1. Mértékelméleti összefoglaló

1.1. Mérhetőség

Egy S halmaz részhalmazainak $\mathcal{A}$ összességét σ-algebrának hívjuk, ha $S \in \mathcal{A}$, bármely két $\mathcal{A}$-beli halmaz különbsége is $\mathcal{A}$-ban van, valamint megszámlálható $\mathcal{A}$-beli halmaz uniója is $\mathcal{A}$-ban van.

Egy véges dimenziós V vektortér részhalmazainak azt a legszűkebb σ-algebráját, amely tartalmazza az összes nyílt halmazt, Borel-féle σ-algebrának hívjuk és $\mathcal{B}(V)$-vel jelöljük.

Egy

$$\phi := \sum_i c_i \chi_{E_i} \tag{1}$$

alakú függvényt V értékű $\mathcal{A}$-lépcsős függvénynek hívunk, ha i tetszőleges véges halmazt fut végig, $c_i \in V$, $E_i \in \mathcal{A}$ és $E_i \cap E_j = \emptyset$ $i \neq j$ esetén.

Egy $f : S \to V$ függvény $\mathcal{A}$-mérhető, ha minden Borel-halmaz f általi ősképe $\mathcal{A}$-ban van. Ez egyenértékű azzal, hogy f $\mathcal{A}$-lépcsős függvények sorozatának pontonkénti határértéke (az $\mathcal{A}$-lépcsős függvények $\mathcal{A}$-mérhetők).

$\mathcal{A}$-mérhető függvények abszolút értéke, számszorosa, összege, szorzata, konvergens sorozatának a határértéke is mérhető, valamint megszámlálható sok valós értékűnek az alsó és felső burkolója is.

Ha S maga is véges dimenziós vektortér és $\mathcal{A} = \mathcal{B}(S)$, akkor minden $S \to V$ folytonos függvény $\mathcal{B}(S)$-mérhető.

A továbbiakban csak a $V = \mathbb{C}$ esetet tekintjük, lényegében minden ugyanúgy működik általános esetre is, az ab azholút érték helyett tetszőleges normát véve.

1.2. Közönséges mértékek, integrálás

Az $\mathcal{A}$-n adott μ (közönséges) mérték egy nemnegatív értékű σ-additív leképezés, amely a végtelen értéket is felveheti. (σ-additív: megszámlálható sok diszjunkt halmaz uniójának a mértéke a halmazok mértékének az összege).

A σ-additivitásból következik, hogy a mérték alulról és felülről félig folytonos, azaz monoton növő halmazsorozat uniójának, illetve monoton csökkenő halmazsorozat metszetének a mértéke a halmazok mértékéből álló sorozat határértéke.

Egy $A \subset S$ halmazt μ-nullának hívunk, ha minden $\epsilon > 0$ essetén van olyan $E_n^\epsilon \in \mathcal{A}$ $(n \in \mathbb{N})$, hogy $A \subset \cup_n E_n^\epsilon$ és $\sum_n \mu(E_n^\epsilon) \leq \epsilon$. Ha $E \in \mathcal{A}$ és mu(E)=0, $akkor$Eμ-nulla.

A μ-majdnem mindenütt – egyszerűsített írással μ-mm. – azt jelenti, hogy egy μ-nulla halmaz kivételével. Például az f és g függvény μ-mm. egyenlő, ha az a halmaz, ahol nem egyenlők, μ-nulla. Azt molndjuk, hogy f μ-mm. mérhető, ha μ-mm. egyenlő egy mérhető függvénnyel.

A fenti alakú $\mathcal{A}$-lépcsős függvény μ-integrálható, ha $\sum_i |c_i|\mu(E_i) < \infty$; ekkor $\int_S \phi d\mu := \sum_i c_i \mu(E_i)$.

Az $f : S \to \mathbb{C}$ függvény μ-integrálható, ha van olyan ϕ_n $(n \in \mathbb{N})$ μ-integrálható $\mathcal{A}$-lépcsős függvény sorozat, amely μ-mm. konvergál f-hez, és $\lim_{nm} \int_S |\phi_n - \phi_m| d\mu = 0$, és ekkor

$$\int_S f d\mu := \lim_n \int_S \phi_n d\mu$$

(a jobb oldali határérték a Cauchy-féle feltétel szerint létezik). A definíció szerint μ-integrálható függvény $\mathcal{A}$-mérhető.

Ez a definíció szemléletesen, jól mutatja az integrálhatóság lényegét, azonban az integrálemélet különféle felépítéseiben más definíciókat használnak, és ott állításként jelenik meg, hogy egy függvény pontosan akkor μ-integrálható , ha a fenti tulajdonsággal rendelkezik (ugyanis ebből a definícióból nem sikerül közvetlenül származtatni az integrálás alapvető tételeit). Az is következik a meghatározásból, hogy egy μ-integrálható függvény $\mathcal{A}$-mérhető.

Ha f μ-integrálható és $g = f$ μ-mm., akkor g is μ-integrálható, és $\int_S g d\mu = \int_S f d\mu$.

A szokásos felépítesek egyik lépése, amit mi többször is ki fogunk használni az az, hogy egy nem negatív f mérhető függvényhez mindig létezik valós értékű $\mathcal{A}$-lépcsős függvények monoton növő ϕ_n sorozata úgy, hogy $f = \lim_n \phi_n$, és a lépcsős függvények integráljának a határértéke, ha létezik, lesz az f integrálja.

μ-integrálható függvények összege és számszorosa is μ-integrálható.

Egy f függvény μ-integrálható az $E \in \mathcal{A}$ halmazon, ha $\chi_E f$ μ-integrálható , és ekkor

$$\int_E f d\mu := \int_S \chi_E f d\mu.$$

Fontos tények:

– f akkor és csak akkor μ-integrálható , ha f μ-mm. mérhető és $|f|$ μ-integrálható , és ekkor $\left|\int_S f d\mu\right| \leq \int_S |f| d\mu$,

– ha az f, g valós függvények μ-integrálható és $f \leq g$ μ-mm., akkor $\int_S f d\mu \leq \int_S g d\mu$,

– ha f $\mathcal{A}$-mérhető függvény, és van olyan g μ-integrálható függvény, hogy $|f| \leq g$ μ-mm., akkor f is μ-integrálható .

Az integrálás alaptételei a következők.

1. Állítás. *(B. Levi tétele)*

1. Legyen f_n valós értékű, μ-integrálható , $f_n \leq f_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ és létezzen $\lim_n \int_S f_n d\mu$. Ekkor létezik μ-mm. $\lim_n f_n$, amely μ-integrálható , és

$$\int_T (\lim_n f_n) d\mu = \lim_n \int_T f_n d\mu.$$

2. Legyen g_n μ-integrálható $(n \in \mathbb{N})$ és $\sum_n \int_S |g_n| d\mu < \infty$. Ekkor a $\sum_n g_n$ függvénysor μ-mm. abszolút konvergens, $\sum_n g_n$ μ-integrálható és

$$\int_T (\sum_n g_n) d\mu = \sum_n \int_T g_n d\mu.$$

2. Állítás. *(Lebesgue tétele)*

Legyen f_n μ-integrálható és létezzen g μ-integrálható úgy, hogy $|f_n| \leq g$ $(n \in \mathbb{N})$, továbbá létezzen μ-mm. $\lim_n f_n$. Ekkor létezik $\lim_n \int_S f_n d\mu$, továbbá $\lim_n f_n$ μ-integrálható, és

$$\int_T (\lim_n f_n) d\mu = \lim_n \int_T f_n d\mu.$$

3. Állítás. *(Fatou lemmája)*

Legyen $0 \leq f_n$ μ-integrálható és létezzen olyan $a \in \mathbb{R}^+$, hogy $\int_T f_n d\mu \leq a$ $(n \in \mathbb{N})$. Ha létezik μ-mm. $\lim_n f_n$, akkor ez integrálható, és

$$\int_T (\lim_n f_n) d\mu \leq \liminf_n \int_T f_n d\mu.$$

Ha $f \geq 0$ $\mathcal{A}$-mérhető függvény, akkor $f\mu$ mérték, amelyet úgy határozunk meg, hogy $(f\mu)(E) = \int_E f d\mu$, ha f μ-integrálható E-n, és végtelen, ha nem.

Legyen ν is mérték $\mathcal{A}$-n. Azt monduk, hogy ν abszolút folytonos μ-re, ha minden μ-nulla halmaz ν-nulla is.

A Radon–Nikodym-tétel szerint, ha ν abszolút folytonos μ-re, akkor létezik μ-mm. egyértelműen egy f függvény úgy, hogy $\nu = f\mu$.

1.3. Komplex mértékek

Az $\mathcal{A}$-n adott μ **komplex mérték** egy komplex értékű σ-additív leképezés. Ez annyival bonyolultabb a korábban tárgyalt (közönséges) mértéknél, hogy komplex értékű, de annyival egyszerűbb, hogy végtelen értéke nem lehet.

A μ komplex mérték **variációja** a $|\mu|$ közönséges mérték, amelyet a

$$|\mu|(E) := \sup \left\{ \sum_i |\mu(E_i)| \ : E = \bigcup_i E_i, \ E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j \right\}$$

formula határoz meg, ahol a szuprémum az E összes lehetséges véges diszjunkt felosztására vonatkozik.

Megjegyezzük, $|\mu|(E) = 0$ egyenértékű azzal, hogy $\mu(F) = 0$ minden $F \subset E$ esetén.

Egy komplex értékű $\mathcal{A}$-lépcsős függvény μ-**integrálható**, ha $\sum_i |c_i||\mu|(E_i) < \infty$; ekkor $\int_S \phi d\mu := \sum_i c_i \mu(E_i)$. Világos, hogy $\left|\int_S \phi d\mu\right| \leq \int_S |\phi| d|\mu|$.

Az $f : S \to \mathbb{C}$ függvény μ-integrálható, ha van olyan ϕ_n $(n \in \mathbb{N})$ μ-integrálható komplex értékű $\mathcal{A}$-lépcsős függvény sorozat, amely $|\mu|$-mm. konvergál f-hez, és $\lim_{nm} \int_S |\phi_n - \phi_m| d|\mu| = 0$, és ekkkor

$$\int_S f d\mu := \lim_n \int_S \phi_n d\mu.$$

μ-integrálható függvények összege és számszorosa is μ-integrálható.

Egy f függvény μ-integrálható az $E \in \mathcal{A}$ halmazon, ha $\chi_E f$ μ-integrálható , és ekkor

$$\int_E f d\mu := \int_S \chi_E f d\mu.$$

Egyszerű tény, hogy f akkor és csak akkor μ-integrálható , ha μ-mm. mérhető és $|f|$ $|\mu|$-integrálható , és ekkor $\left|\int_S f d\mu\right| \leq \int_S |f| d|\mu|$.

Az alapvető integráltételek igazak maradnak úgy, hogy értelemszerűen $|\mu|$ szerepel, ahol csak úgy van értelme.

4. Állítás. *Ha $h : S \to \mathbb{C}$ μ-integrálható , akkor*

$$h\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}, \quad E \mapsto \int_E h d\mu$$

komplex mérték, amelyre $|h\mu| = |h||\mu|$ teljesül, azaz $|h\mu|(E) = \int_E |h| d|\mu|$.

Továbbá, az $f : S \to \mathbb{C}$ függvény pontosan akkor $h\mu$-integrálható, ha fh μ-integrálható, és ekkor $f(h\mu) = (fh)\mu$.

2. Projektormértékek

2.1. Orto-σ-homomorfizmusok

A kvantummechanikában egy fizikai rendszer eseményeit egy $\mathcal{P}(\mathbf{H})$ Hilbert-hálóval modellezzük. Egy véges dimenziós V vektortér értékű fizikai mennyiség $\mathcal{B}(V) \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ orto-σ-homomorfizmus.

A továbbiakban a mértékelmélet fogalmait fogjuk használni, ezért egy kicsit általánosabb keretek között tárgyaljuk a fizikai mennyiségeket. Legyen tehát adott egy S halmaz részhalmazaiból álló $\mathcal{A}$ σ-algebra, és $P : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ orto-σ-homomorfizmus (itt tehát P nem egy projektort jelöl, hanem egy projektor értékű leképezést). Tudjuk, hogy

$$P(S) = I \tag{2}$$

és persze

$$P(\emptyset) = 0, \quad P(E^{\circ}) = I - P(E);$$

mivel P értékkészlete disztributív, tehát kommutatív, így előző eredményeink alapján

$$P(E \cap F) = P(E)P(F)$$

minden $E, F \in \mathcal{A}$ esetén. Továbbá, ha E_n $(n \in \mathbb{N})$ páronként diszjunkt Borel-halmazok, akkor

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = (s)\sum_{n\in\mathbb{N}} P(E_n). \tag{3}$$

A felsorolt tulajdonságokat – amelyek az orto-σ-homomorfizmusság következményei – fogjuk minduntalan használni. (2) és (3) alapján a matematikában meghonosodott elnevezés szerint P-t **projektormértéknek** fogjuk hívni; ez a két tulajdonság már maga után vonja a többit:

5. Állítás. *Legyen $P : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ olyan leképezés, amely teljesíti a* (2) *és* (3) *egyenlőségeket. Ekkor P orto-σ-homomorfizmus.*

Bizonyítás Az üres halmaz önmagától diszjunkt, ezért $P(\emptyset) = P(\cup_n \emptyset) = (s)\sum_n P(\emptyset)$, amiből $P(\emptyset) = 0$. Következésképpen P additív is, nem csak σ-additív (véges sok diszjunkt halmaz unióját kiegészítve megszámlálható sokszor a üres halmaz uniójával).

Ezért (a továbbiakban $E, F \in \mathcal{A}$) $I = P(E \cup E^{\circ}) = P(E) + P(E^{\circ})$, azaz

$$P(E^{\circ}) = I - P(E) = P(E)^{\perp}. \tag{4}$$

Továbbá, ha $E \subset F$, akkor $P(F) = P(E \cup (F \setminus E)) = P(E) + P(F \setminus E)$ amikből egyrészt

$$P(E) \leq P(F),$$

másrészt

$$P(F \setminus E) = P(F) - P(E)$$

következik.

Ezután bármely E, F esetén

$$P(E \cup F) = P(E \cup (F \setminus (E \cap F)) = P(E) + P(F) - P(E \cap F).$$

Átrendezve, majd négyzetre emelve és kihasználva, hogy egy projektornak egy nála nagyobb egyenlővel vett bármely sorrendű szorzata egyenlő a projektoral, ezt kapjuk:$P(E \cap F) = P(E) + P(F) + P(E \cup F) + P(E)P(F) + P(F)P(E) - 2P(E) - 2P(F)$, amiből $2P(E \cap F) = P(E)P(F) + P(F)P(E)$. Minthogy a bal oldalon az E és F szerepe szimmetrikus, végül arra jutunk, hogy

$$P(E \cap F) = P(E)P(F) = P(F)P(E).$$

Ennek következményeként véges sok halmaz metszetéhez rendelt projektor az egyes halmazokhoz rendelt projektorok szorzata, megszámlálható sok halmaz metszetéhez rendelt projektort pedig a (??) bizonyított állítás szerint a véges metszetek erős limeszeként kapjuk; így végül

$$P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} P(E_n). \tag{5}$$

Az (4) és (5) tulajdonság biztosítja, hogy P valóban orto-σ-homomorfizmus.

