} \chi_E d\mu_{x,x} \leq \int_{\mathbb{T}} d\mu_{x,x} = \mu_{x,x}(\mathbb{T}) = \|x\|^2.$$

A kvadratikus és szeszkilináris formák közötti ismert összefüggés szerint ez azt jelenti, hogy $|\mu_{y,x}(E)| \leq \|y\| \, \|x\|$; másszóval $(y, x) \mapsto \mu_{y,x}(E)$ folytonos minden $E$ esetén. Ez pedig magy után vonja, hogy minden $E$ esetén létezik egy $P(E)$-vel jelölt folytoos önadjungált operátor úgy, hogy $\mu_{y,x}(E) = \langle y, P(E)x\rangle$.

Most ugyanúgy, mint az előbb polinomokra, megállapíthatjuk hogy

$$\chi_F \mu_{y,x} = \mu_{y,P(F)x} = \mu_{P(E)y,x}$$

amiből $P(E \cap F) = P(E)P(F) = P(F)P(E)$, speciálisan $P(E) = P = E)^2$ adódik, vagyis $P(E)$ projektor.

Az is azonnal adódik, hogy $E \mapsto P(E)$ projektormérték, és $\mu_{y,x}$ ehhez a projektormértékhez a korábbiak szerint rendelt komplex mérték; következésképpen $p(U) = \hat{P}(p)$, speciálisan

$$U = \hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{T}}).$$

## 3.3. A spektráltétel bizonyítása önadjungált operátorra

Legyen $S$ önadjungált operátor. Mivel $\pm i$ nincs az $S$ spektrumában, léteznek a mindenütt értelmezett folytonos $(S \pm iI)^{-1}$ operátorok. Megmutatjuk, hogy az $S$ úgynevezett **Cayley-trtanszformáltja**,

$$U := (S - iI)(S + iI)^{-1}$$

unitér.

$(S + iI)^{-1}$ mindenütt értelmezett és értékkészlete a $S + iI$ értelmezési tartománya, amely megegyezik az $S$ értékkészletével. $S - iI$ értékészlete az egész Hilbert-tér, így $U : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ bijekció. Minden $x \in \mathrm{Dom})S)$ esetén

$$\begin{aligned} \|(S \pm iI)x\|^2 =& \langle Sx, Sx\rangle \pm i\langle Sx, x\rangle \mp \langle x, Sx\rangle + \langle x, x\rangle = \qquad (11) \\ =& \|Sx\|^2 + \|x\|^2, \qquad (12) \end{aligned}$$

ezért $\|(S + iI)x\| = \|(S - iI)x\|$.

Legyen $x := (S + iI)^{-1}y$. Ekkor

$$\|Uy\| = \|(S - iI)(S + iI)^{-1}y\| = \|(S + iI)(S + iI)^{-1}y\| = \|y\|,$$

tehát $U$ valóban unitér.

Már csak az van hátra, hogy megmutassuk: ha $U$ az $S$ Cayley-transzformáltja, akkor

$$S = i(I + U)(I - U)^{-1}.$$

Ugyanis $S + iI$ injektív és $\mathrm{Dom}(S)$-et $\mathbf{H}$-ra képezi, ezért ha $x \in \mathrm{Dom}(S)$ esetén

$$y := (S + iI)x, \quad \text{akkor} \quad Uy = (S - iI)x,$$

és így

$$(I + U)y = 2Sx \qquad \text{és} \quad (I - U)y = 2ix,$$

amiből $\mathrm{Ran}(I - U) = \mathrm{Dom}(S)$; továbbá, ha $(I - U)y = 0$, akkor $x = 0$, következésképpen $y = 0$, tehát $I - U$ injektív. Végezetül az előző egyenlőségekből

$$\begin{aligned} Sx =& \frac{1}{2}(I + U)y = \frac{1}{2}(I + U)(I - U)^{-1}(2ix) = \\ =& i(I + U)(I - U)^{-1}x. \end{aligned}$$

Ha tehát $P$ az $U$ Cayley-transzformált spektrálfelbontása, akkor az $f = i\frac{1+\mathrm{id}_{\mathbb{T}}}{1-\mathrm{id}_{\mathbb{T}}}$ jelöléssel $S = \hat{P}(f)$, azaz $S$ spektrálfebontása $P \circ \overset{-1}{f}$.

