Téridőmodellek

Matolcsi Tamás

2012

Tartalomjegyzék

I. Előszó

A speciális relativitáselmélet azért született meg, mert a térről és időről alkotott naiv elképzelések csődöt mondtak a fényjelenségek (elektromágneses hullámok) vizsgálata során. Noha a relativitáselmélet formalizmusa a mindennapok jól működő gyakorlatává vált a modern fizikában, megfogalmazása miatt még ma is sok félreértésre ad okot: újra és újra jelennek meg olyan cikkek, sőt könyvek, amelyek paradoxonokat vélnek felfedezni benne (lásd 14.1 és 14.2).

A relativitáselmélet alapeszméje – a fény bármely tehetetlenségi rendszer minden térpontjából minden tériránybran azonos sebességgel terjed (homogén, izotróp fényterjedés, lásd a 16 fejezetet) – és jó néhány következtetése ellentmond a „józan észnek”, ezért berzenkednek ellene sokszor, és próbálják megcáfolni. Az ilyen próbálkozásoknak az ad táptalajt, hogy a térre és időre vonatkozó szokásos meggondolások – akár a régi, ma már nemrelativisztikusnak nevezett, akár a relativisztikus keretek között –

– **intuitív fogalmakra** épülnek, azaz pontosan meg nem határozott fogalmakra, amelyekről „mindenki tudja, mik azok, ezért nem kell róluk bővebben beszélni”, és

– **hallgatólagos megállapodásokra**, vagyis az intuitív fogalmak különféle elképzelt, kimondatlan „természetes tulajdonságaira”.

Ezek azonban olykor ellentmondásba torkollnak.

Ha el akarjuk kerülni – és el akarjuk – a félreértéseket, paradoxonokat, akkor ki kell küszöbölnünk a intuitív fogalmakat, hallgatólagos megállapodásokat, vagyis olyan elméleteket kell felépítenünk, amelyekben minden tökéletesen pontosan van megfogalmazva.

Hogyan érhető ez el? Úgy, hogy tudatosítjuk: bármely fizikai elmélet a valóságnak egy matematikai modelljét jelenti. Ugyanarról a fizikai objektumról különféle modelleket készíthetünk, attól függően, milyen célra akarjuk a modellt használni, azaz mely tapasztalatainkat akarjuk a modellben visszatükröztetni. Egyszerű példával: ha a vízről szerzett tudásunkat a hajózás szempontjából kamatoztatjuk, akkor a vizet folytonos közegnek írjuk le, amely viszkozitással stb. rendelkezik; ha kémiai szempontból, akkor H_2O molekulák összességeként, amelyeknek affinitása stb. van. Fontos az, hogy a modell matematikai objektum, benne matematikailag pontos definíciókat és állításokat kell – és csak ilyeneket szabad – megfogalmaznunk.

Igaz ez a téridő modelljeire is. Hangsúlyozzuk, hogy nem csupán a relativitáselméletre, hanem a téridővel kapcsolatos akármely elméletre, tehát a régi, ma már nemrelativisztikusnak nevezett elméletre is.

A téridő-elméletek pontos matematikai keretbe foglalása alapvetően fontos, mert minden fizikai elméletben szerepet kap a téridő is; a téridővel kapcsolatos esetleges félreértések vagy félreérthető megfogalmazások hibákat eredményezhetnek más területen is.

Ennek a könyvnek az a célja, hogy a téridő modellezésének általános alapelveit és fogalmait kézzelfoghatóvá tegye, származtassa matematikai formuláit. „élessé teszi” az intuitív fogalmakat, „feltárja” a hallgatólagos megállapodásokat, felhívja a figyelmet azokra a sarkalatos pontokra, amelyek a szokásos tárgyalásokban elsikkadnak, és amelyek figyelmen kívül hagyása eredményezi a paradoxonokat.

A nemrelativisztikus és a speciális relativisztikus téridőmodell alapos kifejtése – a jelen könyvben tárgyalt hozzájuk vezető út ismertetése nélkül – már rendelkezésre áll angol nyelven (T. Matolcsi: *Spacetime without Reference Frames*, 1993, Akadémiai kiadó, Budapest).