2.2. Projektormértékkel kapcsolatos komplex mértékek

Legyen $P : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ projektormérték és $y, x \in \mathbf{H}$. Ekkor

$$\mu_{y,x} : \mathcal{A} \to \mathbb{C}, \qquad E \mapsto \langle y, P(E)x\rangle$$

nyilvánvalóan komplex mérték, amelyre $\mu_{y,x} = \mu_{x,y}^*$ teljesül,

Rögzített y esetén $x \mapsto \mu_{y,x}$ lineáris, és rögzített x esetén $y \mapsto \mu_{y,x}$ konjugált lineáris.

Az is világos, hogy $\mu_{x,x}$ közönséges mérték és $\mu_{x,x}(S) = \|x\|^2$, továbbá $\mu_{cx,cx} = |c|^2\mu_{x,x}$ minden c komplex számra.

Egyszerű számolás adja a $\mu_{x+y,x+y} + \mu_{x-y,x-y} = 2\mu_{x,x} + 2\mu_{y,y}$ „négyszögegyenlőséget”, amiből

$$\mu_{x+y,x+y}(E) \leq 2\mu_{x,x}(E) + 2\mu_{y,y}(E).$$

Ugyancsak egyszerű tény, hogy

$$|\mu_{y,x}(E)|^2 = |\langle y, P(E)x\rangle|^2 = |\langle P(E)y, P(E)x\rangle|^2 \leq$$
$$\leq \|P(E)y\|^2\ \|P(E)x\|^2 = \mu_{y,y}(E)\mu_{x,x}(E).$$

6. Állítás. $|\mu_{y,x}|(E) \leq \sqrt{\mu_{y,y}(E)}\sqrt{\mu_{x,x}(E)}$.

Bizonyítás Legyen $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$ diszjunkt unió. Ekkor

$$\sum_{i=1}^n |\mu_{y,x}(E_i)| \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{\mu_{y,y}(E_i)}\sqrt{\mu_{x,x}(E_i)} \leq$$
$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \mu_{y,y}(E_i)}\sqrt{\sum_{i=1}^n \mu_{x,x}(E_i)} = \sqrt{\mu_{y,y}(E)}\sqrt{\mu_{x,x}(E)}.$$

A második egyenlőtlenségnél az $\mathbb{R}^n$-beli Cauchy-egyenlőtlenséget használtuk. A jobb oldal független az E diszjunkt felosztásától, ezért a felosztásokra vett szuprémumra is fennáll az egyenlőtlenség.

7. Állítás. $\chi_E \mu_{y,x} = \mu_{y,P(E)x} = \mu_{P(E)y,x} = \mu_{P(E)y,P(E)x}$.

Bizonyítás $(\chi_E \mu_{y,x})(F) := \mu_{y,x}(E \cap F) = \langle y, P(E \cap F)x \rangle$; ezután azt kell kihasználni, hogy $P(E \cap F) = P(E)P(F) = P(F)P(E) = P(E)P(F)P(E)$ és $P(E)^* = P(E)$.

8. Állítás. *Ha $g : S \to \mathbb{C}$ négyzetesen integrálható a $\mu_{y,y}$ mérték szerint és $f : S \to \mathbb{C}$ négyzetesen integrálható a $\mu_{x,x}$ mérték szerint, akkor gf integrálható a $\mu_{y,x}$ komplex mérték szerint, és*

$$\int_S |gf| d|\mu_{y,x}| \leq \sqrt{\int_S |g|^2 d\mu_{y,y}} \sqrt{\int_S |f|^2 d\mu_{x,x}}.$$

Bizonyítás Tekintsünk először a g helyébe a ϕ és az f helyébe a ψ nemnegatív lépcsős függvényt. Ekkor léteznek olyan E_i diszjunkt halmazok, hogy

$$\phi = \sum_{i=1}^n b_i \chi_{E_i}, \qquad \psi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}\int_S gf d|\mu_{y,x}| &= \sum_{i=1}^n b_i a_i |\mu_{y,x}|(E_i) \leq \sum_{i=1}^n b_i \sqrt{|\mu_{y,y}|(E_i)} a_i \sqrt{|\mu_{x,x}|(E_i)} \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2 |\mu_{y,y}|(E_i)} \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 |\mu_{x,x}|(E_i)} = \\ &= \sqrt{\int_S |\phi|^2 d\mu_{y,y}} \sqrt{\int_S |\psi|^2 d\mu_{x,x}}.\end{aligned}$$

Legyen ezután ϕ_n és ψ_n $(n \in \mathbb{N})$ olyan monoton növekvő lépcsősfüggvénysorozat, amely $|g|$-hez, illetve $|f|$-hez konvergál. Ekkor $|\phi_n \psi_n|$ monoton növekvő, a $|gf|$-hez konvergáló sorozat, és

$$\begin{aligned}\int_S |\phi_n \psi_n| d|\mu_{y,x}| &\leq \sqrt{\int_S |\phi_n|^2 d\mu_{y,y}} \sqrt{\int_S |\psi_n|^2 d\mu_{x,x}} \leq \\ &\leq \sqrt{\int_S |g|^2 d\mu_{y,y}} \sqrt{\int_S |f|^2 d\mu_{x,x}}.\end{aligned}$$

Ezért B.Levi tétele értelmében a függvénysorozat határértéke, azaz $|gf|$ $|\mu_{y,x}|$-integrálható , és az integráljára igaz a kívánt egyenlőség.

Az integrálhatóságra vonatkozó ismereteink szerint a bebizonyítottakból már következik, hogy gf integrálható $\mu_{y,x}$ szerint. □

Vegyük az előbbi eredményünkban a $g = 1$ függvényt, és alkalmazzuk az integrálok abszolút értékére az ismert becslést, hogy megkapjuk a következő eredményt:

9. Állítás. *Ha f négyzetesen integrálható $\mu_{x,x}$ szerint, akkor f integrálható $\mu_{y,x}$ szerint minden y esetén, és*

$$\left| \int_S f d\mu_{y,x} \right| \leq \int_S |f| d|\mu_{y,x}| \leq \sqrt{\int_S |f|^2 d\mu_{x,x}} \|y\|.$$

2.3. Integrálás projektormérték szerint

Legyen $f : S \to \mathbb{C}$ $\mathcal{A}$-mérhető függvény.

Definiáljuk f-hez az

$$E_n := \{s \in S \mid |f(s)| \leq n\} \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{6}$$

halmazokat, amelyek az $\mathcal{A}$ elemei. Nyilvánvaló, hogy $E_n \subset E_{n+1}$ és $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = S$.

Ekkor $P(E_n) \leq P(E_{n+1})$, és a monoton növő projektorsorozatok ismert tulajdonsága szerint

$$(s)\lim P(E_n) = P(S) = I;$$

teljesen hasonlóan $P({E_n}^{\complement}) \geq P({E_{n+1}}^{\complement})$, és

$$(s)\lim P({E_n}^{\complement}) = P(\emptyset) = 0.$$

Vezessük be

$$D_f := \{x \in \mathbf{H} \mid f \in L^2(\mu_{x,x})\}$$

jelölést.

10. Állítás. *D_f mindenütt sűrű lineáris altér.*

Bizonyítás A „négyszögegyenlőségből” következő egyenlőtlenség alapján $L^2(\mu_{x,x}) \cap L^2(\mu_{y,y}) \subset L^2(\mu_{x+y,x+y})$; ebből és a $\mu_{cx,cx} = |c|^2\mu_{x,x}$ egyenlőségből következik, hogy D_f lineáris altér.

Legyen E_n az (6)-ben adott halmaz. Ekkor $P(E_n)x \in D_f$ minden x-re, ugyanis $\mu_{P(E_n)x,P(E_n)x} = \chi_{E_n}\mu_{x,x}$ és $|f|^2$ $\mu_{P(E_n)x,P(E_n)x}$-integrálhatósága egyenértékű az $|f|^2\chi_{E_n}$ (korlátos) mérhető függvénynek a (korlátos) $\mu_{x,x}$ mérték szerinti integrálhatóságával, és ez utóbbi nyilvánvaló.

Az előbbiek szerint $\lim P(E_n)x = x$; tehát minden x előáll D_f-beli sorozat határértékeként, így D_f mindenütt sűrű. $\square$

Megemlítendő, hogy ha f korlátos, akkor $D_f = \mathbf{H}$.

A 9 állítás alapján értelmes a

$$\mathbf{H} \times D_f \to \mathbb{C}, \qquad (y, x) \mapsto \int_S f d\mu_{y,x}$$

leképezés, amely a második változójában lineáris, az első változójában konjugált lineáris és korlátos; ez utóbbi miatt a Riesz-féle reprezentációs tétel szerint létezik egyértelműen egy $\hat{P}(f)x$-szel jelölt vektor úgy, hogy

$$\langle y, \hat{P}(f)x\rangle = \int_S f d\mu_{y,x} \qquad (y \in \mathbf{H}, x \in D_f). \tag{7}$$

Az említett linearitás miatt $x \mapsto \hat{P}(f)x$ lineáris. Összefoglalva:

11. Állítás. *Minden f mérhető függvényhez létezik egyértelműen egy D_f-en értelmezett $\hat{P}(f)$ operátor úgy, hogy (7) teljesül.*

$\hat{P}(f)$ elnevezése: f-nek a P szerinti integrálja. A $\hat{P}(f)$ jelölés „házi” használatú, a matematikai irodalomban ismert, $\int_S f dP$ jelölés helyett.

Egyszerű tény, hogy az E mérhető halmazra $\hat{P}(\chi_E) = P(E)$.

Ennek megfelelő a 7 állítás általánosítása:

12. Állítás. *$f\mu_{y,x} = \mu_{y,\hat{P}(f)x}$ minden $y \in \mathbf{H}$, $x \in D_f$ esetén.*

Bizonyítás

$$\begin{aligned}(f\mu_{y,x})(E) :=& \int_S f\chi_E d\mu_{y,x} = \int_S f d\chi_E \mu_{y,x} = \int_S f d\mu_{P(E)y,x} = \\ =& \langle P(E)y, \hat{P}(f)x\rangle = \langle y, P(E)\hat{P}(f)x\rangle = \mu_{y,\hat{P}(f)x}(E).\end{aligned}$$

□

Teljesen hasonlóan, ha y a D_g eleme, akkor $g^*\mu_{y,x} = \mu_{\hat{P}(g)y,x}$.
Az előzekből adódóan minden E mérhető halmaz esetén

$$P(E)\hat{P}(f) \subset \hat{P}(f)P(E) = \hat{P}(f\chi_E) \tag{8}$$

teljesül. Ugyanis a következő kijelentések egyenértékűek:
– $x \in D_{f\chi_E}$
– $f\chi_E \in L^2(\mu_{x,x})$
– $f \in L^2(\chi_E\mu_{x,x})$
– $f \in L^2(\mu_{PE)x,P(E)x})$
– $P(E)x \in D_f$;
továbbá

$$\begin{aligned}\langle y, \hat{P}(f)P(E)x\rangle &= \int_S f d\mu_{y,P(E)x} = \int_S f\chi_E d\mu_{y,x} = \\ &= \langle y, P(f\chi_E)x\rangle, \\ &= \int_S f d\mu_{y,P(E)x} = \int_S f d\mu_{P(E)y,x} = \\ = \langle y, P(E)\hat{P}(f)x\rangle.\end{aligned}$$

13. Állítás. *Ha $x \in D_f$, akkor*

$$\|\hat{P}(f)x\|^2 = \int_S |f|^2 d\mu_{x,x}$$

Bizonyítás

$$\|\hat{P}(f)x\|^2 = \langle \hat{P}(f)x, \hat{P}(f)x\rangle = \int_S f d\mu_{\hat{P}(f)x,x} = \int_S f f^* d\mu_{x,x}.$$

14. Állítás. *$\hat{P}(f)^* = \hat{P}(f^*)$, ahol – természetesen – a bal odalon a csillag az adjungáltat, a jobb oldalon a komplex konjugáltat jelöli.*

Bizonyítás Ha $y, x \in D_f = D_{f^*}$, akkor a (7) formula szerint

$$\begin{aligned}\langle y, \hat{P}(f)x\rangle = \int_S f d\mu_{y,x} = &\left(\int_S f^* d\mu_{x,y}\right)^* = \langle x, \hat{P}(f^*)y\rangle^* = \\ = &\langle \hat{P}(f^*)y, x\rangle,\end{aligned}$$

ami azt mondja, hogy $\hat{P}(f^*) \subset \hat{P}(f)^*$.
Korlátos f-re egyenlőség áll, mert ekkor $D_f = \mathbf{H}$.

Az (6) E_n halmazokkal $f\chi_{E_n}$ korlátos, tehát $\hat{P}(f^*\chi_{E_n}) = \hat{P}(f\chi_{E_n})^*$, amiből $\hat{P}(f^*)P(E_n) = \left(\hat{P}(f)P(E_n)\right)^* \supset P(E_n)\hat{P}(f)^*$ következik. Ha tehát x a $\hat{P}(f)^*$ értelmezési tartományának eleme, akkor $\lim_n \hat{P}(f^*)P(E_n)x == \lim_n P(E_n)\hat{P}(f)^*x = \hat{P}(f)^*x$. Ezek után azt kell csak megmutatnunk, hogy x benne van $\hat{P}(f^*)$ értelmezési tartományában, és a bal oldal határtéke $\hat{P}(f^*)x$. Íme: létezik $\lim_n \|\hat{P}(f^*)P(E_n)x\|^2 = \int_S |f|^2\chi_{E_n} d\mu_{x,x}$; az integrandus monoton növő sorozat, ezért B. Levi tétele szerint a határérték-függvény μ-integrálható , azaz $x \in D_f = D_{f^*}$; továbbá $\|\hat{P}(f^*)x - \hat{P}(f^*)P(E_n)x\|^2 = \|\hat{P}(f^*)(I - P(E_n))x\|^2 = \int_S |f|^2(1 - \chi_{E_n})d\mu_{x,x}$, és Lebesgue tétele szerint a jobb oldal a nullához tart, miközben n tart a végtelenhez. $\square$

Példa

Legyenek P_n $(n \in \mathbb{N})$ páronként egymásra merőleges projektorok úgy, hogy $(s)\sum_n P_n = I$, továbbá $\lambda_n \in \mathbb{C}$, és

$$P : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(\mathbf{H}), \qquad E \mapsto (s) \sum_{\{n|\lambda_n \in E\}} P_n.$$

Ekkor $\mu_{y,x} = \sum_n \langle y, P_n x\rangle \delta_{\lambda_n}$ (Dirac-delták) és $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ esetén $x \in D_f$ pontosan akkor, ha $\sum_n |f(\lambda_n)|^2 \|P_n x\|^2 \leq \infty$, és ekkor $\hat{P}(f)x = \sum_n f(\lambda_n)P_n x$.

Ennek egyszerűsített változata, ha $\lambda_n = n$, és a természetes számok halmazát önmagában tekintjük, nem a komplex számok részhalmazának, továbbá $\mathbf{H} = l^2$ és P_n az $x \in l^2$ sorozathoz azt a sorozatot rendeli, amelynek az n-ik tagja x_n, az összes többi taja nulla; ekkor $\mu_{y,x} = \sum_n y_n^* x_n \delta_n$ (Dirac-delta) és $x \in D_f$ pontosan akkor, ha $\sum_n |f(n)|^2 |x_n^2| \leq \infty$; ekkor $\hat{P}(f)x = \big(f(n)x_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.4. A projektormérték szerinti integrálás algebrai tulajdonságai

15. Állítás. *Legyen f és g mérhető függvény. Ekkor*

(i) $\hat{P}(cf) = c\hat{P}(f) \qquad (0 \neq c \in \mathbb{C})$,

(ii) $\hat{P}(f+g) \supset \hat{P}(f) + \hat{P}(g)$,

(iii) $\hat{P}(fg) \supset \hat{P}(f)\hat{P}(g)$, *és* $\mathrm{Dom}\big(\hat{P}(f)\hat{P}(g)\big) = \mathrm{Dom}\big(\hat{P}(fg)\big) \cap \mathrm{Dom}\big(\hat{P}(g)\big)$.