## 3.4. Felcserélhetőség

Már volt arról szó, hogy az $A$ korlátos és $L$ akármilyen operátort felcserélhetőnek nevezzük, ha $AL \subset LA$.

Értelmeztük egy operátor és egy projektormérték, valamint két projektormérték felcserélhetőségét.

Két normális operátort erősen felcserélhetőnek mondunk, ha a spektrálfelbontásaik felcserélhetők.

Emlékeztetünk, hogy az $A$ korlátos operátor

– akkor és csak akkor cserélhető fel a $P$ projektormértékkel, ha felcserélhető minden $\hat{P}(f)$-fel.

– akkor és csak akkor cseréléhető fel a komplex $P$ projektormértékkel, ha felcserélhető $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$-vel és $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^*)$-gal.

Megjegyezzük, hogy elég egy felcserélhetőség a fenti állításban, ugyanis bebizonyítható: ha $A$ felcserélhető $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$-vel, akkor felcserélhető $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^*) = \hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})^*$-gal is.

Az $A$ korlátos normális operátor akkor és csak akkor cserélhető fel az $N$ normális operátorral, ha $A$ és $N$ erősen felcserélhetők. Ugyanis $A$ akkor és csak akkor cserélhető fel $N$-nel, ha felcserélhető az $N$ spektrálfelbontásával; tehát a spektrálfelbontásban szereplő minden $P(E)$ projektor felcserélhető $A$-val, és ez akkor és csak akor teljesül, ha $P(E)$ felcserélhető az $A$ spektrálfelbontásával.

**42. Állítás.** *Legyen $N$ és $M$ két erősen felcserélhető normális operátor. Ekkor $NMx = MNx$ minden $x \in \mathrm{Dom}(NM) \cap \mathrm{Dom}(MN)$ esetén.*

*Bizonyítás* Legyen $P$ az $N$, $Q$ az $M$ spektrálfelbontása. Ekkor minden $P(E)$ felcserélhető $M$-mel.

Vegyünk egy szóban forgó $x$-et, azaz $x \in \mathrm{Dom}(N) \cap \mathrm{Dom}(M)$ és $Mx \in \mathrm{Dom}(N)$, $Nx \in \mathrm{Dom}(M)$. Ha $y \in \mathrm{Dom}(M) = \mathrm{Dom}(M)^*$, akkor $\langle M^*y, P(E)x\rangle = \langle y, MP(E)x\rangle = \langle y, P(E)Mx\rangle$, azaz a szokásos jelölésünkkel $\mu_{M^*y,x} = \mu_{y,Mx}$, és így

$$\langle y, MNx\rangle = \langle M^*y, Nx\rangle = \int \mathrm{id}_{\mathbb{C}} d\mu_{M^*y,x} = \int \mathrm{id}_{\mathbb{C}} d\mu_{y,Mx} = \langle y, NMx.$$

Mivel $y$ egy sűrű lineáris alteret fut végig, igaz az állítás. □

Fontos megjegyezni, hogy a fordítottja nem igaz: az $NMx = MNx$ egyenlőségből nem következik az $N$ és $M$ erős felcserélhetősége. Íme az ellenpélda:

$\alpha \in \mathbb{T}$ esetén legyen

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(D_\alpha) := \{\phi \in L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C}) \mid \phi \text{ abszolút folytonos}, \\ \phi' \in L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})\}, \\ \phi(-\pi) = \alpha\phi(\pi)\},\end{aligned}$$

és $D_\alpha\phi := i\phi$.