II. Bevezetés

A következőkben szemügyre vesszük a tér és idő tárgyalásával kapcsolatos szokásos intuitív fogalmakat és hallgatólagos megállapodásokat.

1. Az első felbukkanó fogalom jóformán mindenütt a vonatkoztatási rendszer, amelyet leginkább úgy határoznak meg, mint egy testhez rögzített derékszögű koordinátarendszert; például egy szoba falai által meghatározott adott sarkon átmenő három él a koordinátarendszer tengelyei[1]. Ebben intuitív fogalmak („amelyekről nem kell beszélni, mert úgyis mindenki tudja, miről van szó")

– a **tér**, amelyben a koordinátarendszert rögzítjük,
– az **egyenes** és
– a **derékszög**.

Hallgatólagos megállapodás az, hogy

– a szóban forgó test **merev** (hogyan rögzítenénk derékszögű koordinátarendszert egy földrengésrázta, gumifalú szobához?),
– a térben **vannak egyenesek**, pontosabban az, hogy bármely, általunk tapasztalt, szükségszerűen véges egyenes szakasz (mint a szoba élei) vég nélkül meghosszabbíthatók,
– ezen egyenesek összességére **az euklideszi geometria érvényes**: két egyenes csak egy pontban metszheti egymást; értelmes az egyenesek párhuzamossága; értelmes az egyenesek bezárta szög, speciálisan a derékszög; egy háromszög szögeinek összege az egyenesszög; értelmes az egyenes szakaszok hossza, ezzel igaz a Pitagorasz-tétel stb.

2. A vonatkoztatási rendszerek között kitüntetett szerepet szánnak a tehetetlenségi rendszereknek, amelyeket tulajdonképpen Newton első törvényével szokás meghatározni[2]: „Van olyan vonatkoztatási rendszer, amelyben egy teljesen magára hagyott (erőmentes) pontszerű test nyugalomban vagy egyenes vonalú egyenletes mozgásban van. Az ilyen rendszert inerciarendszernek nevezzük." Ez a meghatározás

– az **egyenes vonalú egyenletes mozgás** intuitív fogalmára

épült, amely burkoltan magában foglalja

– az **idő** intuitív fogalmát,

és azt

– a hallgatólagos megállapodást, hogy **az idő egyenletesen múlik.**

Mielőtt bővebben foglalkoznánk ezekkel, vegyük észre, hogy

[1] Dr. Budó ágoston: *Mechanika*, Tankönyvkiadó, Budapest 1964 (15. old.)
[2] Dr. Budó ágoston: *Mechanika*, Tankönyvkiadó, Budapest 1964 (37. old.)

– a vonatkoztatási rendszer idézett szokásos meghatározása – merev testhez rögzített Descartes-féle koordinátarendszer – csak a térre vonatkozik,

– míg a tehetetlenségi rendszer meghatározása már az időt is tartalmazza.

Ezért félrevezető azt mondani, hogy a tehetetlenségi rendszer speciális vonatkoztatási rendszer. Az is figyelemre méltó, hogy a tehetetlenségi rendszer fenti meghatározásában a térbeli koordinátarendszer semmiféle szerepet sem kap, egyedül csak az jelenik meg, hogy a térben van egyenes. Tehát a tehetetlenségi rendszerhez szükséges az idő, szükséges a tér, de felesleges a térbeli koordinátarendszer.

Mi később, pontos meghatározás alapján, más értelemben használjuk a vonatkoztatási rendszer fogalmát, mint amit a szokásos tárgyalásokból idéztünk; ezért a továbbiakban az 1. pontban leírtakra a *térbeli koordinátarendszer* elnevezést használjuk.

3. Az egyenes vonalú egyenletes mozgás intuitív fogalma az előtte felsoroltaknál sokkal súlyosabb kérdéseket vet fel, amelyek elhallgatása sokszor okoz zavart a relativitáselméletben.