Bizonyítás (i) nyilvánvaló; azért kell kizárni a nullát, mert ekkor a bal oldalon a mindenütt értelmezett nulla operátor áll, míg a jobb oldalon csak a D_f halmazon értelmezett nulla operátor.

(ii) Mivel négyzetesen integrálható függvények összege is négyzetesen integrálható, $D_f \cap D_g \subset D_{f+g}$ igaz, vagyis a jobb oldal értelmezési tartománya része a bal oldal értelmezési tartományának. Ha $x \in D_f \cap D_g$, akkor bármely y-ra

$$\langle y, \big(\hat{P}(f) + \hat{P}(g)\big)x\rangle = \int_S f d\mu_{y,x} + \int_S g d\mu_{y,x} = \int_S (f+g) d\mu_{y,x} = \langle y, \hat{P}(f+g)x\rangle.$$

(iii) Először bebizonyítjuk az értelmezési tartományokra vonatkozó állítást. Ha x a bal oldal eleme, akkor $|g|^2$ $\mu_{x,x}$-integrálható és $|f|^2$ integrálható a $\mu_{\hat{P}(g)x,\hat{P}(g)x} = |g|^2\mu_{x,x}$ mérték szerint, ami azt jelenti, hogy $|f|^2|g|^2 = |fg|^2$ $\mu_{x,x}$-integrálható , azaz x benne van a jobb odalban is. Ha viszont x a jobb oldal eleme, azaz $|fg|^2$ és $|g|^2$ is $\mu_{x,x}$-integrálható, akkor $|f|^2$ integrálhgató a

$|g|^2\mu_{x,x} = \mu_{\hat{P}(g)x,\hat{P}(g)x}$ mérték szerint, azaz x benne van a bal oldalban is. Ha $x \in \mathrm{Dom}\big(\hat{P}(f)\hat{P}(g)\big)$, akkor bármely y-ra

$$\langle y, \hat{P}(fg)x\rangle = \int_S fg d\mu_{y,x} = \int_S fd(g\mu_{y,x}) = \int_S fd\mu_{y,\hat{P}(g)x} = \langle y, \hat{P}(f)\hat{P}(g)x\rangle.$$

□

Egyszerűen adódnak az egyenlőségekre vonatkozó következő összefüggések:

- $\hat{P}(f+g) = \hat{P}(f) + \hat{P}(g)$ pontosan akkor, ha $D_{f+g} \subset D_f$ vagy $D_{f+g} \subset D_g$; speciálisan egyenlőség áll, ha $\hat{P}(f)$ vagy $\hat{P}(g)$ közül az egyik mindenütt értelmezett.
- $\hat{P}(fg) = \hat{P}(f)\hat{P}(g)$ pontosan akkor, ha $D_{fg} \subset D_g$; speciálisan egyenlőség áll, ha $\hat{P}(g)$ mindenütt értelmezett.

Megjegyezzük, hogy persze f és g sorrendje felcserélhető, ezért úgy érdemes megjegyezni az eredményünket, hogy egyenlőség áll, ha a szorzatban „második" operátor mindenütt értelmezett. Előfordulhat, hogy $\hat{P}(fg) = \hat{P}(f)\hat{P}(g)$, de $\hat{P}(fg) \neq \hat{P}(g)\hat{P}(f)$; ezt láttuk például (8)-ben.

2.5. A projektor-integrálással előállított operátorok jellemzése

16. Állítás. *Bármely f mérhető függvény esetén $\hat{P}(f)$ normális operátor, azaz*
(i) $\hat{P}(f)$ értelmezési tartománya mindenütt sűrű, és egyenlő a $\hat{P}(f)^*$ értelmezési tartományával,
(ii) $\hat{P}(f)$ zárt operátor,
(iii) $\hat{P}(f)^*\hat{P}(f) = \hat{P}(f)\hat{P}(f)^*$.

Bizonyítás (i) és (ii) egyszerű, mert $D_f = D_{f^*}$ sűrű, továbbá $\hat{P}(f) = \hat{P}(f^*)^*$, és egy adjungált operátor zárt.

(iii) sem nehéz: mivel $\mu_{x,x}$ véges mérték, $D_{|f|^2} \subset D_f$ igaz, ezért az előző eredményeink szerint $\hat{P}(f)\hat{P}(f)^* = \hat{P}(f)\hat{P}(f^*) = \hat{P}(|f|^2)$ és $\hat{P}(f)^*\hat{P}(f) = \hat{P}(f^*)\hat{P}(f) = \hat{P}(|f|^2)$. □

A zártgrafikon-tételből azonnal adódik:

17. Állítás. *$\hat{P}(f)$ akkor és csak akkor folytonos, ha $D_f = \mathbf{H}$.*

2.6. Majdnem mindenütt

Egy E mérhető halmazt P-nullának mondunk, ha $P(E) = 0$. Igen egyszerű tény, hogy a következők ekvivalensek egy mérhető halmazra:
(i) P-nulla,
(ii) $\mu_{y,x}$-nulla és egyben $|\mu_{y,x}|$-nulla minden y, x esetén,
(iii) $\mu_{x,x}$-nulla minden x esetén,
(iv) $\mu_{x,x}$-nulla minden x-re egy sűrű lineáris altérből.

Ugyanúgy, mint a mértékelméletben, bevezetjük a P-mm. fogalmát: „egy P-nulla halmaz kivételével".

18. Állítás. *Az f és g mérhető fügvényre $\hat{P}(f) = \hat{P}(g)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $f = g$ P-mm.*

Bizonyítás Ha $f = g$ P-mm., akkor az előző (iii) pont értelmében $D_f = D_g$, továbbá (ii) szerint

$$\int_S f d\mu_{y,x} = \int_S g d\mu_{y,x}$$

minden $y \in \mathbf{H}$ és $x \in D_f = D_g$ esetén.

Ha $\hat{P}(f) = \hat{P}(g)$, akkor $D_f = D_g$, és ennek minden x elemére

$$\|\hat{P}(f)x - \hat{P}(g)x\|^2 = \|(\hat{P}(f) - \hat{P}(g))x\|^2 = \|\hat{P}(f-g)x\|^2 = \int_S |f-g|^2 \mu_{x,x},$$

amiből az előbbi (iv) alapján $f = g$ P-mm. □

Megjegyezzük, $\hat{P}(f) = \hat{P}(g)$ helyett elég megkövetelni, hogy $\hat{P}(f)x = \hat{P}(g)x$ teljesüljön minden $x \in D_f \cap D_g$ esetén.

Az előző és az itteni eredményeink alapján nyilvávnaló:

19. Állítás. *A $\hat{P}(f)$ operátor akkor és csak akkor*
(i) önadjungált, ha $f = f^*$ P-mm.,
(ii) unitér, ha $ff^* = 1$ azaz $|f| = 1$ P-mm.,
(iii) projektor, ha $f^2 = f$ P-mm., azaz van olyan E mérhető halmaz, hogy $f = \chi_E$ P-mm.

Az f mérhető függvényt P-mm. korlátosnak mondjuk, ha van olyan α pozitív szám, hogy $\{s \in S \mid |f(s)| > \alpha\}$ P-nulla halmaz, és ekkor

$$\|f|_\infty := \inf\big\{\alpha \mid ¶\big(\{s \in S \mid |f(s)| > \alpha\}\big) = 0\big\}.$$

Minthogy

$$\{s \in S \mid |f(s)| > \|f|_\infty\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{s \in S \mid |f(s)| > \|f|_\infty + \frac{1}{n}\}$$

és a jobb oldalon P-nulla halmazok uniója áll, a bal oldal is P-nulla.

20. Állítás. *A $\hat{P}(f)$ operátor akkor és csak akkor korlátos (másként: folytonos), ha f P-mm. korlátos, és ekkor $\|\hat{P}(f)\| = \|f|_\infty$.*

Bizonyítás Ha f P-korlátos, akkor nyivánvaló, hogy $D_f = \mathbf{H}$, továbbá

$$\left|\int_S f d\mu_{y,x}\right| \leq \int_S |f| d|\mu_{y,x}| \leq \|f|_\infty \|y\| \; \|x\|,$$

tehát $\hat{P}(f)$ korlátos és $\|\hat{P}(f)\| \leq \|f|_\infty$.

Ha $\hat{P}(f)$ korlátos, akkor $D_f = \mathbf{H}$. Legyen $\epsilon > 0$ és $E_\epsilon := \{s \in S \mid |f(s)| > \|\hat{P}(f)\| + \epsilon\}$. Ekkor minden x esetén egyrészt

$$\|\hat{P}(f\chi_{E_\epsilon})x\|^2 = \|\hat{P}(f)P(E_\epsilon)x\|^2 \leq \|\hat{P}(f)\|^2 \mu_{x,x}(E_\epsilon),$$

másrészt

$$\|\hat{P}(f\chi_{E_\epsilon})x\|^2 = \int_S |f|^2 \chi_{E_\epsilon} d\mu_{x,x} \geq \Big(\|\hat{P}(f)\| + \epsilon\Big)^2 \mu_{x,x}(E_\epsilon).$$

Ez a két egyenlőtlenség egyszerre csak úgy állhat fenn, ha $\mu_{x,x}(E_\epsilon) = 0$ minden x-re, azaz E_ϵ P-nulla; következésképpen f P-mm. korlátos és $\|f|_\infty \leq \|\hat{P}(f)\|$.

2.7. Projektormérték transzformáltjai

Legyen P mint eddig, továbbá $\mathcal{B}$ egy T részhalmazaiból álló σ-algebra és $\Phi : S \to T$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ mérhető függvény. Ekkor $P \circ \overset{-1}{\Phi} : \mathcal{B} \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ projektormérték.

21. Állítás. *Ha $h : T \to \mathbb{C}$ $\mathcal{B}$-mérhető függvény, akkor*

$$\widehat{P \circ \overset{-1}{\Phi}}(h) = \hat{P}(h \circ \Phi).$$

Bizonyítás Legyen $\nu_{y,x}$ a $P \circ \overset{-1}{\Phi}$ meghatározta komplex mérték $\mathcal{B}$-n. Nyilvánvaló, hogy $\nu_{y,x} = \mu_{y,x} \circ \overset{-1}{\phi}$.

A bal oldalon álló operátor értelmezési tartománya $\{x \mid h \in L^2(\nu_{x,x})\}$, a jobb oldalon állóé $\{x \mid h \circ \Phi \in L^2(\mu_{x,x})\}$. A helyettesítéses integrálás alapképlete,

$$\int_T |h|^2 d\left(\mu_{y,x} \circ \overset{-1}{\phi}\right) = \int_S \left(|h|^2 \circ \Phi\right) d\mu_{x,x}$$

szerint a két értelmezési tartomány megegyezik. Ezután a komplex mértékekre alkalmazva a helyettesítéses integrálás alapképletét megkapjuk az operátorok egyenlőségét. □

Tudjuk, hogy ha $U : \mathbf{H} \to \mathbf{H}'$ unitér vagy antiunitér operátor, akkor $\mathcal{A} \to \mathcal{P}(\mathbf{H}')$, $E \mapsto UP(E)U^{-1}$ projektormérték.

22. Állítás. *$\widehat{UPU^{-1}}(f) = U\hat{P}(f)U^{-1}$ ha U unitér,*
$\widehat{UPU^{-1}}(f) = U\hat{P}(f^*)U^{-1}$ ha U antiunitér.

Bizonyítás A bizonyítást antiunitérre végezzük el, unitérre hasonlóan, csak még egyszerűbben érvelhetünk.

Legyen $\nu_{y',x'}$ a UPU^{-1} meghatározta komplex mérték, $y', x' \in \mathbf{H}'$. Ekkor $\langle y', UP(E)U^{-1}x'\rangle = \langle P(E)U^{-1}x', U^{-1}y'\rangle = \langle U^{-1}y, P(E)U^{-1}x\rangle$, amiből $\nu_{y',x'} = \mu_{U^{-1}x',U^{-1}y'}$ adódik.

A bal oldalon álló operátor értelmezési tartománya $\{x' \mid f \in L^2(\nu_{x',x'})\}$ megegyezik a jobb oldalon állónak az $\{x' \mid f^* \in L^2(\mu_{U^{-1}x',U^{-1}x'})\}$ értelmezési tartományával. Továbbá

$$\begin{aligned}\langle y', \widehat{UPU^{-1}}(f)x'\rangle = \int_S f d\nu_{y',x'} = \int_S f d\mu_{U^{-1}x',U^{-1}y'} = \\ = \left(\int_S f^* d\mu_{U^{-1}y',U^{-1}x'}\right)^* = \langle U^{-1}x', \hat{P}(f)U^{-1}y'\rangle^* = \\ = \langle y', U\hat{P}(f)U^{-1}x'\rangle. \quad \square\end{aligned}$$

2.8. Spektrumok jellemzése

23. Állítás. $\mathrm{Ker}(\hat{P}(f)) = \mathrm{Ran}\big(P(\overset{-1}{f}(\{0\}))\big)$.

Bizonyítás $x \in \mathrm{Ker}(\hat{P}(f))$ pontosan akkor, ha $0 = \|\hat{P}(f)x\|^2 = \int_S |f|^2 d\mu_{x,x}$, azaz $f = 0$ $\mu_{x,x}$-mm. $x \in \mathrm{Ran}\big(P(\overset{-1}{f}(\{0\}))\big)$ pontosan akkor, ha $x = P(\overset{-1}{f}(\{0\}))x$, azaz $0 = \|P(\mathbb{C} \setminus \overset{-1}{f}(\{0\}))x\|^2 = \mu_{x,x}(\mathbb{C} \setminus \overset{-1}{f}(\{0\})$ vagyis $f = 0$ $\mu_{x,x}$-mm. □

Emlékeztetünk arra, hogy az orto-σ-homomorfizmusokra elfogadott meghatározás szerint egy $R : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ projektormértéknek $c \in \mathbb{C}$ az éles pontja, ha $R(\{s\}) \neq \mathbf{0}$; az éles pontok összességét a $\mathrm{Sharp}(R)$ jelöli.

Az előző állítást ezért úgy is megfogalmazhatjuk, hogy $\hat{P}(f)$ pontosan akkor injektív, ha $0 \notin \mathrm{Sharp}(P \circ \overset{-1}{f})$.

24. Állítás. *Ha $\hat{P}(f)$ injektív, akkor az*

$$\frac{1_0}{f}(s) := \begin{cases} \frac{1}{f(s)} & ha \quad f(s) \neq 0, \\ 0 & ha \quad f(s) = 0 \end{cases}$$

egyenlőséggel értelmezett függvénnyel $\hat{P}\left(\frac{1_0}{f}\right) = \hat{P}(f)^{-1}$.

Bizonyítás Ha $\hat{P}(f)$ injektív, akkor $P(\overset{-1}{f}(\{0\})) = 0$, tehát $f\frac{1_0}{f} = 1$ P-mm., és így

$$\hat{P}(f)\hat{P}\left(\frac{1_0}{f}\right) \subset I, \qquad \hat{P}\left(\frac{1_0}{f}\right)\hat{P}(f) \subset I,$$

továbbá az operátorok szorzatának az értelmezesi tartománya megegyezik a „hátul állónak" az értelmezési tartományával. □

Emlékeztetünk arra, hogy az orto-σ-homomorfizmusokra elfogadott meghatározás szerint egy $R : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ projektormérték tartója a

$$\mathrm{Supp}(R) := \{c \in \mathbb{C} \mid K(G) \neq \mathbf{0}, c \in G, G \text{ nyílt}\}$$

halmaz.