Ezek a differenciálás-operátorok önadjungáltak. Sűrűn vannak értelmezve, hiszen értelmezési tartományuk tartalmazza a végtelenszer differenciálható, $]-\pi,\pi[$-ben kompakt tartójú függvényeket. Az is egyszerű, hogy szimmetrikusak: ha $\phi, \psi \in \mathrm{Dom}(D_\alpha)$, akkor

$$\langle \psi, D_\alpha\phi\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \psi^*(-i\phi') = -i[\psi^*\phi]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \psi^{*\prime} i\phi = \int_{-\pi}^{\pi} -(i\psi')^*\phi = \langle D_\alpha\psi, \phi\rangle,$$

ugyanis a kiintegrált rész nulla. Következésképpen $D_\alpha \subset D_\alpha^*$.

Ha $\psi \in \mathrm{Dom}(D_\alpha^*)$ és $\phi \in \mathrm{Dom}(D_\alpha)$, akkor

$$i\int_{-\pi}^{\pi} \psi'^*\phi = \langle, D_\alpha^*\psi, \phi\rangle = \langle \psi, D_\alpha\phi\rangle = -i\int_{-\pi}^{\pi} \psi^*\phi' \ ,$$

ezért $[\psi^*\phi]_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\pi}^{\pi}(\psi^*\phi' + \psi'^*\phi) = 0$ minden $\phi \in \mathrm{Dom}(D_\alpha)$ esetén, amibôl $\psi(-\pi) = \alpha\psi(\pi)$ következik, azaz $\psi \in \mathrm{Dom}(D_\alpha)$; tehát $D_\alpha^* \subset D_\alpha$.

$D_\alpha$ spektruma az $\{n+\alpha \mid n \in \mathbb{Z}\}$ sajátértékekből áll, amelyekez az $s \mapsto e^{i(n+\alpha)s}$ sajátfüggvények tartoznak (ezek kifeszítik az egész Hilbert-teret). A 3.1 pontban szereplő példa adja meg $D_\alpha$ spektrálfelbontását.

Könnyű látni, hogy $D_\alpha D_\beta \phi = D_\beta D_\alpha \phi$ a megfelelő $\phi$-ken, de $\alpha \neq \beta$ esetén a két projektormérték nem cserélhető fel.

### 3.5. Projektormértékek szorzata

Emlékezetetünk, hogy a projektormértékek az általános valószínűségelmélet fizikai mennyiségeiként kerültek elő. A fizikában igen fontos kérdés, mely fizikai mennyiségeknek van együttese. Láttuk, az együttes fizikai mennyiség létezésének szükséges feltétele volt a kompatibilitás. A kompatibilitás az egyes mennyiségek értékeinek egymással való disztributivitását jelenti. Projektorhálóban a disztributivitás egyenértékű a kommutativitással. Bebizonyítható, hogy „megfelelően jó” toplogikus terek (például véges dimenziós affin terek) Borel-halmazain értelmezett projektormértékek esetén a kompatibilitás elégséges is az együttes létezéséhez. Ez a bizonyítás meglehetősen hosszadalmas, itt nem térünk ki rá.

Projektormértékek együttesére a projektormértékek szorzata elnevezést szokás használni; ezt a következő formula indokolja. Legyenek $P_i : \mathcal{B}(V_i) \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ páronként felcserélhető projektormértékek ($i = 1, \dots, n$). Ezek együttese egy olyan (egyértelműen meghatározott) $P : \mathcal{B}(V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n) \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ projektormérték, amelyre

$$P\left(E_1 \times E_2 \times \dots E_n\right) = P_1(E_1)P_2(E_2)\dots P_n(E_n).$$

## 4. Egyparaméteres unitér csoportok

Egyparaméteres unitér csoporton egy $t \mapsto U_t$ leképezést értünk, ahol $t$ a valós számokat futja végig és $U_t$ unitér operátor úgy, hogy minden $t, s$ esetén $U_{t+s} = U_t U_s = U_s U_t$. Az egyparaméteres unitér csoportot folytonosnak nevezzük, ha az $\mathbb{R} \times \mathbf{H} \to \mathbf{H}$, $(t, x) \mapsto U_t x$ leképezés folytonos.

**43. Állítás.** *Az egyparamtéteres unitér csoport folytonossága egyenértékű azzal, hogy minden $y, x \in \mathbf{H}$ esetén $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \langle y, U_t x\rangle$ folytonos a nullában (más szóval a $t \mapsto U_t$ hozzárendelés gyengén folytonos a nullában).*

*Bizonyítás* Világos, hogy a folytonosságból következik a gyenge folytonosság.

