TÉRIDŐ-SZIMMETRIACSOPORTOK

1. Három dimenziós euklideszi tér forgáscsoportja

Legyen $\mathbf{N}(3)$ három dimenziós euklideszi tér, azaz három dimenziós valós vektortér, amelyen adott egy – pontszorzással jelölt – skaláris szorzat.

Egy $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3$ ortonormált bázissal koordinátázva $\mathbf{N}(3)$ izomorf $\mathbb{R}^3$-mal. Aki akarja, mindig gondoljon $\mathbb{R}^3$-ra; fizikai jelenetősége van azonban annak, hogy $\mathbf{N}(3)$ ugyan izomorf $\mathbb{R}^3$-mal, de nem azonos vele.

Az $\mathbf{N}(3)$ forgáscsoportja

$$SO(\mathbf{N}(3)) := \{\boldsymbol{R} : \mathbf{N}(3) \to \mathbf{N}(3) \text{ lineáris} \mid \boldsymbol{R}^*\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I},\ \det(\boldsymbol{R}) > 0\},$$

ahol a csillag a transzponáltat jelenti, $\boldsymbol{I}$ pedig az identitás.

Ez Lie-csoport, hiszen a pozitív determinánsú lineáris leképezések nyílt halmazt alkotnak, és a forgáscsoport az ezeken értelmezett $\boldsymbol{R} \mapsto \boldsymbol{R}^*\boldsymbol{R}$ differenciálható leképezésnek egy szinthalmaza.

Az $\boldsymbol{R}^*\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$ egyenlőség azt jelenti, hogy $\boldsymbol{R}$ megtartja a skaláris szorzatot, $(\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{R}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$.

Legyen $\alpha \mapsto \boldsymbol{R}(\alpha)$ egyparaméteres részcsoport. Az $\alpha \mapsto \boldsymbol{R}(\alpha)^*\boldsymbol{R}(\alpha) = \boldsymbol{I}$ differenciálásával azt kapjuk, hogy $\boldsymbol{R}(0)^* + \boldsymbol{R}(0) = 0$, vagyis a forgáscsoport Lie-algebrája

$$\{\boldsymbol{A} : \mathbf{N}(3) \to \mathbf{N}(3) \text{ lineáris} \mid \boldsymbol{A}^* = -\boldsymbol{A}\},$$

más szóval az antiszimmetrikus lineáris leképezések. Mivel ezek három dimenziós alteret alkotnak, a forgáscsoport három dimenziós Lie-csoport.

Az $\mathbf{N}(3)$ választott bázisával a Lie-algebra egy bázisát

$$\boldsymbol{A}_{jl} := \{\boldsymbol{n}_j \wedge \boldsymbol{n}_l \mid j < l = 1, 2, 3\}$$

alakban adhatjuk meg, ahol $\wedge$ az antiszimmerikus tenzorszorzat, azaz $\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{m} := \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{m} - \otimes \boldsymbol{n}$, és a tenzorszorzattal definiált leképezést $(\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{m})\boldsymbol{x} := \boldsymbol{n}(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{x})$ adja meg.

Célszerű bevezetni az

$$\boldsymbol{A}_k := \frac{1}{2}\epsilon_{kjl}\boldsymbol{A}_{jl} \quad \text{(Einstein-öszegzés)}$$

jelölést, ϵ a Levi–Civita-szimbólum. Egyszerű tény, hogy $\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{n}_k = 0$, ami azt jelenti, hogy $\boldsymbol{A}_k$ a k-ik választott báziselem körüli forgatások egyparaméteres részcsoporjának megfelelő Lie-algbra elem ($\exp(\alpha\boldsymbol{A}_k)\boldsymbol{n}_k = \boldsymbol{n}_k$).

Koordinátákban

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ezekből egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$[A_j, A_k] = \epsilon_{jkl}A_l.$$

1. Állítás. *$SO(\mathbf{N}(3))$ minden kommutátor-kociklusa a nullával kohomológ.*

Bizonyítás Legyen κ kommutátor-kociklus. Definiáljuk a Lie-algebrán azt az η lineáris leképépzést, amelyre $\eta(A_l) := \frac{1}{2}\epsilon_{lmn}\kappa(A_m, A_n)$ teljesül. Ekkor $\eta([A_j, A_k]) = \epsilon_{jkl}\eta(A_l) = \frac{1}{2}\epsilon_{jkl}\epsilon_{lmn}\kappa(A_m, A_n)$
$= \frac{1}{2}(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})\kappa(A_m, A_n) = \kappa(A_j, A_k)$. □

Végül megemlítjük, hogy a három dimenziós ortogonális csoport,

$$O(\mathbf{N}(3)) := \{\boldsymbol{R} : \mathbf{N}(3) \to \mathbf{N}(3) \text{ lineáris} \mid \boldsymbol{R}^*\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}\},$$

két diszjunkt, összefüggő halmaz uniója. Az egyik $SO(\mathbf{N}(3))$, a másik $-SO(\mathbf{N}(3))$, amelyiknek az elemei tehát a $-\boldsymbol{I}$ „tükrözés” és forgatások szorzata.

Végül két fontos tudnivaló.

Az egyik: a forgáscsoport a lineáris leképezések terében korlátos és zárt, azaz kompakt halmaz.

A másik: a forgáscsoport összefüggő, de nem egyszeresen összefüggő. Ezt szemléletesen a következőképp láthatjuk be. Rendeljük hozzá az $\boldsymbol{R}$ forgatáshoz azt az $\boldsymbol{n}$ vektort, amely körül forgat, és legyen $\boldsymbol{n}$ hossza egyenlő azzal a π-nél nem nagyobb szöggel, amellyel $\boldsymbol{R}$ az $\boldsymbol{n}$ „csúcsából” nézve „pozitív” irányba forgat. Ezzel $SO(\mathbf{N}(3))$-at a nulla körüli, π sugarú zárt gömbbel reprezentálhatjuk úgy, hogy a gömb felületén az átellenes pontok „össze vannak ragasztva”.

2. Nemrelativisztikus téridő

Használom az $(\mathtt{M}, \mathbb{I}, \mathbb{D}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{b})$ nemrelativisztikus téridőmodell fogalmait, az ebben kevésbé tájékozott, a fizika szokásos koordinátás leírását ismerők kedvéért a fontos formulákat átírom koordinátákra is.

$\mathtt{M}$ négy dimenziós irányított affin tér az $\mathbf{M}$ vektortér fölött,

$\mathbb{I}$ az időtartamok mértékegyenese,

$\mathbb{D}$ a távolságok mértékegyenese,

$\boldsymbol{\tau} : \mathbf{M} \to \mathbb{I}$ lineáris ráképezés,

$\mathbf{E} := \mathrm{Ker}(\boldsymbol{\tau})$ három dimenziós vektortér, elemei az abszolút térszerű vektorok,

$\boldsymbol{b} : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbb{D} \otimes \mathbb{D}$ bilineáris, szimmetrikus, pozitív definit leképezés (euklideszi szerkezet).

$\boldsymbol{b}$ tehát olyan, mint egy skalárszorzat, csak nem valós értékű. Ez csak formai, matematikailag lényegtelen eltérés (de fizikailag nem!), ezért beszélhetünk az $\mathbf{E}$ forgáscsoportjáról, $SO(\mathbf{E})$-ről és ortogonális csoportjáról, $O(\mathbf{E})$-ről. A továbbiakban $\boldsymbol{b}$ helyett egyszerűen pontszorzást írunk: $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{q}, qq') := \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{q}'$.

A téridővektorok azaz $\mathbf{M}$ elemeinek a koordinátáit mindig egy s (szekundum) időegység, egy m (méter) távolságegység, valamint $\boldsymbol{e}_0, e_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ bázis segítségével adjuk meg, ahol $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{e}_0) = \mathrm{s}$ és $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k) = \delta_{ik}\mathrm{m}^2 \quad (i, k = 1, 2, 3)$ (azaz $\boldsymbol{e}_k$-k ortonormált bázist alkotnak a megfigyelő terében). Az így adott kordinátázásban $\mathbf{M}$ elemei $\{x^\mu \mid \mu = 0, 1, 2, 3\}$ számnégyesként jelennek meg; a reprezentált elem $\sum_{\mu=0}^{3} x^\mu \boldsymbol{e}_\mu$.

A következőkben a görög indexek a $0, 1, 2, 3$ értékeken futnak végik, a latin indexek az $1, 2, 3$ értékeken, és az egybeeső indexekre automatikusan összegezni kell (ha csak nem mondjuk az ellenkezőjét).

$\frac{\mathbf{e}_0}{\mathrm{s}}$ egy abszolút sebesség, ezért a téridő-vektorok korodinátázása nem más, mint az $\boldsymbol{u} := \frac{\mathbf{e}_0}{\mathrm{s}}$ megfigyelő általi széthasításuk, majd a három dimenziós térszerű vektorok szokásos koordinátázása.

Koordinátákban $\mathbb{I}$-t is, $\mathbb{D}$-t is $\mathbb{R}$ reprezentálja (egy α valós szám megadja, hogy a megfelelő időtartam αs).

$\boldsymbol{\tau}$ a nulladik koordináta kiválasztását jelenti, $\{x^\mu \mid \mu = 0,1,2,3\} \mapsto x^0$, $\mathbf{E}$-t pedig azok a számnégyesek reprezentálják, amelyeknek a nulladik koodinátája nulla: $\{0, x^1, x^2, x^3\}$.

A téridő koordinátázását egy o „kezdőpont" választásával visszavezetjük a vektorok koordinátázására, azaz $x \in \mathtt{M}$ koordinátái az $x - o \in \mathbf{M}$ koordinátái lesznek. Tehát a téridő elemeit is számnégyesekkel reprezentáljuk.

Összefoglalva: koordinátákban
$\mathtt{M} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$,
$\mathbf{M} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$,
$\mathbb{I} \sim \mathbb{R}$,
$\mathbb{D} \sim \mathbb{R}$,
$\boldsymbol{\tau} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a kanonikus projekció,
$\mathbf{E} \sim \{0\} \times \mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{R}^3$,
$b \sim$ szokásos skalárszorzat $\mathbb{R}^3$-on.

2.1. Galilei-csoport

A Galilei-csoport

$$\mathcal{G} := \{\boldsymbol{L} : \mathbf{M} \to \mathbf{M} \text{ lineáris} \mid \boldsymbol{\tau} \circ \boldsymbol{L} = \boldsymbol{\tau},\ \boldsymbol{L}|_{\mathbf{E}} \in SO(\mathbf{E})\},$$

elemeit Galililei-transzformációknak hívjuk.

Vegyük észre, hogy az első feltétel szerint $\mathbf{E}$ invariáns $\boldsymbol{L}$-re, ezért értelmes a második követelmény.

A Galilei-csoportnak három dimenziós részcsoportját alkotják azok az elemek, amelyeknek az $\mathbf{E}$-re való leszűkítése az identitás; ezeket **speciális Galilei-transzformációknak** hívjuk.

Világos, hogy az $\mathbf{E}$ forgáscsoportja *nem részcsoportja* a Galilei-csoportnak; nem is lehet, mert a Galilei-transzformációk $\mathbf{M} \to \mathbf{M}$ lineáris leképezések, a forgatások pedig $\mathbf{E} \to \mathbf{E}$ lineáris leképezések.

„A" forgáscsoport tehát nem létezik a Galilei-csoporton belül. Viszont van kontinuum sok részcsoportja a Galilei-csoportnak, amely izomorf az $\mathbf{E}$ forgáscsoportjával. Nevezetesen, bármely $\boldsymbol{u} \in V(1)$ esetén azok az $\boldsymbol{L}$ Galilei-transzformációk, amelyekre $\boldsymbol{L}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ teljesül, egy ilyen részcsoport; ezek az $\boldsymbol{u}$ megfigyelő terében a forgatások.

Koordinátákban egy Galilei-transzormáció négyszer négyes mátrixként jelenik meg.

Ha $L^\mu{}_\nu$ egy ilyen mátrix, akkor az első feltétel szerint $L^0{}_0 = 1$, $L^0{}_k = 0$, a második feltétel szerint $L^i{}_k$ egy forgásmátrix. A mátrixokat az $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ felbontással blokkokra bontva azt írhatjuk, hogy koordinátákban a Galilei-transzformációk

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & R \end{pmatrix}$$

alakúak, ahol

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

és R háromszor hármas forgásmátrix.

Ebből azonnal látszik, hogy a Galilei-csoport hat dimenziós Lie-csoport.

Koordinátákban azok az elemek, amelyekre $v = 0$, részcsoportot alkotnak. Szokásosan mindig mindent koordinátákban tárgyalnak, ezért elterjedt tévhit, hogy „a” forgáscsoport a Galilei-csoport részcsoportja. A koordinátákban megjelenő részcsoportot azok az $\boldsymbol{L}$ Galilei-transzformációk alkotják, amelyekre $\boldsymbol{L}\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{e}_0$.

Koordinátákban könnyen megkaphatjuk a Galilei-csoport Lie-algebrájának elemeit, amelyek

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & A \end{pmatrix}$$

alakúak, ahol

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

és A antiszimmetrikus háromszor hármas mátrix.

Ezek alapján egyszerűen megadhatjuk a Lie-algebra egy bázisát. Nevezetesen, egy Lie-algebra-elem, amelyben $A = 0$, $v_2 = v_3 = 0$

$$V_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

és értelemszerűen hasonlóképp adódik V_2 és V_3 is.

Az a Lie-algebra-elem, amelyben $v = 0$ és A az első koordinátatengely körüli forgatásoknak felel meg,

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

és értelemszerűen hasonlóképp adódik A_2 és A_3 is.

A Lie-algebra bázisa tehát $A_1, A_2, A_3, V_1, V_2, V_3$.

A forgáscsoportra ismerteknek megfelelően

$$[A_j, A_k] = \epsilon_{jkl} A_l,$$

továbbá egyszerű számolás adja, hogy

$$[A_j, V_k] = \epsilon_{jkl} V_l, \quad [V_j, V_k] = 0.$$

2. Állítás. *A Galilei-csoport minden kommutátor-kociklusa a nullával kohomológ.*

Bizonyítás Azt már tudjuk, egy kohomológia-osztályon belül választhatjuk úgy a κ kociklust, hogy $\kappa(A_j, A_k) = 0$ legyen.

Továbbá a kommutátor-táblázatból adódóan

$$\kappa(A_j, V_k) = \kappa(V_j, A_k), \quad \kappa(V_j, V_k) = 0.$$

Definiáljuk a Lie-algebrán azt az η lineáris leképezést, amelyre $\eta(A_l) := 0$ és $\eta(V_l) := \frac{1}{2}\epsilon_{lmn}\kappa(A_m, V_n)$ teljesül. Ekkor

$$\eta([A_j, V_k]) = \epsilon_{jkl}\eta(V_l) = \frac{1}{2}\epsilon_{jkl}\epsilon_{lmn}\kappa(A_m, v_n)$$
$$= \frac{1}{2}(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})\kappa(A_m, V_n) = \kappa(A_j, V_k).$$

□

Végül megemlítjük, hogy az itt tárgyalt csoportot szokás *valódi Galilei-csoportnak* nevezni. A *teljes Galilei-csoport* négy diszjunkt, összefüggő halmaz uniója. Az egyik a valódi Galilei-csoport, a többiek pedig

$$\{\boldsymbol{L} : \mathbf{M} \to \mathbf{M} \text{ lineáris} \mid \boldsymbol{\tau} \circ \boldsymbol{L} = -\boldsymbol{\tau},\ \boldsymbol{L}|_{\mathbf{E}} \in SO(\mathbf{E})\},$$

$$\{\boldsymbol{L} : \mathbf{M} \to \mathbf{M} \text{ lineáris} \mid \boldsymbol{\tau} \circ \boldsymbol{L} = \boldsymbol{\tau},\ \boldsymbol{L}|_{\mathbf{E}} \in -SO(\mathbf{E})\},$$

$$\{\boldsymbol{L} : \mathbf{M} \to \mathbf{M} \text{ lineáris} \mid \boldsymbol{\tau} \circ \boldsymbol{L} = -\boldsymbol{\tau},\ \boldsymbol{L}|_{\mathbf{E}} \in -SO(\mathbf{E})\}.$$

Ezeket szokás rendre
– az időtükrözéssel kibővített résznek,
– a tértükrözéssel kibővített résznek,
– az idő-és tértükrözéssel kibővített résznek
hívni. A formulák alapján az elnevezések ésszerűnek látszanak, de félrevezetők, mert

– nincs „az” időtükrözés, csak bármely $\boldsymbol{u}$ abszolút sebesség esetén az $\boldsymbol{u}$-időtükrözés, $\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{\tau}$, amely megfordítja az $\boldsymbol{u}$-val párhuzamos vektorokat és invariánsan hagyja a térszerű vektorokat ($\mathbf{E}$ elemeit),

– nincs „a” tértükrözés, csak bármely $\boldsymbol{u}$ abszolút sebesség esetén az $\boldsymbol{u}$-tértükrözés, $2\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{I}$, amely invariánsan hagyja az $\boldsymbol{u}$-val párhuzamos vektorokat és megfordítja a térszerű vektorokat ($\mathbf{E}$ elemeit),

– van téridőtükrözés, $-\boldsymbol{I}$, amely egyébként bármely $\boldsymbol{u}$-időszerű tükrözés és $\boldsymbol{u}$-térszerű tükrözés szorzata.

2.2. Noether-csoport

A Noether-csoport

$$\mathcal{N} := \{L : \mathtt{M} \to \mathtt{M} \text{ affin} \mid \boldsymbol{L} \in \mathcal{G}\},$$

elemeit Noether-transzformációknak hívjuk (itt természetesen $\boldsymbol{L}$ az L alatti lineáris leképezés).

A Noether-csoportban a **téridőeltolások**, azok a Noether-transzformációk, amelyek alatti lineáris leképezés az identitás, részcsoportot alkotnak. Minden ilyen transzformáció $x \mapsto x + \boldsymbol{a}$ alakú, ahol $\boldsymbol{a} \in \mathbf{M}$.

Fontos, hogy a téreltolások is részcsoportot alkotnak a Noether-csoportban; ezek azok a fenti transzformációk, amelyekben $\boldsymbol{a} \in \mathbf{E}$. Ezzel szemben „az” időeltolások részcsopportja nem létezik; az igaz, hogy minden $\boldsymbol{u}$ abszolút sebesség esetén az $\boldsymbol{u}$-időeltolások azok a fenti transzformációk, amelyekben $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{t}\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{t} \in \mathbb{I}$ esetén.

A Galilei-csoport *nem részcsoportja* a Noether-csoportnak, nem is lehet, mert a Noether-transzformációk $\mathtt{M} \to \mathtt{M}$ affin leképezések, a Galilei-transzformációk pedig $\mathbf{M} \to \mathbf{M}$ lineáris leképezések.

„A” Galilei-csoport tehát nem létezik a Noether-csoporton belül. Viszont van kontinuum sok részcsoportja a Noether-csoportnak, amely izomorf a Galilei-csoporttal. Nevezetesen, bármely $x \in \mathtt{M}$ esetén azok az L Noether-transzformációk, amelyekre $L(x) = x$ teljesül, egy ilyen részcsoport.

Koordinátákban egy Noether-transzforáció $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ affin transzformáció, amely megadható mint egy lineáris leképezés és egy eltolás egymásutánja. Közelebbről, ha x^μ a koordinátái az $x-o$ téridőpontnak, akkor egy Noether-transzformációt egy $L^\mu{}_\nu$ Galilei-transzformációval és egy a^μ vektorral adhatunk meg úgy, hogy

$$x^\mu \mapsto L^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu.$$

Koordinátákban azok az elemek, amelyekre $a^\mu = 0$, részcsoportot alkotnak. Szokásosan mindig mindent koordinátákban tárgyalnak, ezért elterjedt tévhit, hogy „a” a Galilei-csoport a Noether-csoport részcsoportja. A koordinátákban megjelenő részcsoportot azok az L Noether-transzformációk alkotják, amelyekre $L(o) = o$. A koordinátás tárgyalásban úgy tűnik, hogy a Noether-csoport a Galilei-csoport kiegészítése a téridőeltolásokkal, ezért szokás a Noether-csoportot inhomogén Galilei-csoportnak is nevezni.

Koordinátákban egy Noether-transzformációt ügyes trükkel $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ lineáris leképezéssel tudunk reprezentálni úgy, hogy az $\mathbb{R}^5 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ felbontással blokkmátrix-alakban

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f & 1 & 0 \\ e & v & R \end{pmatrix} \tag{1}$$

alakú, ahol v és R a Galilei-csoportnál megismert mennyiségek, $f \in \mathbb{R}$ és

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}.$$

Ebből is látszik, hogy a Noether-csoport tíz dimenziós Lie-csoport.

Koordinátákban könnyen megkaphatjuk a Noether-csoport Lie-algebrájának egy bázisát. Nevezetesen, A_k és V_k lényegében a Galilei-csoportnál megismertek, egy nulla sorral és oszloppal kiegészítve. Továbbá

$$F := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

és értelemszerűen hasonlóképp adódik E_2 és E_3 is.

A Lie-algebra bázisa tehát $A_1, A_2, A_3, V_1, V_2, V_3, F, E_1, E_2, E_3$.

A Galilei-csoportra ismerteknek megfelelően

$$[A_j, A_k] = \epsilon_{jkl} A_l, \quad [A_j, V_k] = \epsilon_{jkl} V_l, \quad [V_j, V_k] = 0,$$

továbbá

$$[A_j, F] = 0, \quad [A_j, E_k] = \epsilon_{jkl} E_l,$$
$$[V_j, F] = E_j, \quad [V_j, E_k] = 0,$$
$$[E_j, F] = 0, \quad [E_j, E_k] = 0.$$

3. Állítás. *Kölcsönösen egyértelmű kapcsolat létesíthető a valós számok és a Noether-csoport kommutátor-kociklusainak kohomológia-osztályai között úgy, hgy az m valós számmal jellemzett κ_m-re*

$$\kappa_m(V_j, E_k) = m\delta_{jk},$$

az összes többi bázis elemen felvett értéke nulla.

Következésképpen a gyenge kohomológia-osztályokat nemnegatív valós számok jellemzik.

Bizonyítás Azt már tudjuk, egy kohomológia-osztályon belül választhatjuk úgy a κ kociklust, hogy $\kappa(A_j, A_k) = 0$, $\kappa(A_j, V_k) = 0$, $\kappa(V_j, V_k) = 0$ legyen.