25. Állítás. *A $\hat{P}(f)$ operátornak akkor és csak akkor létezik mindenütt értelmezett folytonos inverze, ha $0 \notin \mathrm{Supp}(P \circ \overset{-1}{f})$.*

Bizonyítás A folytonos inverz létezése egyenértékű azzal, hogy $\hat{P}\left(\frac{1_0}{f}\right)$ folytonos, ami meg azzal, hogy $\frac{1_0}{f}$ P-mm. korlátos; ez azt jelenti, hogy van olyan $\alpha > 0$ szám, amellyel $\left|\frac{1_0}{f}\right| \leq \alpha$ P-mm., ami viszont – mivel $P(\overset{-1}{f}(\{0\}) = 0$ – azzal egyenértékű, hogy $|f| \geq \frac{1}{\alpha}$ P-mm.. Más szóval, a nullának az $\frac{1}{\alpha}$ sugarú környezete $P \circ \overset{-1}{f}$-nulla halmaz, azaz 0 nincs benne $P \circ \overset{-1}{f}$ tartójában. □

Emlékeztetünk arra, hogy egy A operátornak a λ szám a **sajátértéke**, ha $A-\lambda I$ nem injektív, és ekkor a $\mathrm{Ker}(A-\lambda I)$ altér nemnulla elemei az A-nak a λ-hoz tartozó sajátvektorai. Jelölje $\mathrm{Eig}(A)$ az A sajátértékeinek halmazát.

Továbbá a λ szám az A operátor **reguláris értéke**, ha az $A - \lambda I$ operátor
(i) injektív,
(ii) értékkészlete sűrű,
(iii) inverze folytonos;
az A **spektruma** a

$$\mathrm{Sp}(A) := \{\lambda \mid \lambda \quad \text{nem reguláris érték}\}$$

halmaz.

26. Állítás. *(i)* $\mathrm{Eig}(\hat{P}(f)) = \mathrm{Sharp}(P \circ \overset{-1}{f})$*, és a* λ *sajátértékhez tartozó saját-altér prjektora* $(P \circ \overset{-1}{f})(\{\lambda\})$*,*

(ii) $\mathrm{Sp}(\hat{P}(f)) = \mathrm{Supp}(P \circ \overset{-1}{f})$.

Bizonyítás Fogalmazzuk át az előzőket a $\hat{P}(f) - \lambda I = \hat{P}(f - \lambda)$ operátorra, figyelembe véve, hogy $(f \overset{-1}{-} \lambda)(\{0\}) = \overset{-1}{f}(\{\lambda\})$.

Tehát $\lambda \in \mathrm{Eig}(\hat{P}(f))$ pontosan akkor, ha $\hat{P}(f - \lambda)$ nem injektív, azaz $P(\overset{-1}{f}(\{\lambda\}) \neq 0$, más szóval $\lambda \in \mathrm{Sharp}(P \circ \overset{-1}{f})$.

Továbbá $\lambda \notin \mathrm{Sp}(\hat{P}(f))$ pontosan akkor, ha $\hat{P}(f - \lambda)$-nak mindenütt értelmezett folytonos inverze van, azaz 0 nincs benne $P \circ (f \overset{-1}{-} \lambda)$ tartójában, vagyis $\lambda \notin \mathrm{Supp}(P \circ \overset{-1}{f})$. □

Egy kicsit többet is tudunk mondani a spektrumról, ha a projektormérték Borel-féle halmazalgebrán van értelmezve.

27. Állítás. *Legyen* $P : \mathcal{B}(V) \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ *projektormérték és* $f : V \to \mathbb{C}$ *folytonos függvény. Ekkor* $\mathrm{Sp}(\hat{P}(f)) = \overline{f[\mathrm{Supp}(P)]}$.

Bizonyítás A λ komplex szám akkor és csak akkor nincs benne $\hat{P}(f)$ spektrumában, ha van olyan G nyílt halmaz, $\lambda \in G$, hogy $P(\overset{-1}{f}(G)) = 0$. Mivel f folytonos, $\overset{-1}{f}(G)$ is nyílt, ezért $\overset{-1}{f}(G) \cap \mathrm{Supp}(P) = \emptyset$, ami azzal egyenértékű, hogy $G \cap f[G] = \emptyset$, és ez pontosan akkor teljesül, ha λ nincs az $f[G]$ lezártjában.

28. Állítás. *Legyen* $P : \mathcal{B}(V) \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ *projektormérték, és* $f : V \to \mathbb{C}$ *P-mm. korlátos, folytons függvény. Ekkor* $\|f|_\infty = \sup\{|f(v)| \mid v \in \mathrm{Supp}(P)\}$.

Bizonyítás A $\{v \mid |f(v)| > \|f|_\infty\}$ halmaz nyílt, és a 20 állítás előtti megjegyzés szerint P-nulla halmaz, tehát diszjunkt P tartójától, így $\sup\{|f(v)| \mid v \in \mathrm{Supp}(P)\} \leq \|f|_\infty$. Tehát minden $v \in \mathrm{Supp}(P)$ esetén $|f(v)| \leq \|f|_\infty$.

Minthogy $P(\mathrm{Supp}(P)) = I$, tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén a $\{v \mid |f(v)| > \|f|_\infty - \epsilon\}$ nyílt halmaz nem P-nulla, ezért a metszete a P tartójáva nem üres. Így van olyan $v \in \mathrm{Supp}(P)$, hogy $|f(v)| > \|f|_\infty - \epsilon$, amiből $\sup\{|f(v)| \mid v \in \mathrm{Supp}(P)\} \geq \|f|_\infty$. □

Annyit kell megjegyezni az előbbi bizonyításhoz, hogy $P(\mathrm{Supp}(P)) = I$ azért áll fenn, mert a spektrumban nem levő bármely pontnak van P-nulla nyílt környezete, és a spektrum komplementere előáll megszámlálható sok ilyen nyílt környezet uniójaként, így $P\left(\mathrm{Supp}(P)^{\complement}\right) = 0$.

Most visszatérhetünk $P : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ projektormérték, és $f : S \to \mathbb{C}$ mérhető függvényre. Ekkor a $P \circ \overset{-1}{f} : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ projektormértékre alkalmazhatjuk az előző eredményeinket, és a $\hat{P}(f) = \widehat{P \circ \overset{-1}{f}}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$ összefüggés alapján a következőket mondhatjuk.

29. Állítás. *(i)* $\hat{P}(f)$ *akkor és csak akkor folytonos, ha a spektruma kompakt,*

(ii) ha $\hat{P}(f)$ *folytonos, akkor* $\|\hat{P}(f)\| = \max\{\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(\hat{P}(f))\}$.

Bizonyítás $\hat{P}(f)$ akkor és csak akkor folytonos, ha f P-mm. korlátos, azaz létezik olyan $\alpha > 0$, hogy $P(\{s \mid |f(s)| > \alpha\} = 0$, más szóval $P\left(\overset{-1}{f}\left(S \setminus G_\alpha(0)\right)\right) =$

0, amiből $\mathrm{Supp}(P \circ \overset{-1}{f} \subset G_\alpha(o)$, tehát (i) igaz, és ebből, valamint a korábbiakból már egyszerűen következik (ii).

2.9. Karakterisztikus projektormértékek

Legyen adott egy μ (közönséges) mérték az $\mathcal{A}$ σ-algebrán.

$L^2(\mu)$-ben az $f : S \to \mathbb{C}$ mérhető függvénnyel való szorzás M_f operátorát a következőképpen definiáljuk:

$$\mathrm{Dom}(M_f) := \{\varphi \in L^2(\mu) \mid f\varphi \in L^2(\mu)\}, \qquad M_f\varphi := f\varphi.$$

A $K : \mathcal{A} \to \mathcal{P}\big(L^2(\mu)\big)$, $E \mapsto M_{\chi_E}$ projektormértéket az $L^2(\mu)$ **karakterisztikus projektormértékének** hívjuk.

Az első nyilvánvaló megállapításunk, hogy egy E halmaz akkor és csak akkor K-nulla, ha μ-nulla.

A korábbi jelöléssel összehangban

$$\mu_{\psi,\varphi}(E) := \langle \psi, K(E)\varphi \rangle = \int_S \psi^* \chi_E \varphi d\mu.$$

Minthogy a fenti integrált átírhatjuk $\int_S \chi_E d(\psi^*\varphi\mu)$ alakba, megállapíthatjuk, hogy $\mu_{\psi,\varphi} = \psi^*\varphi\mu$.

30. Állítás. $\hat{K}(f) = M_f$.

Bizonyítás A két oldal értelmezési tartománya egyenlő:

$$\mathrm{Dom}(\hat{K}(f)) = \big\{\varphi \mid f \in L^2(\mu_{\varphi,\varphi})\big\} = \big\{\varphi \mid f \in L^2(|\varphi|^2\mu\big\} = \mathrm{Dom}(M_f),$$

tehát ha $\psi \in L^2(\mu)$ és φ a közös értelemzési tartomány eleme, akkor

$$\langle \psi, \hat{K}(f)\varphi \rangle = \int_S f d\mu_{\psi,\varphi} = \int_S f\psi^*\varphi d\mu = \langle \psi, M_f\varphi \rangle.$$

□

Ezek után, eddigi ismerteink birtokában, állíthatjuk az M_f operátorról:
– normális, és $M_f^* = M_{f^*}$,
– akkor és csak akkor önadjungált, ha $f^* = f$ μ-mm.,
– akkor és csak akkor unitér, ha $f^*f = 1$ azaz $|f| = 1$ μ-mm.,
– akkor és csak akkor projektor, ha $f^2 = f$ μ-mm., azaz van olyan E mérhető halmaz, hogy $f = \chi_E$ μ-mm.,
– akkor és csak akkor korlátos, ha f μ-mm. korlátos,
– M_f spektruma a $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mu(\overset{-1}{f}(G) \neq 0,\ G$ nyílt, $\lambda \in G\}$ halmaz,
– M_f sajátértékeinek a halmaza $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mu(\overset{-1}{f}(\{\lambda\}) \neq 0\}$.

Speciálisan, ha μ a valós egyenes Lebesgue-mértéke és f folytonos függvény, akkor M_f spektruma az f értékkészlete, sajátértéke pedig mindazon szám, amely az f konstans értéke valamely intervallumon.

A 2.3 pont végén példaként szereplő projektormérték esetén
– $\mathrm{Eig}(\hat{P}(f)) = \{f(\lambda_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$,
– $\mathrm{Sp}(\hat{P}(f)) = \overline{\mathrm{Eig}(\hat{P}(f))}$.

Legyen most V véges dimenziós vektortér, azon adott egy $\bullet$-tal jelölt skaláris szorzás (azaz V véges dimenziós Hilbert-tér). $L^2(\mu, V)$ azoknak a $\varphi : S \to V$ függvényeknek az összessége, amelyekre $\varphi \bullet \varphi$ μ-ih.

Itt formailag ugyanúgy értelmezhető az $f : S \to \mathbb{C}$ függvénnyel való szorzás M_f operátora, valamint a K karakterisztikus projektormérték. $\mu_{\psi,\varphi} = \psi \bullet \varphi\mu$ teljesül, és érvényben marad a $\hat{K}(f) = M_f$ egyenlőség, valamint az M_f-re tett állításaink.

Tekintsük a következő speciális példákat!

1. Legyen N természetes szám és $S := \{1, 2, \cdot, N\}$, $\mathcal{A}$ az S összes részhalmaza, és μ a számláló mérték (azaz $\mu(\{i\}) = 1$ $(i = 1, \dots, N)$.

Egy $\varphi : S \to \mathbb{C}$, $i \mapsto \varphi(i)$ függvény természetszerűleg a $\mathbb{C}^N$ elemének tekinthető. Minden ilyen függvény négyzetesen integrálható μ szerint, ezért $L^2(\mu) = \mathbb{C}^N$ a szokásos skaláris szorzattal.

Az $f = (f(i))_{i=1,\dots,N} : S \to \mathbb{C}$ függvénnyel való szorzás operátora lineáris leképezés $\mathbb{C}^N$-en, azaz a szokásos felfogásban egy $N \times N$-es mátrix. Minthogy definíció szerint $(f\varphi)(i) = f(i)\varphi(i)$, látjuk, hogy M_f diagonális mátrix, a diagonális elemei az f komponensei.

A K karakterisztikus projektormértékre $K(\{i\})$ az a mátrix, amelynek ii-ik tagja 1, a többi nulla.

2. Legyen n természetes szám és $S := \{1, 2, \cdot, n\}$, $\mathcal{A}$ az S összes részhalmaza, és μ a számláló mérték; legyen továbbá m is természetes szám és $V := \mathbb{C}^m$.

Egy $\varphi : S \to \mathbb{C}^m$, $i \mapsto \varphi(i)$ függvény természetszerűleg a $(\mathbb{C}^m)^n$ elemének tekinthető. Minden ilyen függvény négyzetesen integrálható μ szerint, ezért $L^2(\mu, V) = (\mathbb{C}^m)^n \equiv \mathbb{C}^N$ a szokásos skaláris szorzattal, ahol $N := mn$.

Az $f = (f(i))_{i=1,\dots,N} : S \to \mathbb{C}$ függvénnyel való szorzás operátora lineáris leképezés $\mathbb{C}^N$-en, azaz a szokásos felfogásban egy $N \times N$-es mátrix. Minthogy definíció szerint $(f\varphi)(i) = f(i)\varphi(i)$, látjuk, hogy M_f diagonális $N \times N$-es mátrix, amely n darab $m \times m$-es blokkra tagolható, és az i-ik blokk az $m \times m$-es egységmátrix $f(i)$-szerese.

A K karakterisztikus projektormértékre $K(\{i\})$ az a mátrix, amelynek i-ik blokkja az $m \times m$-es egységmátrix, minden más tagja nulla.

3. Legyen S mint az előző példában, és legyen adott minden $i = 1, 2, \cdot, n$ esetén egy m_i természetes szám, $N := m_1 + \cdots + m_n$, és tekintsük $\mathbf{H} := \mathbb{C}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{C}^{m_n} \equiv \mathbb{C}^N$ Hilbert-teret a szokásos skaláris szorzattal.

Adjuk meg a $P : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ projektormértéket úgy, hogy $P(\{i\})$ legyen az a mátrix, amelynek a diagonálisában a „megfelelő helyen” az $m_i \times m_i$-es egységmátrix áll, minden más tagja nulla. Ez nem karakterisztikus projektormérték, csak valami hasonló.

Az $f = (f(i))_{i=1,\dots,n} : S \to \mathbb{C}$ függvénnyel való szorzás operátorának itt nincs természetes értelme, de integrálhatjuk f-et P szerint. $\hat{P}(f)$ az a diagonális $N \times N$-es mátrix, amely $m_1 \times m_1$-es, $\dots$ $m_n \times m_n$-es blokkokra tagolható, és az i-ik blokk az $m_i \times m_i$-es egységmátrix $f(i)$-szerese.

2.10. Felcserélési tulajdonságok

Tudjuk, hogy a P projektormérték értékkészletében felcserélhető projektorok vannak.

Azt mondjuk hogy egy A korlátos operátor **felcserélhető** P-vel, ha $AP(E) = P(E)A$ minden E esetén.

A P_1 és P_2 projektormértéket **felcserélhetőnek** mondjuk, ha P_1 értékészletében levő minden projektor felcserélhető a P_2 értékkészletében levő minden projektorral.