A szokásos egyszerű megfogalmazás szerint „egyenletes egy test mozgása, ha egyenlő távolságokat egyenlő idők alatt tesz meg'. Ebben („nem kell róla beszélni, mert úgyis mindenki tudja, miről van szó"),

– az **adott távolság megtételéhez szükséges idő** intuitív fogalma

jelenik meg. Hogy lássuk, mennyire nem kézenfekvő ez a fogalom, fejtsük ki, miről is van szó pontosan. A jó szemléltetés érdekében tekintsünk egy hétköznapi példát. Vegyük a 100 méter hosszú futópályát; hogyan mérjük, mennyi idő telt el, míg egy sportoló a rajttól elért a célig?

Három egyszerű lehetőség van.

Az egyikhez egyetlen stopperóra és egy személy kell, aki állhat akárhol. Amikor a személy látja, hogy a futó rajtol, megindítja a kezében lévő stopperórát, és amikor látja, hogy a futó beért a célba, megállítja a stoppert. (Ez a szokásos időmérés a futóversenyeken, persze kifinomult formában: az időmérő személyt gép helyettesíti, amely a rajttól illetve a célból érkező elektromos jelet „látva" indítja meg illetve állítja meg a stopperórát.)

A másik módszerhez két stopperóra és két személy kell. Az egymás mellé tett órákat egyszerre elindítják, majd az egyiket a rajtnál álló személyhez viszik, a másikat a célnál állóhoz. Amint a futó rajtol, illetve célba ér, az ottani órákat megállítják, majd leolvassák a két óraállás különbségét.

A harmadik ötvözi az előző két módszert. A két stopperórát elhelyezik a rajtnál és a célnál, majd a rajttól és a céltól egyenlő távolságra levő pontból egyszerre küldött fényjellel (elektromos jellel) megindítják mindkettőt. Ezután az előző módszer végén ismertetett módon járnak el.

A szokásos (felületes) felfogás szerint mindhárom módszer – és bármely más is – ugyanazt az eredményt adja, és alkalmas az „adott távolság megtételéhez szükséges idő" megállapítására. Gondoljunk utána, jogos-e ez?

Az első módszernél nem akkor indul, illetve áll meg az óra, amikor a futó a rajtnál illetve a célnál van, hanem amikor azoktól a fény (elektromos jel) megérkezik az órához. A mért időtartam nyilvánvalóan függ attól, hol van az óra a futópálya végpontjaitól: ha az óra például a rajtnál van, akkor csak 100 méternyi fényút szól bele a mérésbe; ha az óra mindkét végponttól 100 méterre van, akkor 200 méternyi fényút. Persze a fény igen gyors terjedése miatt a hétköznapi körülmények között 100 méter vagy akár 1000 méter fényút is gyakorlatilag elenyésző eltérést eredményez, de elvileg mégiscsak megvan, és nagyon gyors mozgás esetén már korántsem elhanyagolható.

A második módszer azért látszik jobbnak, mert az órák megállítása egybeesik azzal, hogy a futó az adott helyen van. Felmerül azonban a kérdés, vajon nem befolyásolják-e az elvitt óra járását a szállítás viszontagságai: gyorsítani kell az útrakelésnél, zötykölődik útközben, lassítani kell a megérkezésnél. Hétköznapi körülmények között az órajárások megváltozása nem tapasztalható, azaz ha van is, elenyésző. Nem zárhatjuk ki azonban, hogy szélsőséges esetekben – például erős rázkódással terhelt szállítás alatt – nem ugyanez a helyzet.

A harmadik módszer tűnik a legjobbnak. Hiszen „köztudomású, hogy a fény mindenhonnan minden irányban ugyanolyan gyorsan terjed", tehát a két óra „egyszerre" indul, és aztán a megállításukkal sincs semmi baj. Csakhogy honnan tudjuk a fény terjedéséről mondottakat? Hiszen ehhez éppen azt kellene megmérni valamiképp, hogy adott távolságot a fény mennyi idő alatt tesz meg. és erre nincs módszer. Kérjük a meglepődött olvasót, tartsa ezt észben; később magyarázatot kap arra, mit is jelent pontosan a fény homogén és izotróp terjedése.

Összefoglalva: „az adott távolság megtételéhez szükséges idő" intuitív fogalma igencsak ingatag lábakon áll.

Vegyük észre, hogy a szokásos keretek között a **sebesség is intuitív fogalom**, hiszen „az adott távolság megtételéhez szükséges idő" fogalmán alapszik; mi több, a mondottak szerint felettébb kétséges az értelmezése.