Továbbá a kommutátor-táblázatból adódóan

$$\kappa(A_j, F) = 0, \quad \kappa(A_j, E_k) = \kappa(E_j, A_k),$$

$$\kappa(V_j, F) = \frac{1}{2}\epsilon_{jik}\kappa(A_i, E_k), \quad \kappa(V_j, E_k) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\kappa(V_i, E_i),$$

$$\kappa(E_j, F) = 0, \quad \kappa(E_j, E_k) = 0.$$

Definiáljuk a Lie-algebrán azt az η lineáris leképezést, amelyre $\eta(A_l) := 0$, $\eta(V_l) := 0$, $\eta(E_l) := \frac{1}{2}\epsilon_{lmn}\kappa(A_m, E_n)$ teljesül, továbbá $\eta(F) := \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\kappa(V_i, E_i)$ $=: m$. Az eddig megismert módon ellenőrizhetjük, hogy $\eta([A_j, E_k]) = \kappa(A_j, V_k)$, $\eta([E_j, F]) = \kappa(E_j, F)$ és így tovább, végül $\eta([V_j, E_k]) = 0$. □

Érdemes megemlíteni, hogy az itt megjelenő m valós szám kötődik a koordinátázáshoz, pontosabban a mértékegységek választásához. Más mértékegység-választás esetén más valós szám jellemzi ugyanazt a kohomológia-osztályt. Abszolút módon, vagyis megszabadulva a mértékegységektől, kohomológia-osztályokat $\frac{\mathbb{I}}{\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}}$ elemei jellemzik.

3. Relativisztikus téridő

Használom az $(\mathtt{M}, \mathbb{I}, \boldsymbol{g})$ relativisztikus téridőmodell fogalmait, az ebben kevésbé tájékozott, a fizika szokásos koordinátás leírását ismerők kedvéért a fontos formulákat átírom koordinátákra is.

$\mathtt{M}$ négy dimenziós irányított affin tér az $\mathbf{M}$ vektortér fölött,

$\mathbb{I}$ az időtartamok (és távolságok) mértékegyenese,

$\boldsymbol{g} : \mathbf{M}\times\mathbf{M} \to \mathbb{I}\otimes\mathbb{I}$ Lorentz-forma ($(1, 3)$ típusú pszeudo-euklideszi szerkezet).

Most a csoportok ábrázolása szempontjából úgy lesz célszerű vennünk, hogy $\boldsymbol{g}$ az időszerű vektorokon pozitív, a térszerű vektorokon negatív, továbbá helyette egyszerűen pontszorzást írunk: $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$.

Egy $\boldsymbol{L} : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ lineáris leképezés $\boldsymbol{L}^*$ Lorentz-adjungáltját az

$$(\boldsymbol{L}^*\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} := \boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{L}\boldsymbol{y}) \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{M})$$

formulával definiáljuk.

A téridővektorok azaz $\mathbf{M}$ elemeinek a koordinátáit mindig egy s (szekundum) időegység, $\boldsymbol{e}_0, e_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ Lorentz-ortonormált bázissal adjuk meg, azaz $\boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e}_0 = \mathrm{s}^2$, $\boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e}_k = 0$, $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k = -\delta_{ik}\mathrm{s}^2$ $(i, k = 1, 2, 3)$; összefoglalva

$$\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu = g_{\mu\nu}\mathrm{s}^2,$$

ahol $g_{\mu\nu} = 0$ ha $\mu \neq \nu$, $g_{00} = 1$, $g_{kk} = -1$. Az így adott kordinátázásban $\mathbf{M}$ elemei $\{x^\mu \mid \mu = 0, 1, 2, 3\}$ számnégyesként jelennek meg; a reprezentált elem $\sum_{\mu=0}^{3} x^\mu \boldsymbol{e}_\mu$.

A következőkben a görög indexek a $0, 1, 2, 3$ értékeken futnak végik, a latin indexek az $1, 2, 3$ értékeken, és az egybeeső indexekre automatikusan összegezni kell (ha csak nem mondjuk az ellenkezőjét).

A Lorentz-szorzással $\mathbf{M}^*$ azonosítható $\frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}}$-vel. Ezt az azonosítást úgy szokásosan úgy tüntetjük fel, hogy a kovektorok koordinátáit alsó indexekkel látjuk el: ha $\boldsymbol{p} \in \mathbf{M}^*$, akkor $p_\mu := \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{e}_\mu$, és az indexeket fel- és lehúzhatjuk a $p^0 := p_0$, $p^k := -p_k$, illetve $\mathbf{x}_0 := x^0$, $x_k := -x^k$.

Célszerű lesz bevezetni az $\boldsymbol{n}_\mu := \frac{\boldsymbol{e}_\mu}{\mathrm{s}}$ vektorokat, a $\frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}}$ elemeit, amelyekre

$$\boldsymbol{n}_\mu \cdot \boldsymbol{n}_\nu = g_{\mu\nu}.$$

$\frac{\boldsymbol{e}_0}{\mathrm{s}}$ egy abszolút sebesség, ezért a téridő-vektorok korodinátázása nem más, mint az $\boldsymbol{u} := \frac{\boldsymbol{e}_0}{\mathrm{s}}$ megfigyelő általi széthasításuk, majd a három dimenziós $\boldsymbol{u}$-térszerű vektorok szokásos koordinátázása.

Koordinátákban $\mathbb{I}$-t $\mathbb{R}$ reprezentálja (egy α valós szám megadja, hogy a megfelelő időtartam $\alpha\mathrm{s}$).

A téridő koordinátázását egy o „kezdőpont” választásával visszavezetjük a vektorok koordinátázására, azaz $x \in \mathtt{M}$ koordinátái az $x - o \in \mathbf{M}$ koordinátái lesznek.

Összefoglalva: koordinátákban
$\mathtt{M} \sim \mathbb{R}^4$,
$\mathbf{M} \sim \mathbb{R}^4$,
$\mathbb{I} \sim \mathbb{R}$,
$\boldsymbol{g} \sim g_{\mu\nu}$, azaz $\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{y} \sim g_{\mu\nu}x^\mu y^\nu$ (Eisntein-összegzés).

3.1. Lorentz-csoport

A Lorentz-csoport

$$\mathcal{L} := \{\boldsymbol{L} : \mathbf{M} \to \mathbf{M} \text{ lineáris, nyílirányítás tartó} \mid \boldsymbol{L}^*\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I}, \det \boldsymbol{L} > 0\},$$

elemeit Lorentz-transzformációknak hívjuk.

Az $\boldsymbol{L}^*\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I}$ egyenlőség azt jelenti, hogy $\boldsymbol{L}$ megtartja a Lorentz-formát, $(\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{L}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$.

A nyílirányítástarás azt jelenti, hogy ha $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0$, akkor $\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{L}\mathbf{x} > 0$.

Sajnos, a Lorentz-transzformációk koordinátázott alakja meglehetősen bonyolult, nem olyan áttekinthető, mint a Galilei-transzformációké. Nem is foglalkozunk ezekkel. Csak annyit említünk meg, hogy a koordinátázott alakok alapján szokták azt mondani, hogy „a” forgáscsoport részcsoportja a Lorentz-csoportnak. Ez nem igaz, csak úgy, mint a Galilei-csopot esetén. Az igaz, hogy van kontinuum sok részcsoportja a Lorentz-csoportnak, amely izomorf egy forgáscsoporttal: bármely $\boldsymbol{u} \in V(1)$ esetén azok az $\boldsymbol{L}$ Lorentz-transzformációk, amelyekre $\boldsymbol{Lu} = \boldsymbol{u}$ teljesül, egy ilyen részcsoport. Ezek az $\boldsymbol{u}$ megfigyelő terében a forgatások.

A Lorentz-csoport Lie-algebrája, a forgáscsoport esetén megismert érvek analogonjaként

$$\{\boldsymbol{A} : \mathbf{M} \to \mathbf{M} \text{ lineáris} \mid \boldsymbol{A}^* = -\boldsymbol{A}\},$$

más szóval a Lorentz-antiszimmetrikus lineáris leképezések. Mivel ezek hat dimenziós alteret alkotnak, a Lorentz-csoport hat dimenziós Lie-csoport.

A Lie-algebra elemeit viszont könnyű kezelni koordinátákban. A téridővektorok $\boldsymbol{n}_\mu$ báziselemeivel a Lie-algebra egy bázisát

$$\boldsymbol{A}_{\mu\nu} := \{\boldsymbol{n}_\mu \wedge \boldsymbol{n}_\nu \mid \mu < \nu = 0, 1, 2, 3\}$$

alakban adhatjuk meg, ahol $\wedge$ a már megismert antiszimmerikus tenzorszorzat.

Célszerű bevezetni a

$$\boldsymbol{V}_k := \boldsymbol{A}_{0,k} \qquad \boldsymbol{A}_k := \frac{1}{2}\epsilon_{kjl}\boldsymbol{A}_{jl}$$

jelölést. ϵ a Levi–Civita-szimbólum. Egyszerű tény, hogy $\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{n}_k = 0$.

Koordinátákban

$$V_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

és értelemszerűen hasonlóképp adódik V_2 és V_3 is, továbbá

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

és értelemszerűen hasonlóképp adódik A_2 és A_3 is.

A Lie-algebra bázisa tehát $A_1, A_2, A_3, V_1, V_2, V_3$.

A forgáscsoportra ismerteknek megfelelően

$$[A_j, A_k] = \epsilon_{jkl}A_l,$$

továbbá egyszerű számolás adja, hogy

$$[A_j, V_k] = \epsilon_{jkl}V_l, \quad [V_j, V_k] = \epsilon_{jkl}A_l.$$

4. Állítás. *A Lorentz-csoport minden kommutátor-kociklusa a nullával kohomológ.*

Bizonyítás Azt már tudjuk, egy kohomológia-osztályon belül választhatjuk úgy a κ kociklust, hogy $\kappa(A_j, A_k) = 0$ legyen.

Továbbá a kommutátor-táblázatból adódóan

$$\kappa(A_j, V_k) = \kappa(V_j, A_k), \quad \kappa(V_j, V_k) = \kappa(A_j, A_k) = 0.$$

Definiáljuk a Lie-algebrán azt az η lineáris leképépzést, amelyre $\eta(A_l) := 0$ és $\eta(V_l) := \frac{1}{2}\epsilon_{lmn}\kappa(A_m, V_n)$ teljesül. Ekkor, mint a Galilei-csoportnál, $\eta([A_j, V_k]) = \kappa(A_j, V_k)$, és $\eta([V_j, V_k]) = \kappa(V_j, V_k)$ adódik. $\square$

Végül megemlítjük, hogy az itt tárgyalt csoportot szokás *valódi Lorentz-csoportnak* nevezni. A *teljes Lorentz-csoport* négy diszjunkt, összefüggő halmaz uniója. Az egyik a valódi Lorentz-csoport, a többiek pedig

$$\{\boldsymbol{L} : \mathbf{M} \to \mathbf{M} \text{ lineáris, nyílirányítás váltó} \mid \boldsymbol{L}^*\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I}, \det \boldsymbol{L} < 0\},$$

$$\{\boldsymbol{L} : \mathbf{M} \to \mathbf{M} \text{ lineáris, nyílirányítás tartó} \mid \boldsymbol{L}^*\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I}, \det \boldsymbol{L} < 0\},$$

$$\{\boldsymbol{L} : \mathbf{M} \to \mathbf{M} \text{ lineáris, nyílirányítás váltó} \mid \boldsymbol{L}^*\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I}, \det \boldsymbol{L} > 0\}.$$

Ezeket szokás rendre
– az időtükrözéssel kibővített résznek,
– a tértükrözéssel kibővített résznek,
– az idő-és tértükrözéssel kibővített résznek
hívni. Az elnevezések félrevezetők, mert
– nincs „az" időtükrözés, csak bármely $\boldsymbol{u}$ abszolút sebesség esetén az $\boldsymbol{u}$-időtükrözés, $\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}$, amely megfordítja az $\boldsymbol{u}$-val párhuzamos vektorokat és invariánsan hagyja az $\boldsymbol{u}$-térszerű vektorokat ($\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ elemeit),
– nincs „a" tértükrözés, csak bármely $\boldsymbol{u}$ abszolút sebesség esetén az $\boldsymbol{u}$-tértükrözés, $2\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} - \boldsymbol{I}$, amely invariánsan hagyja az $\boldsymbol{u}$-val párhuzamos vektorokat és megfordítja az $\boldsymbol{u}$-térszerű vektorokat ($\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ elemeit),
– van téridőtükrözés, $-\boldsymbol{I}$, amely egyébként bármely $\boldsymbol{u}$-időszerű tükrözés és $\boldsymbol{u}$-térszerű tükrözés szorzata.

3.2. Poincaré-csoport

A Poincaré-csoport

$$\mathcal{P} := \{L : \mathtt{M} \to \mathtt{M} \text{ affin} \mid \boldsymbol{L} \in \mathcal{L}\},$$

elemeit Poincaré-transzformációknak hívjuk (itt természetesen $\boldsymbol{L}$ az L alatti lineáris leképezés).

A Poincaré-csoportban a **téridőeltolások**, azok a Poincaré-transzformációk, amelyek alatti lineáris leképezés az identitás, részcsoportot alkotnak. Minden ilyen transzformáció $x \mapsto x + \boldsymbol{a}$ alakú, ahol $\boldsymbol{a} \in \mathbf{M}$.

Fontos, hogy sem „a" téreltolások, sem „az" időeltolások nem léteznek, csak minden $\boldsymbol{u}$ abszolút sebesség esetén az $\boldsymbol{u}$-téreltolások és $\boldsymbol{u}$-időeltolások.

A Lorentz-csoport *nem részcsoportja* a Poincaré-csoportnak, nem is lehet, mert a Poincaré-transzformációk $\mathtt{M} \to \mathtt{M}$ affin leképezések, a Lorentz-transzformációk pedig $\mathbf{M} \to \mathbf{M}$ lineáris leképezések.

„A" Lorentz-csoport nem létezik a Poincaré-csoporton belül. Viszont van kontinuum sok részcsoportja a Poincaré-csoportnak, amely izomorf a Lorentz-csoporttal. Nevezetesen, bármely $x \in \mathtt{M}$ esetén azok az L Noether-transzformációk, amelyekre $L(x) = x$ teljesül, egy ilyen részcsoport.

Koordinátákban egy Poincaré-transzforáció $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ affin transzformáció, amely megadható mint egy lineáris leképezés és egy eltolás egymásutánja. Közelebbről, ha x^μ a koordinátái az $x-o$ téridőpontnak, akkor egy Noether-transzformációt egy $L^\mu{}_\nu$ Lorentz-transzformációval és egy a^μ vektorral adhatunk meg úgy, hogy

$$x^\mu \mapsto L^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu.$$

Koordinátákban azok az elemek, amelyekre $a^\mu = 0$, részcsoportot alkotnak. Szokásosan mindig mindent koordinátákban tárgyalnak, ezért elterjedt tévhit, hogy „a” a Lorentz-csoport a Poincaré-csoport részcsoportja. A koordinátákban megjelenő részcsoportot azok az L Poincaré-transzformációk alkotják, amelyekre $L(o) = o$. A koordinátás tárgyalásban úgy tűnik, hogy a Poincaré-csoport a Lorentz-csoport kiegészítése a téridőeltolásokkal, ezért szokás a Poincaré-csoportot inhomogén Lorenzt-csoportnak is nevezni.

A Poincaré-csoport tíz dimenziós Lie-csoport, Lie-algebrája egy bázisát a Noether-csoportnál megismert módon kapjuk. Nevezetesen, A_k és V_k lényegében a Lorentz-csoportnál megismertek, egy nulla sorral és oszloppal kiegészítve. Továbbá

$$F := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

és értelemszerűen hasonlóképp adódik E_2 és E_3 is.

A Lie-algebra bázisa tehát $A_1, A_2, A_3, V_1, V_2, V_3, F, E_1, E_2, E_3$.

A Lorentz-csoportra ismerteknek megfelelően

$$[A_j, A_k] = \epsilon_{jkl} A_l, \quad [A_j, V_k] = \epsilon_{jkl} V_l, \quad [V_j, V_k] = \epsilon_{jkl} A_l,$$

továbbá

$$[A_j, F] = 0, \quad [A_j, E_k] = \epsilon_{jkl} E_l,$$
$$[V_j, F] = E_j, \quad [V_j, E_k] = \delta_{jk} F,$$
$$[E_j, F] = 0, \quad [E_j, E_k] = 0.$$

5. Állítás. *A Poincaré-csoport minden kommutátor-kiciklusa a nullával kohomológ.*

Bizonyítás Azt már tudjuk, egy kohomológia-osztályon belül választhajuk úgy a κ kociklust, hogy $\kappa(A_j, A_k) = 0$, $\kappa(A_j, V_k) = 0$, $\kappa(V_j, V_k) = 0$ legyen.

Továbbá a kommutátor-táblázatból adódóan

$$\kappa(A_j, F) = 0, \quad \kappa(A_j, E_k) = \kappa(E_j, A_k),$$

$$\kappa(V_j, F) = \frac{1}{2} \epsilon_{jik} \kappa(A_i, E_k), \quad \kappa(V_j, E_k) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \kappa(V_i, E_i),$$

$$\kappa(E_j, F) = 0, \quad \kappa(E_j, E_k) = 0.$$

Definiáljuk a Lie-algebrán azt az η lineáris leképezést, amelyre $\eta(A_l) := 0$, $\eta(V_l) := 0$, $\eta(E_l) := \frac{1}{2} \epsilon_{lmn} \kappa(A_m, E_n)$ teljesül, továbbá $\eta(F) := \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \kappa(V_i, E_i)$. Az eddigiek szerint egismert módon ellenőrizhetjük, hogy $\eta([A_j, E_k]) = \kappa(A_j, V_k)$, $\eta([E_j, F]) = \kappa(E_j, F)$ és így tovább, végül $\eta([V_j, E_k]) = \kappa(V_j, E_k)$.

4. A három dimenziós forgáscsoport

4.1. Unitér sugárábrázolások

4.1.1. Felépítés infitezimális generátorokból

A három dimenziós forgáscsoport kompakt.

Ismert tétel, hogy kompakt csoport irreducibilis, folytonos unitér sugárábrázolásai véges dimenziósak. A Gårding-tétel utáni megjegyzéseink szerint tehát az ilyen ábrázolások megtalálását lehetővé teszi a Lie-algebrának az „ábrázolása”, vagyis hogy megtaláljunk olyan S_1, S_2, S_3 önadjungált operátorokat, amelyekre – lévén minden kommutátor-kociklus a nullával kohomológ –

$$[S_j, S_k] = i\epsilon_{jkl} S_l \qquad (j, k = 1, 2, 3)$$

teljesül (és persze i az imaginárius egység).

Állapítsuk meg először is azt az egyszerű tényt, hogy az $S^2 := S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ operátorra $[S^2, S_k] = 0$ teljesül minden $k = 1, 2, 3$ esetén, ezért az irreducibilitás miatt, a Schur-lemma idevágó alakja szerint S^2 az $\mathbf{1}$ identitás-operátor többszöröse, azaz valamely λ számmal

$$S^2 = \lambda \mathbf{1}.$$

Vezessük be az $S_+ := S_1 + iS_2$ és $S_- := S_1 - iS_2$ operátorokat, amelyekre

$$[S_+, S_3] = -S_+, \qquad [S_-, S_3] = S_-,$$

áll fönn.

Ezért, ha v_α az S_3-nak α sajátértékű sajátvektora, akkor

$$S_3(S_\pm v_\alpha) = (\alpha \pm 1) S_\pm v_\alpha,$$

vagyis S_+ és S_- az S_3 egy sajátvektorát átviszi egy másik, eggyel nagyobb, illetve kisebb sajátértékű sajátvektorába.

Továbbá

$$S_- S_+ = S^2 - S_3^2 - S_3, \qquad S_+ S_- = S^2 - S_3^2 + S_3$$

is igaz, amiből

$$S_+ S_- v_\alpha = (\lambda - \alpha^2 - \alpha) v_\alpha, \qquad S_- S_+ v_\alpha = (\lambda - \alpha^2 + \alpha) v_\alpha$$

következik; szemléletesen „S_+ visszahozza, amit S_- elvitt, és viszont”. Kivéve persze azt az esetet, amikor $\lambda - \alpha^2 - \alpha$ vagy $\lambda - \alpha^2 + \alpha$ nulla.

Legyen s az S_3 legnagyobb sajátértéke. Ekkor a mondottak alapján $S_+ v_s = 0$, amiből

$$\lambda = s(s + 1).$$

Továbbá $(S_-)^n v_s$ az S_3-nak $s - n$ sajátértékű sajátvektorai az $n = 1, 2, \ldots$ értékekre. Mivel a Hilbert-tér véges dimenziós, van olyan legkisebb m, amelyre

$(S_-)^m v_s = 0$, azaz $\lambda - (s-m)^2 + (s-m) = 0$. Ebből $m = 2s+1$ adódik, így tehát S_3 sajátétékei

$$s, s-1, s-2, \dots, -s;$$

a $v_s, v_{s-1}, \dots, v_{-s}$ vektorok kifeszítette $2s+1$ dimenziós altér invariáns S_3-ra és $S_\pm$-ra, ezért S_1-re és S_2-re is, tehát az ábrázolásra is, amely irreducibilis, így ez az altér maga az egész Hilbert-tér.

A Hilbert-tér $2s+1$ dimenziós. Mivel $2s+1$-nek pozitív egész számnak kell lennie, s nemnegatív félegész szám lehet.

Még egy kérdés maradt hátra: az így kapott $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ lehetőségek közül melyek a „valódiak". Ismét utalunk a Gårding-tétel utáni megjegyzésünkre: egyszeresen összefüggő Lie-csoport esetén mind az volna; de a forgáscsoport nem egyszeresen összefüggő.

Az $s = 0$ esetben a Hilbert-tér egy dimenziós, az ábrázolás tiriviális, minden elemet az identitás ábrázol.

Az $s = \frac{1}{2}$ esetben az $S_3^{(1/2)}$ sajátvektorainak bázisában az infinitezimális generátorok mátrixai

$$S_k^{(1/2)} = \frac{1}{2}\sigma_k \qquad (k = 1, 2, 3),$$

ahol

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a Pauli-mátrixok.

Ezek az $\mathbf{N}(3)$ egy $\boldsymbol{n}_k$ ortonormált bázisának elemei körüli forgatások ininitezimális generátorai. Az $\boldsymbol{n} \in \mathbf{N}(3)$ egységvektor körüli forgatások infinitezimális generátora

$$S^{(1/2)}(\boldsymbol{n}) = \frac{1}{2}\sigma(\boldsymbol{n}),$$

ahol

$$\sigma(\boldsymbol{n}) := \sum_{k=1}^{3} (\boldsymbol{n}_k \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}_k \sigma_k.$$

Tehát az $\boldsymbol{n}$ körüli $-\pi < \varphi < \pi$ szögű forgatást ábrázoló operátor

$$U_{R_n(\varphi)} := \exp\left(\frac{i\varphi}{2}\sigma(\boldsymbol{n})\right) = \left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\mathbf{1} + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) i\sigma(\boldsymbol{n})\right).$$

Ebből az is látszik, hogy ténylegesen sugárábrázolást kaptunk, a hozzá tartozó unitér kociklus a $+1, -1$ értéket veszi fel, ugyanis $U_{R_n(\pi)} U_{R_n(\pi)} = -U_{R_n(2\pi)}$.