31. Állítás. *Az A korlátos operátor pontosan akkor cserélhető fel P-vel, ha $\mu_{y,Ax} = \mu_{A^*y,x}$ minden y, x esetén.*

Bizonyítás Ha A felcseréálható P-vel, akkor $\mu_{y,Ax}(E) = \langle y, P(E)Ax\rangle = \langle y, AP(E)x\rangle = \langle A^*y, P(E)x\rangle = \mu_{A^*y,x}(E)$, tehát igaz a mértékekre vonatkozó egyenlőség.

Ha viszont igaz a mértékekre vonatkozó egyenlőség, akkor az $\langle y, P(E)Ax\rangle = \langle A^*y, P(E)x\rangle = \langle y, AP(E)x\rangle$ összefüggésre jutunk minden y, x esetén, azaz A és P felcserélhető. □

Nem korlátos operátorok felcserélhetőségét általában nem definiáljuk. Viszont egy A korlátos és egy L operátort **felcserélhetőnek** mondunk, ha $AL \subset LA$; hogy jól értsük: ehhez az kell, hogy az L értelmezési tartománya legyen invaráns az A-ra, és ezen a tartományon a két oldal megegyezzék (a jobb oldal esetleg lehet bővebben értelmezve).

32. Állítás. *Az A korlátos operátor pontosan akkor cserélhető fel a P projektormértékkel, ha felcserélhető $\hat{P}(f)$-fel minden f mérhető függvényre.*

Bizonyítás Ha minden $\hat{P}(f)$-fel felcserélhető, akkor f-et karakterisztikus függvénynek véve láthatjuk, hogy A és P felcserélhető.

Ha A és P felcserélhető, akkor $\|P(E)Ax\|^2 = \|AP(E)x\|^2 \leq \|A\|^2\|P(E)x\|^2$, amiből $\mu_{Ax,Ax} \leq \|A\|^2\mu_{x,x}$, tehát ha $x \in D_f$, akkor $Ax \in D_f$. Ezután $x \in D_f$ és $y \in \mathbf{H}$ esetén

$$\begin{aligned}\langle y, \hat{P}(f)Ax\rangle &= \int_S f d\mu_{y,Ax} = \int_S f d\mu_{A^*y,x} = \langle A^*y, \hat{P}(f)x\rangle = \\ &= \langle y, A\hat{P}(f)x\rangle,\end{aligned}$$

amiből $A\hat{P}(f) \subset \hat{P}(f)A$.

2.11. Komplex projektormértékek

Mivel bármely P projektormérték és f mérhető függvény esetén $P \circ \overset{-1}{f} : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ és $\hat{P}(f) = \widehat{P \circ \overset{-1}{f}}(\mathrm{id}_\mathbb{C})$, most azt vizsgáljuk, milyen kapcsolat van az $\mathrm{id}_\mathbb{C}$-nek különböző komplex projektormértékekek szerint integrálja között.

A következőkhöz két fontos tételt kell felidéznünk.

Az egyik a Stone–Weierstrass-féle approximációs tétel, amely azt mondja, hogy az $\{1, \mathrm{id}_\mathbb{C}, \mathrm{id}_\mathbb{C}^*\}$ függvényrendszer által generált komplex algebra sűrű lineáris altere a komplex sík bármely K kompakt részhalmazán értelmezett folytonos függvények terének a maximum normával ellátott $C(K)$ Banach-terében. A szóban forgó komplex algebra elemei

$$p := \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} c_{ik}\mathrm{id}_\mathbb{C}^i(\mathrm{id}_\mathbb{C}^*)^k$$

alakú „dupla-polinomok".

A másik a Riesz-féle reprezentációs tétel, amely szerint $C(K)$ duálisa (vagyis a $C(K) \to \mathbb{C}$ folytonos lineáris funkcionálok tere) a K Borel-halmazain adott komplex mértékek összessége; más szóval, bármely folytonos lineáris funkcionál egy egyértelműen meghatározott komplex mérték szerinti integrálással adható meg.

33. Állítás. *Az A korlátos operátor akkor és csak akkor cserélhető fel a $P : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ projektormértékkel, ha felcserélhető $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$-vel és $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})^*$-vel*

Bizonyítás Ha A felcserélhető P-vel, akkor felcserélhető minden $\hat{P}(f)$-fel, így a szóban forgó két operátorral is.

Legyen A felcserélhető $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$-vel és $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})^* = \hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^*)$-gal; természetesen felcseréhető $\hat{P}(1) = I$-vel is.

1. Tegyük fel először, hogy P tartója K a kompakt halmaz. Ekkor $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$ korlátos operátor, ezért a projektormérték szerinti integrálás linearitása és szorzattartása miatt a szóban forgó dupla-polinomokra

$$\hat{P}(p) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} c_{ik}\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})^i \hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^*)^k,$$

és A felcserélhető $\hat{P}(p)$-vel. Tehát $\langle y, \hat{P}(p)Ax\rangle = \langle y, A\hat{P}(p)x\rangle = \langle A^*y, \hat{P}(p)x\rangle$, azaz

$$\int p\ d\mu_{A^*y,x} = \int p\ d\mu_{y,Ax}$$

minden p dupla-polinomra és a Hilbert-tér y és x elemére. A Stone–Weierstrass-tétel és a Riesz-reprezentációs tétel szerint ez azt jelenti, hogy $\mu_{A^*y,x} = \mu_{y,Ax}$ minden y, x esetén, amiből az előző alfejezet állításából következik A és P felcserélhetősége.

2. Legyen most P tetszőleges komplex projektormérték. Vegyük az $E_n := \{c \in \mathbb{C} \mid |c| \leq n\}$ halmazokat. Az $\mathbf{M}_n := \mathrm{Ran}(P(E_n))$ zárt lineáris altér invariáns minden $P(E)$ projektorra, mert ezek felcserélhetők $P(E_n)$-nel. Továbbá $P(E_n)\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}) \subset P(E_n)\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$, tehát $\mathbf{M}_n$ ivariáns $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$-re is.

A

$$P_n : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(\mathbf{M}_n), \qquad E \mapsto P(E)|_{\mathbf{M}_n} \tag{9}$$

meghatározással nyilvánvalóan projektormértéket értelmeztünk, amelynek a tartója az E_n kompakt halmaz.

A projektormérték szerinti integrálás definíciója alapján azonnal adódik, hogy $\hat{P}_n(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}) = \hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})|_{\mathbf{M}_n}$.

Vezessük be az $A_n := P(E_n)A|_{\mathbf{M}_n} : \mathbf{M}_n \to \mathbf{M} : n$ operátorokat. Az $A\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}) \subset \hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})A$ felcserélési összefüggésből

$$P(E_n)A\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})|_{\mathbf{M}_n} \subset P(E_n)\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})A|_{\mathbf{M}_n} \subset \hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})P(E_n)A|_{\mathbf{M}_n},$$

addik, és egyrészt a $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})[\mathbf{M}_n] \subset \mathbf{M}_n$ invariancia miatt, másrészt amiatt, hogy $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})P(E_n)$ kifejezésben $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$-nek csak az $\mathbf{M}_n$-en felvett értékei szerepelnek, átírhatjuk az eredményünket $P(E_n)A|_{\mathbf{M}_n}\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})|_{\mathbf{M}_n} \subset \hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})|_{\mathbf{M}_n}P(E_n)A|_{\mathbf{M}_n}$ alakba, azaz

$$A_n\hat{P}_n(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}) = \hat{P}_n(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})A_n;$$

a tartalmazás helyett valójában egyenlőség áll, hiszen az $\mathbf{M}_n$-en mindenütt értelmezett operátorokról van szó. Ugyanígy jutunk arra is, hogy

$$A_n\hat{P}_n(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^*) = \hat{P}_n(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^*)A_n.$$

Az 1. pont szerint tehát minden n esetén An felcserélhető a P_n projektormértékkel, vagyis $A_nP_n(E) = P_n(E)A_n =$ minden E-re. Ne feledjük, itt minden operátor csak az $\mathbf{M}_n$ altéren van értelmezve. Természetes módon kiterjeszthetjük őket az egész Hilbert-térre a $P(E_n)$-nel való jobbról szorzással, és így jutunk arra, hogy

$$P(E_n)AP(E)P(E_n) = P(E)P(E_n)AP(E_n).$$

Minthogy $(s)\lim_n P(E_n) = I$, határértékben megkapjuk a kívánt $AP(E) = P(E)A$ összefüggést.

34. Állítás. *Legyen P és Q olyan komplex projektormérték, hogy $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}) = \hat{Q}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$; ekkor $P = Q$.*

Bizonyítás Korábbi eredményink szerint $\mathrm{Sp}(\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})) = \mathrm{Supp}(P)$, ezért P és Q tartója megegyezik.

1. Tegyük fel először, hogy a projektormértékek tartója a K kompakt halmaz. Ekkor $\hat{P}(1) = 1 = \hat{Q}(1)$ és $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^*) = \hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})^* = \hat{Q}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})^* = \hat{Q}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^*)$; a projektormérték szerinti integrálás linearitása és szorzatartása miatt ezért $\hat{P}(p) = \hat{Q}(p)$ minden az $\{1, \mathrm{id}_{\mathbb{C}}, \mathrm{id}_{\mathbb{C}}^*\}$ függvényrendszer generálta komplex algebrában levő p-re. Értelemszerű jelöléssel tehát minden $y, x \in \mathbf{H}$ esetén

$$\int_K p\ d\mu_{y,x}^P = \int_K p\ d\mu_{y,x}^Q.$$

A Stone–Weierstrass-tétel és a Riesz-tétel szerint ez azt jelenti, hogy a $\mu_{y,x}^P$ és a $\mu_{y,x}^Q$ mértékek leszűkítése K részhalmazaira megegyezik, ami maga után vonja, hogy $P = Q$.

2. Legyen most P és Q tetszőleges. Vegyük az előbbi állításban szereplő E_n halmazokat. $P(E_n)$ felcserélhető $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$-vel és $\hat{P}(ic)^* = \hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^*)$-gal, de $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}) = \hat{Q}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$, ezért az előbbi állítás szerint a kolrátos $P(E_n)$ operátor felcserélhető a Q projektormértékkel. Ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{M}_n := \mathrm{Ran}(P(E_n))$ zárt lineáris altér invariáns minden $Q(E)$ projektorra.

Vezessük be a (9) szerinti P_n projektormérték mellé még a

$$Q_n : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(\mathbf{M}_n), \qquad E \mapsto Q(E)|_{\mathbf{M}_n}$$

projektormértéket is; ennek a tartója az E_n kompakt halmaz.

A projektormérték szerinti integrálás definíciója alapján azonnal adódik, hogy

$$\hat{P}_n(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}) = \hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})|_{\mathbf{M}_n} = \hat{Q}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})|_{\mathbf{M}_n} = \hat{Q}_n(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}).$$

Az 1. pont szerint így $P_n = Q_n$ minden n-re; ismét kiterjesztve a projektorokat az egész Hilbert-térre, a $P(E)P(E_n) = Q(E)P(E_n)$ összefüggésre jutunk, emyleből határértékben megkapjuk a kívánt $P = Q$ eredményt.

35. Állítás. *A P komplex projektormértékre $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}) = \hat{P}(\mathrm{re}) + i\hat{P}(\mathrm{im})$, és hasonlóan $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})^* = \hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^*) = \hat{P}(\mathrm{re}) - i\hat{P}(\mathrm{im})$.*

Bizonyítás Azt tudjuk, hogy $\hat{P}(\mathrm{re}) + i\hat{P}(\mathrm{im}) \subset \hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$. Ha $|\mathrm{id}_{\mathbb{C}}|^2 = \mathrm{re}^2 + \mathrm{im}^2$ $\mu_{x,x}$-integrálható, akkor re^2 és im^2 is $\mu_{x,x}$-integrálható, vagyis $\mathrm{Dom}(\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})) \subset \mathrm{Dom}(\hat{P}(\mathrm{re})) \cap \mathrm{Dom}(\hat{P}(\mathrm{im}))$. $\square$

2.12. Ciklikus projektormértékek

1. Definíció. *Legyen $P\mathcal{A} \to \mathbf{H}$ projektormérték. P-nek a $\mathbf{H}$ Hilbert-tér x vektorához tartozó* **ciklikus altere** *a $\{P(E)x \mid E \in \mathcal{A}\}$ halmaz generálta zárt lineáris altér. A projektormérték* **ciklikus**, *ha van olyan x úgynevezett ciklikus vektor, hogy a hozzá tartozó ciklikus altér $\mathbf{H}$.*

36. Állítás. *Ha μ σ-véges mérték, akkor $L^2(\mu)$ karakterisztikus projektormértéke ciklikus.*

Bizonyítás A σ-végesség azt jelenti, hogy vannak E_n ($n \in \mathbb{N}$) páronként diszjunkt, véges mértékű halmazok, amelyek uniója az alaphalmaz. Zárjuk ki a $\mu = 0$ triviális esetet; ekkor feltehető, hogy $\mu(E_n) > 0$. A

$$\varphi := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n\sqrt{\mu(E_n)}} \chi_{E_n}$$

függvény a karakterisztikus projektormérték ciklikus vektora, hiszen a $K(E)\varphi$ ($E \in \mathcal{A}$) alakú vektorok lineáris kombinációival minden lépcsős függvény előállítható.

Persze, ha μ véges, akkor a $\varphi = 1$ (konstans) függvény is ciklikus vektor. □

A konkrét példa mutatja, hogy a ciklikus vektor általában messze nem egyértelmű.

A fenti eredménnyel ellentétben, ha V legalább két dimenziós Hilbert-tér, akkor $L^2(\mu, V)$ karakterisztikus projektormértéke nem ciklikus. Legyen ugyanis $\varphi \in L^2(\mu, V)$. Ekkor minden $s \in S$ esetén van olyan e_s egységvektor V-ben, amely merőleges $\varphi(s)$-re. Legyen $0 \neq f \in L^2(\mu)$; ekkor $s \mapsto f(s)e_s$, ha mérhető, az $L^2(\mu, V)$ nemnulla eleme, amely ortogonális minden $K(E)\varphi$-re. Az előbbi „ha"-ra vonatkozó nem triviális eredmény: mindig választhatók úgy az egységvektorok, hogy a mérhetőség teljesüljön.

Ha a P projektormértéknek s éles pontja, azaz $P\{s\}) \neq 0$, és $P(\{s\})$ értékkészletének dimenziója legalább 2, akkor P nem ciklikus. Ugyanis ekkor bármely $x \in \mathbf{H}$ esetén van olyan $0 \neq y \in \mathbf{H}$ úgy, hogy $y = P(\{s\})y$ és $\langle y, P(\{s\})x\rangle = 0$. ez az y ortogonális minden $P(E)x$-re, mert az E mérhető hamaz esetén $P(\{s\})P(E)$ nullával egyenlő, ha $s \notin E$ és $P(\{s\})$-sel, ha $s \in E$, és így $\langle y, P(E)x\rangle = \langle P(\{s\})y, P(E)x\rangle = \langle y, P(\{s\})P(E)x\rangle = 0$.

A 2.9 pont 1. példájában szereplő projektormérték ciklkus, a mási kettő nem ciklikus.

37. Állítás. *Legyen P ciklikus projektormérték, x egy ciklukus vektora. Ekkor*

$$U : L^2(\mu) \to \mathbf{H}, \qquad \varphi \mapsto \hat{P}(\varphi)x$$

unitér leképezés, és $U^{-1}P(\cdot)$ az $L^2(\mu)$ karakterisztikus projektormértéke.