Végül a továbbiak jobb megértése szempontjából felhívjuk a figyelmet arra, hogy „az adott távolság megtételéhez szükséges idő" lényegében

– **két különböző térpontban bekövetkezett két esemény között eltelt időtartam** intuitív fogalmának

egy speciális esete: az egyik esemény a sportoló indulása, a másik a sportoló érkezése. Általában azonban nem kell, hogy ugyanazon anyagi objektumhoz kötődjön a két esemény. Elvileg ugyanaz a probléma, ha mondjuk az iránt érdeklődünk, mennyi idő telt el egy ünnepségen a stadion egyik végében, illetve másik végében elengedett galambok felröppenése között.

Speciálisan az idézett intuitív fogalom magában foglalja két különböző térpontban bekövetkezett két esemény **egyidejűségének** intuitív fogalmát is (az eltelt nulla időtartam által).

4. A téridő-elméletek szokásos tárgyalásának legfontosabb kérdése az egymáshoz képest mozgó térbeli koordinátarendszerek közötti kapcsolat, amely a következőképpen szól.

Tekintsünk egy (X, Y, Z) derékszögű koordinátarendszert, meg egy hozzá képest v sebességgel egyenletesen mozgó (X', Y', Z') rendszert úgy, hogy a rendszerek megfelelő tengelyei párhuzamosak egymással, az X és X' tengelyek egybeesnek, amint azt az 1. ábra mutatja.

Jegyezzük meg rögtön, hogy az ilyen tárgyalás (a derékszögű koordinátarendszereken túl) már a legelején két intuitív fogalomra épül:

– az egyik a **sebesség**,

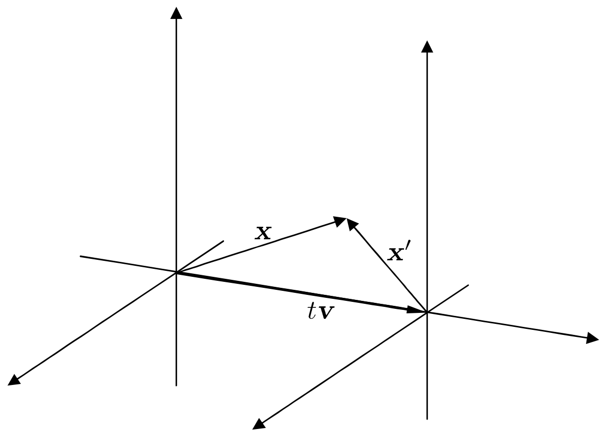
– a másik **az egymáshoz képest mozgó egyenesek párhuzamossága**,

amely „oly nyilvánvaló, hogy nem is kell beszélni róla": látjuk az ábrán is a párhuzamosságot, és azt is elképzeljük, hogy egy kicsit korábban, amikor a kezdőpontok egybeesnek, akkor a tengelyek is fedik egymást. Pedig ez egyáltalán nem nyilvánvaló, amint azt nemsokára megmutatjuk.

A „hétköznapi” – tudományos nevén nemrelativisztikus – esetben így folytatódik a gondolatmenet: leolvasható az ábráról, hogy a kezdőpontok találkozása után t idővel az első koordinátarendszer $\boldsymbol{x}$ vektorát a másik rendszer olyan $\mathbf{x}'$ vektornak észleli, amelyre $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - t\boldsymbol{v}$ teljesül, koordinátákban

$$x' = x - tv, \qquad y' = y, \qquad z' = z.$$

Ez a jól ismert Galilei-féle transzformációs szabály.



1. ábra. Galilei-féle transzformációs szabály

A relativitáselméletben a koordinátatengelyeket ugyanúgy lerajzolják, a vektorokat ábrázoló nyilakat azonban már elhagyják, mert azok semmiképp sem támasztják alá a fenti transzformációs szabály helyett az

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}(x - tv), \qquad y' = y, \qquad z' = z$$

Lorentz-féle transzformációs szabályt.