Az $s = 1$ esetben az $S_3^{(1)}$ sajátvektorainak bázisában az infinitezimális generátorok mátrixai

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Jelölje $\mathcal{H}$ az $\frac{1}{2}$ súlyú ábrázolás Hilbert-terét, és v_+, v_- az S_3 sajátvektorait, $|v_+| = |v_-| = 1$.

$\mathcal{H}$-nak önmagával szimmetrikus tenzorszorzata három dimenziós, ennek egy bázisa

$$v_+ \otimes v_+, \frac{1}{\sqrt{2}}(v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+), v_- \otimes v_-.$$

Ebben a bázisban a $S_1^{(1/2)} \otimes S_1^{(1/2)}, S_2^{(1/2)} \otimes S_2^{(1/2)}, S_3^{(1/2)} \otimes S_3^{(1/2)}$ mátrixai éppen a fenti mátrixok. Ez az jelenti, hogy az 1 súlyú ábrázolás az $\frac{1}{2}$ súlyú ábrázolás szimmetrikus tenzorszorzata; ezért a hozzá tartozó unitér kociklus azonosan 1, vagyis unitér ábrázolást kapunk.

Ennek általánosításaként összefoglalva:

6. Állítás. *A forgáscsoport irrducibilis unitér sugárábrázolásainak ekvivalencia-osztályait nemnegatív félegész számokkal lehet jellemezni, amelyeket az ábrázolások súlyának nevezünk. Az s súlyú ábrázolást hordozó Hilbert-tér $2s+1$ dimenziós. Az s súlyú ábrázolás az $\frac{1}{2}$ súlyúnak a $2s$-szeres szimmetrikus tenzorszorzataként áll elő. A nemegész súlyú ábrázolások ténylegesen sugárábrázolások (az unitér kociklus nem konstans), az egész súlyúak pedig valódi unitér ábrázolások (az unitér kociklus konstans).*

4.1.2. Felépítés Clifford-*-algebrával

A Clifford-algebrákról szóló Melléklet 13 és 14 fejezete szerint megvalósul $\mathbb{C}^2$-n a három dimenziós euklideszi tér forgáscsoportjának $\boldsymbol{R} \mapsto D_{\boldsymbol{R}}$ *-unitér sugárábrázolása, amelyre

$$D_{\boldsymbol{R}}\sigma(\boldsymbol{n})D_{\boldsymbol{R}}^{-1} = \sigma(\boldsymbol{R}\boldsymbol{n}) \qquad (\boldsymbol{n} \in \mathbf{N}(3)$$

teljesül. Mivel itt a * skalárszorzatra vonatkozó adjungálás (lásd a Melléklet 14 fejezetét), az unitér szó szokásos jelentése szerint egyszerűen unitér sugárábrázolást mondunk.

Tudjuk, hogy a forgáscsoport Lie-algebráját az $\mathbf{N}(3) \to \mathbf{N}(3)$ antiszimmetrikus leképzések alkotják; ennek egy bázisa $\boldsymbol{A}_k$ $(k = 1,2,3)$, amelyet $\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{n}_j := \epsilon_{kjl}n_l$ határoz meg. Szemléletesen, az $\boldsymbol{n}_k$ körüli forgatások egyparaméteres részcsoportjának a generátora.

Legyen az S_1 önadjungált operátor az $\boldsymbol{n}_1$ körüli forgatások $\alpha \mapsto \boldsymbol{R}_1(\alpha) := \exp(\alpha\boldsymbol{A}_1)$ egyparaméteres részcsoportjának az infinitezimális generátora az ábrázolásban; ekkor

$$\sigma_1 = \sigma(\boldsymbol{n}_1) = \sigma(\boldsymbol{R}_1(\alpha)\boldsymbol{n}_1) = D_{\boldsymbol{R}_1(\alpha)}\sigma(\boldsymbol{n}_1)D_{\boldsymbol{R}_1(\alpha)}^{-1},$$

amiből az α szerinti differenciálhányadost véve a nullában azt kapjuk, hogy $[S_1, \sigma_1] = 0$ (kommutátor). Minthogy S_1 az identitás és a Pauli-mátrixok lineáris kombinációja, könnyű ellenőrizni, hogy ebből $S_1 = a_1\mathbf{1} + b_1\sigma_1$ adódik. Mindez igaz az 1 index helyett a 2 és 3 indexre is.

Továbá (a Gårding-tétel miatt a forgáscsoport Lie-algebrájának kommutátora ismeretében) $[S_k, S_l] = i\epsilon_{klm}S_m$ teljesül, amiből $a_k = 0$ és $b_k = \frac{1}{2}$, vagyis

$$S_k = \frac{1}{2}\sigma_k \qquad (k = 1,2,3).$$

Ez az ábrázolás tehát az előzőekben megkapott $\frac{1}{2}$ súlyú irreducibilis unitér sugárábrázolás,

4.2. Szimpletkikus ábrázolások

4.2.1. Irreducibilis ábrázolások

Lie-csoportoknak differenciálható sokaságokon megvalósított tranzitív (irreducibilis) ábrázolásai ekvivalensek zárt részcsoportok mellékosztályain megadott ábrázolásokkal. A forgáscsoportnak részcsoportjai a triválisokon (önmagán és az identitáson) kívül az adott tengely körüli forgatásokból álló részcsoportok; ezek egy dimenziósak, és a különböző tengelyek körüli forgatások konjugált részcsoportok. Ennek megfelelően a forgáscsoport tranzitív ábrázolásait hordozó sokaság lehet nulla dimenziós, három dimenziós és két dimenziós. Mivel szimplektikus ábrázolásokat keresünk, csak a nulla dimenziós (triviális) és két dimenziós sokaság jöhet szóba.

A korábban mondottak szerint két dimenziós differenciálható ábrázolásokat egyszerűen $s > 0$ esetére S_s-en, az s suarú gömbhéjon valósíthatunk meg a

$$K^s_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{s}) := \boldsymbol{R}\boldsymbol{s} \qquad (\boldsymbol{s} \in S_s, \boldsymbol{R} \in SO(\mathbf{N}(3))$$

formulával.

Vegyük a gömbhéjon a hármas-szorzattal megadott

$$\omega_s(\boldsymbol{s})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \frac{1}{s^2}(\boldsymbol{s}\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})$$

szimplektikus formát. A részsokaságokra vonatkozó ismerteink szerint egyszerű tény, hogy az $S_s \to S_s$, $\boldsymbol{s} \mapsto \boldsymbol{R}\boldsymbol{s}$ függvény deriváltja minden pontban az $\boldsymbol{R}$-rel való szorzás (ha $\mathbf{x}$ az $\boldsymbol{s}$ feletti értintőtér eleme, akkor $\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}$ az $\boldsymbol{R}\boldsymbol{s}$ feletti érintőtérben van), formulában $\mathrm{D}K^s_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{s})\mathbf{x} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{x}$, így

$$\left((K^s_{\boldsymbol{R}})^*\omega_s\right)(\boldsymbol{s})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{s^2}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{s})(\boldsymbol{R}\boldsymbol{x})(\boldsymbol{R}\boldsymbol{y}) = \omega_s(\boldsymbol{s})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

tehát K^s szimplektikus ábrázolás az (S_s, ω_s) szimplektikus sokaságon.

Tekintsük az s és $\hat{s}$ sugarú (S, ω), illetve $(\hat{S}, \hat{\omega})$ szimplektikus sokaságon megadott K, illetve $\hat{K}$ ábrázolásokat. Tudjuk, ezek akkor és csak akkor ekvivalensek ha a $p(\boldsymbol{s}) := \frac{\hat{s}}{s}\boldsymbol{s}$ (nyújtás vagy zsugarítás) S és $\hat{S}$ között szimplektikus, azaz $p^*\hat{\omega} = \omega$. Mivel p deriváltja minden pontban az $\frac{\hat{s}}{s}$-vel való szorzás,

$$\omega(\boldsymbol{s})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \hat{\omega}(p(\boldsymbol{s}))(\mathrm{D}p(\boldsymbol{s})\boldsymbol{x}, \mathrm{D}p(\boldsymbol{s})\boldsymbol{y}) = \frac{1}{\hat{s}^2}\left(\frac{\hat{s}}{s}\boldsymbol{s}\frac{\hat{s}}{s}\mathbf{x}\frac{\hat{s}}{s}\mathbf{x}\right) = \frac{\hat{s}}{s}\omega(\mathbf{s})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

amiből $s = \hat{s}$ következik, vagyis a különböző sugarú gömbhéjakon az ábrázolásak inekvivalensek.

Mivel S_s két dimenziós sokaság és ω_s nem elfajuló két-forma, bármely más két-forma – speciálisan szimplektikus forma – $f\omega_s$ alakú valamely f függvényre. Tehát a forgáscsoport más szimplektikus ábrázolását csak úgy kaphatjuk meg, hogy $K^*_s(f\omega_s) = f\omega_s$ teljesül teljesül valamely f-re. Ez viszont azt jelenti, hogy $f(\boldsymbol{R}\boldsymbol{s}) = f(\boldsymbol{s})$ minden $\boldsymbol{R}$-re, ami szerint f konstans. Tehát a szimplektikus forma konstans szorzó erejéig egyértelmű egy gömbhéjon.

Összefoglalva:

7. Állítás. *A forgáscsoport tranzitív szimplektikus ábrázolásainak ekvivalenciaosztályait $s \geq 0$ számokkal jellemezhetjük úgy, hogy az $s = 0$-nak a nulla dimenziós triviális ábrázolás felel meg, $s > 0$-nak pedig a fent megadott ábrázolás.*

4.2.2. Infinitezimális generátorok és generátorfüggvények

A forgáscsoport Lie-algebrája $\boldsymbol{A}$ elemének megfelelő infintezimális generátor

$$Z^s_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{s}) = \frac{d}{d\alpha} K^s_{\exp(\alpha\mathbf{A})}(\boldsymbol{s})|_{\alpha=0} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}.$$

Természetesen $\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}$ az $\boldsymbol{s}$ feletti érintőtér eleme (merőleges $\boldsymbol{s}$-re).

Ekkor

$$\omega_s(\boldsymbol{s})(\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{s^2}(\boldsymbol{s}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{s})\boldsymbol{y}) = \frac{1}{s^2}(\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}) \cdot \boldsymbol{y},$$

ahol $\times$ a vektoriális szorzást jelöli, és persze $\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{y} = 0$.

Legyen most $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$, amelyre $\boldsymbol{A}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{s}$ (vektoriális szorzás), azaz koordinátákban $A_{ik} = -\epsilon_{ikl} a_l$ (más szóval $\boldsymbol{A}$ az $\boldsymbol{a}$ körüli forgatások egyparaméteres részcsoportjának megfelelő Lie-algebra elem). Ezzel

$$\frac{1}{s^2}(\boldsymbol{s} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{s})) = \boldsymbol{a} - \frac{(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{s}}{s^2} =: \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{s}}$$

amely $\boldsymbol{a}$-nak az $\boldsymbol{s}$-re merőleges komponense.

Ez az eredmény indokolja, hogy miért szerepel a szimplektikus formában a hármas szorzat előtt az $\frac{1}{s^2}$ faktor.

Tehát

$$j_{\omega_s}(Z^s_{\mathbf{A}}) = \boldsymbol{s} \mapsto \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{s}} \cdot \; ,$$

ahol a jobb oldalon álló szimbólum az $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{s}}$-sel való skaláris szorzást jelenti, és ilyen értelemben $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{s}} \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{s}}(S_s)^*$.

Ezért a megfelelő generátorfüggvény

$$H^s_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{s}) := \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{s}.$$

Valóban, $H^s_{\mathbf{A}}$ az adott formulával az egész $\mathbb{R}^3$-on értelmezhető, és mint ilyen, a deriváltja az $\boldsymbol{a}$-val való skaláris szorzás. Tudjuk, hogy ekkor az S_s-en értelmezett függvény deriváltját az egész téren értelmezett függvény deriváltjának az érintőterekre való leszűkítése adja meg; ez a leszűkítés az $\boldsymbol{s}$ feletti értintőtérre az $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{s}}$-sel való skaláris szorzás, hiszen ha $\boldsymbol{y} \in \mathrm{T}_s(\S_s)$, azaz $\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{y} = 0$, akkor $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{s}} \cdot \boldsymbol{y}$.

Speciálisan, a k-ik koordináta-tengely körüli forgatások generátorfüggvénye ($\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n}_k$, $\|\boldsymbol{n}_k| = 1$)

$$H^s_k(\boldsymbol{s}) = s_k.$$

5. A Nother-csoport

Mint tudjuk, a Noether-csoport kommutátor-kociklusainak gyenge kohomológiaosztályait az $\frac{\mathbb{I}}{\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}}$ nem negatív m elemeivel jellemezhetjük ezért ezek megjelennek az unitér sugárábrázolások ekvivalencia-osztályainak jellemzésénél. A továbbiakban az $m \neq 0$ esetet tekintjük.

5.1. Unitér sugárábrázolások

5.1.1. Koordinátás tárgyalás

Ábrázolások Először a koordinátákban megadott Noether-csoportot tekintjük. Ennek elemei (f, e, v, R) alakúak, ahol $f \in \mathbb{R}$, $e \in \mathbb{R}^3$, $v \in \mathbb{R}^3$ és R forgatás $\mathbb{R}^3$-ban, az unitér kociklusok gyenge kohomológia-osztályait jellemző mennyiségek pedig $m > 0$ valós számok.

8. Állítás. *$m > 0$ esetén*

$$\hat{\mathcal{H}}^m := \{\hat{\Phi} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C} \mid \left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\triangle}{2m}\right)\hat{\Phi} = 0$$
$$\hat{\Phi}(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^3) \qquad (t \in \mathbb{R})\};$$

Hilbert-tér a

$$\langle\hat{\Phi}, \hat{\Psi}\rangle := \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\Phi}(t, q)^* \hat{\Psi}(t, q)\ dq$$

t-től független skaláris szorzattal.

Megjegyzendő, hogy a definícióban a differenciálást disztribúció-értelemben kell venni, illetve ha közönséges értelemben vesszük, akkor $\mathcal{H}^m$ a kapcsos zárójelben szereplő függvények vektorterének az adott skalárszorzatra vonatkozó teljessé tétele.

9. Állítás. *A $\mathcal{H}^m$-en az*

$$\left(\hat{U}^m_{(f,e,v,R)}\hat{\Phi}\right)(t, q) = \exp\left[-\frac{i}{2}\left(\frac{m|v|^2}{2}f + mv \cdot e\right)\right] \times$$
$$\exp\left[i\left(\frac{m|v|^2}{2}t - mv \cdot q\right)\right]\hat{\Phi}(t - f, R^{-1}(q - tv - e)).$$

formulával megadott U^m a Noether-csoport folytonos irrreducibilis sugárábrázolása, amelyhez tartozó kommutátor-kociklus kohomológia-osztályát m jellemzi. Következésképpen a különböző m-ekhez tartozó ábrázolások inekvivalensek.

Bizonyítás Egyszerű számolással meggyőződünk arról, hogy ha $\hat{\Phi}$ a Hilberttér eleme, akkor $\hat{U}^m_{(f,e,v,R)}\hat{\Phi}$ is az. Továbbá az $R^{-1}(q-tv-e) \mapsto q'$ helyettesítéses integrálással nyilvánvaló, hogy $\hat{U}^m_{(f,e,v,R)}$ izometrikus, sőt unitér, mert $\hat{U}^m_{(f,e,v,R)^{-1}}$ az inverze ((1) alapján $(f, e, v, R)^{-1} = (-f, -fR^{-1}v - R^{-1}e, -R^{-1}v, R^{-1})$). Hosszas de elemi számolással láthatjuk, hogy U^m valóban sugárábrázolás. Folytonos, mert a Lie-csoportokra megismert folytonossági kritérium alapján elég, hogy

$$\lim_{(f,e,v,R)\to(0,0,0,I)} \int \left|\left(\hat{U}^m_{(f,e,v,R)}\hat{\Phi} - \hat{\Phi}\right)(t, q)\right|^2\ dq = 0$$

teljesüljön a q-ban kompakt tartójú, sima $\hat{\Phi}$-kre, ami a Lagrange-féle középértéktétellel és az integrálokra vonatkozó Lebesgue-féle majorálási tétellel látható be.

Az irreducibilitásra és a kommutátor-kociklusra vonatkozóan később adunk igazolást.

Infinitezimális generátorok Az *időeltolások* egyparaméteres részcsoportjának az ininitezimális generátora

$$-i\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\triangle}{2m} =: -H,$$

amelyet az

$$i\frac{\partial \hat{U}^m_{(f,0,0,I)}\hat{\Phi}(t,q)}{\partial f}|_{f=0} = -i\frac{\partial \hat{\Phi}(t,q)}{\partial t},$$

formulából kapunk.

A *k irányú téreltolások* infinitezimális generátora

$$-i\frac{\partial}{\partial q_k} =: p_k,$$

amelyet az ára az

$$i\frac{\partial \hat{U}^m_{(0,e_k,0,I)}\Phi(t,q)}{\partial e_k}|_{e_k=0}$$

formulából kapunk.

Hasonlóan, a *k irányú speciális Galilei-transzformációk* infinitezimális generátora

$$-mq_k - it\frac{\partial}{\partial q_k},$$

amelyet az

$$i\frac{\partial \hat{U}^m_{(0,0,v_k,I)}\Phi(t,q)}{\partial v_k}|_{v_k=0}$$

formulából kapunk.

Végül a *k-ik tengely körüli forgatások* ininitezimális generátora

$$-i\frac{\partial}{\partial q_j}(-A_k)_{jl}q_l = \epsilon_{klj}q_l\left(-i\frac{\partial}{\partial q_j}\right) =: J_k,$$

amelyet az

$$i\frac{\partial \hat{U}^m_{(0,0,0,R_k(\varphi))}\Phi(t,q)}{\partial \varphi}|_{\varphi=0}$$

formulából kapunk.

A speciális Galilei-transzformációk és a téreltolások kommutálnak, a hozzájuk tartozó Lie-algebra-elemek kommutátora nulla. Viszont az infinitezimális generátorokra

$$\left[-i\frac{\partial}{\partial q_k}, -mq_j - i\frac{\partial}{\partial q_j}\right] \subset im\delta_{kj}$$

teljesül, ami szerint:

Az $\hat{U}^m$ sugárábrázoláshoz tartozó kociklust m jellemzi.

Mielőtt tovább megyünk, felhívjuk a figyelmet: az időeltolások, a speciális Galilei-transzformációk és a forgatások valójában nem részcsoportjai a Noether-csoportnak, ezek a részcsoportok csak koordinátákban jelennek meg.

A Hilbert-tér függvényeire kirótt feltétel az m tömegű szabad anyagi pont Schrödinger-egyenlete, csak egy kicsit más értelmezéssel, mint szokásos. Erről később még szólunk.

Az infinitezimális generátorok ismerősek, mint egy m tömegű, szabad anyagi pont kvantummechanikai fizikai mennyiségei:
– az időeltolásoké a negatív energia,
– a téreltolásoké az impulzus,
– a forgatásoké az impulzusmomentum.

Egyedül a speciális Galilei-transzformációk infinitezimális generátora zavarba ejtő, azt nem lehet fizikai mennyiségnek felfogni a szokásos értelemben, mert ott szerepel benne a t idő, ami nem operátor a szokásos tárgyalásokban.

Ábrázolás „állapottéren” A $V : \hat{\mathcal{H}}^m \to \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^3)$, $\hat{\Phi} \mapsto \hat{\Phi}(0,\cdot) =: \psi$ leképezés unitér. Inverze a $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ függvényhez a

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} = i\frac{\triangle}{2m}\hat{\Phi}$$

differeniálegyenletnek a $\hat{\Phi}(0,\cdot) = \psi$ kezdeti feltétel melletti megoldását rendeli, amely

$$\hat{\Phi}(t,\cdot) = e^{-itH}\psi.$$

Ezzel az ábrázolást átvisszük $L^2(\mathbb{R}^3)$-ra az $V\hat{U}^m_{(f,e,v,R)}V^{-1}$ képlettel. Egyszerű számolás adja, hogy

$$\left(V\hat{U}^m_{(f,e,v,R)}V^{-1}\psi\right)(q) = \\ = \exp\left[-\frac{i}{2}\left(\frac{m|v|^2}{2}f + mv\cdot e\right)\right]\exp\left[-imv\cdot q\right]e^{ifH}\psi(R^{-1}(q-e)).$$

Az infinitezimális generátorok itt
– az időeltolásoké, $-H := \frac{\triangle}{2m}$, a negatív energia (az idő szerinti parciális deriváltnak nincs értelme),
– a téreltolásoké $p_k := -i\frac{\partial}{\partial q_k}$, az impulzus,
– a speciális Galilei-transzormációké a $-mq_k$-val való szorzás operátora , a „helyzet” szorozva a tömeg negatívjával,
– a forgatásoké a $J_k := \epsilon_{klj}q_l\left(-i\frac{\partial}{\partial q_j}\right)$ impulzusmomentum.

Tudjuk, hogy egy Lie-csoport unitér sugárábrázolása akkor és csak akkor irreducibilis, ha csupán az egység többszöröse, mint korlátos operátor, cserélhető fel a Lie-algebra egy bázisának megfelelő infinitezimális generátorokkal.

Neumann János egy tétele szerint $L^2(\mathbb{R}^3)$-ban egy korlátos operátor, mely felcserélhető mind a q_k szorzásoperátorokkal, mind az $i\frac{\partial}{\partial q_k}$ a differenciálás-operátorokkal, szükségszerűen az egység többszöröse.

Ezek szerint:

Az $\hat{U}^m$ ábrázolás irreducibilis.

5.1.2. Fontos tudnivalók

A kvantummechanika szokásos tárgyalásaiban az anyagi pont „állapottere” $L^2(\mathbb{R}^3)$, a ψ állapot „időfejlődését” a

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -iH\psi$$

Schrödinger-egyenlet írja le, amelynek a megoldása

$$\psi(t) = e^{-itH}\psi.$$

Az időeltolás ábrázolása itt

$$\left(V\hat{U}^m_{(f,0,0,I)}V^{-1}\psi\right)(q) = e^{ifH}\psi(q).$$

Ebből azt a téves következtetést szokás levonni, hogy az állapotok időfejlődését automatikusan megadja a negatív időeltolások ábrázolása. Ez nem igaz. Itt is tetten érhetjük, miként vezethet félre a koodinátákban való megfogalmazás, gondolkozás.