A gyenge folytonosság a nullában maga után vonja a gyenge folytonosságot bármely pontban az $\langle y, U_s x\rangle - \langle y, U_s x\rangle = \langle y, (U_s - U_t)x\rangle_{\langle} y, U_{s-t}x\rangle$ összefüggés alapján.

A gyenge folytonosságból következik az erős folytonosság is, azaz $t \mapsto U_t x$ folytonos minden $x$-re:

$$\|U_s x - U_t x\|^2 = \|U_t x\|^2 - \langle U_s x, U_t x\rangle - \langle U_t x, U_s x\rangle + \|U_s\|^2$$

A jobb oldal első és utolsó tagja $\|x\|^2$, a gyenge folytonosság miatt, ha $s$ tart $t$-hez, akkor a középső tagok $-\|x\|^2$-hez tartanak, tehát jobb oldal – és ezzel együtt a bal oldal – a nullához tart.

Az erős folytonosságból viszont következik a folytonosság:

$$\|U_s y - U_t x\| \leq \|U_s y - U_s x\| + \|U_s x - U_t\| = \|y - x\| + \|U_s x - U_t\|. \quad \square$$

Ha $S$ önadjungált operátor, akkor a spektráltétel szerint értelmezett $U_t := e^{itS}$ $(t \in \mathbb{R})$ operátorok az exponenciális függvény szorzási szabálya következtében egyparaméteres unitér csoportot alkotnak (ezt az $S$ generálta egyparaméteres unitér csoportnak hívjuk), amely folytonos. Ugyanis, ha $P$ az $S$ spektrálfelbontása, az eddigi jelölésekkel a

$$t \mapsto \langle y, U_t x\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{it\alpha} d\mu_{y,x}(\alpha)$$

leképezés folytonos a 0-ban, amint az a Lebesgue-tételből egyszerűen következik.

A mondottaknak a fordítottja is igaz:

**44. Állítás.** *(Stone tétele) Legyen $t \mapsto U_t$ folytonos egyparaméteres unitér csoport. Ekkor létezik egy egyértelműen meghatározott $S$ önadjungált operátor úgy, hogy $U_t = e^{itS}$ minden $t$-re.*

*Bizonyítás* Tegyük fel először azt, hogy a csoport $2\pi$ szerint periodikus, azaz $U_{2\pi} = I$, és így $U_{t+2\pi} = U_t$ minden $t$-re. Az

$$(y, x) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} \langle y, U_t x\rangle dt$$

leképezés folytonos szeszkilineáris (vagyis az első változójában konjgált lineáris, a másodikban lineáris) forma minden $n$ egésze számra. Ezért egyértelműen léteznek $P_n$ korlátos operátorok úgy, hogy

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} \langle y, U_t x\rangle dt = \langle y, P_n x\rangle.$$

Mivel

$$\left(\int_0^{2\pi} e^{-int} \langle y, U_t x\rangle dt\right)^* = \int_0^{2\pi} e^{int} \langle U_t x, y\rangle dt = \int_{-2\pi}^{0} e^{-int} \langle U_{-t} x, y\rangle dt = \\ = \int_0^{2\pi} e^{-int} \langle x, U_t y\rangle dt,$$

az $\langle y, P_n x\rangle^* = \langle x, P_n y\rangle$ egyenlőség igaz, ami azt jelenti, hogy $P_n$ önadjungált. Továbbá az $U_t U_s = U_{t+s}$ egyenlőség alapján

$$\langle y, P_n U_s x\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} \langle y, U_t U_s x\rangle dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} \langle y, U_t x\rangle dt = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in(z-s)} \langle y, U_z x\rangle dz;$$

ebből, és hasonlóan a fordított sorrendre, azt kapjuk, hogy

$$P_n U_s = U_s P_n = e^{ins} P_n \qquad (s \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}). \tag{13}$$