Bizonyítás Az U linearitása a (15) állítás első két pontjából, izometrikus volta opedig a (13) állításból következik; továbbá U a $\{\chi_E \mid E \in \mathcal{A}\}$ generáló halmazt a $\{P(E)x \mid E \in \mathcal{A}\}$ generáló halmazra képezi; ezekből már nyilvánvaló, hogy U unitér.

38. Állítás. *Ha P ciklikus projektormérték, U az előbbi állításban szereplő unitér leképezés, akkor $U^{-1}P(\cdot)U$ az $L^2(\mu)$ karakterisztikus projektormértéke.*

Továbbá $P(E)U\varphi = P(E)\hat{P}(\varphi)x = \hat{P}(\chi_E\varphi)x = U\chi_E\varphi$, azaz $U^{-1}P(E)U = M_{\chi_E}$, amit bizonyatani akartunk.

39. Állítás. *Legyen P ciklikus projektormérték; az A folytonos lineáris operátor pontosan akkor cserélhető fel a projektormértékkel, ha van olyan f mérhető függvény, hogy $A = \hat{P}(f)$.*

Bizonyítás A és P felcserélhetősége azt jelenti, hogy $AP(E) = P(E)A$ minden E mérhető halmazra.

Ha $A = \hat{P}(f)$, akkor korábbi eredményeink alapján A felcserélhető minden $P(E)$-vel (ehhez nem is kell a ciklikusság).

Tegyük fel, hogy A felcserélhető P-vel. Legyen x a projektormérték ciklikus vektora. Ekkor az előző állításunk szerint van olyan f függvény, hogy $Ax = \hat{P}(f)x$ (f ez előzőekben a φ nevet viselte). Minthogy $P(E)\hat{P}(f) \subset \hat{P}(f)P(E)$ minden E esetén, $AP(E)x = P(E)Ax = P(E)\hat{P}(f)x = \hat{P}(f)P(E)x$, amiből az operátorok linearitása folytán, A megegyezik $\hat{P}(f)$-fel a $\{P(E)x \mid E \in \mathcal{A}\}$ generálta sűrű lineáris altéren. Mivel A folytonos és $\hat{P}(f)$ zárt, ebből az következik, hogy $A = \hat{P}(f)$.

2.13. Ciklikus projektormértékek direkt összege

Láttuk, hogy a ciklikus projektormértékek igen egyszerűek, unitér ekvivalencia erejéig karakterisztikus projektormértékek. Most az mutatjuk meg, hogy minden projektormérték felépíthető ciklikusokból.

Először megemlítjük, hogy ha I tetszőleges (index)halmaz, a $\mathbf{H}_i$ $(i \in \mathrm{I})$ Hilbert-terek direkt összegeként a

$$\bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathbf{H}_i := \left\{ x := (x_i)_{i\in\mathrm{I}} \in \times \mathbf{H}_i \mid \sum_{i\in\mathrm{I}} \|x_i\| < \infty \right\}$$

vektorteret értjük az

$$\langle y, x\rangle := \sum_{i\in\mathrm{I}} \langle y_i, x_i\rangle_i$$

skaláris szorzattal.

40. Állítás. *Legyen $P\mathcal{A} \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ projektormérték. Ekkor $\mathbf{H}$ előáll a P ciklikus altereinek direkt összegeként.*

Bizonyítás Legyen egy $0 \neq x_1 \in \mathbf{H}$ által generált ciklikus altér $\mathbf{M}_1$. Ha $\mathbf{M}_1 = \mathbf{H}$, akkor igaz az állítás. Ha nem, legyen egy $0 \neq x_2 \perp \mathbf{M}_1$ által generált ciklikus altér $\mathbf{M}_2$. M_1 és $\mathbf{M}_2$ ortogonális egymásra, hiszen minden $E, F \in \mathcal{A}$ esetén $\langle P(E)x_2, P(F)x_1\rangle = \langle x_2, P(E)P(F)x_1\rangle = \langle x_2, P(E \cap F)x_1\rangle = 0$. Ha $\mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2 = \mathbf{H}$, akkor igaz az állítás. Ha nem, ismét találunk egy ciklikus alteret, amely ortogonális $\mathbf{M}_1$-re és $\mathbf{M}_2$-re; és így tovább.

Eddig tehát beláttuk, hogy léteznek páronként ortogonális $(\mathbf{M}_j)_{j\in\mathrm{J}}$ ciklikus alterek valamely J indexhalmazzal. Nyilván több ilyen altér-összesség lehet az x_1, x_2 stb. vektoroktól függően. Legyen M az a halmaz, amelynek az elemai a páronként ortogonális ciklikus alterek összességei, és vezessünk be rendezést M-en a halmazelméleti tartalmazással. Ekkor minden láncban van maximális elem: a láncban levő halmazrendszer uniója. Zorn-lemmája szerint tehát létezik $(\mathbf{M}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ maximális elem M-ben; a maximalitás miatt

$$\mathbf{H} = \bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathbf{M}_i. \quad \square$$

A projektormérték egy ciklikus altere invariáns a projektormérték értékkészletében levő projektorokra. Eszerint, a $P_i : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(\mathbf{M}_i)$, $E \mapsto P(E)|_{M_i}$ leképezés projektormérték, és úgy is szokás fogalmazni, hogy a projektormérték ciklikus projektormértékek direkt összege:

$$P = \bigoplus_{i\in\mathrm{I}} P_i.$$

A direkt összegek sokfélék lehetnek, és szerkezetük nagyban eltérhet egymástól. Előfordulhat, hogy P maga ciklikus, tehát van egyetlen elemű direkt összeg, de lehetésges több elemű direkt összege is. Példa erre a 2.9 pont 1. példája. A projektormérték ciklikus, egy ciklikus vektora $(1, 1, \ldots, 1, 1)$. Viszont $\mathbb{C}^N$ (a Hilbert-tér) az $(1, 0, \ldots, 0, 0)$, $(0, 1, \ldots, 0, 0)$ $\ldots$ $(0, 0, \ldots, 0, 1)$ vektorok által generált ciklikus alterek direkt összege is.

Most azt vizsgáljuk, hogyan lehet a „legegyszerűbb" direkt összeget megtalálni. Ehhez feltesszük, hogy $\mathbf{H}$ szeparábilis. Ekkor I megszámlálható, vegyük $\mathbb{N}$-nek.

A továbbiakban a $\equiv$ jel unitér ekvivalenciát jelöl.

Legyen x_i az $\mathbf{M}_i$ ciklikus vektora. A 36 állítás szerint P_i unitér ekvivalens az $L^2(\mu_{x_i,x_i})$ karakterisztikus projektormértékével, és így

$$\mathbf{H} \equiv \sum_{i\in\mathbb{N}} L^2(\mu_{x_i,x_i}), \quad P \equiv \sum_{i\in\mathbb{N}} K_i.$$

Vezessük be a

$$\mu := \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^i} \mu_{x_i,x_i}$$

mértéket. Minthogy minden μ_{x_i,x_i} abszolút folytonos μ-re (azaz minden μ-nulla halmaz μ_{x_i,x_i}-nulla is), a Radon–Nykodim-tétel szerint léteznek olyan $0 \leq \alpha_i : S \to \mathbb{R}$ mérhető függvények, hogy $\mu_{x_i,x_i} = \alpha_i \mu$.

A

$$T_i := \{s \in S \mid \alpha_i > 0\}$$

halmaz mérhető, és az

$$L^2(\mu_{x_i,x_i}) \to L^2(\chi_{T_i}\mu), \quad \varphi_i \mapsto \sqrt{\alpha_i}\varphi_i =: \phi_i$$

leképezés unitér minden i-re. Ezért

$$\mathbf{H} \equiv \sum_{i\in\mathbb{N}} L^2(\chi_{T_i}\mu), \quad P \equiv \sum_{i\in\mathbb{N}} K_i;$$

itt persze K_i az itt szereplő i-ik Hilbert-tér karakterisztikus projektormértéke. Idézzük fel, hogy

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} L^2(\chi_{T_i}\mu)\text{elemei: } \phi : S \to \mathbb{C}_{i\in\mathbb{N}}, \quad \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{T_i} |\phi_i|^2 d\mu < \infty. \tag{10}$$

Ha a T_i-k páronként diszjunktak (elég, ha csak $\mu(T_i \cap T_j) = 0$ teljesül $i \neq j$ esetén), akkor a fenti Hilbert-tér „lényegében" $L^2(\mu)$ úgy, hogy $\phi \in L^2(\mu)$ az a függvény, amelyre $\phi|_{T_i} = \phi_i$. Ekkor tehát P egyetlen karakterisztikus projektormértékkel unitér ekvalens (a projektormérték ciklikus).

Tekintsük most az esetet, amikor T_i-k nem diszjunktak páronként.

Legyen

$$S_n := \{s \in S \mid s \text{ pontosan } n \text{ darab } i \text{ létezik úgy, hogy } s \in T_i\},$$

ahol $n \in \mathbb{N} \cup \infty$. Vegyük észre, hogy S_n-nek páronként diszjuktak, és

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \infty} S_n = S.$$

Továbbá legyen $s \in S$ esetén

$$i_1(s) := \min\{i \in \mathbb{N} \mid s \in T_i\}, \quad i_2(s) := \min\{i \in \mathbb{N} \setminus \{i_1(s)\} \mid s \in T_i\},$$

és így tovább,

$$i_k(s) := \min\{i \in \mathbb{N} \setminus \{i_1(s), \dots, i_{k-1}(s)\} \mid s \in T_i\}.$$

Rendeljük hozzá a (10)-beli $\phi_{i \in \mathbb{N}}$ függvényegyütteshez

$$\Phi_1(s) := \chi_{S_1} \phi_{i_1(s)}(s),$$

$$\Phi_{21} := \chi_{S_2} \phi_{i_1(s)}(s), \quad \Phi_{22} := \chi_{S_2} \phi_{i_2(s)}(s),$$

$$\Phi_{31} := \chi_{S_3} \phi_{i_1(s)}(s), \quad \Phi_{32} := \chi_{S_3} \phi_{i_2(s)}(s), \quad \Phi_{33} := \chi_{S_3} \phi_{i_3(s)}(s)$$

és így tovább a $\Phi_{n1}, \dots, \Phi_{nn} \dots$ függvényeket, ahol $n \in \mathbb{N} \cup \infty$.

Ekkor $\Phi_n := (\Phi_{n1}, \dots, \Phi_{nn}) \in L^2(\chi_{S_n}\mu, \mathbb{C}^n)$ (a $\mathbb{C}^\infty := l^2$ értelmezéssel), és

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} L^2(\chi_{T_i}\mu) \equiv \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \infty} L^2(\chi_{S_n}\mu, \mathbb{C}^n),$$

ugyanis

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{T_i} |\phi_i|^2 d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \infty} \int_{S_n} \sum_{k=1}^{n} |\phi_{i_k}|^2 d\mu,$$

tehát a projektormérték unitér ekvivelens ez utóbbi direkt összegben szereplő Hilbert-terek karakterisztikus projektormértékeinek direkt összegével.

Egyszerű látni, hogy az ilyen alakú direkt összeg „lényegében" egyértelmű: ha (értelemszerű jelöléssel)

$$\sum_{n \in \mathbb{N} \cup \infty} L^2(\chi_{S'_n}\mu', \mathbb{C}^n) \equiv \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \infty} L^2(\chi_{S_n}\mu, \mathbb{C}^n), \qquad \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \infty} K'_i \equiv \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \infty} K_n,$$

akkor μ' és μ ekvivalensek, vagyis ugyanazok a nulla-halmazaik, és $\mu(S'_n \cap S_n) = 0$.

Jegyezzük meg, hogy S_n-ek akármelyike üres is lehet; például ciklikus projektormérték esetén $S_n = \emptyset$ ha $n > 1$.

3. A spektráltétel

3.1. Az általános tétel

41. Állítás. *Legyen N normális operátor a $\mathbf{H}$ Hilbert-téren. Ekkor létezik egyértelműen egy $P : \mathcal{B}(\mathbb{C}) :\to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ projektormérték úgy, hogy $N = \hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$.*

P-t az N spektrálfelbontásának hívjuk, $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$-t pedig az N spektrálelőállításának.

A spektráltételt általában nem bizonyítjuk, csak – később – unitér és önadjungált operátorra. Normális operátorra csak az alábbi speciális esetet tekintjük.

Legyen az N normális operátor olyan, hogy a sajátalterei kifeszítik az egész Hilbert-teret; ekkor N spektruma a λ_n ($n \in \mathbb{N}$) sajátértékekből és ezek torlódási pontjaiból áll. Legyen P_n az n-ik sajátaltér projektora; tudjuk, hogy az N különböző sajátalterei ortogonálisak egymásra. Ekkor könnyű meggyőződni arról, hogy a

$$P(E) := (s) \sum_{\{n|\lambda_n \in E\}} P_n \qquad (E \in \mathcal{B}(\mathbb{C}))$$

formula projektormértéket határoz meg. A normális operátorokra vonatkozó ismereteink szerint ha $x \in \mathrm{Dom}(N)$, akkor

$$Nx = N\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} P_n x\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n P_n x,$$

amiből azonnal adódik, hogy P az N spektrálfelbontása. Ugyanis a P-vel kapcsolatos komplex mértékekre $\mu_{y,x} = \sum_n \langle y, P_n x\rangle \delta_{\lambda_n}$ (Dirac-delták), és így :

$$\int_{\mathbb{C}} \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \mu_{y,x} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \langle y, P_n x\rangle = \langle y, \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n P_n x\rangle = \langle y, Nx\rangle.$$

Felsorolunk a spektráltételhez kapcsolódó néhány fontos tudnivalót, amelyek a projektromérték szerinti integrálás megismert tulajdonságaiból következnek.

Legyen P az N normális operátor spektrálfelbontása.

P tartója megegyezik az N spektrumával, P éles pontjai az N sajátértékeivel.

Ha $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mérhető függvény, akkor értelmezhető $f(N) := \hat{P}(f)$. Az $f(N)$ operátor értelmezési tartományában azok az x-ek vannak, amelyekre f négyzetesen integrálható a $\mu_{x,x}$ mérték szerint. A $p = \sum_{i=0}^n c_i \mathrm{id}_{\mathbb{C}}^i$ polinomra $\hat{P}(p) = p(N) := \sum_{i=0}^n c_i N^i$.

Speciálisan értelmezhető az N valós és képzetes része, egy-egy önadjungált operátor, és $N = \mathrm{re}(N) + i\mathrm{im}(N)$, $N^* = \mathrm{re}(N) - i\mathrm{im}(N)$.

A fenti példában szereplő N spektrálfelbontása akkor és csak akkor ciklikus, ha N minden sajérték egyszeres (minden sajáteltere egy dimenziós). Ezért általában, bármely normális operátor spektrumát egyszeresnek mondjuk, ha a spektrálfelbontása ciklikus.

Általában az N normális operátor spektrálfelbontása a 2.13 pontban mondottak szerint unitér ekvivalens $L^2(\chi_{S_n}\mu, \mathbb{C}^n)$ ($n \in \mathbb{N} \cup \infty$) alakú Hilbert-terek karakterisztikus projektormértékeinek direkt összegével, ahol S_n-ek páronként diszjunktak. Ezért N unitér ekvivalens identitással való szorzások direkt összegével. Láttuk a 2.9 1. példájában, hogy $\mathbb{C}^N$-en a szorzás-operátorok diagonális mátrixok; így a normális operátor előállítása identitással való szorzásként a véges dimenzióban ismert diagonalizálási eljárásnak felel meg.