Majd még világosabban meglátjuk a koordinátamentes tárgyalásban, miről van szó. Most már előre vetítjük: a téridőben nincs „az” időeltolás, továbbá nem lehet szétválasztani az időt és a teret, tehát csak ilyen állítás lehetne helytálló: az állapotok téridő-fejlődést automatikusan megadja a negatív téridőeltolások ábrázolása. Ami koordinátákban azt is jelentené, hogy az állapotok „térfejlődését” is az ábrázolás adja meg, vagyis azt, hogyan függ az állapot a térkoordinátáktól, a $q \mapsto \psi(q)$ függvényt, amiről szó sem lehet.

Külön érdekes a helyzet, mint fizikai mennyiség. Már csak azért is, mert a kvantummechanikát (nemrelativisztikusan) a helyzet és impulzus kanonikus felcserélési szabályára alapítják. Látni fogjuk, hogy „a” helyzet nem létezik. Az „állapotteres” megfogalmazásban a speciális Galilei-transzformációk infinitezimális generátora, osztva a tömeggel, adja a szokásos felfogású helyzetet.

A speciális Galilei-transzformációk és a téreltolások infinitezimális generátorainak kommutátora itt

$$\left[-i\frac{\partial}{\partial q_k}, -mq_j\right] \subset im\delta_{kj},$$

ami nem más, mint a **kanonikus felcserélési reláció**!

Véssük az eszünkbe azt, amire az előbbiekben felhívtuk a figyelmet: ez a felcserélési reláció annak a következménye, hogy a Noether-csoport kommutátorkociklusai nem kohomológok a nullával.

Még egyet kell megjegyeznünk. $L^2(\mathbb{R}^3)$-on a Fourier-transzformáció a szorzás operátorát átviszi a differenciálás operátorába, és viszont. A Fourier-transzformáció alkalmazása után $\mathbb{R}^3$ elemeit p-vel jelölve,

- az impulzus-komponensek a p_k-val való szorzásoperátorok,
- a helyzet-komponensek az $i\frac{\partial}{\partial p_k}$ operátorok.

Ez az úgynevezett impulzus-reprezentáció, amikoris a függvények változója az impulzusértékek.

5.1.3. Téridős tárgyalás

Ábrázolások Legyen $\Phi : \mathtt{M} \to \mathbb{C}$ differenciálható függvény. Ennek van abszolút térszerű deriváltja, amelyet

$$\Phi(x + \boldsymbol{q}) - \Phi(x) = \nabla\Phi(x)\boldsymbol{q} + \mathrm{ordo}(\boldsymbol{q})$$

határoz meg, ahol $\boldsymbol{q} \in \mathbf{E}$. A térszerű második derivált is létezik, amelyre a $\triangle := \nabla^2$ szokásos jelölést alkalmazzuk.

Az időszerű derviált azonban önmagában nem létezik, csak minden $\boldsymbol{u}$ abszolút sebességre az $\boldsymbol{u}$-időszerű derivált, amelyet

$$\Phi(x + \boldsymbol{tu}) - \Phi(x) = \boldsymbol{t}\mathrm{D}_{\boldsymbol{u}}\Phi(x) + \mathrm{ordo}(\boldsymbol{t})$$

határoz meg, ahol $\boldsymbol{t} \in \mathbb{I}$.

Még azt kell megemlíteni, hogy egy t időpont a téridőben egy három dimenziós affin altér (hipersík) az abszolút térszerű vektorok $\mathbf{E}$ tere fölött. Ezért minden t időponton adott az $\mathbf{E}$ Lebesgue-mértéke által indukált λ_t mérték (az $\mathbf{E}$ Lebesgue-mértéke egy szorzó erejéig egyértelmű, amely úgy van adva, hogy egy $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ ortonormált rendszer meghatározta kocka mértéke (térfogata) 1).

Az unitér kocikusokat sajnos csak egy o „kezdőpont” és egy $\boldsymbol{u}$ abszolút sebesség segítségével tudjuk megadni. A koordinátás tárgyalás átfogalmazása ezután egyszerűen adódik.

Az m-mel jellemzett unitér kociklusnak megfelelő ábrázolást hordozó Hilbert-teret is csak egy abszolút sebességgel tudjuk megadni:

$$\mathcal{H}^m := \{\Phi : \mathtt{M} \to \mathbb{C} \mid \left(i\mathrm{D}_{\boldsymbol{u}} + \frac{\triangle}{2m}\right)\Phi = 0 \\ \Phi|_t \in L^2(t) \qquad (t \in I)\};$$

meg lehet mutatni, hogy az adott feltétel mellett

$$\int_t (\Phi|_t)^* \Psi|_t \, d\lambda_t$$

ugyanaz az érték minden t-re, és ezt definiáljuk Φ és Ψ skalárszorzataként ($\Phi|_t$ a Φ-nek a t hipersíkra való leszűkítése).

Az ábrázolás:

$$\begin{aligned}
&\left(U_L^m\Phi\right)(x) = \\
&= \exp\left[-\frac{i}{2}\left(\frac{m|\boldsymbol{Lu} - \boldsymbol{u}|^2}{2}\boldsymbol{\tau}(L(o) - o) + m(\boldsymbol{Lu} - \boldsymbol{u}) \cdot \sigma_{\boldsymbol{u}}(L(o) - o)\right)\right] \times \\
&\quad \exp\left[i\left(\frac{m|\boldsymbol{Lu} - \boldsymbol{u}|^2}{2}\boldsymbol{\tau}(x - o)t - m(\boldsymbol{Lu} - \boldsymbol{u}) \cdot \sigma_{\boldsymbol{u}}(x - o)\right)\right]\Phi(L^{-1}(x)).
\end{aligned}$$

A 2 fejezetben adott koordinátázással ($\boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{e}_0}{\mathrm{s}}$) ez ekvivalens az előbbiekben tárgyalt koordinátás ábrázolással. Ez azt is jelenti, hogy egy o' kezdőponttal és $\boldsymbol{u}'$ abszolút sebességgel létesített ábrázolás ekvivalens a fentivel.

Infinitezimális generátorok Itt azt kapjuk, hogy

– $-i\mathrm{D}_{\boldsymbol{u}} = \frac{\triangle}{2m}$ az $\boldsymbol{u}$-időeltolások generátora ,

– $-i\boldsymbol{e} \cdot \nabla$ az $\boldsymbol{e} \in \mathbf{E}$ irányú téreltolások generátora,

– $\boldsymbol{n} \cdot (-m\sigma_{\boldsymbol{u}}(x - o) - i\boldsymbol{\tau}(x - o)\nabla$ az o kezdőponttú, $\boldsymbol{n} \in \frac{\mathbf{E}}{I}$ $(|\boldsymbol{n}| = 1)$ irányú speciális Galilei-transzformációk (amelyek $x \mapsto x + v\boldsymbol{\tau}(x - o)\boldsymbol{n}$ $v \in \mathbb{R}$ alakúak) generátora,

– $\sigma_{\boldsymbol{u}}(x - o)\boldsymbol{A}(-i\nabla)$ az o kezdőponttú, $\boldsymbol{u}$-térbeli, az $\boldsymbol{A} : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ antiszimmetrikus leképezés meghatározta forgatások (amelyek $x \mapsto o + \boldsymbol{e}^{\alpha \boldsymbol{A}}\sigma_{\boldsymbol{u}}(x - o)$ alakúak) generátora.

Az első kettőt és a negyediket a szokásos értelműnek tekinthetjük:
– az $\boldsymbol{u}$ megfigyelőhöz viszonyított energia negatívja,
– az $\boldsymbol{u}$ szerinti impulzus,
– az $\boldsymbol{u}$ megfigyelő terében az $o + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$ középpontú impulzusmomentum fizikai mennyiségének.

Mi van a harmadikkal? Láttuk, koordinátás alakban is probléma volt az értelmezésével, és csak egy unitér transzformációval jutotunk el a „helyzethez".

A probléma gyökere szokásos nézőpontból ott van, hogy a másik három fizikai mennyiség „mozgásállandó", míg a helyzet nem az. A koordinátás alak sugallatára az $\boldsymbol{u}$ megfigyelő terében az $o + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$ kezdőpontú helyzetvektor fizikai mennyisége $\sigma_{\boldsymbol{u}}(x-o)$ volna, azaz $\boldsymbol{n}$ irányú komponense az $\boldsymbol{n} \cdot \sigma_{\boldsymbol{u}}(x-o)$-val való szorzás. Csakhogy ez *nem oprátor* a $\mathcal{H}^m$ Hilbert-térben (ahogy a q_k-val szorzás sem a koordinátás alakban): ha Φ a $\mathcal{H}^m$ eleme, akkor $x \mapsto \boldsymbol{n} \cdot \sigma_{\boldsymbol{u}}(x-o)\Phi(x)$ már nem az, mert nem tesz eleget a definiáló differenciálegyenletnek.

Azt kell megállapítanunk, hogy *nem létezik* „az" $\boldsymbol{u}$ megfigyelő terében az $o + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$ kezdőponttú helyzet (pláne nem „a" helyzet).

Viszont létezik $Q_{\boldsymbol{u},o,t}$, az $\boldsymbol{u}$ megfigyelő terében az $o+\mathbb{I}\boldsymbol{u}$ kezdőponttú helyzet miden t időpillanatban, amelyet

$$\left(Q_{\boldsymbol{u},o,t}\Phi\right)(x) := \left(\sigma_{\boldsymbol{u}}(x-o) - i\frac{\boldsymbol{\tau}(x-o)\nabla}{m}\right)\Phi(x) \qquad (\tau(x) = t)$$

ad meg.

5.1.4. Folyamatok

Az előző tárgyalásokban
– $\Phi : \mathtt{M} \to \mathbb{C}$, a téridőn adott függvényt jelöli,
– $\hat{\Phi} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$, a koordinátákban adott függvényt jelöli.

$\hat{\Phi}(t, \cdot)$ minden t-re ugyanabban az $\mathbb{R}^3$-ban értelmezett négyzetesen integrálható függvény, és a $\hat{\Phi} \mapsto \hat{\Phi}(0, \cdot)$ leképezés az ábrázolást hordozó $\hat{\mathcal{H}}^m$ Hilbert-teret átviszi az „időtől független" $L^2(\mathbb{R}^3)$-ba, és az eredeti $\hat{\mathcal{H}}^m$ elemeit úgy kapjuk meg, hogy $L^2(\mathbb{R}^3)$-ra, az „állapottérre" rárakjuk az „időfejlődést".

Ezzel szemben $\Phi|_t$ minden t-re más és más halmazon értelmezett négyzetesen integrálható függvény. Persze itt is egy rögzített t_0 esetén $\Phi \mapsto \Phi|_{t_0}$ az ábrázolást hordozó $\mathcal{H}^m$ Hilbert-teret átviszi $\boldsymbol{L}^2(\lambda_{t_0})$-ba, amelyet viszont nem lehet egyszerűen „időtől független állapottérnek" tekinteni.

Állapottér és arra rakott időfejlődés a koordinátás nézőpontból ered.

Koordinátamentesen, azaz abszolút módon azt lájuk, hogy a Hilbert-tér elemei a Schrödinger-típusú differenciálegyenlet meghatározta **folyamatok**; állapot és időfejlődés eggyé olvad egy folyamatban. Pontosabban, folyamat van, amelyet egy megfigyelő széthasít állapotra és időfejlődésre.

A Noether-csoport elemeit ábrázoló unitér operátorok folyamatokhoz rendelnek folyamatokat. Speciálisan az $\boldsymbol{u}$-időeltolás egy folyamathoz egy másik folyamatot rendel, és semmi köze ahhoz, hogy egy folyamat hogyan történik: a szokásos hiedelemmel ellentétben az időeltolás (ami nincs is) nem határozza meg az „időfejlődést".

5.1.5. Spinek

Az előzekben tárgyalt unitér sugárábrázolások irreducibilisek. További irreducibilis ábrázolásokat kapunk, ha ezekhez „hozzáragasztjuk” a forgáscsoport irredubilis ábrázolásait.

Nevezetesen, legyen m mint előbb, és s félegész nemnegatív szám, és

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{m,s} := \{\Phi : \mathtt{M} \to \mathbb{C}^{2s+1} \mid \left(i\mathrm{D}_{\boldsymbol{u}} + \frac{\triangle}{2m}\right)\Phi = 0 \\ \Phi|_t \in L^2(t) \qquad (t \in I)\};\end{aligned}$$

meg lehet mutatni, hogy az adott feltétel mellett

$$\int_t \Phi|_t(x)^* \cdot \Psi|_t(x)\; d\lambda_t(x)$$

ugyanaz az érték minden t-re, és ezt definiáljuk Φ és Ψ skalárszorzataként, ahol az integrandus a $\Phi|_t(x)$ és $\Psi|_t(x)$ szokásos skalárszorzata $\mathbb{C}^{2s+1}$-ben.

Az ábrázolás

$$\begin{aligned}&(U_L^{m,s}\Phi)(x) = \\ &= \exp\left[-\frac{i}{2}\left(\frac{m|\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}-\mathbf{u}|^2}{2}\boldsymbol{\tau}(L(o)-o) + m(\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}-\mathbf{u})\cdot\sigma_{\boldsymbol{u}}(L(o)-o)\right)\right]\times \\ &\exp\left[i\left(\frac{m|\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}-\mathbf{u}|^2}{2}\boldsymbol{\tau}(x-o)t - m(\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}-\mathbf{u})\cdot\sigma_{\boldsymbol{u}}(x-o)\right)\right] D^s_{\boldsymbol{L}|_{\mathbf{E}}}\Phi(L^{-1}(x)),\end{aligned}$$

ahol D^s a forgáscsoport s súlyú unitér sugárábrázolása.

Érdemes felfigyelni arra, hogy $\mathcal{H}^{m,s} = \mathcal{H}^m \otimes \mathbb{C}^{2s+1}$ és $U_L^{m,s} = U_L^m \otimes U^s_{\boldsymbol{R}}$, ahol U^s a forgáscsoport s súlyú ábrázolása és $\boldsymbol{R} := \boldsymbol{L}|_{\mathbf{E}}$.

Az infinitezimális generátorokra csak a forgatásoknál kapunk az előbbiektől eltérő eredményt, nevezetesen az

$$S^s_A + \sigma_{\boldsymbol{u}}(\cdot - o)\boldsymbol{A}(-i\nabla)$$

mennyiséget, ahol S^s_A az s súlyú ábrázolás infinitezimális generátora itt pontonkénti értelmezéssel, azaz $(S^s_A\Phi)(x) := S^s_A(\Phi(x))$.

Érdemes megjegyezni, hogy külön a pályamomentum és a spin is operátor a Hilbert-téren, nem csak az összegük.

Bebizonyítható, hogy más ábrázolás nincs is, pontosabban:

10. Állítás. *A Noether-csoport olyan folytonos, irreducibilis, unitér sugárábrázolásainak, amelyekben az unitér kociklus nem azonosan* 1*, az ekvivalenciaosztályait* (m, s) *párral jellemezhetjük, egy ilyen párhoz tartozó ábrázolást az előzőekben megadott* $U^{m,s}$ *valósítja meg.*

5.2. Szimplektikus ábrázolások

5.2.1. Koordinátás tárgyalás

Ábrázolások Most is először a koordinátákban megadott Noether-csoportot tekintjük. Ennek elemei (f, e, v, R) alakúak, ahol $f \in \mathbb{R}$, $e \in \mathbb{R}^3$, $v \in \mathbb{R}^3$ és R $\mathbb{R}^3$-beli forgatás.

$\mathbb{R}^3$ duálisa azonosul $\mathbb{R}^3$-mal a skalárszorzaton keresztül, továbbá minden pontjában az érintőtere önmaga. A világos megkülönböztetés céljából $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$-nak, mint sokaságnak az elemeit a (q,p) szimbólummal jelöljük, míg $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ az $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$-nak, mint érintőtérnek az elemeit jelöli.

Adjuk meg az $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ sokaságon a kanonikus szimplektikus formát

$$(\omega(q,p))((\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),(\boldsymbol{q}',\boldsymbol{p}')) := \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}' - \boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{q}$$

a képlettel, ahol $\cdot$ a szokásos skaláris szorzat $\mathbb{R}^3$-on. Ez minden pontban ugyanaz, a továbbiakban el is hagyjuk (q,p)-t a jelölésből. Világos, hogy

$$\omega((R\boldsymbol{q},R\boldsymbol{p}),(R\boldsymbol{q}',R\boldsymbol{p}')) = \omega((\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),(\boldsymbol{q}',\boldsymbol{p}'))$$

minden R forgatásra.

A továbbiak érdekében célszerű lesz ω-t háromszor hármas blokkokkal mátrixalakban felírni:

$$\omega = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

11. Állítás. *$m>0$ esetére az*

$$K^m_{(f,e,v,R)}(q,p) := \left(Rq - f\frac{Rp+mv}{m} + e, Rp+mv\right) \qquad \big((q,p)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\big)$$

formulával megadva K^m a Noether-csoport irreducibilis szimplektikus ábrázolása $\big(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3,\omega\big)$-n, amelyhez tartozó kommutátor-kociklust m jellemzi. Következésképpen a különböző m-ekhez tartozó ábrázolások inekvivalens.

Bizonyítás Egyszerű számolás adja, hogy $(f,e,v,R)\to K^m_{(f,e,v,R)}$ csoporthomomorfizmus, az pedig nyilvánvaló, hogy $\big((f,e,v,R),(q,p)\big)\to K^m_{(f,e,v,R)}(q,p)$ differenciálható.

$K^m_{(f,e,v,R)}$ megtartja a szimplektikus formát, hiszen a deriváltja, szintén blokkmátrixban

$$\mathrm{D}K^m_{(f,e,v,R)}(q,p)[(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})] = \begin{pmatrix} R & -\frac{f}{m}R \\ 0 & R \end{pmatrix},$$

és

$$\begin{pmatrix} R^* & 0 \\ -\frac{f}{m}R^* & R^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R & -\frac{f}{m}R \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Irreducibilis (tranzitív), mert $(q,p) = K^m_{(0,q,p/m,I)}(0,0)$.

A kommutátor-kociklusokra vonatkozóan később adunk igazolást.

Infinitezmális generátorok és generátor-függvények Az *időeltolások* egyparaméteres részcsoportjának az ininitezimális generátora

$$Z_F(q,p) := \frac{\partial K^m_{(f,0,0,I)}(q,p)}{\partial f}|_{f=0} = \left(-\frac{p}{m},0\right).$$

A *k irányú téreltolások* infinitezimális generátora

$$Z_{E_k}(q,p) := \frac{\partial K^m_{(0,e_k,0,I)}(q,p)}{\partial e_k}|_{e_k=0} = (1_k,0),$$

ahol 1_k az a számhármas, amelynek a k-ik tagja 1, a többi nulla.

A *k irányú speciális Galilei-transzformációk* infinitezimális generátora

$$Z_{V_k}(q,p) := \frac{\partial K^m_{(0,0,v_k,I)}(q,p)}{\partial v_k}|_{v_k=0} = m(0,1_k).$$

A *k-ik tengely körüli forgatások* ininitezimális generátora

$$Z_{A_k}(q,p) := \frac{\partial K^m_{(0,0,0,R_k k(\alpha))}(q,p)}{\partial \alpha}|_{\alpha=0} = (A_k q, A_k p).$$

Ennek megfelelően az időeltolások H_F generátorfüggvényét a

$$\frac{\partial H_F(q,p)}{\partial p} = -\frac{p}{m}, \qquad -\frac{\partial H_F(q,p)}{\partial q} = 0$$

határozza meg, azaz

$$H_F(q,p) = -\frac{|p|^2}{2m}.$$

A téreltolások H_{E_k} generátorfüggvényét a

$$\frac{\partial H_{E_k}(q,p)}{\partial p} = 1_k, \qquad -\frac{\partial H_{E_k}(q,p)}{\partial q} = 0$$

határozza meg, azaz

$$H_{E_k}(q,p) = p_k.$$

A speciális Galilei-transzformációk H_{V_k} generátorfüggvényét a

$$\frac{\partial H_{V_k}(q,p)}{\partial p} = 0, \qquad -\frac{\partial H_{V_k}(q,p)}{\partial q} = m1_k$$

határozza meg, azaz

$$H_{V_k}(q,p) = -mq_k.$$

A forgatások H_{A_k} generátorfüggvényét a

$$\frac{\partial H_{A_k}(q,p)}{\partial p} = A_k p, \qquad -\frac{\partial H_{A_k}(q,p)}{\partial p} = A_k q$$

határozza meg, azaz

$$H_{A_k}(q,p) = qA_k p.$$

A generátor-függvények ismerősek, mint egy m tömegű, szabad anyagi pontnak a fáziséteren addottt fizikai mennyiségei:

– az időeltolásoké az energia negatívja,
– a téreltolásoké az impulzus,
– a speciális Galilei-transzformációké a negatív tömegszer helyzet,
– a forgatásoké az impulzusmomentum.

A speciális Galilei-transzformációk és a téreltolások kommutálnak, a hozzájuk tartozó Lie-algebra-elemek kommutátora nulla. Viszont a generátorfüggvények Poisson-zárójelére

$$\{p_k, -mq_j\} = m\delta_{kj}$$

teljesül, ami szerint:

A K^m szimplektikus ábrázoláshoz tartozó kociklust m jellemzi.

Mindez teljes összhangban van a 5.1.1 eredményeivel.

Továbbá azzal a szokásos szemlélettel is, hogy a fázistér pontjai az anyagi pont „állapotai”, amelyek „időfejlődését" a Hamilton-féle differenciálegyenlet határozza meg, tehát it is úgy tűnik, hogy az időfejlődést a negatív időeltolás ábrázolása adja meg.

A következőkben rávilágítunk erre a tévedésre.

5.2.2. Téridős tárgyalás

Ábrázolások Legyen m az $\frac{\mathbb{I}}{\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}}$ pozitív eleme (tömeg), és vezessük be a

$$V(m) := \left\{p \in \frac{\mathbf{M}}{\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}} \mid \boldsymbol{\tau}(p) = m\right\}$$

jelölést. Világos, hogy $p \in V(m)$ esetén $\boldsymbol{u}_p := \frac{p}{m}$ abszolút sebesség.

Felhívjuk a figyelmet, hogy p az $\frac{\mathbf{M}}{\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}}$ eleme, tehát vektor, és szokásunk szerint félkövér betűvel kellene jelölnünk. Itt azonban kivételt teszünk, hogy a relativisztikus esettel való párhuzamot kidomborítsuk.

Jelölje E_p az $\boldsymbol{u}_p$ abszolút sebességű tehetetlen világvonalak (az $\boldsymbol{u}_p$-vezette egyenesek) összességét, és tekintsük a

$$C := \bigcup_{p\in V(m)} E_p \times \{p\}$$

halmazt. Ennek egy eleme tehát (q, p) alakú, ahol $p \in V(m)$ és q az $\boldsymbol{u}_p$ vezette egyenes.