Továbbá

$$\langle y, P_n P_m\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} \langle y, U_t P_m x\rangle dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} e^{imt} \langle y, P_n x\rangle dt,$$

amiből
$$P_nP_m = \delta_{mn}P_n \quad (n, m \in \mathbb{Z}).$$

Végeredményben tehát a $P_n$-ek projektorok, a különböző indexűek ortogonálisak egymásra. $P_\bullet := \sum_{n\in\mathbb{Z}} P_n$ a megfelelő alterek összegére vetítő projektor; ezért $P_n P_\bullet \bot$=0 minden $n$-re, ezért

$$0 = \langle y, P_n P_\bullet^\perp \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\langle y, U_t P_\bullet^\perp x\rangle dt,$$

tehát a $[0, 2\pi]$-n értelmezett $t \mapsto \langle y, U_t P_\bullet^\perp x\rangle$ folytonos függvémny minden Fourier-együtthatója nulla, így maga a függvény is nulla, amiből $P_\bullet^\perp = 0$, azaz $P_\bullet = I$ következik. Ezért (13) alapján

$$U_t = (s)\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{int}P_n.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy a

$$P(E) := (s)\sum_{n\in E} P_n \quad (E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

projektormértékkel és az $S := \hat{P}(\mathrm{id}_\mathbb{R})$ önadjungált operátorral $U_t = e^{itS}$.

Az álalános esetet visszavezetjük a periodikusra. Legyen $Q$ az $U_{2\pi}$ spektrálfelbontása úgy, hogy az egységkört a $]0, 2\pi]$ intervallummal paraméterezzük, azaz
$$\langle y, U_{2\pi}x\rangle = \int_0^{2\pi} e^{is} d\langle y, Q(s)x\rangle.$$

Könnyű látni, hogy $t \mapsto V_t := U_t(U_{2\pi})^{-t/2\pi}$ $2\pi$ szerint periodikus folytonos egyparaméteres unitér csoport. Ezért léteznek páronként ortogonális $P_n$ $(n \in \mathbb{Z})$ projektorok úgy, hogy
$$V_t = (s)\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{int}P_n.$$

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért elhagyjuk az összegek elől az $(s)$ jelet, és az is formálisan jelöljük, azaz elhagyjuk az $\langle y, \ldots x\rangle$ skaláris szorzatot. Így

$$\begin{aligned} U_t &= \sum_n e^{int}P_n(U_{2\pi})^{t/2\pi} = \sum_n e^{int}P_n \int_0^{2\pi} e^{ist/2\pi} dQ(s) = \\ &= \sum_n \int_0^1 e^{it(n+\alpha)}P_n dQ(2\pi\alpha) = \sum_n \int_n^{n+1} e^{it\beta}P_n dQ(2\pi(\beta - n)). \end{aligned}$$

Vezessük be a

$$P(E) := \sum_{\{} n \mid E \cap [n, n+1[\neq \emptyset\} P_n Q(2\pi(E - n)) \quad (E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

operátorokat. Mivel minden $t$-re $V_t$ kommutál $U_{2\pi}$-vel, minden $P_n$ kommutál minden $Q(F)$-fel, ahol $F$ a $[0, 2\pi[$ intervallum Borel-halmaza. Ezért $P_nQ(F)$

is projektor, és különböző $-n$-ek esetén ortogonálisak egymásra. Ezek szerint $E \mapsto P(E)$ valós projektormérték, és

$$U_t = \int_{\mathbb{R}} e^{it\beta} dP(\beta),$$

azaz, ha $S := \hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}})$, akkr $U_t = e^{itS}$.

**45. Állítás.** *Legyen $S$ önadjungált operátor és $U_t := e^{itS}$ $(t \in \mathbb{R})$. Ekkor*

*(i) $\lim_{t\to 0} \frac{U_t - I}{t} x$ akkor és csak akkor létezik, ha $x \in \mathrm{Dom}(S)$, és ez esetben a határérték $iSx$,*

*(ii) $\frac{d}{dt} U_t x = iU_t Sx = iSU_t x \quad (t \in \mathbb{R}, x \in \mathrm{Dom}(S))$.*

*Bizonyítás* (i) Ha a kérdéses határérték létezik, akkor létezik

$$\lim_{t\to 0} \left\| \frac{U_t - I}{t} x \right\|^2 = \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{e^{it\alpha} - 1}{t} \right|^2 d\mu_{x,x}(\alpha),$$

ahol $\mu_{x,x}$ az $S$ spektrálfelbontásából a korábbiak szerint származtatott mérték. Fatou-lemmájából következik, hogy az integrandus limesze, $\mathrm{id}^2_{\mathbb{R}}$ $\mu_{x,x}$-integrálható, azaz $x \in \mathrm{Dom})S)$.