Nem nehéz látni, hogy $\mathrm{Supp}(P) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\cup\infty} S_n$. Mivel P tartója megegyezik N spektrumával, S_n elemeit a spektrum n-szeres multiplicitású pontjainak nevezzük.

3.2. A spektráltétel bizonyítása unitér operátorra

A bizonyításhoz a Stone–Weierstrass-tételt és a Riesz-reprezentációs tételt használjuk.

Tekintsük a $\mathbb{T}$ komplex egységkört. Minthogy $\mathrm{id}_\mathbb{C}$ leszűkítése $\mathbb{T}$-re $\mathrm{id}_\mathbb{T}$, és $\mathrm{id}_\mathbb{C}^*$ leszűkítése $\mathrm{id}_\mathbb{T}^* = \mathrm{id}_\mathbb{T}^{-1}$, az $1, \mathrm{id}_\mathbb{T}, \mathrm{id}_\mathbb{T}^*$ függvények generálta komplex algebra elemei

$$p := \sum_{i=-n}^{n} c_i \mathrm{id}_\mathbb{T}^i$$

alakú „$\pm$-polinomok”.

Legyen U unitér operátor. Értelmezzük a fenti $\pm$-polinommal a $p(U) := \sum_{i=-n}^{n} U^i$ operátort. Mivel $U^* = U^{-1}$, igaz a $p(U)^* = p^*(U)$ egyenlőség (a bal oldalon a csillag az adjungálást, a jobb oldalon a komplex konjugálást jelöli). Tudjuk, hogy U spektruma a $\mathbb{T}$ egységkör része.

A bizonyítás alaplépése, hogy megmutatjuk:

42. Állítás.

$$\mathrm{Sp}(p(U)) = p[\mathrm{Sp}(U)].$$

Bizonyítás Ehhez felhasználjuk azt az ismeretet, hogy ilyen egyenlőség igaz szokásos „rendes” polinomokra.

Ugyanis legyen $q := \mathrm{id}_\mathbb{C}^n p$; ez és vele együtt $q - \lambda\mathrm{id}_\mathbb{C}^n$ szokásos polinom. Ekkor sorra a következők egyenértékűek:

– $\lambda \in \mathrm{Sp}(p(U))$,
– $p(U) - \lambda I = U^{-n}\big(q(U) - \lambda U^n\big)$ nem invertálható,
– $q(U) - \lambda U^n$ nem invertálható,
– $0 \in \mathrm{Sp}(q(U) - \lambda U^n) = \mathrm{Sp}\big((q - \lambda\mathrm{id}_\mathbb{C}^n)(U)\big) = (q - \lambda\mathrm{id}_\mathbb{C}^n)[\mathrm{Sp}(U)]$,
– van olyan $\xi \in \mathrm{Sp}(U)$, amellyel $0 = q(\xi) - \lambda\xi^n$, azaz
– $\lambda = \frac{q(\xi)}{\xi^n} = p(\xi)$. □

Eredményünk következménye, hogy

$$\|p(U)\| = \max\{|p(\xi)| \mid \xi \in \mathrm{Sp}(U)\} \le \max\{|p(\xi)| \mid \xi \in \mathbb{T}\} =: \|p\|.$$

Világos, hogy a $p \mapsto p(U)$ leképezés lineáris. Továbbá a Hilbert-tér y, x elemeire $|\langle y, p(U)x\rangle| \le \|y\|\,\|x\|\,\|p\|$, vagyis a $p \mapsto \langle y, p(U)x\rangle$ leképezés folytonos lineáris funkcionál a maximum-normával ellátott $\pm$-polinomokon. A Stone–Weierstrass-tétel és a Riesz-tétel szerint ezért létezik egyértelműen egy $\mu_{y,x}$ komplex Borel-mérték $\mathbb{T}$-n úgy, hogy

$$\langle y, p(U)x\rangle = \int_\mathbb{T} p\,d\mu_{y,x}.$$

Tetszőleges q $\pm$-polinomra

$$q\mu_{y,x} = \mu_{y,q(U)x} = \mu_{q(U)^*y,x},$$

ugyanis minden p-re

$$\int_{\mathbb{T}} pd(q\mu_{y,x}) = \int_{\mathbb{T}} qpd\mu_{y,x} = \begin{cases} \langle y, p(U)q(U)x\rangle = & \int_{\mathbb{T}} pd\mu_{y,q(U)x}, \\ \langle y, q(U)p(U)x\rangle = & \int_{\mathbb{T}} pd\mu_{q(U)^*y,x}. \end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy $(y,x) \mapsto \mu_{y,x}$ konjugált lineáris az első változójában és lineáris a második változójában, valamint $\mu^*_{y,x} = \mu_{x,y}$, és értelemszerűen ugyanez igaz az $(y,x) \mapsto \mu_{y,x}(E)$ leképezésre minden E Borel-halmazra.

Minthogy $I = 1(U)$ (az U által a konstans 1 polinomhoz rendelt operátor),

$$\langle y, x\rangle = \int_{\mathbb{T}} d\mu_{y,x} = \mu_{y,x}(\mathbb{T}).$$

Ebből

$$\mu_{x,x}(E) = \int_{\mathbb{T}} \chi_E d\mu_{x,x} \leq \int_{\mathbb{T}} d\mu_{x,x} = \mu_{x,x}(\mathbb{T}) = \|x\|^2.$$

A kvadratikus és szeszkilináris formák közötti ismert összefüggés szerint ez azt jelenti, hogy $|\mu_{y,x}(E)| \leq \|y\|\ \|x\|$; másszóval $(y,x) \mapsto \mu_{y,x}(E)$ folytonos minden E esetén. Ez pedig maga után vonja, hogy minden E esetén létezik egy $P(E)$-vel jelölt folytonos önadjungált operátor úgy, hogy $\mu_{y,x}(E) = \langle y, P(E)x\rangle$.

Most hasonlóany, mint az előbb polinomokra, megállapíthatjuk hogy

$$\chi_F \mu_{y,x} = \mu_{y,P(F)x} = \mu_{P(F)y,x},$$

hiszen

$$\int_{\mathbb{T}} qd(\chi_F\mu_{y,x}) = \int_{\mathbb{T}} q\chi_F d\mu_{y,x} = \int_{\mathbb{T}} \chi_F d(q\mu_{y,x}) =$$
$$= \begin{cases} \langle y, P(F)q(U)x\rangle = & \langle P(F)y, q(U)x\rangle \int_{\mathbb{T}} qd\mu_{P(F)y,x}, \\ \langle q(U)^*y, P(F)x\rangle = & \langle y, q(U)P(F)x\rangle \int_{\mathbb{T}} qd\mu_{y,P(F)x}. \end{cases} \tag{11}$$

Ebből $P(E \cap F) = P(E)P(F) = P(F)P(E)$, speciálisan $P(E) = P(E)^2$ is adódik, vagyis $P(E)$ projektor.

Az is könnyen látható ezután, hogy $E \mapsto P(E)$ projektormérték, és $\mu_{y,x}$ ehhez a projektormértékhez a korábbiak szerint rendelt komplex mérték; következésképpen $p(U) = \hat{P}(p)$, speciálisan

$$U = \hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{T}}).$$

3.3. A spektráltétel bizonyítása önadjungált operátorra

Legyen S önadjungált operátor. Mivel $\pm i$ nincs az S spektrumában, léteznek a mindenütt értelmezett folytonos $(S \pm iI)^{-1}$ operátorok. Megmutatjuk, hogy az S úgynevezett **Cayley-trtanszformáltja**,

$$U := (S - iI)(S + iI)^{-1}$$

unitér.

$(S+iI)^{-1}$ mindenütt értelmezett és értékkészlete az $S+iI$ értelmezési tartománya, amely megegyezik az S értelmezési tartományával. $S-iI$ értékészlete az egész Hilbert-tér, így $U : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ bijekció. Minden $x \in \mathrm{Dom}(S)$ esetén

$$\begin{aligned} \|(S \pm iI)x\|^2 =& \langle Sx, Sx\rangle \pm i\langle Sx, x\rangle \mp i\langle x, Sx\rangle + \langle x, x\rangle = & (12)\\ =& \|Sx\|^2 + \|x\|^2, & (13) \end{aligned}$$

ezért $\|(S+iI)x\| = \|(S-iI)x\|$.

Tehát az x helyében az előbbi formulát $(S+iI)^{-1}y$-ra alkalmazva tetszőleges y-ra. Ekkor

$$\|Uy\| = \|(S-iI)(S+iI)^{-1}y\| = \|(S+iI)(S+iI)^{-1}y\| = \|y\|,$$

tehát U valóban unitér.

Már csak az van hátra, hogy megmutassuk: ha U az S Cayley-transzformáltja, akkor

$$S = i(I+U)(I-U)^{-1}.$$

Ugyanis $S+iI$ injektív és $\mathrm{Dom}(S)$-et $\mathbf{H}$-ra képezi, ezért ha $x \in \mathrm{Dom}(S)$ esetén

$$y := (S+iI)x, \quad \text{akkor} \quad Uy = (S-iI)x,$$

és így

$$(I+U)y = 2Sx \qquad \text{és} \quad (I-U)y = 2ix,$$

amiből $\mathrm{Ran}(I-U) = \mathrm{Dom}(S)$; továbbá, ha $(I-U)y = 0$, akkor $x = 0$, következésképpen $y = 0$, tehát $I-U$ injektív. Végezetül az előző egyenlőségekből

$$\begin{aligned} Sx =& \frac{1}{2}(I+U)y = \frac{1}{2}(I+U)(I-U)^{-1}(2ix) = \\ =& i(I+U)(I-U)^{-1}x. \end{aligned}$$

Ha tehát P az U Cayley-transzformált spektrálfelbontása, akkor az $f = i\frac{1+\mathrm{id}_{\mathbb{T}}}{1-\mathrm{id}_{\mathbb{T}}}$ jelöléssel $S = \hat{P}(f)$, azaz S spektrálfebontása $P \circ \overset{-1}{f}$.

3.4. Felcserélhetőség

Már volt arról szó, hogy az A korlátos és L akármilyen operátort felcserélhetőnek nevezzük, ha $AL \subset LA$.

Értelmeztük egy operátor és egy projektormérték, valamint két projektormérték felcserélhetőségét.

Két normális operátort erősen felcserélhetőnek mondunk, ha a spektrálfelbontásaik felcserélhetők.

Emlékeztetünk, hogy az A korlátos operátor

– akkor és csak akkor cserélhető fel a P projektormértékkel, ha felcserélhető minden $\hat{P}(f)$-fel.

– akkor és csak akkor cseréléhető fel a komplex P projektormértékkel, ha felcserélhető $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$-vel és $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^*)$-gal.

Megjegyezzük, hogy elég egy felcserélhetőség a fenti állításban, ugyanis bebizonyítható: ha A felcserélhető $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$-vel, akkor felcserélhető $\hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^*) = \hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})^*$-gal is.

Az A korlátos normális operátor akkor és csak akkor cserélhető fel az N normális operátorral, ha A és N erősen felcserélhetők. Ugyanis A akkor és csak akkor cserélhető fel N-nel, ha felcserélhető az N spektrálfelbontásával; tehát a spektrálfelbontásban szereplő minden $P(E)$ projektor felcserélhető A-val, és ez akkor és csak akor teljesül, ha $P(E)$ felcserélhető az A spektrálfelbontásával.

43. Állítás. *Legyen N és M két erősen felcserélhető normális operátor. Ekkor $NMx = MNx$ minden $x \in \mathrm{Dom}(NM) \cap \mathrm{Dom}(MN)$ esetén.*

Bizonyítás Legyen P az N, Q az M spektrálfelbontása. Ekkor minden $P(E)$ felcserélhető M-mel.

Vegyünk egy szóban forgó x-et, azaz $x \in \mathrm{Dom}(N) \cap \mathrm{Dom}(M)$ és $Mx \in \mathrm{Dom}(N)$, $Nx \in \mathrm{Dom}(M)$. Ha $y \in \mathrm{Dom}(M) = \mathrm{Dom}(M^*)$, akkor $\langle M^*y, P(E)x\rangle = \langle y, MP(E)x\rangle = \langle y, P(E)Mx\rangle$, azaz a szokásos jelölésünkkel $\mu_{M^*y,x} = \mu_{y,Mx}$, és így

$$\langle y, MNx\rangle = \langle M^*y, Nx\rangle = \int \mathrm{id}_{\mathbb{C}} d\mu_{M^*y,x} = \int \mathrm{id}_{\mathbb{C}} d\mu_{y,Mx} = \langle y, NMx\rangle.$$

Mivel y egy sűrű lineáris alteret fut végig, igaz az állítás. □

Fontos megjegyezni, hogy a fordítottja nem igaz: az $NMx = MNx$ egyenlőségből nem következik az N és M erős felcserélhetősége. Íme az ellenpélda: $\alpha \neq \beta$ esetén a D_α és D_β differenciálás-operátorokra (lásd a mellékletet) nyilván teljesül a $D_\alpha D_\beta \phi = D_\beta D_\alpha \phi$ teljesül a megfelelő ϕ-ken, de a spektrálfelbonásaik nem nem cserélhetők fel.

D_α spektruma az $\{n+\alpha \mid n \in \mathbb{Z}\}$ sajátértékekből áll, amelyekez az $\phi_{\alpha,n}(s) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(n+\alpha)s}$ normált sajátfüggvények tartoznak (ezek kifeszítik az egész Hilbert-teret). Ha $P_{\alpha,n}$ jelöli ezen sajátalterek projektorát, akkor 3.1 pontban szereplő példa adja meg D_α spektrálfelbontását, és

$$P_{\alpha,n}\phi = \phi_{\alpha,n} \int_{-\pi}^{\pi} \phi^*_{\alpha,n}\phi.$$

Ezután könnyű látni, hogy $P_{\alpha,n}P_{\beta,m} \neq P_{\beta,m}P_{\alpha,n}$.

3.5. Projektormértékek szorzata

Emlékezetetünk, hogy a projektormértékek az általános valószínűségelmélet fizikai mennyiségeiként kerültek elő. A fizikában igen fontos kérdés, mely fizikai mennyiségeknek van együttese. Láttuk, az együttes fizikai mennyiség létezésének szükséges feltétele volt a kompatibilitás. A kompatibilitás az egyes mennyiségek értékeinek egymással való disztributivitását jelenti. Projektorhálóban a disztributivitás egyenértékű a kommutativitással. Bebizonyítható, hogy „megfelelően jó” toplogikus terek (például véges dimenziós affin terek) Borel-halmazain értelmezett projektormértékek esetén a kompatibilitás elégséges is az együttes létezéséhez. Ez a bizonyítás meglehetősen hosszadalmas, itt nem térünk ki rá.

Projektormértékek együttesére a projektormértékek szorzata elnevezést szokás használni; ezt a következő formula indokolja. Legyenek $P_i : \mathcal{B}(V_i) \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ páronként felcserélhető projektormértékek ($i = 1, \dots, n$). Ezek együttese egy olyan (egyértelműen meghatározott) $P : \mathcal{B}(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n) \to \mathcal{P}(\mathbf{H})$ projektormérték, amelyre

$$P\left(E_1 \times E_2 \times \dots E_n\right) = P_1(E_1)P_2(E_2)\dots P_n(E_n).$$

4. Egyparaméteres unitér csoportok

Egyparaméteres unitér csoporton egy $t \mapsto U_t$ leképezést értünk, ahol t a valós számokat futja végig és U_t unitér operátor úgy, hogy minden t, s esetén $U_{t+s} = U_t U_s = U_s U_t$. Az egyparaméteres unitér csoportot folytonosnak nevezzük, ha az $\mathbb{R} \times \mathbf{H} \to \mathbf{H}$, $(t, x) \mapsto U_t x$ leképezés folytonos.