Az $o \in \mathtt{M}$ „kezdőponttal” és $\boldsymbol{u}$ abszolút sebességgel (megfigyelővel) megadott

$$h_{o,\boldsymbol{u}} : C \to \mathbf{E} \times \mathbf{E}^*, \quad (q, p) \mapsto (q \cap \tau(o) - o, p - m\boldsymbol{u})$$

leképezés bijekció (emlékezzünk, hogy $\mathbf{E}^* \equiv \frac{\mathbf{E}}{\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}}$); szavakban:

– $q \cap \tau(o) - o$ az a térszerű vektor, amely a q egyenesnek az o-val azonos pillanatbeli pontja és o között van,

– $p - m\boldsymbol{u} = m\left(\frac{p}{m} - \boldsymbol{u}\right)$ az az impulzus-érték, amely a $\frac{p}{m}$-nek az $\boldsymbol{u}$-ra vonatkozó relatív sebességéhez tartozik.

Egyszerűen adódik, hogy

$$h^{-1}_{o,\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \left(o + \boldsymbol{q} + \mathbb{I}\left(\boldsymbol{u} + \frac{\boldsymbol{p}}{m}\right), m\boldsymbol{u} + \boldsymbol{p}\right) \qquad ((\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \in \mathbf{E} \times \mathbf{E}^*).$$

$h_{o,\boldsymbol{u}}$-t általánosított (azaz vektor értékű) globális koordinátázásnak véve C-t differenciálható sokasággá tesszük (aki akarja, az $\mathbf{E}$ egy $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ ortonomált bázisával $\mathbf{E} \times \mathbf{E}^*$ helyett tekintheti $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$-at).

Ha o' egy másik kezdőpont, akkor az $o + \boldsymbol{q} + \mathbb{I}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{p}/m)$ egyenesnek az o'-vel azonos idejű pontja $o + \boldsymbol{q} + \boldsymbol{t}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{p}/m)$ alakú úgy, hogy $\boldsymbol{\tau}(o + \boldsymbol{q} + \boldsymbol{t}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{p}/m) - o') = 0$; ebből $\boldsymbol{t} = -\boldsymbol{\tau}(o - o')$, és (emlékezzünk a vektorok széthasítására) $o - o' = \sigma_{\boldsymbol{u}}(o - o') + \boldsymbol{\tau}(o - o')\boldsymbol{u}$, ezért

$$\left(h_{o',\boldsymbol{u}'} \circ h^{-1}_{o,\boldsymbol{u}}\right)(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{q} + \sigma_{\boldsymbol{u}}(o - o') - \boldsymbol{\tau}(o - o')\boldsymbol{p}/m, \boldsymbol{p} + m(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}').$$

Az áttérés egyszerű affin függvény, ezért a C érintőterét minden pontban azonosíthatjuk az $\mathbf{E}\times\mathbf{E}^*$ érintőterével, amely szintén $\mathbf{E}\times\mathbf{E}^*$.

C tehát hat dimenziós differenciálható sokaság.

Adjuk meg C-n az

$$(\omega_m(q,p))\big((\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),(\boldsymbol{q}',\boldsymbol{p}')\big) := (\boldsymbol{p}\mid\boldsymbol{q}') - (\boldsymbol{p}'\mid\boldsymbol{q})$$

szimplektikus formát, amely tehát minden (q,p) pontban ugyanaz, ezért a továbbiakban a el is hagyjuk (q,p)-t a jelölséből. Továbbá vegyük figyelembe, hogy az $\mathbf{E}^*\equiv\frac{\mathbf{E}}{\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}}$ azonosítás szerint $(\boldsymbol{p}\mid\boldsymbol{q})=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}$, ahol a pont az euklideszi szorzást jeleli.

Az L Noether-transzformációra definiáljuk a

$$K_L^m : C\to C,\quad (q,p)\mapsto (L[q],\boldsymbol{L}p)$$

leképezést, ahol $L[q]$ a q egyenesnek az L általi képe. Egyszerűen látszik, hogy K_L megtartja a szimplektikus formát,

$$(K_L^m)^*\omega_m\big((\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),(\boldsymbol{q}',\boldsymbol{p}')\big)=\omega_m\big((\boldsymbol{Lq},\boldsymbol{Lp}),(\boldsymbol{Lq}',\boldsymbol{Lp}')\big)=\omega_m\big((\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),(\boldsymbol{q}',\boldsymbol{p}')\big).$$

Továbbá az is világos, hogy $K_{L'}^m\circ K_L^m = K_{L'L}^m$, tehát $L\mapsto K_L^m$ a Noether-csoport szimplektikus ábrázolása.

Adjuk meg $(L[q],\boldsymbol{L}p)$-nek az $\boldsymbol{u}$ abszolút sebesség szerinti széthasított alakját! Ha $p=m\boldsymbol{u}+\boldsymbol{p}$ és $q=o+\boldsymbol{q}+\mathbb{I}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{p}/m)$, akkor $L[o+\boldsymbol{q}+\mathbb{I}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{p}/m)] = L(o)+\boldsymbol{Lq}+\mathbb{I}\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{p}/m)$. Ennek az egyenesnek az o-val azonos idejű pontja $L(o)+\boldsymbol{Lq}+\boldsymbol{tL}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{p}/m)$ arra $\boldsymbol{t}$-re, amelyet $\boldsymbol{\tau}(L(o)+\boldsymbol{Lq}+\boldsymbol{tL}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{p}/m)-o)=0$ határoz meg; az eredmény tehát $(L(o)-o)+\boldsymbol{Lq}-\boldsymbol{\tau}(L(o)-o)\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{p}/m)$. Ezt alkalmasn átírva a koordináták

$$\Big(\boldsymbol{Lq}-(\boldsymbol{\tau}(L(o)-o)(\boldsymbol{Lp}/m+\boldsymbol{Lu}-\boldsymbol{u})+\sigma_{\boldsymbol{u}}(L(o)-o),\boldsymbol{Lp}+m(\boldsymbol{Lu}-\boldsymbol{u})\Big).$$

Vezessük be az

$$\boldsymbol{f}:=\boldsymbol{\tau}(L(o)-o)\in\mathbb{I},\quad \mathbf{e}:=\sigma_{\boldsymbol{u}}(L(o)-o)\in\mathbf{E},\quad \mathbf{v}:=\boldsymbol{Lu}-\boldsymbol{u}\in\frac{\mathbf{E}}{\mathbb{I}},$$

$$\boldsymbol{R}:=\boldsymbol{L}_{\mathbf{E}}\in SO(\mathbf{E})$$

jelöléseket. Ezekkel az ábrázolás széthasított alaja

$$(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\mapsto\left(\boldsymbol{Rq}-\boldsymbol{f}\frac{\boldsymbol{Rp}+m\mathbf{v}}{m}+\mathbf{e},\boldsymbol{Rp}+m\mathbf{v}\right);$$

ha még $\mathbf{E}$-t koordinátázzuk, azaz $\mathbf{E}$-t és $\mathbf{E}^*$-t is $\mathbb{R}^3$-mal reprezentáljuk, ez megegyezik a koordinátákban tárgyalt ábrázolással.

5.2.3. Fontos tudnivalók

Mivel a klasszikus mechanika fogalmai „kézzelfoghatóbbak” számunkra, mint a kvantummechanika fogalmai, itt sokkal világosabban látjuk az abszolút (téridős) tárgyalás keretében, hogy az ábrázolást hordozó sokaság elemei egy tehetetlen anyagi pont **folyamatai**. Fázistér és arra rakott időfejlődés a koordinátás nézőpontból ered. A folyamat az egységes, alapvető fogalom, amelyet egy megfigyelő széthasít állapotra és időfejlődésre; különböző megfigyelők különböző állapottérre és időfejlödésre.

A Noether-csoport elemeit ábrázoló diffeomorfizmusok folyamatokhoz rendelnek folyamatokat. Speciálisan az $\boldsymbol{u}$-időeltolás egy folyamathoz egy másik folyamatot rendel, és semmi köze ahhoz, hogy egy folyamat hogyan történik: a szokásos hiedelemmel ellentétben az időeltolás (ami nincs is) nem határozza meg az „időfejlődést”.

5.2.4. Spinek

Az előzekben tárgyalt szimplektikus ábrázolások irreducibilisek (tranzitívok). További ireducibilis ábrázolásokat kapunk, ha ezekhez „hozzáragasztjuk” a forgáscsoport irredubilis ábrázolásait.

Nevezetesen, legyen $s \geq 0$ és vegyük a $C \times S_s$ sokaságon $\omega_m \times \omega_s$ szimpletikus formát és a $K_L^{m,s} := K_L^m \times K_{\boldsymbol{R}}^s$ ábrázolást, ahol $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{L}|_{\mathbf{E}}$.

Bebizonyítható, hogy más ábrázolás nincs is, pontosabban:

12. Állítás. *A Noether-csoport olyan szimplektikus ábrázolásainak, amelyben a kommutátor-kociklus nem nulla, az ekvivalencia-osztályait (m, s) párral jellemezhetjük, egy ilyen párhoz tartozó ábrázolást az előzőekben megadott $K^{m,s}$ valósítja meg.*

Az is közhiedelem, hogy a spin jellegzetesen kvantumos, a klasszikus mechanikától idegen fizikai mennyiség. Eredményünk rácáfol erre. A klasszikus spin automatikusan kijön az ábrázolásokból (ez igen, az időfejődés nem!). Persze a klasszikus mechanikához vezető közvetlen tapasztalatok nem utaltak a spin létezésére, ezért nem merült fel az elméletben.

6. A Lorentz-csoport

A következőkben minden további nélkül használjuk az $\mathbf{M}^* \equiv \frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}}$ azonosítást, amiből $\left(\frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}}\right)^* \equiv \frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}}$ is következik; mind a Lorentz-forma, mind a dualitás bilineáris formája helyett pontszorzást írunk.

Az eredetileg $\mathbf{M} \to \mathbf{M}$ lineáris leképezésnek definiált Lorentz-transzformációkat is minden további nélkül tekintjük akár $\frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}} \to \frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}}$, akár $\mathbf{M}^* \to \mathbf{M}^*$ lineáris transzformációknak.

A Clifford-algebrákról szóló Melléklet 13 és 15 fejezete szerint megvalósul $\mathbb{C}^4$-en a Lorentz-csoport $\boldsymbol{L} \mapsto D_{\boldsymbol{L}}$ $\star$-unitér sugárábrázolása, amelyre

$$D_{\boldsymbol{L}}\gamma(\mathbf{x})D_{\boldsymbol{L}}^{-1} = \gamma(\boldsymbol{L}\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x} \in \mathbf{M})$$

teljesül.

Tudjuk, hogy a Lorentz-csoport Lie-algebráját az $\mathbf{M} \to \mathbf{M}$ Lorentz-anti-szimmetrikus leképezések alkotják; ennek egy $\boldsymbol{n}_\mu \in \frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}}$ ortonormált rendszerrel adott bázisa

$$\boldsymbol{A}_{\mu\nu} := \boldsymbol{n}_\mu \wedge \boldsymbol{n}_\nu \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3,\ \mu < \nu),$$

ahol $\wedge$ az antiszimmetrikus szorzatot jelenti, azaz $\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{m} = \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{m} - \boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{n}$.

A Lorentz-csoportra korábban megismert (ott koordintákban adott) bázisával ez a következőképpen áll kapcsolatban:

$$\boldsymbol{A}_k := \frac{1}{2}\epsilon_{klm}\boldsymbol{A}_{lm}, \qquad \mathbf{V}_k = \boldsymbol{A}_{0k}. \tag{2}$$

A Lie-agebra-kommutátorokra egyszerűen kapjuk, hogy

$$[\boldsymbol{A}_{\mu\nu}, \boldsymbol{A}_{\kappa,\lambda}] = \delta_{\mu\kappa}\boldsymbol{A}_{\nu\lambda} - \delta_{\nu\lambda}A_{\mu\kappa}.$$

Legyen az $S_{\mu\nu}$ *-önadjungált operátor az $\boldsymbol{A}_{\mu\nu}$ Lie-algebra elem meghatá--rozta $\alpha \mapsto \boldsymbol{L}_{\mu\nu}(\alpha) := \boldsymbol{e}^{\alpha\boldsymbol{A}_{\mu\nu}}$ egyparaméteres csoport infinitezimális generátora az ábrázolásban.

Az $[\boldsymbol{L}_{\mu\nu}(\alpha), \boldsymbol{A}_{\mu\nu}] = 0$ és – az α paramétert elhagyva az egyszerűségért – a

$$D_{\mathbf{L}_{\mu\nu}}\gamma(n_\mu)\gamma(n_\nu))D^{-1}_{\mathbf{L}_{\mu\nu}} = \gamma(\boldsymbol{L}_{\mu\nu}n_\mu)\gamma(\boldsymbol{L}_{\mu\nu}n_\nu)$$

egyenlőségből (melyet a γ-k közé iktatott $D_{\mathbf{L}_{\mu\nu}}D^{-1}_{\mathbf{L}_{\mu\nu}}$ segítségével kaptunk), az α szerinti differenciálhányadost véve a nullában, az következik, hogy

$$[S_{\mathbf{A}_{\mu\nu}}, \gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu] = 0$$

(nincs öszegzés!). Ez alapján a lináris ábrázolásokra vonatkozó állításból és a Dirac-mátrixok tulajdonságaiból az előbbinél hosszadalmasabb, de egyszerű számolással megkapjuk, hogy

$$S_{\mathbf{A}_{\mu\nu}} = \frac{i}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu).$$

Jobban látjuk, mik is ezek, ha külön részletezzük az időszerűeket és a térszerűeket. A $\gamma_0\gamma_k - \gamma_k\gamma_0 = 2\gamma_0\gamma_k$ összefüggés és az

$$\alpha_k := \gamma_0\gamma_k = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_k \\ \sigma_k & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{3}$$

mátrixok bevezetésevel

$$S_{\mathbf{V}_k} = \frac{-i}{2}\alpha_k.$$

Ugyancsak a $\gamma_j\gamma_l - \gamma_l\gamma_j = 2\gamma_j\gamma_l \quad (j \neq l)$összefüggés és a

$$\Sigma_k := \frac{i}{2}\epsilon_{kjl}\gamma_j\gamma_l = \begin{pmatrix} \sigma_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_k \end{pmatrix} \tag{4}$$

mártrixok bevezetésével

$$S_{\mathbf{A}_k} = \frac{1}{2}\Sigma_k. \tag{5}$$

A fizikában unitér sugárábrázolások kellenek, ezért az itt tárgyalt *-unitér sugárábrázolás önmagában nem megfelelő, de szerepet kap a Poincaré-csoport unitér sugárábrázolásainál.

7. A Poincaré-csoport

7.1. A Poincaré-csoport unitér sugárábrázolásai

7.1.1. Tárgyalás abszolút („négyes”) impulzusokkal

A tömeghéj $m > 0$ tömeg esetén

$$V(m) := \{p \in \mathbf{M}^* \mid p \cdot p = m^2, \text{ jövőszerű}\} \tag{6}$$

három dimenziós felület (amelynek szokásos neve tömeghéj).

Fizikai értelmét tekintve p egy m tömegű tömepont abszolút impulzusa. Felhívjuk a figyelmet, hogy p az $\mathbf{M}^*$ eleme, tehát kovektor, és szokásunk szerint félkövér betűvel kellene jelölnünk. Itt azonban kivételt teszünk, a fizikában meghonosodott szokást követjük; majd $\boldsymbol{p}$ egy megfigyelő szerinti térszerű komponenst jelöl.

Egy $\boldsymbol{n}_\mu \in \frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}}$ Lorentz-ortonormált bázisban a $p_\mu := p \cdot \boldsymbol{n}_\mu$ koordinátákkal, a $\boldsymbol{p} := \sum_{k=1}^3 p_k \boldsymbol{n}_k$ és az $\boldsymbol{u} := \boldsymbol{n}_0$ jelöléssel a tömeghéjat

$$(m\mathbb{R})^3 \to V(m), \quad (p_1, p_2, p_3) \mapsto (\boldsymbol{u}\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2} - \boldsymbol{p})$$

formában paraméterezzük (ez lényegében az $\boldsymbol{u}$ megfigyelő szerinti széthasításban az $\boldsymbol{u}$-térszerű impulzusokkal való paraméterezés).

Ez a paraméterezés bármely bázissal (megfigyelővel) megtehető, viszont a továbbiakban mindig azt a Dirac-mátrixok által kitüntetett esetet vesszük, amelyre $\gamma(\boldsymbol{u}) = \gamma_0 = \beta$.

Jelölje λ_m a $V(m)$ felületi mértékét. Tudjuk, hogy λ_m Lorentz-invariáns, azaz minden $\boldsymbol{L}$ Lorentz-transzformációra $\lambda_m \circ \overset{-1}{\boldsymbol{L}} = \lambda_m$.

Az említett paraméterezésben ezt a mértéket a szokásos jelöléssel

$$d\lambda_m(p) = \frac{m}{\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2}}\, d\boldsymbol{p} \tag{7}$$

állíthatjuk elő.

A λ_m mérték $(m\mathbb{R})^{\otimes 3}$ értékű. Az elkövetkezendő formuláinkban valós értékű mérték szerinti integráloknak kell szerepelnie, ezért λ_m helyett λ_m/m^3-et vesszük. Viszont az egyszerűség kedvéért, a félreértes veszélye nélkül, nem írjuk ki (csak odagondoljuk) az m^3-bel való osztást.

A Dirac-egyenlet Vegyük elő a Minkowski-tér Clifford-$\star$-algebrájáról mondottakat a Mellékletből. A Dirac-mátrixokkal az adott paraméterezésben

$$\gamma(p) = \gamma_\mu p^\mu = \begin{pmatrix} \sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2} & \sigma(\boldsymbol{p}) \\ -\sigma(\boldsymbol{p}) & -\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2} \end{pmatrix}$$

áll fenn.

A Melléklet (18) és (19) állítások szerint $\gamma(\boldsymbol{p})$ sajátértékei $-m$ és m, a megfelelő $Z(p)_+$ és $Z(p)_-$ sajátalterek két dimenziósak.

A $\varphi : V(m) \to \mathbb{C}^4$ függvényre a

$$\gamma(p)\varphi(p) = m\varphi(p) \qquad (p \in V(m) \tag{8}$$

Dirac-egyenlet semmi mást nem jelent, mint hogy φ a p helyen az értékét a $Z(p)_+$ altérben veszi fel. Tehát az ilyen függvény foramailag ugyan négy komponensű, lényegében azonban csak két komponensű. Más szóval, φ az értékét a p-től függően mindig más és más két dimenziós térben veszi fel.

Mi több, ezeken az altereken a $\langle \mid \rangle$ szeszkilineáris forma skalárszorzat.

Legyen ugyanis $(\xi, \eta) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ a $Z(p)_+$ egy eleme. Az egyszerűség, a jobb áttekinthetőség érdekében az itt következőkben $p_0 := \sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2}$. Ekkor

$$p_0\xi + \sigma(\boldsymbol{p})\eta = m\xi, \qquad -\sigma(\boldsymbol{p})\xi - p_0\eta = m\eta,$$

tehát egyrészt $(\xi, \eta) = 0$ akkor és csak akkor, ha $\xi = 0$, másrészt

$$\eta = \frac{-\sigma(\boldsymbol{p})\xi}{p_0 + m}.$$

Ezért $|\eta|^2 = \frac{|\boldsymbol{p}|^2}{(p_0+m)^2}|\xi|^2$, és

$$\langle(\xi, \eta) \mid (\xi, \eta)\rangle = |\xi|^2 - |\eta|^2 = \frac{2m}{p_0 + m}|\xi|^2 > 0,$$

ha $\xi \neq 0$, azaz a $\langle \mid \rangle$ formának a leszűkítése az m sajátértékű $Z(p)_+$ sajátaltérre pozitív definit, azaz skaláris szorzás. Teljesen hasonlóan a $-m$ saját-értékű $Z(p)_-$ sajátaltérre való leszűkítés negatív definit.

Még egy összefüggésre lesz szükségünk ezzel kapcsolatban. A $(\xi, \eta) \in Z(\boldsymbol{p})_+$ elemnek az önmagával vett szokásos skalárszorzata

$$(\xi^*, \eta^*) \cdot (\xi, \eta) = |\xi|^2 + |\eta|^2 = \left(1 + \frac{|\boldsymbol{p}|^2}{(p_0 + m)^2}\right)|\xi|^2 = \frac{2p_0}{p_0 + m}|\xi|^2,$$

tehát

$$\langle(\xi, \eta) \mid (\xi, \eta)\rangle = \frac{m}{p_0}(\xi^*, \eta^*) \cdot (\xi, \eta). \tag{9}$$

A feles spinű ábrázolás

13. Állítás.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{m,1/2} := \{\varphi : V(m) \to \mathbb{C}^4 \ \textit{mérhető} \mid \\ \varphi(p) \in Z_+(p) \ \textit{azaz (8) teljesül minden } p-\textit{re}, \\ p \mapsto \langle\varphi(p) \mid \varphi(p)\rangle \ \textit{integrálható } \lambda_m \ \textit{szerint}\}. \end{aligned} \tag{10}$$

$\mathcal{H}_{m,1/2}$ Hilbert-tér a

$$(\varphi, \psi) \mapsto \int \langle\varphi(p) \mid \psi(p)\rangle \, d\lambda_m(p) \tag{11}$$

skalárszorzattal.

14. Állítás. *Rögzítve a téridő egy o „kezdőpontját”, az*

$$(U_L\varphi)(p) := e^{i\boldsymbol{p}\cdot(L(o)-o)} D_{\boldsymbol{L}}\varphi(\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{p}) \tag{12}$$

formulával adva $L \mapsto U_L$ a Poincaré-csoport folytonos irreducibilis unitér sugárábrázolása $\mathcal{H}_{m,1/2}$-en. Különböző m-ekre az ábrázolások invekvivalensek.

Bizonyítás λ_m Lorentz-invariáns, D_L *-unitér, ezért egyszerű tény, hogy U_L unitér; továbbá azt is könnyű megmutatni, hogy $L \mapsto U_L$ csoport-homomorfizmus. Az irreducibilitás és az ekvivalencia kérdésére később adunk igazolást. □

Az 1/2 indexet a következő indokolja. Adott $\boldsymbol{p}$ esetén azok az $\boldsymbol{R_p}$ Lorentz-transzformációk, amelyekre $\boldsymbol{R_p}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}$, a $\frac{\boldsymbol{p}}{m}$ megfigyelő terében a forgatások $SO(\boldsymbol{p})$ csoportját alkotják. Ilyen $\boldsymbol{R_p}$-re $D_{\boldsymbol{R_p}}\gamma(\boldsymbol{p})D_{\boldsymbol{R_p}}^{-1} = \gamma(\boldsymbol{p})$, ami maga után vonja, hogy $Z(\boldsymbol{p})_+$ invariáns $D_{\boldsymbol{R_p}}$-re. Ez azt jelenti, hogy $\boldsymbol{R}_{\text{'}} \to D_{\boldsymbol{R_p}}|_{Z(\boldsymbol{p})_+}$ az $SO(\boldsymbol{p})$ csoportnak 1/2 súlyú unitér sugárábrázolása $Z(\boldsymbol{p})_+$-on.