Ez a „kettős mérce” megingathatja a bizalmunkat: ha az, amit az ábra nyilai „nyilvánvalóan” mutatnak, nem igaz a relativisztikus esetben, mi alapján fogadhatjuk el, hogy „nyilvánvaló” fogalom az egymáshoz képest mozgó egyenesesek párhuzamossága?

5. Vizsgáljuk meg, mit is érthetünk azon, hogy két, egymáshoz képest mozgó egyenes párhuzamos egymással!

Térjünk vissza a koordinátarendszerek ábrájára, ahol „látjuk, hogy egy kicsit korábban, amikor a kezdőpontok egybeesnek, akkor a tengelyek is fedik egymást”.

Ezt az egybeesést a következőképpen tudjuk leírni. Legyen egy fényképezőgép (a szemünk) a vízszintes Y tengelyen az origótól d távolságra. Ekkor a függőleges tengely z pontjától $\sqrt{z^2 + d^2}$ távolságra van.

Mozogjon egy C vonal az $X - Z$ síkban v sebességgel (ez felelne meg a mozgó koordinátarendszer Z' tengelyének).

A fényképezőgép pillanatfelvételt készít, amelyen a mi Z tengelyünk és a C egybeesik. Ez azt jelenti, hogy a fény egyszerre érkezik a gép lencséjére a Z minden pontjáról és a C minden pontjáról.

Ha c a fény sebessége, akkor a fény futamideje a Z tengely z pontjától $\sqrt{z^2+d^2}/c$. Tehát a fény a z pontból $\frac{1}{c}(\sqrt{z^2+d^2}-d)$ idővel hamarább indul, mint az origóból.

A mozgó C vonal a_0, illetve a_z pontjából a lencsére érkező fény akkor indul, amikor ezek a pontok találkoznak az origóval, illetve a z ponttal. Tehát a fény hamarább indul a_z-ből, mint a_0-ból; ez azt jelenti, hogy amikor a_0 találkozik az origóval, akkor a_z már elhagyta z-t, a távolságuk éppen $\frac{v}{c}(\sqrt{z^2+d^2}-d)$.

Ezért a pillanatfelvétel idején a mozgó vonal koordinátái

$$\left(\frac{v}{c}(\sqrt{z^2+d^2}-d), z\right)$$

az $X-Z$ síkban. Tehát C *nem egyenes.*

A látásunk csalóka: félrevezet, amikor azt hisszük, hogy egyenesek egybeesését látjuk.

A figyelmes olvasó észreveheti, hogy a fenti levezetésben bizony felhasználtuk két térpontbeli esemény közt eltelt időtartamot (a z pontból adott idővel hamarább indul a fény, mint az origóból) és a fény sebességét, amelyekkel kapcsolatban az előzőekben komoly kételyeket támasztottunk, ezért kétségbe vonhatja a mondottak igazságtartalmát. Megnyugtatásul: a kételyek arra vonatkoztak, hogy az említett fogalmak egyszerűek, magától értetődők; de azt nem vontuk kétségbe, hogy megfelelő eljárással értelmezhetők, noha esetleg többféleképpen is.

Az biztos, hogy nyitva marad a kérdés: mit jelent egymáshoz képest mozgó egyenesek párhuzamossága. Mivel az is benne van a szokásos érvelésben, hogy a lépték is ugyanaz a két egyenesen, egy kicsit még tovább élesítve, nyitott marad a kérdés: mit jelent az, hogy egy térbeli vektor egyenlő egy hozzá képest mozgó vektorral.

Viszont az is biztos, hogy ennek a kérdésnek a megválaszolása döntő fontosságú, hiszen enélkül nem tudnánk értelmezni a szokásos tárgyalásokat.

III. Téridőmodellek felépítése

1. Téridők heurisztikája

Ebben a fejezetben összegyűjtjük azokat a tapasztalatainkat, amelyek a téridő matematikai modelljeinek alapját szolgáltatják. Hangsúlyozzuk, **a modellalkotáshoz csak fizikai tényeket veszünk tekintetbe**, művi konstrukciókat (mint például a koordinátarendszer) nem engedünk meg.

1.1. Tér

Legelemibb fogalmaink közé tartozik a tér.