44. Állítás. *Az egyparamtéteres unitér csoport folytonossága egyenértékű azzal, hogy minden $y, x \in \mathbf{H}$ esetén $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \langle y, U_t x\rangle$ folytonos a nullában (más szóval a $t \mapsto U_t$ hozzárendelés gyengén folytonos a nullában).*

Bizonyítás Világos, hogy a folytonosságból következik a gyenge folytonosság.
A gyenge folytonosság a nullában maga után vonja a gyenge folytonosságot bármely pontban az $\langle y, U_s x\rangle - \langle y, U_s x\rangle = \langle y, (U_s - U_t)x\rangle_{\langle} y, U_{s-t}x\rangle$ összefüggés alapján.
A gyenge folytonosságból következik az erős folytonosság is, azaz $t \mapsto U_t x$ folytonos minden x-re:

$$\|U_s x - U_t x\|^2 = \|U_t x\|^2 - \langle U_s x, U_t x\rangle - \langle U_t x, U_s x\rangle + \|U_s\|^2$$

A jobb oldal első és utolsó tagja $\|x\|^2$, a gyenge folytonosság miatt, ha s tart t-hez, akkor a középső tagok $-\|x\|^2$-hez tartanak, tehát jobb oldal – és ezzel együtt a bal oldal – a nullához tart.
Az erős folytonosságból viszont következik a folytonosság:

$$\|U_s y - U_t x\| \leq \|U_s y - U_s x\| + \|U_s x - U_t\| = \|y - x\| + \|U_s x - U_t\|. \quad \square$$

Ha S önadjungált operátor, akkor a spektráltétel szerint értelmezett $U_t := e^{itS}$ $(t \in \mathbb{R})$ operátorok az exponenciális függvény szorzási szabálya következtében egyparaméteres unitér csoportot alkotnak (ezt az S generálta egyparaméteres unitér csoportnak hívjuk), amely folytonos. Ugyanis, ha P az S spektrálfelbontása, az eddigi jelölésekkel a

$$t \mapsto \langle y, U_t x\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{it\alpha} d\mu_{y,x}(\alpha)$$

leképezés folytonos a 0-ban, amint az a Lebesgue-tételből egyszerűen következik.
A mondottaknak a fordítottja is igaz:

45. Állítás. *(Stone tétele) Legyen $t \mapsto U_t$ folytonos egyparaméteres unitér csoport. Ekkor létezik egy egyértelműen meghatározott S önadjungált operátor úgy, hogy $U_t = e^{itS}$ minden t-re.*

Bizonyítás Tegyük fel először azt, hogy a csoport 2π szerint periodikus, azaz $U_{2\pi} = I$, és így $U_{t+2\pi} = U_t$ minden t-re. Az

$$(y, x) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} \langle y, U_t x\rangle dt$$

leképezés folytonos szeszkilineáris (vagyis az első változójában konjgált lineáris, a másodikban lineáris) forma minden n egésze számra. Ezért egyértelműen léteznek P_n korlátos operátorok úgy, hogy

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} \langle y, U_t x\rangle dt = \langle y, P_n x\rangle.$$

Mivel

$$\left(\int_0^{2\pi} e^{-int}\langle y, U_t x\rangle dt\right)^* = \int_0^{2\pi} e^{int}\langle U_t x, y\rangle dt = \int_{-2\pi}^{0} e^{-int}\langle U_{-t} x, y\rangle dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} e^{-int}\langle x, U_t y\rangle dt,$$

az $\langle y, P_n x\rangle^* = \langle x, P_n y\rangle$ egyenlőség igaz, ami azt jelenti, hogy P_n önadjungált. Továbbá az $U_t U_s = U_{t+s}$ egyenlőség alapján

$$\langle y, P_n U_s x\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\langle y, U_t U_s x\rangle dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\langle y, U_t x\rangle dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in(z-s)}\langle y, U_z x\rangle dz;$$

ebből, és hasonlóan a fordított sorrendre, azt kapjuk, hogy

$$P_n U_s = U_s P_n = e^{ins} P_n \qquad (s \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}). \tag{14}$$

Továbbá

$$\langle y, P_n P_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\langle y, U_t P_m x\rangle dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} e^{imt}\langle y, P_n x\rangle dt,$$

amiből

$$P_n P_m = \delta_{mn} P_n \quad (n, m \in \mathbb{Z}).$$

Végeredményben tehát a P_n-ek projektorok, a különböző indexűek ortogonálisak egymásra. $P_\bullet := \sum_{n\in\mathbb{Z}} P_n$ a megfelelő alterek összegére vetítő projektor; ezért $P_n P_\bullet \perp{=}0$ minden n-re, ezért

$$0 = \langle y, P_n P_\bullet^\perp\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\langle y, U_t P_\bullet^\perp x\rangle dt,$$

tehát a $[0, 2\pi]$-n értelmezett $t \mapsto \langle y, U_t P_\bullet^\perp x\rangle$ folytonos függvémny minden Fourier-együtthatója nulla, így maga a függvény is nulla, amiből $P_\bullet^\perp = 0$, azaz $P_\bullet = I$ következik. Ezért (14) alapján

$$U_t = (s)\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{int} P_n.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy a

$$P(E) := (s)\sum_{n\in E} P_n \quad (E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

projektormértékkel és az $S := \hat{P}(\mathrm{id}_\mathbb{R})$ önadjungált operátorral $U_t = e^{itS}$.

Az általános esetet visszavezetjük a periodikusra. Legyen Q az $U_{2\pi}$ spektrálfelbontása úgy, hogy az egységkört a $]0, 2\pi]$ intervallummal paraméterezzük, azaz

$$\langle y, U_{2\pi} x\rangle = \int_0^{2\pi} e^{is} d\langle y, Q(s) x\rangle.$$

Könnyű látni, hogy $t \mapsto V_t := U_t(U_{2\pi})^{-t/2\pi}$ 2π szerint periodikus folytonos egyparaméteres unitér csoport. Ezért léteznek páronként ortogonális P_n $(n \in \mathbb{Z})$ projektorok úgy, hogy

$$V_t = (s)\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{int} P_n.$$

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért elhagyjuk az összegek elől az (s) jelet, és az is formálisan jelöljük, azaz elhagyjuk az $\langle y, \dots x\rangle$ skaláris szorzatot. Így

$$U_t = \sum_n e^{int} P_n (U_{2\pi})^{t/2\pi} = \sum_n e^{int} P_n \int_0^{2\pi} e^{ist/2\pi} dQ(s) =$$
$$= \sum_n \int_0^1 e^{it(n+\alpha)} P_n dQ(2\pi\alpha) = \sum_n \int_n^{n+1} e^{it\beta} P_n dQ(2\pi(\beta - n)).$$

Vezessük be a

$$P(E) := \sum_{\{} n \mid E \cap [n, n+1[\neq \emptyset\} P_n Q(2\pi(E-n)) \quad (E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

operátorokat. Mivel minden t-re V_t kommutál $U_{2\pi}$-vel, minden P_n kommutál minden $Q(F)$-fel, ahol F a $[0, 2\pi[$ intervallum Borel-halmaza. Ezért $P_n Q(F)$ is projektor, és különböző $-n$-ek esetén ortogonálisak egymásra. Ezek szerint $E \mapsto P(E)$ valós projektormérték, és

$$U_t = \int_{\mathbb{R}} e^{it\beta} dP(\beta),$$

azaz, ha $S := \hat{P}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}})$, akkr $U_t = e^{itS}$.

46. Állítás. *Legyen S önadjungált operátor és $U_t := e^{itS}$ $(t \in \mathbb{R})$. Ekkor*

(i) $\lim_{t\to 0} \frac{U_t - I}{t} x$ akkor és csak akkor létezik, ha $x \in \mathrm{Dom}(S)$, és ez esetben a határérték iSx,

(ii) $\frac{d}{dt} U_t x = iU_t Sx = iSU_t x \quad (t \in \mathbb{R}, x \in \mathrm{Dom}(S))$.

Bizonyítás (i) Ha a kérdéses határérték létezik, akkor létezik

$$\lim_{t\to 0} \left\| \frac{U_t - I}{t} x \right\|^2 = \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{e^{it\alpha} - 1}{t} \right|^2 d\mu_{x,x}(\alpha),$$

ahol $\mu_{x,x}$ az S spektrálfelbontásából a korábbiak szerint származtatott mérték. Fatou-lemmájából következik, hogy az integrandus limesze, $\mathrm{id}^2_{\mathbb{R}}$ $\mu_{x,x}$-integrálható, azaz $x \in \mathrm{Dom}(S)$.

$x \in \mathrm{Dom}(S)$, akkor

$$\left\| \left(\frac{U_t - I}{t} - iS \right) x \right\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{e^{it\alpha} - 1}{t} - i\alpha \right|^2 d\mu_{x,x}(\alpha).$$

Az integrandust átalakíthatjuk

$$\left| \alpha \exp\left(\frac{it\alpha}{2}\right) \frac{\exp\left(\frac{it\alpha}{2}\right) - \exp\left(\frac{-it\alpha}{2}\right)}{2\left(\frac{it\alpha}{2}\right)} - \alpha \right|^2$$

alakba, amiből könnyen adódik, hogy az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2$ számszorosa majorálja, amely $\mu_{x,x}$-integrálható, hiszen $x \in \mathrm{Dom}(S)$. Az integrandus határértéke nulla, miközben t tart a nullához; a Lebesgue-tétel szerint a határátmenet és az integrálás felcserélhető, ezért a bal oldal a nullához tart.

(ii)

$$\frac{d}{dt}U_t x = \lim_{h\to 0}\frac{U_{t+h}-U_t}{h}x = \lim_{h\to 0}U_t\frac{U_h - I}{h}x = \lim_{h\to 0}\frac{U_h-I}{h}U_t x.$$

A középső határérték létezik, ezért az összes többi is, és egyenlők egymással.

47. Állítás. *Legyen S önadjungált operátor és $U_t := e^{itS}$ $(t \in \mathbb{R})$. Ekkor*

(i) az A korlátos operátorra $AU_t = U_t A$ $(t \in \mathbb{R})$ akkor és csak akkor, ha $AS \subset SA$,

(ii) az N normális operátorra $U_t N \subset N U_t$ $(t \in \mathbb{R})$ akkor és csak akkor, ha S és N erősen felcserélhetők (azaz spektrálfelbontásaik kommutálnak).

Bizonyítás (i) Ha A felcserélhető S-sel, akkor felcserélhető minden függvényével, így U_t-vel is. Viszont, ha $x \in \mathrm{Dom}(S)$, akkor

$$iASx = \lim_{t\to 0} A\frac{U_t - I}{t}x = \lim_{t\to 0}\frac{U_t - I}{t}Ax = iSAx.$$

(ii) $U_t N \subset N U_t$ maga után vonja, hogy $U_t^* N^* \subset N^* U_t^*$; mivel $U_t^* = U_t^{-1} = U_{-t}$ és ez miden t-re igaz, itt elhagyhatjuk a negatív előjelet. Tehát N és N^* felcserélhető minden U_t-vel, ezért U_t felcserélhető az N spektrálfelbontásával, (azaz minden projektorral az N spektrálfelbontásában), így az (i) szerint S felcserélhető az N spektrálfelbontásával, tehát S és N erősen felcserélhetők.

Ha S és N erősen felcserélhetők, akkor S minden korlátos függvénye, így U_t is, felcserélhető N-nel.

5. Lényegében önadjungált oporátorok

Emlékeztetünk arra, hogy egy S operátort **szimmetrikusnak** hívunk, ha sűrűn értelmezett és $S \subset S^*$. Mivel egy adjungált operátor mindig zárt, a szimmetrikus operátorok lezárhatók (azaz van legszűkebb zárt kiterjesztése). Egy szimmetrikus operátort **lényegében önadjungáltnak** nevezünk, ha a lezártja önadjungált.

Tudjuk, hogy egy sűrűn értelmezett A operátor pontosan akkor lezárható, ha A^* értelmezési tartománya sűrű, és ekkor A lezárása A^{**}. Következésképpen egy szimmetrikus S operátor akkor és csak akkor lényegében önadjungált, ha $S^* = S^{**}$.

48. Állítás. *Egy S szimmetrikus operátor pontosan akkor önadjungált, ha $S^* \pm I$ injektív.*

Bizonyítás S lezártja S^{**}, S^* lezártja (egyrészt önmaga, másrészt) $S^* = (S^*)^{**} = (S^{**})^* = \overline{S}^*$, ezért elég belátni, hogy egy S zárt szimmetrikusm operátor akkor és csak önadjungált, ha $S^* \pm I$ injektív.

Az (12) összefüggésből következik, hogy $S \pm iI$ képtere zárt. Legyen ugyanis $y_n := (S \pm iI)x_n$ Cauchy-sorozat, és $y := \lim_n y_n$. Az idézett összefüggés szerint x_n és Sx_n is Cauchy-sorozat. Legyen $x := \lim_n x_n$. Az S operátor zártsága miatt x benne van S értelmezési tartományában, és $Sx = y$, azaz y az $S \pm iI$ képterének eleme.

Tudjuk, hogy $S \mp iI$ képterének ortogonális kiegészítője az $(S \mp iI)^* = S^* \pm iI$ magtere.

Ha $S^* \pm iI$ injektív, akkor $S \pm iI$ képtere (amely zárt) az egész Hilbert-tér; mivel $S \subset S^*$, $S^* \pm iI$ képtere is az egész Hilbert-tér. Ezért $\mathrm{Dom}(S^*)$ nem lehet bővebb $\mathrm{Dom}(S)$-nél, mert akkor nem lenne injektív; tehát $S = S^*$.

Ha S önadjungált, akkor $\pm i$ nincs a spektrumában, ezért $S^* \pm iI = S \pm iI$ injektív.

49. Állítás. *Legyen S önadjungált operátor, és egy $\mathcal{D}$ sűrű lineáris altérre teljesüljön, hogy*

– $\mathcal{D} \subset \mathrm{Dom}(S)$,

– $e^{itS}\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ *a nulla egy környezetében lévő valós t-kre.*

Ekkor S leszűkítése $\mathcal{D}$-re lényegében önadjungált.

Bizonyítás Vegyük észre, hogy akármely valós t esetén létezik $nn \in \mathbb{N}$ úgy, hogy t/n bene van a kérdéses környezetben, továbbá $e^{itS} = \left(e^{i(t/n)S}\right)^n$, ezért $e^{itS}\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ minden valós t-re.

Legyen x az $(S|_{\mathcal{D}})^*$ értelmezési tartományában, és tegyük fel, hogy $(S|_{\mathcal{D}})^* x = ix$. Az előző fejezet eredménye szerint minden $y \in \mathcal{D}$ esetén

$$\frac{d\langle x, e^{itS}y\rangle}{dt} = \langle x, iSe^{itS}y\rangle = i\langle (S|_{\mathcal{D}})^* x, e^{itS}y\rangle = \langle x, e^{itS}y\rangle,$$

amiből $\langle x, e^{itS}y\rangle = e^t\langle x, y\rangle$.

Nyilvánvaló, hogy $|\langle x, e^{itS}y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$, ami csak úgy egyeztethető össze a fenti eredménnyel, ha $\langle x, y\rangle = 0$; minthogy y egy sűrű halmazt fut végig, ez azt jelenti, hogy $x = 0$, azaz $(S|_{\mathcal{D}})^* - iI$ injektív. Ugyanígy mutathatjuk meg azt is, hogy $(S|_{\mathcal{D}})^* + iI$ is injektív.