Infinitezimális generátorok – Az $\mathbf{a} \in \mathbf{M}$ irányú eltolások (az $x \mapsto x + \alpha\mathbf{a}$ $(\alpha\mathbb{R})$ transzformációk) egyparaméteres részcsoportjának az infinitezimális generátorát

$$i\frac{\partial e^{i\boldsymbol{p}\cdot\alpha\mathbf{a}}\varphi(p)}{\partial\alpha}|_{\alpha=0} = -(p\cdot\mathbf{a})\varphi(p)$$

adja, amely tehát a

$$p \mapsto -p\cdot\mathbf{a}$$

függvénnyel való való szorzás operátora. Koordinátákban, a bázisvektorok irányú eltolásokat tekintve, $-\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2+m^2} = -p\cdot\boldsymbol{e}_0$ az „időeltolásé”, $p_k = -p\cdot\boldsymbol{e}_k$ a „téreltolásoké”.

– az o kezdőpontú Lorentz-részcsoport elemei azok az L-ek, amelyekre $L(o) = o$ teljesül. A Lorentz-csoport Lie-algebrája $\boldsymbol{A}$ elemének megfelelő egyparaméteres részcsoport infinitezimális generátorát

$$i\frac{\partial D_{\exp(\alpha\boldsymbol{A})}\varphi(\exp(-\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{p})}{\partial\alpha}|_{\alpha=0} = S_{\boldsymbol{A}}\varphi(p) + -i\mathrm{D}\varphi(p)\boldsymbol{A}p,$$

adja, ahol $S_{\boldsymbol{A}}$ a 6 alfejezetben megadott infinitezimális generátor; ez tehát az

$$S_{\boldsymbol{A}} + (-i\mathrm{D})\boldsymbol{A}p \tag{13}$$

operátor.

Koordinátákban ezt úgy fejezhetjük ki, hogy vesszük a $\boldsymbol{A}_{\mu\nu} = \boldsymbol{n}_\mu \wedge \boldsymbol{n}_\nu$ Lie-algebra elemeket, amelyek a 6 alfejezetben szerepeltek; ott a fenti első tagot már megismertük. A második tagra

$$-i\mathrm{D}\varphi(p)\cdot(\boldsymbol{n}_\mu p_\nu - \boldsymbol{n}_\nu p_\mu) \tag{14}$$

adódik.

Ha φ az $\mathbf{M}^*$-on mindenütt értelmezett volna, akkor $\mathrm{D}\varphi\cdot\boldsymbol{n}_\mu = \frac{\partial\varphi}{\partial p_\mu}$ állna fönn; ezen formális összefüggés alapján

$$-i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_\mu}p_\nu - \frac{\partial\varphi}{\partial p_\nu}p_\mu\right) \tag{15}$$

adódna, és bizony sokszor veszik ezt.

Azonban φ változója $V(m)$-et futja csak végig, p-nek a négy koordinátája nem független egymástól, ezért a fent szereplő parciális deriváltak értelmetlenek. Persze $\mathrm{D}\varphi(p)$ létezik, de csak olyan vektorokra alkalmazhatók, amelyek p-re Lorentz-ortogonálisak (azaz $V(m)$-nek a p-beli érintőterében vannak). $\mathrm{D}\varphi(p)\cdot\boldsymbol{n}$ nem értelmes akkor, ha $p\cdot\boldsymbol{n} \neq 0$. $\boldsymbol{A}p$ Lorentz-ortogonális p-re, mert $\boldsymbol{A}$ Lorentz-antiszimmetrikus, tehát (14) rendben van, csak éppen nem írható fel parciális deriváltakkal.

Visszatérve a téridőeltolások inifinetimális generátoraira, a p_μ-vel való szorzás-operátorokra, $p_\mu p^\mu \subset m^2\mathbf{1}$ (vigyázat: mint operátor, $p_\mu p^\mu$ csak sűrűn van értelmezve, ezért áll $\subset$ egyenlőség helyett).

Tegyük fel, hogy az m és az $\hat{m}$ meghatározta ábrázolás ekvivalens egy V unitér vagy antiunitér operátor által. Ekkor $Vp_\mu V^{-1} = \pm\hat{p}_\mu$. Ezért

$$m^2\hat{\mathbf{1}}| = Vm^2\mathbf{1}V^{-1}| = Vp_\mu p^\mu V^{-1} = Vp_\mu V^{-1}Vp^\mu V^{-1} = \hat{p}_\mu\hat{p}^\mu = \hat{m}^2\mathbf{1}|,$$

ahol $|$ egy sűrű részhalmazra való leszűkítést jelöl. Eredményünk szerint:

Különböző m-ek esetén a (10) *Hilbert-téren adott unitér sugárábrázolások inekvivalensek.*

7.1.2. Tárgyalás relatív („hármas") impulzusokkal

Koordinátázás Vezessük be az előbbiekben szereplő φ függvénnyel és a szokásos, a 7.1.1 pontban is tárgyalt paraméterezéssel a

$$\hat{\varphi} : (m\mathbb{R})^3 \to \mathbb{C}^4, \quad \boldsymbol{p} \mapsto \frac{m}{\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2}}\varphi(\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{p}) \tag{16}$$

függvényt. Bár koordinátákat írtunk és írunk, valójában csak aaz $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{n}_0$ megfigyelő szerinti széthasítás a lényeges, ezt tükrözi egyébként a $\boldsymbol{p}$ jelölésünk is.

A továbbiakban ismét a $p_0 := \sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2}$ egyszerűsítő jelölést használjuk.

Szorozzuk be $\gamma_\mu p^\mu\varphi(p) = m\varphi(p)$-t balról $\gamma_0 = \beta$-val; (3) felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$(\alpha(\boldsymbol{p}) + m\beta)\hat{\varphi}(\boldsymbol{p}) = p_0\hat{\varphi}(\boldsymbol{p}). \tag{17}$$

Rögzített $\boldsymbol{p}$-re $\alpha(\boldsymbol{p}) + m\beta$ négyszer-négyes mátrix önadjungált ($(\alpha(\boldsymbol{p}) + m\beta)^* = \alpha(\boldsymbol{p}) + m\beta$, ahol a * konjugált transzponáltat jelöli), sajátértékei p_0 és $-p_0$, a sajátalterek $Z_\pm(p)$, tehát

$$\hat{\varphi}(\boldsymbol{p}) \in Z_+(p) \quad (\text{minden } \boldsymbol{p}\text{-re}). \tag{18}$$

Figyelembe véve a (9) egyenlőséget

$$\langle\varphi(p) \mid \varphi(p)\rangle = \frac{m}{p_0}|\varphi(p)|^2,$$

ahol $|\varphi(p)|^2$ a $\mathbb{C}^4$-beli szokásos abszolútérték-négyzet, majd felhasználva a (7) összefüggést,

$$\begin{aligned}\|\varphi\|^2 &= \int\int\langle\varphi(\boldsymbol{p}) \mid \psi(\boldsymbol{p})\rangle\, d\lambda_m(p) = \int\left(\frac{m}{p_0}\right)^2|\varphi(p_0\boldsymbol{u} + \boldsymbol{p})\, d\boldsymbol{p} = \\ &= \int|\hat{\varphi}(\boldsymbol{p})|^2\, d\boldsymbol{p} =: \|\hat{\varphi}\|^2\end{aligned}$$

adódik.

Emlékezzünk, hogy az integrálokban a feltüntetett mértékek helyett azoknak m^3-bel vett hányadosát kell vennünk (hogy a mérték valós értékű legyen), vagyis az utolsó integrálban valójában $\mathbb{R}^3$ Lebesgue-mértéke szerepel. Tehát $\hat{\varphi}$ az $L^2((m\mathbb{R})^3, \mathbb{C}^4)$ eleme, és $\|\varphi\|^2$ a normája ebben a Hilbert-térben.

Más szóval, $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ izometrikus leképezés $\mathcal{H}_{m,1/2}$-ről $L^2((m\mathbb{R})^3, \mathbb{C}^4)$-be. Minthogy $\hat{\varphi}$-re (17), illetve (18) kell hogy, teljesüljön, bevezetve a

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}_{m,1/2} := \{\hat{\varphi} \in L^2((m\mathbb{R})^3, \mathbb{C}^4) \mid \\ \hat{\varphi}(\boldsymbol{p}) \in Z_+(p) \text{ azaz (17) teljesül minden } \boldsymbol{p} - \text{re}\}\end{aligned} \tag{19}$$

jelölést,

$$\mathcal{H}_{m,1/2} \to \hat{\mathcal{H}}_{m,1/2}, \qquad \varphi \mapsto \hat{\varphi} \tag{20}$$

unitér leképezés.

Megjegyezzük, hogy a

$$\hat{\varphi} \mapsto (\boldsymbol{p} \mapsto (\alpha(\boldsymbol{p}) + m\beta)\hat{\varphi}(\boldsymbol{p})) \tag{21}$$

„szorzás-operátor” $L^2((m\mathbb{R})^3, \mathbb{C}^4)$-ben önadjungált, a spektruma $]-\infty, -m] \cup [m, \infty[$. Tehát ha $P_\pm$ jelöli az ezekhez tartozó alteterek projektorát, akkor

$$\hat{\mathcal{H}}_{m,1/2} = \{\hat{\varphi} \in L^2((m\mathbb{R})^3, \mathbb{C}^4) \mid P_+\hat{\varphi} = \hat{\varphi}\}. \tag{22}$$

A (20) unitér leképezéssel a Poincaré-csoport ábrázolását áthozhatjuk $\mathcal{H}_{m,1/2}$-ről $\hat{\mathcal{H}}_{m,1/2}$-re. Az itteni ábrázolás konkrét alakja nem túl egyszerű; kivétel az eltolások ábrázolása. Nevezetesen, az „idő irányú” f tartamú eltolás ábrázolását

$$e^{i\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2+m^2}f}\hat{\varphi}(\boldsymbol{p}) \tag{23}$$

adja meg.

Infinitezimális generátorok A 7.1.1 pontban tárgyalt infinitezimális generátorokat is áthozhatjuk $\mathcal{H}_{m,1/2}$-ről $\hat{\mathcal{H}}_{m,1/2}$-re, ezeket tekintjük most.

A $p \cdot \boldsymbol{a}$-val való szorzás lényegében marad önmaga, azaz a koordináta irányú eltolások „kalapos”infitezimális generátorai a $-\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2}$ és p_k szozásoperátorok.

A Lorentz-csoport Lie-algebrája $\boldsymbol{A}$ elemének megfelelő egyparaméteres részcsoport infinitezimális generátorának „kalapos” alakjához a következőket kel figyelembe vennünk: (16) szerint

$$\varphi(p) = \frac{p \cdot \boldsymbol{n}_0}{m}\hat{\varphi}((p \cdot \boldsymbol{n}_0)\boldsymbol{n}_0 - p),$$

tehát

$$\mathrm{D}\varphi(p)\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}_0}{m}\hat{\varphi}((p \cdot \boldsymbol{n}_0)\boldsymbol{n}_0 - p) + \frac{p \cdot \boldsymbol{n}_0}{m}\mathrm{D}\hat{\varphi}((p \cdot \boldsymbol{n}_0)n_0 - p)\big((\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}_0)\boldsymbol{n}_0 - \boldsymbol{n}\big).$$

Ebből (14) azt adja, hogy

$$-i\mathrm{D}\varphi(p) \cdot (\boldsymbol{n}_0 p_k - \boldsymbol{n}_k p_0) = -i\left(\frac{p_k}{m}\hat{\varphi}(\boldsymbol{p}) + \frac{\partial\hat{\varphi}(\boldsymbol{p})}{\partial p_k}\right),$$

$$-i\mathrm{D}\varphi(p) \cdot (\boldsymbol{n}_j p_k - \boldsymbol{n}_k p_j) = -i\frac{\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2}}{m}\left(\frac{\partial\hat{\varphi}(\boldsymbol{p})}{\partial p_j}p_k - \frac{\partial\hat{\varphi}(\boldsymbol{p})}{\partial p_k}p_j\right).$$

Tehát formálisan az infinitezimális generátorok:

$$-\frac{i}{2}\alpha_k - i\left(\frac{p_k}{m} + \sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2}\frac{\partial}{\partial p_k}\right), \tag{24}$$

$$\frac{1}{2}\Sigma_k + \epsilon_{kjl}\left(\frac{\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2}}{m}\right)\left(p_j\frac{i\partial}{\partial p_l}\right) - \left(p_l\frac{i\partial}{\partial p_j}\right). \tag{25}$$

Annak alapján, hogy egy Lie-csoport unitér sugárábrázolása akkor és csak akkor irreducibilis, ha csupán az egység többszöröse, mint korlátos operátor, cserélhető fel a Lie-algebra egy bázisának megfelelő infinitezimális generátorokkal – hasonlóan, mint a Noether-csoport esetén, csak körülményesebben, mert itt a differenciálás-operátorok kivezetnek a Hilbert-térből – bebizonyítható:

A (10) *Hilbert-téren adott unitér sugárábrázolás irreducibilis.*

A bizonyítás lényege az, hogy ha $\hat{\mathcal{H}}_{m,1/2}$ helyett az egész $L^2((m\mathbb{R})^3, \mathbb{C}^4)$-en értelmezett B korlátos operátort tekintünk, amely felcserélhető az infinitezimális generátorok formulája által az $L^2((m\mathbb{R})^3, \mathbb{C}^4)$-ben értelmezett operátorokkal, valamint a $P_\pm$ projektorokkal, akkor $B = \lambda_+ P_+ + \lambda_- P_-$. A részleteket mellőzzük.

Fizikai mennyiségek Az ábrázolás infinitezimális generátorait szokás az anyagi pont fizikai menyiségeinek venni.

Az „időeltolás” infinitezimális generátora, $-\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2}$ mint szorzásoperátor, az energia negatívja, a a négyes impulzussal, a p-vel való szorzással (vektoroperátor), illetve a megfigyelő szerinti a „téreltolások” infinitezimális generátorai, p_k mint szorzásoperátorok, kézenfekvően adódik mind $\mathcal{H}_{m,1/2}$-ben, mind $\hat{\mathcal{H}}_{m,1/2}$-ben.

A Lorentz-csoport Lie-algebrája elemének megfelelő (7.1.1) infinitezimális generátor fizikai interpretációja azonban csak itt, $\hat{\mathcal{H}}_{m,1/2}$-ben lesz világos úgyahogy. Ugyanis (24) fizikai értelmét nem látjuk, de (25) az impulzusmomentumnak fogható fel.

A nemrelativisztikus beidegződés alapján az impulzusmomentumot a spin és a pályamomentum összegeként szokták felfogni. Azonban *sem a spin, sem a pályamomentum nem fizikai mennyiség,* mert Σ_k is, $\frac{\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2+m^2}}{m}\left(p_j\frac{i\partial}{\partial p_l}\right) - \left(p_l\frac{-i\partial}{\partial p_j}\right)$ is kivezet $\hat{\mathcal{H}}_{m,1/2}$-ből, azaz külön-külön nem operátorok az adott Hilbert-térben. Errről könnyű meggyőződni; például a „spin” esetében, az α_i és Σ_k mátrixok nem felcserélhetók ha $i \neq k$, ezért ha $\alpha(\boldsymbol{p}) + m)\hat{\varphi}(\boldsymbol{p}) = p_0\hat{\varphi}(\boldsymbol{p})$, akkor $\alpha(\boldsymbol{p}) + m)\Sigma_k\hat{\varphi}(\boldsymbol{p}) \neq p_0\Sigma_k\hat{\varphi}(\boldsymbol{p})$.

Érdekes a helyzetnek, mint fizikai mennyiségnek a kérdése. Láttuk, ez már nemrelativisztikusan is problematikus volt, nem lévén „a” helyzet. Ott az ábrázolást hordozó Hilbert-tér egy speciális előllításában megjelent egy operátor, amelyet „a” helyzetnek szoktak felfogni, helytelenül.

Nemrelativisztikusan az úgynevezett impulzus-reprezentációban, vagyis amikor a függvények változója az impulzusértékek, a helyzet-komponensek a parciális deriválás operátorai.

Itt most „impulzus-reprezentáció” van, ezért első gondolatként a helyzetkomponenseket $i\frac{\partial}{\partial p_k}$ alakban szokták akarni előállítani. Különféle érveket szoktak felhozni, ez miért nem megfelelő, csak azt nem – a szóban forgó Hilbert-tér pontos definíciójának hiányában –, hogy a parciális deriválások nem is operátorok $\hat{\mathcal{H}}_{m,1/2}$-ben, kivezetnek belőle: ha $\alpha(\boldsymbol{p}) + m)\hat{\varphi}(\boldsymbol{p}) = p_0\hat{\varphi}(\boldsymbol{p})$, akkor $\alpha(\boldsymbol{p}) + m)\frac{\partial\hat{\varphi}(\boldsymbol{p})}{\partial p_k} \neq p_0\frac{\partial\hat{\varphi}(\boldsymbol{p})}{\partial p_k}$.

Sokáig kérdés volt, mi is a relativisztikus helyzet-operátor. A válasz azzal a felismeréssel született meg, hogy nincs „a" helyzet, helyette, hasonlóan a nemrelativisztikus esethez, minden megfigyelőnek minden pillanatához van egy-egy külön helyzet.

7.1.3. Fontos tudnivaló

Megismételjük, hogy az $\alpha(\boldsymbol{p}) + m\beta$-vel való szorzás $L^2((m\mathbb{R})^3, \mathbb{C}^4)$-ben önadjungált operátor, amely az az (17) egyenlőség által **definiálja** a részecske $\hat{\mathcal{H}}_{m,1/2}$ Hilbert-terét, mint $L^2((m\mathbb{R})^3, \mathbb{C}^4)$ egy lineáris alterét.

A $\hat{\mathcal{H}}_{m,1/2}$ Hilbert-térben az energia a $\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2}$-tel szorzás operátora.

A (17) egyenlőség téves értelmezéseként szokás az $\alpha(\boldsymbol{p})+m\beta$-vel való szorzást a részecske Hamilton-operátorának felfogni, amellyel az „időfejlődést" az

$$i\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial t} = (\alpha(\boldsymbol{p}) + m\beta)\hat{\varphi}$$

differenciálegyenlet határozza meg. Persze (17) szerint a jobb oldal egyenlő $\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2}\hat{\varphi}$-vel, így a megoldás

$$\hat{\varphi}_t = e^{-i\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2+m^2}t}\hat{\varphi}_0.$$

Ebből és (23)-ből azt a téves következtetést szokás levonni, hogy az állapotok időfejlődését automatikusan megadja a negatív időeltolások ábrázolása. Ez nem igaz. A következőkben látni fogjuk, hogy $\mathcal{H}_{m,1/2}$, illetve $\hat{\mathcal{H}}_{m,1/2}$ elemei a folyamatokat írják le, azaz magukban foglalják az „időfejlődést".

Még egy megjegyzés: formálisan a „spin" is „pályamomentum" is operátor $L^2((m\mathbb{R})^3, \mathbb{C}^4)$-ben, és egyik sem cserélhető fel az $(\alpha(\boldsymbol{p}) + m\beta)$ „Hamilton-operátorral", ezért azt szokták mondani, hogy külön sem a spin, sem a pályamomentum nem mozgásállandó, csak az összegük. Láttuk azonban már, hogy nem ez az igazság.

7.1.4. Tárgyalás a téridőn

Ha $\varphi \in \mathcal{H}_{m,1/2}$, akkor $\varphi\lambda_m$ temperált disztribúció az impulzustéren. Egy o téridő-kezdőpont választásával a (négyes) Fourier-transzformáltja az x téridőpontban

$$\frac{1}{(2\pi^2)^2}\int e^{-ip\cdot(x-o)}\varphi(p)\ d\lambda_m(p) =: \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Phi(x). \tag{26}$$

Az $x \mapsto \Phi(x)$ függvénynek a tulajdonságait a szokásos széthasítással vizsgáljuk meg. Ha $x - o$ koordinátázott alakja $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{q}) \in (\mathbb{R}/m) \times (\mathbb{R}/m)^3$, akkor s fenti integrálra azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\left(\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2+m^2}\boldsymbol{t}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}\right)}\hat{\varphi}(\boldsymbol{p})\ d\boldsymbol{p} =: \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{\Phi}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{q}). \tag{27}$$

Látjuk, hogy $\hat{\Phi}(\boldsymbol{t}, \cdot) : (\mathbb{R}/m)^3 \to \mathbb{C}^4$ a $\boldsymbol{p} \mapsto \left(e^{-i\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2+m^2}\boldsymbol{t}}\hat{\varphi}(\boldsymbol{p})\right)$ függvénynek, amely az $L^2((m\mathbb{R})^3, \mathbb{C}^4)$ eleme, a hármas Fourier-transzformáltja;

az $L^2((m\mathbb{R})^3, \mathbb{C}^4) \to L^2((\mathbb{R}/m)^3, \mathbb{C}^4)$ Fourier-transzformáció unitér, ezért

$$\int |\Phi(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{q})|^2 \, d\boldsymbol{q} = \int |\hat{\varphi}(\boldsymbol{p})|^2 \, d\boldsymbol{p}, \tag{28}$$

így a jobb oldal független $\boldsymbol{t}$-től és egyenlő $\|\hat{\varphi}\|^2$-tel.

Visszatérve a „kalaptalan” függvényekre, $\hat{\Phi}(\boldsymbol{t}, \cdot)$ megfelelője a Φ-nek a leszűkítése a $\boldsymbol{t}$-vel jellemzett $\boldsymbol{u}$-időpontra (az $o + \boldsymbol{t}\boldsymbol{u} + \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ hipersíkra). Ezeken az időpontokon (hipersíkokon) ott van a λ_t Lebesue-mérték, és azt állapíthatjuk meg tehát, hogy $\Phi|_t$ négyzetesen integrálható λ_t szerint minden t-re, és az integrál független t-től.

A Fourier-transzformációk tulajdonsága szerint

$$\gamma(-i\mathrm{D})\Phi = m\Phi. \tag{29}$$

Vezessük be a

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{m,1/2} := \{\Phi : \mathtt{M} \to \mathbb{C}^4 \mid\ & \gamma(-i\mathrm{D})\Phi = m\Phi, \\ & \Phi|_t \in L^2(t, \mathbb{C}^4) \text{ minden } t - \text{re}, \\ & \int |\Phi|_t^2 \, d\lambda_t \text{ ugyanaz minden } t - \text{re}\} \end{aligned} \tag{30}$$

jelölést; $\mathcal{H}^{m,1/2}$ Hilbert-tér az

$$(\Phi, \Psi) \mapsto \int \Phi|_t^* \Psi|_t \, d\lambda_t \tag{31}$$

t-től független skaláris szorzattal.