Mi is az a tér? Ülünk a szobában; a terünk egy pontja a szoba sarka, egy folt a szőnyegen, és a terünk egy része az asztal. Kinézünk az ablakon, fákat látunk, kéményeket, hegyeket, ez mind része a terünknek. Egy autó, amely megy az úton, jelenség a számunkra, nem a terünk része.

Viszont a műszerfal, az ülések, a kapaszkodók stb. alkotják a teret annak, aki az autóban ül. Kinézve a kocsiból házakat, fákat, kéményeket lát szaladni; azok nem részei az autó terének.

Tehát más a tér a szobában és más a tér a kocsiban. Megállapíthatjuk, hogy teret bizonyos anyagi objektumok – nevezzünk egy ilyet **megfigyelőnek** – hoznak létre; **különböző megfigyelők tere különböző**, vagyis **a tér relatív** fogalom. Más szóval tér önmagában, mindentől függetlenül nem létezik, azaz **nincs abszolút tér**.

Különböző megfigyelők terei igen különböző tulajdonságokkal rendelkezhetnek: mennyire más a jelenlegi szobánk tere, mint egy földrengés rázta gumifalú szoba tere!

A következőkben felsorolt tulajdonságok csak egy „jó megfigyelő" terére igazak. Ilyen a **tehetetlenségi megfigyelő**, amelyet az a fizikai tény határoz meg, hogy a térpontjai minden hatástól mentes anyagi pontok, amelyek nem mozognak egymáshoz képest. A továbbiakban megfigyelőn – amíg nem mondunk mást – tehetetlenségi megfigyelőt értünk.

Egyszerű tapasztalataink egy megfigyelő terére:

(S1) Vannak egyenes vonalak a térben, és bármely két térpont közé egy **vektor** azaz egy irányított egyenes szakasz húzható; a vektorok jól ismert szabályoknak tesznek eleget.

(S2) A tér háromdimenziós, azaz három lényegesen különböző irány van – jobbra-balra, előre-hátra, föl-le –, amelyekből bármely más irány „összetehető".

Kevésbé egyszerű tapasztalat, de kifinomult kísérletek (K-mezonok bomlásának aszimmetriája) igazolják:

(**S3**) **A tér irányított**, azaz a „jobbsodrás" – a jobbra, előre, föl sorrendje – és a „balsodrás" – a balra, hátra, le sorrendje – nem egyenértékű.

Terünkben (a szobában vagy az autóban) meghatározott eljárással távolságok és szögek mérhetők. Távolság mérésére például méterrudat alkalmazunk, amelyet úgy határozhatunk meg, mint egy erőhatásnak ki nem tett kvarckristály adott számú molekulájából álló egyenes láncot. A távolságok és szögek jól ismert összefüggéseknek tesznek eleget („két pont között legrövidebb út az egyenes", „egy háromszög szögeinek összege 180^o" stb), amelyek rendszerét euklideszi szerkezetnek nevezzük. Tehát:

(**S4**) **A tér euklideszi szerkezettel rendelkezik**.

Vegyük észre, hogy a felsorolt tulajdonságokat emberi méretű tapasztalatokat tükröznek. Felmerül a kérdés, vajon igazak-e emberi méreteken túl is. értelmes-e például a vektor egy galaktika két távoli csillaga vagy egy kristály két szomszédos atomja között? Erre nem válaszolunk. Téridőmodellt készítünk, amelyben extrapoláljuk az emberi méretű tapasztalatainkat akármilyen nagy és kis méretre; tartsuk észben, hogy a modell nem a valóság, csak annak emberi mása.

1.2. Idő

1.2.1. Időtartam, időpont

Legelemibb fogalmaink között szerepel az idő is.

Folyamatok mutatják, hogy múlik az idő: lélegzünk, valaki beszél, egy óra tiktakol, a Nap halad az égen. **Az idő múlása is anyagi valóság**.

A mindennapi beszédben, de a szokásos fizikai terminológiában is az idő szó jelenthet

– időtartamot: „sok időt vesz igénybe", „hosszú idő után"
– időpontot: „mennyi az idő?", „ugyanabban az időben".

Mi több, ugyanaz a szerkezetünk (óra) szolgál az *időtartam mérésére* és az *időpont mutatására*. Ezért gyakran összemosódik ez a két fogalom: időtartam és időpont. Pedig alapvetően fontos, hogy élesen megkülönböztessük őket.