$x \in \mathrm{Dom}(S)$, akkor

$$\left\| \left( \frac{U_t - I}{t} - iS \right) x \right\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{e^{it\alpha} - 1}{t} - i\alpha \right|^2 d\mu_{x,x}(\alpha).$$

Az integrandust átalakíthatjuk

$$\left| \alpha \exp\left(\frac{it\alpha}{2}\right) \frac{\exp\left(\frac{it\alpha}{2}\right) - \exp\left(\frac{-it\alpha}{2}\right)}{2\left(\frac{it\alpha}{2}\right)} - \alpha \right|^2$$

alakba, amiből könnyen adódik, hogy az $\mathrm{id}^2_{\mathbb{R}}$ számszorosa majorálja, amely $\mu_{x,x}$-integrálható, hiszen $x \in \mathrm{Dom}(S)$. Az integrandus határértéke nulla, miközben $t$ tart a nullához; a Lebesgue-tétel szerint a határátmenet és az integrálás felcserélhető, ezért a bal oldal a nullához tart.

(ii)

$$\frac{d}{dt} U_t x = \lim_{h\to 0} \frac{U_{t+h} - U_t}{h} x = \lim_{h\to 0} U_t \frac{U_h - I}{h} x = \lim_{h\to 0} \frac{U_h - I}{h} U_t x.$$

A középső határérték létezik, ezért az összes többi is, és egyenlők egymással.

**46. Állítás.** *Legyen $S$ önadjungált operátor és $U_t := e^{itS}$ $(t \in \mathbb{R})$. Ekkor*

*(i) az $A$ korlátos operátorra $AU_t = U_t A$ $(t \in \mathbb{R})$ akkor és csak akkor, ha $AS \subset SA$,*

*(ii) az $N$ normális operátorra $U_t N \subset NU_t$ $(t \in \mathbb{R})$ akkor és csak akkor, ha $S$ és $N$ erősen felcserélhetők (azaz spektrálfelbontásaik kommutálnak).*

*Bizonyítás* (i) Ha $A$ felcserélhető $S$-sel, akkor felcserélhető minden függvényével, így $U_t$-vel is. Viszont, ha $x \in \mathrm{Dom}(S)$, akkor

$$iASx = \lim_{t\to 0} A \frac{U_t - I}{t} x = \lim_{t\to 0} A \frac{U_t - I}{t} Ax = iSAx.$$

(ii) $U_t N \subset N U_t$ maga után vonja, hogy $U_t^* N^* \subset N^* U_t^*$; mivel $U_t^* = U_t^{-1} = U_{-t}$ és ez miden $t$-re igaz, itt elhagyhatjuk a negatív előjelet. Tehát $N$ és $N^*$ felcserélhető minden $U_t$-vel, ezért $U_t$ felcserélhető az $N$ spektrálfelbontásával, (azaz minden projektorral az $N$ spektrálfelbontásában), így az (i) szerint $S$ felcserélhető az $N$ spektrálfelbontásával, tehát $S$ és $N$ erősen felcserélhetők.

Ha $S$ és $N$ erősen felcserélhetők, akkor $S$ minden korlátos függvénye, így $U_t$ is, felcserélhető $N$-nel.

# 5. Lényegében önadjungált oporátorok

Emlékeztetünk arra, hogy egy $S$ operátort **szimmetrikusnak** hívunk, ha sűrűn értelmezett és $S \subset S^*$. Mivel egy adjungált operátor mindig zárt, a szimmetrikus operátorok lezárhatók (azaz van legszűkebb zárt kiterjesztése). Egy szimmetrikus operátort **lényegében önadjungáltnak** nevezünk, ha a lezártja önadjungált.