Hangsúlyozzuk, hogy $\mathcal{H}^{m,1/2}$ definíciójában szerepet kap egy kitüntetett megfigyelő, amely szerinti időpontokról van szó. Ez az $\boldsymbol{u}$ – csak az, és nem akármelyik másik –, amelyre $\gamma(\boldsymbol{u}) = \gamma_0 = \beta$ teljesül.

Az eddigiek alapján megállapíthatjuk, hogy a (26) Fourier-transzformáció $\mathcal{H}_{m,1/2} \to \mathcal{H}^{m,1/2}$ unitér leképezés; mint ilyen, a Poincaré-csoport adott ábrázolását is átviszi egy irreducibilis unitér sugárábrázolásba. Felhasználva, hogy λ_m Lorentz-invariáns, az alábbi második integrálban a $p' := \boldsymbol{L}^{-1}p$ helyettesítést alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\int e^{-ip\cdot(x-o)} e^{ip\cdot(L(o)-o)} D_L \varphi(\boldsymbol{L}^{-1}p) \, d\lambda_m(p) = \\ &\qquad = \int e^{-ip\cdot(x-L(o))} D_L \varphi(\boldsymbol{L}^{-1}p) \, d\lambda_m(p) = \\ &\qquad\qquad = \int e^{-ip'\cdot(L^{-1}(x)-o)} D_L \varphi(p') \, d\lambda_m(p'), \end{aligned}$$

tehát az ábrázolás, amelyet ugyancsak U-val jelölünk,

$$(U_L\Phi)(x) = D_L \Phi(L^{-1}(x)).$$

Speciálisan az $\boldsymbol{a}$ irányú eltolás ábrázolása

$$(U_{\mathbf{a}}\Phi)(x) = \Phi(x - \mathbf{a}).$$

Az $\boldsymbol{a}$ irányú eltolások egyparaméteres részcsoportjának az infinitezimális generátorát

$$i\frac{\partial \Phi(x - \alpha\mathbf{a})}{\partial \alpha}|_{\alpha=0} = -i\mathrm{D}\Phi(x)\boldsymbol{a} \tag{32}$$

adja.

7.1.5. Tárgyalás koordinátákban

A szokásos bázissal az $x^\mu := \boldsymbol{n}^\mu \cdot (x - o)$ koordinátákban, illetve a $\boldsymbol{t} := x^0$, $\boldsymbol{q} := \sum_{k=1}^3 x^k \boldsymbol{n}_k$ jelöléssel a

$$\hat{\Phi} : (\mathbb{R}/m)^4 \to \mathbb{C}^4, \qquad (x^0, x^1, x^2, x^3) \mapsto \Phi(o + x^\mu \boldsymbol{n}_\mu),$$

illetve a

$$\hat{\Phi} : (\mathbb{R}/m) \times (\mathbb{R}/m)^3 \to \mathbb{C}^4, \qquad (\boldsymbol{t}, \boldsymbol{q}) \mapsto \Phi(0 + \boldsymbol{t}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{q})$$

függvényeket tekintjük (a félreértés veszélye nélkül ugyanazt a betűt használjuk mindkét esteben).

Ekkor a (29) Dirac-egyenlet

$$\gamma^\mu \partial_\mu \hat{\Phi} = \hat{\Phi}$$

alakú. Mint korábban, a $\gamma_0 = \gamma(\boldsymbol{u}) = \beta$-val balról beszorozva azt kapjuk, hogy

$$(\alpha(-i\nabla) + m\beta)\hat{\Phi} = i\partial_{\boldsymbol{t}}\hat{\Phi}, \tag{33}$$

ahol szokásosan ∇ jelöli a differenciálást $\mathbb{R}^3$-on.

Az $\alpha(-i\nabla) + m\beta$ operátor $L^2((\mathbb{R}/m)^3, \mathbb{C}^4)$-en, és lévén a (21) operátor Fourier-transzformáltja, önadjungált. Spektruma $]-\infty, -m] \cup [m, \infty[$.

Az ábrázolást hordozó Hilbert-tér koordinátákban

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}^{m,1/2} := \{\hat{\Phi} : (\mathbb{R}/m) \times (\mathbb{R}/m)^3 \to \mathbb{C}^4 \mid \ & (\alpha(-i\nabla) + m\beta)\hat{\Phi} = i\partial_{\boldsymbol{t}}\hat{\Phi}, \\ & \hat{\Phi}(\boldsymbol{t}, \cdot) \in L^2((\mathbb{R}/m)^3, \mathbb{C}^4) \text{ minden } \boldsymbol{t} - \text{re}, \\ & \int |\hat{\Phi}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{q})|^2 \, d\boldsymbol{q} \text{ ugyanaz minden } \boldsymbol{t} - \text{re}\}, \end{aligned} \tag{34}$$

a

$$(\hat{\Phi}, \hat{\Psi}) \mapsto \int \Phi(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{q})^* \hat{\Psi}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{q}) \, d\boldsymbol{q} \tag{35}$$

($\boldsymbol{t}$-től független) skaláris szorzattal.

(32)-nak megfelelően itt a μ-ik bázisvektor irányában történő eltolások infinitezimális generátora

$$-i\partial_\mu,$$

illetve más jelöléssel, az „időeltolás” infinitezimális generátora

$$-i\partial_{\boldsymbol{t}} = -i\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{t}} = -(\alpha(-i\nabla) + m\beta),$$

a „téreltolásoké”

$$-i\frac{\partial}{\partial q_k}.$$

7.1.6. Folyamatok

Az (33) összefüggés **definálja** koordinátákban a Hilbert-teret, mint az $L^2((\mathbb{R}/m)^3, \mathbb{C}^4)$ egy lineáris alterét.

$H := (\alpha(-i\nabla) + m\beta)$ önadjungált operátor az $L^2((\mathbb{R}/m)^3, \mathbb{C}^4)$ térben, amelynek a spektruma $]-\infty, m] \cup [m, \infty[$. Jelölje P_+ a spektrum pozitív részének megfelelő altérre való projektort.

A $\hat{\mathcal{H}}^{m,1/2} \to P_+\left[L^2((\mathbb{R}/m)^3, \mathbb{C}^4)\right]$, $\hat{\Phi} \mapsto \hat{\Phi}(0,\cdot)$ leképezés unitér. Inverzét az adja meg, hogy a (33) differenciálegyenletnek eleget tevő függvényre $\hat{\Phi}(\boldsymbol{t},\cdot) = e^{-itH}\hat{\Phi}(0,\cdot)$ teljesül.

Az „időeltolás” infinitezimális generátora $-H$, tehát az f nagyságú „időeltolás” ábrázolását $\hat{\Phi}(\boldsymbol{t}-f,\cdot) = e^{ifH}\hat{\Phi}(\boldsymbol{t},\cdot)$ írja le. Speciálisan $\hat{\Phi}(-f,\cdot) = e^{ifH}\hat{\Phi}(0,\cdot)$

A fogalmak és a formulák tisztázatlasága folytán a szokásos tárgyalásban úgy veszik, hogy $P_+\left[L^2((\mathbb{R}/m)^3, \mathbb{C}^4)\right]$ a részecske „állapottere”, H a Hamilton-operátora (energia-operátora), (33) írja le az „időfejlődést” az állapottéren, majd azt a végképp téves megállapítást teszik, hogy a negatív időeltolás ábrázolása automatikusan megadja az „időfejlődést”.

Összefoglalva: koordinátákban $\hat{\Phi}(\boldsymbol{t},\cdot)$ minden $\boldsymbol{t}$-re ugyanabban az $(\mathbb{R}/m)^3$-ban értelmezett négyzetesen integrálható függvény, és a $\hat{\Phi} \mapsto \hat{\Phi}(0,\cdot)$ leképezés a $\hat{\mathcal{H}}^{m,1/2}$ Hilbert-teret átviszi az „időtől független” $P_+[\boldsymbol{L}^2((\mathbb{R}/m)^3, \mathbb{C}^4)$-be, és az eredeti Hilbert-tér elemeit úgy kapjuk meg, hogy $P_+[\boldsymbol{L}^2((\mathbb{R}/m)^3, \mathbb{C}^4)$-re, az „állapottérre” rárakjuk az „időfejlődést”.

Állapottér és arra rakott időfejlődés a koordinátás nézőpontból ered.

Koordinátamentesen, azaz abszolút módon azt lájuk, hogy a (29) Dirac-egyenlettel meghatározott $\mathcal{H}^{m,1/2}$ Hilbert-tér elemei természetes interpretációval a részecske **folyamatai**. Itt $\Phi|_t$ minden t-re más és más halmazon értelmezett négyzetesen integrálható függvény. Persze itt is egy tetszőelgesen rögzített t_0 esetén $\Phi \mapsto \Phi|_{t_0}$ a $\mathcal{H}^{m,1/2}$ Hilbert-teret átviszi $\boldsymbol{L}^2(\lambda_{t_0}, \mathbb{C}^4)$ egy lineáris alterébe, amelyet viszont nem lehet egyszerűen „időtől független állapottérnek” tekinteni.

Abszolút módon tehát folyamat van, amelyet egy megfigyelő széthasít állapotra és időfejlődésre.

A Poinmcaré-csoport elemeit ábrázoló unitér operátorok folyamatokhoz rendelnek folyamatokat. Speciálisan az $\boldsymbol{u}$-időeltolás egy folyamathoz egy másik folyamatot rendel, és semmi köze ahhoz, hogy egy folyamat hogyan történik: a szokásos hiedelemmel ellentétben az időeltolás (ami nincs is) nem határozza meg az „időfejlődést”.

7.1.7. Az irreducibilis ábrázolásokról

Adott pozitív $m \in \mathbb{I}^* = \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{I}}$ és $s \in \frac{\mathbb{N}}{2}$ esetén az eddig tekintett, $(m, 1/2)$ párral adott ábrázolásnak az önmagával vett $2s$-szeres szimmetrikus tenzorzata szintén irreducibilis ábrázolás lesz (m tömegű és s spinű részeske).

Adott pozitív $m \in \mathbb{I}^* = \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{I}}$ és $0 \in \mathbb{R}$ esetén az eddig tekintett, $(m, 1/2)$ párral adott ábrázolásnak az önmagával vett antiszimmetrikus tenzorzata szintén irreducibilis ábrázolás lesz (m tömegű és 0 spinű részeske).

$0 \in \mathbb{I}^*$ és $s \in \frac{\mathbb{Z}}{2}$ is jellemez irreducibilis ábrázolásokat (nulla tömegú részecskék; $s = \frac{1}{2}$ és $s = -\frac{1}{2}$ esetén a neutrínók, $s = 1$ és $s = -1$ esetén a „jobbra”, illetve „balra” polarizált foton).

Ezeken kívül van még nagyon sok irreducibilis ábrázolás, amelyeknek (egyelőre) nincs közvetlen fizikai interpretáaciója.

7.2. Szimplektikus ábrázolások

Bármely $p \in V(m)$ esetén $\boldsymbol{u}_p := \frac{p}{m}$ abszolút sebesség, és

$$\mathbf{E}_p := \{\boldsymbol{q} \in \mathbf{M} \mid p \cdot \boldsymbol{q} = 0\}$$

az $\boldsymbol{u}_p/m$-térszerű vektorok összessége,

$$\mathbf{E}_p^* \equiv \frac{\mathbf{E}_p}{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}}$$

az $\boldsymbol{u}_p$-relatív impulzusok öszessége, továbbá $s \geq 0$ valós szám esetén legyen

$$S_{p,s} := \left\{ \boldsymbol{n} \in \frac{\mathbf{E}_p}{\mathbb{I}} \mid |\boldsymbol{n}| = s \right\}$$

az s sugarú gömbhéj az $\boldsymbol{u}_p$-térben.

Jelölje E_p az $\boldsymbol{u}_p$ abszolút sebességű tehetetlen világvonalak (az $\boldsymbol{u}_p$-vezette egyenesek) összességét, és tekintsük a

$$C(s) := \bigcup_{p\in V(m)} E_p \times \{p\} \times S_{p,s}$$

halmazt. Ennek egy eleme tehát $(q, p, \boldsymbol{n})$ alakú, ahol p a $V(m)$ eleme, q az $\boldsymbol{u}_p$ vezette egyenes és $p \cdot \boldsymbol{n} = 0$, $|\boldsymbol{n}| = s$.

Az $o \in \mathtt{M}$ „kezdőponttal" és $\boldsymbol{u}$ abszolút sebességgel (megfigyelővel) megadott

$$h_{o,\boldsymbol{u}} : C(s) \to \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \times \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}^* \times S_{\boldsymbol{u},s},$$
$$(q, p, \boldsymbol{n}) \mapsto \left(q \cap \tau_{\boldsymbol{u}}(o) - o, (\boldsymbol{u}\cdot p)\boldsymbol{u} - p, \boldsymbol{n} - \frac{(p + m\boldsymbol{u})(p \cdot \boldsymbol{n})}{m(m + p \cdot \boldsymbol{u})} \right)$$

leképezés bijekció; szavakban:

– $q \cap \tau_{\boldsymbol{u}}(o) - o$ az az $\boldsymbol{u}$-térszerű vektor, amely a q egyenesnek az o-val azonos $\boldsymbol{u}$-pillanatbeli pontja és o között van,

– $(\boldsymbol{u} \cdot p)\boldsymbol{u} - p$ az $\boldsymbol{u}$-relatív impulzus,

– $\boldsymbol{n} - \frac{(p+m\boldsymbol{u})(p\cdot\boldsymbol{n})}{m(m+p\cdot\boldsymbol{u})} = \boldsymbol{B}_{p/m,\boldsymbol{u}}\boldsymbol{n}$, az $\boldsymbol{n}$ áthúzottja p/m-től $\boldsymbol{u}$-hoz.

$h_{o,\boldsymbol{u}}$-t általánosított (azaz vektor értékű) globális koordinátázásnak véve $C(s)$-et nyolc dimenziós differenciálható sokasággá tesszük. Ezt némiképp bonyolultabb kezelni, mint a nemrelativisztikus esetben.

A $(q, p, \boldsymbol{n})$ pontban a $C(s)$ érintőtere

$$\left\{ (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}) \mid \boldsymbol{q} \in \mathbf{E}_p, \boldsymbol{p} \in \mathbf{E}_p^*, \boldsymbol{a} \in \frac{\mathbf{E}_p}{\mathbb{I}}, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a} = 0 \right\}.$$

Asjuk meg az

$$\big(\omega_{m,s}(q, p, \boldsymbol{n})\big)\big((\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}), (\boldsymbol{q}', \boldsymbol{p}', \boldsymbol{a}')\big) := (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}') - (\boldsymbol{p}' \cdot \boldsymbol{q}) + (\boldsymbol{n}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}')$$

szimplektikus formát, ahol az utolsó szimbólum a hármas-szorzást jelöli.

Az L Poincaré-transzformációra definiáljuk a

$$K_L^{m,s} : C(s) \to C(s), \quad (q, p, \boldsymbol{n}) \mapsto (L[q], \boldsymbol{L}p, \boldsymbol{L}\boldsymbol{n})$$

leképezést, ahol $L[q]$ a $\boldsymbol{q}$ egyenesnek az L általi képe. Könnyű megmutatni, hogy $K_L^{m,s}$ megtartja az $\omega_{m,s}$ szimplektikus formát, továbbá az is világos, hogy $K_{L'}^{m,s} \circ K_L^{m,s} = K_{L'L}^{m,s}$.

Az így megadott szimplektikus ábrázolás tranzitív és különböző (m, s) és (m', s') párok esetén az ábrázolások inequvivalensek.

Figyeljünk fel arra, hogy ellentétben a nemrelativisztikus esettel, itt az ábrázolás nem áll elő egy m-mel és egy s-sel meghatározott ábrázolás Descartes-szorzataként, ami teljes összhangban van az unitér sugárábrázolásokra megismertekkel.

Abban is párhuzam állítható a kétféle ábrázolás között, hogy $V(m)$ minden p eleméhez

– a sokaság definíciójában van egy $S_{p,s}$ két dimenziós sokaság, amelyen megvalósul az $SO(p)$ szimplektikus ábrázolása,

– a Hibert-tér definíciójában van egy $Z_+(p,s)$ $2s+1$ dimenziós altér (a $Z_+(p)$ altér $2s$-szeres szimmetrikus tenzorszorzata), amelyen megvalósul az $SO(p)$ sugárábrázolása.

MELLÉKLET

8. Lineáris leképezések algebrájának automorfizmusai

Legyen Z valós vagy komplex vektortér, $\mathrm{Lin}(Z)$ a $Z \to \mathbf{Z}$ lineáris leképezések összessége. $\mathrm{Lin}(Z)$ a szokásos műveletekkel – lineáris műveletek és a kompozíció mint szorzás – algebra. Egy $S : \mathrm{Lin}(Z) \to \mathrm{Lin}(Z)$ művelettartó bijekciót *automorfizmusnak* hívunk. Ha $L : Z \to Z$ lineáris bijekció, akkor $\mathrm{Lin}(Z) \to \mathrm{Lin}(Z)$, $A \mapsto LAL^{-1}$ automorfizmus; az ilyeneket *belső automorfizmusoknak* hívjuk.

Az L és K lineáris bijekció akkor és csak akkor határozza meg ugyanazt a belső autormfizmust, ha egymás számszorosai; ugyanis $LAL^{-1} = KAK^{-1}$ azaz $K^{-1}LA = AK^{-1}L$ minden A esetén csak úgy lehet, ha $K^{-1}L$ az identitás számszorsa.

Más szóval egy belső autmorfizmushoz tartozó lineáris bijekció szám szorzó erejéig egyértelmű.

15. Állítás. *Véges dimenziós vektortér lineáris leképezéseinek algebráján minden automorfizmus belső.*

Bizonyítás Legyen $z_1, \dots, z_N$ a Z egy bázisa, $a_1, \dots, a_N$ a megfelelő duális bázis. Legyen továbbá $z := \sum_{i=1}^N z_i$, és $a := \sum_{i=1}^N a_i$.

A $z_i \otimes a_k \quad (i, k = 1, \dots, N)$ egy rangú leképezések lineáris bázist alkotnak $\mathrm{Lin}(Z)$-ben.

A $P_i := z_i \otimes a_i$ egy rangú lineáris leképezésekre (projektorokra)

$$P_i P_k = \delta_{ik} P_i, \qquad \sum_{i=1}^N P_i = \mathrm{id}_Z$$

áll fönn. Továbbá a $P := z \otimes a$ lineáris leképzéssel

$$P_i P P_k = z_i \otimes a_k$$

teljesül. Következésképpen $P_i \quad (i = 1, \dots, N)$ és P generálják a $\mathrm{Lin}(Z)$ algebrát.

Speciálisan az is igaz, hogy

$$P_i P P_i = P_i. \tag{36}$$

Legyen S a $\mathrm{Lin}(Z)$ automorfizmusa. Ekkor

$$S(P_i)S(P_k) = \delta_{ik} S(P_i), \qquad \sum_{i=1}^N S(P_i) = \mathrm{id}_Z,$$

amiből következik, hogy $S(P_i)$-k is egy rangú lineáris leképezések (projektorok), amelyek értékkészlete kifeszíti Z-t. Tehát van olyan $w_1, \dots, w_N$ bázis, a $b_1, \dots, b_N$ duális bázissal, hogy $S(P_i) = w_i \otimes b_i \quad (i_1, \dots, N)$.

Továbbá

$$S(P_i)S(P)S(P_k) = S(z_i \otimes a_k),$$

ami azt mutatja, hogy $S(z_i \otimes a_k)$ is egy rangú lineáris leképezés minden i, k-ra. Minthogy bármilyen egy rangú lineáris leképezés előállítható valamely bázisvektor és duális vektorának szorzataként, ez azt jelenti, hogy minden egy rangú lineáris leképezés S általi képe is egy rangú.

Tehát $S(P)$ is egy rangú, $S(P) = w \otimes b$. Az (36) összefüggés S általi képe szerint

$$(w_i \otimes b_i)(w \otimes b)(w_i \otimes b_i) = (b_i \mid w)(b \mid w_i)w_i \otimes b_i = w_i \otimes b_i,$$

azaz $(b_i \mid w)(b \mid w_i) = 1$. Ez az $\alpha_i := (b_i \mid w)$ jelöléssel azt jelenti, hogy $w = \sum_i \alpha_i w_i$, tehát

$$S(P_i)w = \alpha_i w_i, \qquad S(P)w_i = \frac{1}{\alpha_i}w.$$

Definiáljuk az L lineáris bijekciót az $Lz_i := \alpha_i w_i \quad (i = 1, \dots, N)$ képlettel; ekkor $Lz = w$.

Következésképpen minden i, k-ra

$$LP_iL^{-1}w_k = \delta_{ik}w_k, \qquad \text{azaz} \qquad LP_iL^{-1} = S(P_i),$$

és

$$LPL^{-1}h_k = S(P)h_k, \qquad \text{azaz} \qquad LPL^{-1} = S(P);$$

vagyis S és $L(\,\cdot\,)L^{-1}$ megegyezik egy generáló halmazon, tehát egyenlők.

16. Állítás. *Legyen Z komplex vektortér (amely egyben persze valós vektortér is).* $\mathrm{Lin}(Z)$ *valós algebra-automorfizmusa komplex lineáris vagy konjugált lineáris.*

Bizonyítás Azt kell csak belátnunk, hogy egy S valós algebra-automorfizmus elé az i-vel való szorzás kiemelhető $\pm i$-vel való szorzássá. $\mathrm{Lin}(Z)$ centruma, vagyis azok az elemek, amelyek minden más elemmel felcserélhetők, az $\mathbf{1}$ (identitás) komplex számszorosai. Egy algebra-automorfizmus a centrumot a centrumba képezi, tehát van olyan α komplex szám, hogy $S(i\mathbf{1}) = \alpha\mathbf{1}$. Tehát $\alpha^2\mathbf{1} = S(i\mathbf{1})S(i\mathbf{1}) = S((i\mathbf{1})(i\mathbf{1})) = S(-\mathbf{1}) = -S(\mathbf{1})$, amiből $\alpha = \pm i$.

Ha tehát S a $\mathrm{Lin}(Z)$ valós algebra-automorfizmusa, akkor van olyan $L : Z \to$ $\mathbf{Z}$ komplex lináris vagy konjugált lineáris bijekció, hogy $S(A) = LAL^{-1}$.

9. Involúció lineáris leképezéseken

Legyen Z komplex vektortér. Egy $\mathrm{Lin}(Z) \to \mathrm{Lin}(Z), \quad A \mapsto A^\star$ leképezést *involúciónak* hívunk, ha

– $(A + B)^\star = A^\star + B^\star$,
– $(\alpha A)^\star = \alpha^* A^\star$,
– $(AB)^\star = B^\star A^\star$
– $(A^\star)^\star = A$

minden $A, B \in \mathrm{Lin}(Z)$ és α komplex szám esetén. Figyelem: α^* (ez más csillag!) fölött az α komplex konjugáltját jelenti!

Egyszerű tény, hogy ha L bijekció, akkor $L^\star$ is az, és $(L^\star)^{-1} = (L^{-1})^\star$.

Legismertebb példa: ha adott egy skaláris szorzás Z-n, és az involúció erre vonatkozó adjungálás. Ennek általánosítása: ha adott egy $\langle \mid \rangle$ nem elfajuló szeszkilineáris (első változójában konjugált lineáris, második változójában lineáris) leképezés, akkor az $\langle z \mid Ax\rangle = \langle A^\star z \mid x\rangle$ formulával definiálható egy involúció.

Egy $D : Z \to \mathbf{Z}$ komplex lineáris leképezést ***-unitérnek**, illetve ***-szemiunitérnek** hívunk, ha $D^\star = D^{-1}$, illetve $D^\star = -D^{-1}$.

17. Állítás. *Ha S a $\mathrm{Lin}(Z)$ komplex *-automorfizmusa, azaz komplex automorfizmus és $S(A^\star) = S(A)^\star$ minden A-ra, akkor, mint belső automorfizmus, *-unitér vagy *-szemiunitér leképezéssel adható meg.*

Bizonyítás Van olyan L lineáris leképezés, amellyel $S(A^\star) = LA^\star L^{-1}$ és $S(A)^\star = (L^{-1})^\star A^\star L^\star$ minden A-ra. Mivel bármely lineáris leképezés $A^\star$ alakú valamely A-ra, ez azt jelenti, hogy van olyan α komplex szám, hogy $L^\star = \alpha L^{-1}$. Ez a szám valójában valós, hiszen ebből egyrészt $L = \alpha(L^\star)^{-1}$, másrészt $L = (L^\star)^\star = \alpha^*(L^{-1})^\star = \alpha^*(L^\star)^{-1}$ adódik.

Válasszunk egy β komplex számot úgy, hogy $\beta^*\beta = \frac{1}{|\alpha|}$ legyen. Ekkor az $D := \beta L$ leképezésre

$$D^\star = \beta^* L^\star = \beta^*\alpha L^{-1} = \beta^*\alpha\beta D^{-1} = \pm D^{-1}.$$

□

10. Clifford-leképezések

1. Definíció. *Legyen $\big(V, (\ \mid\ )\big)$ pszeudoeuklideszi vektortér, Z véges dimenziós komplex vektortér. Egy $c : V \to \mathrm{Lin}(Z)$ lineáris leképezést* **Clifford-leképezésnek** *hívunk, ha*

$$c(v)c(w) + c(w)c(v) = 2(v \mid w)\mathbf{1} \qquad (v, w \in V).$$

Fontos: a vektortér ugyan komplex, de a c leképezés *valós lineáris*, hiszen V valós vektortér!

Jegyezük meg, hogy

$$c(v)^2 = (v \mid v)\mathbf{1}.$$

A c Clifford-leképezés injektív: ha $c(v) = 0$, akkor $(v \mid w) = 0$ minden w-re, amiből $v = 0$ következik.

Igen egyszerűen látható, hogy $c(v)$ akkor és csak akkor bijekció, ha $(v \mid v) \neq 0$, és ez esetben $c(v)^{-1} = \frac{c(v)}{(v|v)}$.

18. Állítás. *Legyen* $\mathrm{dim}V > 1$*; ekkor $c(v)$ spektruma, azaz sajátértékeinek az összessége $\{-\sqrt{(v \mid v)}, \sqrt{(v \mid v)}\}$.*

Bizonyítás Mivel $(\mathrm{Sp}c(v))^2 = \mathrm{Sp}(c(v)^2) = \{(v \mid v)\}$, $c(v)$ spektruma része az állított halmaznak. Ha tehát $(v \mid v) = 0$, akkor igaz az állítás.

Legyen $(v \mid v) \neq 0$, és tegyük fel, hogy $-\sqrt{(v \mid v)}$ nincs benne a $c(v)$ spektrumában. Ekkor $c(v) + \sqrt{(v \mid v)}\mathbf{1}$ bijekció, és $\big(c(v) - \sqrt{(v \mid v)}\mathbf{1}\big)\big(c(v) + \sqrt{(v \mid v)}\mathbf{1}\big) = 0$ következtében $c(v) - \sqrt{(v \mid v)}\mathbf{1} = 0$, azaz $c(v) = \sqrt{(v \mid v)}\mathbf{1}$. Ezért $2(v \mid v) = c(v)c(w) + c(w)c(v) = 2\sqrt{(v \mid w)}c(w)$ minden w-re; tehát az injektív c értékkészlete egy dimenziós, ami azt jelenti, hogy V egy dimenziós, amit kizártunk.

Ezek alapján $-\sqrt{(v \mid v)}$ benne van $c(v)$ spektrumában, és hasonló gondolatmenettel jutunk arra, hogy $\sqrt{(v \mid v)}$ is benne van.

19. Állítás. *Legyen Z komplex vektortér,* $\dim V > 1$ *és* $(v \mid v) \neq 0$*; ekkor*

(i) $c(v)$ *sajátalterei kifeszítik Z-t,*

(ii) a $-\sqrt{(v \mid v)}$ *és* $\sqrt{(v \mid v)}$ *sajátértékhez tartozó Z_-, illetv Z_+ sajátaltér dimenziója megegyezik; következésképpen Z páros dimenziós.*

Bizonyítás

(i) Legyen λ a $c(v)$ sajátértéke. Ekkor $(c(v) - \lambda\mathbf{1})^2 = -2\lambda(c(v) - \lambda\mathbf{1})$, amiből indukcióval $(c(v) - \lambda\mathbf{1})^n = (-2\lambda)^{n-1}(c(v) - \lambda\mathbf{1}) \neq 0$ adódik minden n természetes számra. Ez azt jelenti, hogy $c(v)$ sajátalterei kifeszítik Z-t.

(ii) Legyen $w \in V$ olyan, hogy $(w \mid w) \neq 0$, $(v \mid w) = 0$. Ekkor $c(w)\big(c(v) \pm \sqrt{(v \mid v)}\mathbf{1}\big) = -\big(c(v) \mp \sqrt{(v \mid v)}\mathbf{1}\big)c(w)$. Mivel $c(w)$ bijekció, ha $z \in Z_+$, akkor $c(w)z \in Z_-$, és fordítva.

11. Clifford-algebrák

2. Definíció. *A* $(\mathrm{Lin}(Z), c)$ *párt a* $\big(V, (\ \mid\ )\big)$ *pszeudoeuklideszi vektortér* **valós Clifford-algebrá-jának** *hívjuk, ha*

– $c : V \to \mathrm{Lin}(Z)$ *Clifford-leképezés*

– *bármely* $c' : V \to \mathrm{Lin}(Z')$ *Clifford-leképezés esetén létezik egyértelműen egy* $h : \mathrm{Lin}(Z) \to \mathrm{Lin}(Z')$ *valós algebra-homomorfizmus úgy, hogy*

$$c' = h \circ c.$$

A $(\mathrm{Lin}(Z), c)$ *párt a* $\big(V, (\ \mid\ )\big)$ *pszeudoeuklideszi vektortér* **komplex Clifford-algebrájának** *hívjuk, ha*

– $c : V \to \mathrm{Lin}(Z)$ *Clifford-leképezés,*

– *bármely* $c' : V \to \mathrm{Lin}(Z')$ *Clifford-leképezés esetén létezik egyértelműen egy* $h : \mathrm{Lin}(Z) \to \mathrm{Lin}(Z')$ *komplex algebra-homomorfizmus úgy, hogy*

$$c' = h \circ c.$$

Bebizonyítható, hogy $\big(V, (\ \mid\ )\big)$-nek létezik valós Clifford-algebrája és komplex Clifford-algebrája is. A minket érintő esetekben konkrétan megadjuk ezeket.

Egyszerű tény, hogy c értékkészlete generálta valós, illetve komplex algebra $\mathrm{Lin}(Z)$, mert különben a fenti definíciókban szereplő h homomorfizmusok nem lennének egyértelműek. Tehát valós Clifford-algebra esetén a generálás valós lineáris kombinációkat és szorzásokat foglal magában, komplex Clifford-algebra esetén pedig komplex lineáris kombinációkat és szorzásokat.

Az is egyszerű az egyértelműségből, hogy ha $k \circ c = c$, akkor k az identitás.

A valós, illetve komplex Clifford-algebra lényegében egyértelmű, ami ezt jelenti:

20. Állítás. *Ha* $(\mathrm{Lin}(Z), c)$ *és* $(\mathrm{Lin}(Z')', c')$ *is valós, illetve komplex Clifford-algebra, akkor létezik egyetlen* $h : \mathrm{Lin}(Z) \to \mathrm{Lin}(Z')$ *valós, illetve komplex algebra-izomorfizmus úgy, hogy* $c' = h \circ c$*.*

Bizonyítás A definíció szerint létezik ilyen algebra-homomorfizus, és olyan h' is, hogy $c = h' \circ c'$. Ezekből $h \circ h' \circ c' = c'$ és $h' \circ h \circ c = c$, azaz $h \circ h'$ és $h' \circ h$ az identitások, vagyis h bijekció. $\square$

Megjegyzendő, hogy általában lineáris leképezések algebrája helyett tetszőleges algebrával definiálják a Clifford-algebrát; fizikai alkalmazások szempontjából elég az itt bevezetett fogalom.

12. Clifford-$\star$-algebrák

Legyen Z komplex vektortér, és $\mathrm{Lin}(Z)$-n adott egy $\star$ involúció.

3. Definíció. *A $c : V \to \mathrm{Lin}(Z)$ Clifford-leképezést* **Clifford-$\star$-leképezésnek** *hívjuk, ha $c(v)^\star = c(v)$ minden $v \in V$ esetén.*

A pszeudo-euklideszi vektortér $(\mathrm{Lin}(Z), c)$ valós, illetve komplex Clifford-algebráját **Clifford-$\star$-algebrának** *hívjuk, ha c Clifford-$\star$-leképezés.*

21. Állítás. *Legyen $(\mathrm{Lin}(Z), c)$ valós, illetve komplex Clifford-$\star$-algebra, és $c' : V \to \mathrm{Lin}(Z')$ Clifford-$\star$-leképezés (tehát $\mathrm{Lin}(Z')$-n is adott egy involúció, amelyet szokásosan ugyanazzal a $\star$ szimbólummal jelölünk); ekkor a definíció szerint létező $h : \mathrm{Lin}(Z) \to \mathrm{Lin}(Z')$ valós, illetve komplex algebra-izomorfizmus, amellyel $c' = h \circ c$ teljesül, megtartja az involúciót, azaz $h(A)^\star = h(A^\star)$ minden A-ra.*

Bizonyítás A V minden v elemére $(h(c(v))^\star = c'(v)^\star = c'(v) = h(c(v)) = h(c(v)^\star)$. Ez elég is, hiszen $c(v)$-k generálják $\mathrm{Lin}(Z)$-t.

13. Pszeudo-euklideszi vektortér izometriáinak ábrázolása

A $\big(V, (\,|\,)\big)$ pszeudoeuklideszi vektortér *izometriája* egy olyan $F : V \to V$ lineáris bijekció, amelyre $(Fv \mid Fw) = (v \mid w)$ minden $v, w \in V$ esetén. Ez Lie-csoport; tekintsük a következőkben csak az egységgel összefüggő részét.

Legyen F a pszeudoeuklideszi vektortér izometriája és $(\mathrm{Lin}(Z), c)$ valós, illetve komplex Clifford-$\star$-algebrája. Ekkor $(\mathrm{Lin}(Z), c \circ F)$ szintén valós, illetve komplex Clifford-$\star$-algebrája, tehát létezik egy S_F valós, illetve komplex $\star$-automorfizmus úgy, hogy

$$c \circ F = S_F \circ c.$$

Vegyük először a komplex esetet. Eredményünk szerint S_F belső automorfizmus, és egy D_F $\star$-unitér vagy $\star$-szemiuntér lekpépezessel adható meg. Mivel mind két $\star$-unitér, mind két $\star$-szemiunitér leképezés szorzata $\star$-unitér, és egy egy paraméteres részcsoport bármely eleme egy másiknak a négyzete, továbbá az összefüggő Lie-csoport minden eleme egyparaméteres résszcsoportokból vett elemek szorzata, minden D_F $\star$-unitér lesz.

Vegyük most a valós esetet. Eredményünk szerint S_F komplex lineáris vagy konjugált lineáris. Konjugált lineáris leképezések kompozíciója (egymásutánja) komplex lineáris, ezért az előbbi gondolatmenettel azt kapjuk hogy minden S_F komplex lineáris, és újra alkalmazva a gondolatmenetet itt is igaz lesz, hogy az S_F belső automorfizmusokat D_F $\star$-unitér leképezésekkel adhatjuk meg.

Tehát egységnyi számszorzó erejéig egyértelműen létezik $D_F : Z \to Z$ $\star$-unitér leképezés úgy, hgoy

$$c \circ F = D_F c(\cdot) D_F^{-1}. \tag{37}$$

Ezekből következik, hogy minden F, G izometria esetén létezik $\omega(F, G)$ egységnyi abszolút értékű komplex szám úgy, hogy

$$D_F D_G = \omega(F, G) D_{FG}.$$

Más szóval, $F \mapsto D_F$ az izometria-csoport *-unitér sugárábrázolása Z-n.

Az ω úgynevezett unitér kociklusokkal máshol foglakoznunk részletesebben. Most csak annyit kell tudnunk, mindig választhatjuk úgy (az egységnyi szorzó alkalmas megválasztásával), hogy ω azonosan 1 legyen minden egyparaméteres részcsoportnak az egysség egy környezetébe eső részén.

Tekintsük az izometria-csoport Lie-algebrája A elemének megfelelő egyparaméteres részcsoportot;

$$S_A := -i\frac{d}{dt}D_{\exp(tA)}|t = 0.$$

az A meghatározta egyparaméteres részcsoport infinitezimális generátora az ábrázolásban.

Az egység egy környezetében fennálló $D_{\exp(tA)}D^\star_{\exp(tA)} = \mathbf{1}$ egyenlőség differenciálásából azt kapjuk, hogy az infinitezimális generátor *-önadjungált:

$$S^\star_A = S_A.$$

14. Három dimenziós euklideszi vektortér valós Clifford-*-algebrája

$\mathrm{Lin}(\mathbb{C}^2)$, a kétszer kettes komplex mátrixok összessége négy dimenziós komplex vektortér.

Lássuk el $\mathrm{Lin}(\mathbb{C}^2)$-t a szokásos skaláris szorzásra vonatkozó * adjungálással mint involúcióval, azaz egy mátrix adjungáltja a transzponáltjának a komplex konjugálja (itt tehát $^\star = ^*$.

A

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pauli-mátrixok önadjungáltak, és a következő ismert és könnyen ellenőrizhető tulajdonságokkal rendelkeznek:

$$\sigma_k\sigma_l = \delta_{kl}\mathbf{1} + i\epsilon_{klm}\sigma_m, \tag{38}$$

amiből

$$\sigma_k\sigma_l + \sigma_l\sigma_k = 2\delta_{kl}\mathbf{1},$$

$$\sigma_k\sigma_l - \sigma_l\sigma_k = 2i\epsilon_{klm}\sigma_m,$$

ahol $k, l, m = 1, 2, 3$ és az azonos indexekre összegezni kell.

A $\mathrm{Lin}(\mathbb{C}^2)$ komplex vektortér bázisa $\mathbf{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

$\mathrm{Lin}(\mathbb{C}^2)$ mint valós vektortér nyolc dimenziós, amelynek bázisa előállítható a Pauli-mátrixok szorzataiból: $\mathbf{1} = (\sigma_1)^2$, σ_k, $i\sigma_k = \frac{1}{2}\epsilon_{klm}\sigma_l\sigma_m$, $i\mathbf{1} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$ $(k = 1, 2, 3)$.

Tehát a Pauli-mátrixok generálta valós algebra egyenlő $\mathrm{Lin}(\mathbb{C}^2)$-vel.

Legyen $\mathbf{N}(3)$ három dimenziós euklideszi tér.

Vegyük az $\mathbf{N}(3)$ egy $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3$ ortonormált bázisát. A

$$\sigma : \mathbf{N}(3) \to \mathrm{Lin}(\mathbb{C}^2), \ \sigma(\boldsymbol{n}_k) := \sigma_k \qquad (k = 1, 2, 3)$$

által meghatározott valós lineáris leképezés a Pauli-mátrixok fenti tulajdonsága alapján Clifford-*-leképezés.

22. Állítás. $(\mathrm{Lin}(\mathbb{C}^2), \sigma)$ *az euklideszi tér valós Clifford-*-algebrája.*

Bizonyítás Ha $c' : \mathbf{N}(3) \to \mathrm{Lin}(Z')$ Clifford-leképezés, akkor a $h(\mathbf{1}) := \mathbf{1}'$, $h(\sigma_k) := c'(n_k)$, $h(\sigma_k\sigma_l) := c'(n_k)c'(n_l)$, $h(\sigma_1\sigma_2\sigma_3) := c'(n_1)c'(n_2)c'(n_3)$ formulával egy generáló halmazon meghatározott homomorfizmusra $c' = h \circ \sigma$ teljesül.

Jegyezzük meg, később szükségünk lesz rá, az általános ismeretek alapján

$$\sigma(\boldsymbol{p})^2 = |\boldsymbol{p}|^2\mathbf{1},$$

és $\sigma(\boldsymbol{p})$ sajátértékei $|\boldsymbol{p}|$ és $-|\boldsymbol{p}|$, ahol $|\ |$ az euklideszi hossz.

15. Négy dimenziós Minkowski-tér komplex Clifford-*-algebrája

$\mathbb{C}^4$-et $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ alakban tekintjük, azaz elemeit (ξ, η) formában írjuk.

Ennek megfelelően $\mathrm{Lin}(\mathbb{C}^4)$ elemeit, a négyszer-négyes mátrixokat, kétszer kettes blokkokkal állítjuk elő.

Jelölje a pontszorzás a szokásos skaláris szorzást mind $\mathbb{C}^2$-n, mind $\mathbb{C}^4$-en.

A * a komplex konjugálást és transzponálást jelenti (vagyis mátrixokon a szokásos skalárszorzásra vonatkozó adjungálást).

Legyen

$$\beta := \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Világos, hogy $\beta^* = \beta$ és

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Ezután vezessük be a

$$\langle(\xi,\eta) \mid (\xi',\eta')\rangle := (\xi,\eta)\cdot\beta(\xi',\eta') = \begin{pmatrix} \xi^* & \eta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \xi\cdot\xi' - \eta\cdot\eta'$$

nem elfajuló szeszkilineáris leképezést.

Értelmezzük a négyszer négyes mátrixokon ($\mathbb{C}^4$ lineáris leképezésein) az ezáltal meghatározott involúciót, azaz ha X ilyen mátrix, akkor

$$\langle(\xi,\eta) \mid X(\xi',\eta')\rangle = \langle X^\star(\xi,\eta) \mid (\xi',\eta')\rangle;$$

kifejtve,

$$(\xi,\eta)\cdot\beta X(\xi',\eta') = X^\star(\xi,\eta)\cdot\beta(\xi',\eta') = (\xi,\eta)\cdot(X^\star)^*\beta(\xi',\eta'),$$

amiből $\beta X = (X^\star)^*\beta$, amiből adjungálással $X^*\beta = \beta X^\star$ adódik, és így végül

$$X^\star = \beta X^*\beta.$$

Tehát blokkokban,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^\star = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^* & -C^* \\ -B^* & D^* \end{pmatrix}.$$

A σ_k Pauli-mátrixokkal definiáljuk a

$$\gamma_0 := \beta, \qquad \gamma_k := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\sigma_k \\ \sigma_k & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, 3). \tag{39}$$

Dirac-mátrixokat. Ezekre

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2 g_{\mu\nu}, \quad \gamma_\mu^\star = \gamma_\mu \tag{40}$$

teljesül ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$).

Továbbá

$$\gamma_0^* = \gamma_0 \qquad \gamma_k^* = -\gamma_k, \tag{41}$$

áll fenn, amelyekből

$$\gamma_\mu \beta = \beta \gamma_\mu^*,$$

következik, és végül

$$\gamma_\mu^\star = \gamma_\mu;$$

itt és a továbbiakban a latin indexek 1-től 3-ig futnak, a görög indexek 0-tól 3-ig.

$\mathrm{Lin}(\mathbb{C}^4)$ mint komplex vektortér tizenhat dimenziós, amelynek bázisa előállítható a Dirac-mátrixok szorzataiból: $\mathbf{1} = \gamma_0^2$, γ_μ, $\gamma_\mu\gamma_\nu$, $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda$, $\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ ($\mu, \nu, \lambda = 0, 1, 2, 3, \mu < \nu < \lambda$).

Tehát a Dirac-mátrixok generálta komplex algebra egyenlő $\mathrm{Lin}(\mathbb{C}^4)$-gyel.

Legyen $\mathbf{N}(4)$ négy dimenziós Minkowski-tér a Lorentz-szorzást úgy véve, hogy az időszerűeken pozitív, a térszerűeken negatív.

Vegyük az $\mathbf{N}(4)$ egy $\boldsymbol{n}_0, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3$ Lorentz-ortonormált bázisát. A

$$\gamma : \mathbf{N}(4) \to \mathrm{Lin}(\mathbb{C}^4), \ \gamma(\boldsymbol{n}_\mu) := \gamma_\mu \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

által meghatározott valós lineáris leképezés a Dirac-mátrixok fenti tulajdonsága alapján Clifford-$\star$-leképezés.

23. Állítás. $(\mathrm{Lin}(\mathbb{C}^4), \gamma)$ *a Minkowski-tér komplex Clifford-$\star$-algebrája.*

Bizonyítás Ha $c' : \mathbf{N}(4) \to \mathrm{Lin}(Z')$ Clifford-leképezés, akkor a $h(\mathbf{1}) := \mathbf{1}'$, $h(\gamma_\mu) := c'(n_\mu)$, $h(\gamma_\mu\gamma_\nu) := c'(n_\mu)c'(n_\nu)$, $h(\gamma_\mu\gamma_\mu\gamma_\lambda) := c'(n_\mu)c'(n_\nu)c'(n_\lambda)$, $h(\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3) = c'(n_0)c'(n_1)c'(n_2)c'(n_3)$ formulával egy generáló halmazon meghatározott homomorfizmusra $c' = h \circ \gamma$ teljesül. $\square$

Jegyezzük meg, később szükségünk lesz rá, az általános ismeretek alapján, ha $p \cdot p = m^2$, akkor

$$\gamma(p)^2 = m^2 \mathbf{1},$$

és $\gamma(p)$ sajátértékei m és $-m$, a megfelelő $Z_\pm(p)$ sajátalterek két dimenziósak.