Tudjuk, hogy egy sűrűn értelmezett $A$ operátor pontosan akkor lezárható, ha $A^*$ értelmezési tartománya sűrű, és ekkor $A$ lezárása $A^{**}$. Következésképpen egy szimmetrikus $S$ operátor akkor és csak akkor lényegében önadjungált, ha $S^* = S^{**}$.

**47. Állítás.** *Egy $S$ szimmetrikus operátor pontosan akkor önadjungált, ha $S^* \pm I$ injektív.*

*Bizonyítás* $S$ lezártja $S^{**}$, $S^*$ lezártja (egyrészt önmaga, másrészt) $S^* = (S^*)^{**} = (S^{**})^* = \overline{S}^*$, ezért elég belátni, hogy egy $S$ zárt szimmetrikusm operátor akkor és csak önadjungált, ha $S^* \pm I$ injektív.

Az (11) összefüggésből következik, hogy $S \pm iI$ képtere zárt. Legyen ugyanis $y_n := (S \pm iI)x_n$ Cauchy-sorozat, és $y := \lim_n y_n$. Az idézett összefüggés szerint $x_n$ és $Sx_n$ is Cauchy-sorozat. Legyen $x := \lim_n x_n$. Az $S$ operátor zártsága miatt $x$ benne van $S$ értelmezési tartományában, és $Sx = y$, azaz $y$ az $S \pm iI$ képterének eleme.

Tudjuk, hogy $S \mp iI$ képterének ortogonális kiegészítője az $(S \mp iI)^* = S^* \pm iI$ magtere.

Ha $S^* \pm iI$ injektív, akkor $S \pm iI$ képtere (amely zárt) az egész Hilbert-tér; mivel $S \subset S^*$, $S^* \pm iI$ képtere is az egész Hilbert-tér. Ezért $\mathrm{Dom}(S^*)$ nem lehet bővebb $\mathrm{Dom}(S)$-nél, mert akkor nem lenne injektív; tehát $S = S^*$.

Ha $S$ önadjungált, akkor $\pm i$ nincs a spektrumában, ezért $S^* \pm iI = S \pm iI$ injektív.

**48. Állítás.** *Legyen $S$ önadjungált operátor, és egy $\mathcal{D}$ sűrű lineáris altérre teljesüljön, hogy*

– $\mathcal{D} \subset \mathrm{Dom}(S)$,

– $e^{itS}\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ *a nulla egy környezetében lévő valós $t$-kre.*

*Ekkor $S$ leszűkítése $\mathcal{D}$-re lényegében önadjungált.*

*Bizonyítás* Vegyük észre, hogy akármely valós $t$ esetén létezik $nn \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $t/n$ bene van a kérdéses környezetben, továbbá $e^{itS} = \left(e^{i(t/n)S}\right)^n$, ezért $e^{itS}\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ minden valós $t$-re.

Legyen $x$ az $(S|_{\mathcal{D}})^*$ értelmezési tartományában, és tegyük fel, hogy $(S|_{\mathcal{D}})^*x = ix$. Az előző fejezet eredménye szerint minden $y \in \mathcal{D}$ esetén

$$\frac{d\langle x, e^{itS}y\rangle}{dt} = \langle x, iSe^{itS}y\rangle = i\langle (S|_{\mathcal{D}})^*x, e^{itS}y\rangle = \langle x, e^{itS}y\rangle,$$

amiből $\langle x, e^{itS}y\rangle = e^t\langle x, y\rangle$.

Nyilvánvaló, hogy $|\langle x, e^{itS}y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$, ami csak úgy egyeztethető össze a fenti eredménnyel, ha $\langle x, y\rangle = 0$; minthogy $y$ egy sűrű halmazt fut végig, ez azt jelenti, hogy $x = 0$, azaz $(S|_{\mathcal{D}})^* - iI$ injektív. Ugyanígy mutathatjuk meg azt is, hogy $(S|_{\mathcal{D}})^* + iI$ is injektív.