Felületesen nézve – a hétköznapi beidegződésünk okán – úgy tűnik, két időpont és a közöttük eltelt időtartam ugyanolyan viszonyban van egymással, mint két térpont és a köztük levő vektor. Ennél azonban bonyolultabb a helyzet. Ugyanis mind a térpontok, mind a közöttük levő vektorok „kézzel fogható" valóság. Viszont ez nem egészen igaz az időpontokra és az időtartamokra.

1.2.2. Sajátidők

Múlik az idő: öregszünk. Nem csak az élő szervezetek öregszenek: eszközeink, bútoraink, házunk is, a sziklák a hegyekben (manapság már remek módszerek vannak például annak kimutatására, mennyi idős egy kőzetdarab).

Az idő múlását időtartammal érzékeljük: Tapasztalom a reggelim és ebédem közötti időtartamot (az éhségen keresztül), mint ahogy te is a reggelid és ebéded között. Én nem érzékelem a te reggelid és ebéded közötti időtartamot. Egy elemi részecske is tapasztalja az élettartamát, a keletkezése és az elbomlása közötti időtartamot. Alapvető tényként foghatjuk fel, hogy **az idő minden anyagi pontnak egyedileg múlik**. Úgy is fogalmazhatunk, hogy mindenkinek a saját ideje múlik; ennek hangsúlyos kifejezésére egybeírva használjuk a **sajátidő** elnevezést. A sajátidő múlását úgy szemléltetjük – annak mintájára, hogy karunkon ott ketyeg az óra és mutatja az időnk múlását –, hogy egy picinyke kvarc kristályt képzelünk rögzítve egy anyagi ponthoz, és annak a rezgései (kettyenései) mérik az egyedi idő múlását. Nevezzük ezt a kis időmérő szerkezetet **kronométernek**. Szándékosan kerüljük az óra elnevezést, hogy ne vezessen félre a szokásos szerkezetünk képe: a kronométernek nincs számlapja, nem mutatja, hány óra van (ennek nincs is még értelme), csak azt méri, mennyi sajátidő telt el (hányat kettyent) az anyagi pont két eseménye között (mondjuk „megreggeliztem" és „megebédeltem" között).

Alapvető tapasztalataink a sajátidőnkről:

(**T1**) **A sajátidő egydimenziós**, mert csak előre (jövő) és hátra (múlt) irány létezik.

(**T2**) **A sajátidő irányított**, mert a jövő és a múlt nem egyenértékű.

Hangsúlyozzuk, a mondottak az egyedi időmúlásokra vonatkoznak. Semmit sem állítottunk az egyedi időmúlások egymáshoz való viszonyáról.

Egyszerű hétköznapi tapasztalatunk azt sugallja, hogy mindenkinek ugyanúgy múlik az idő, vagyis hogy két anyagi pont két találkozása között ugyanannyi idő telt el az egyiknek, mint a másiknak. Például legyek én az egyik anyagi pont, a másik a lakásom; elmegyek otthonról, utazgatok egy kicsit, majd visszatérek; úgy találom, hogy az otthon maradt kronométer ugyanannyit kettyent az indulásom és az érkezésem között, mint a magammal vitt kronométerem, jobban mondva legfeljebb akkora az eltérés közöttük, ami a szerkezetek gyakorlati pontatlanságából is származhat. De az ilyen tapasztalatok csak nagyon „szelíd" körülményekből erednek. Képzeljük el, hogy két egymás mellett levő kronométerből az egyiket „békén hagyjuk", a másikat egy korongra rögzítjük, igen gyorsan sokszor körbe forgatjuk, majd levesszük; biztos hogy a két kronométer ugyanannyit kettyent a találkozásaik között? A kérdést nyitva hagyjuk.

1.2.3. Egyidejűség (szinkronizáció)

Egy sajátidő-tartam – egy kronométer kettyenéseinek a száma – fizikai tény. Mint ilyen, csak egy anyagi pont két eseménye között értelmes. Jól gondoljunk bele ebbe: nincs eleve értelme az én reggelim és a te ebéded között eltelt időtartamnak (hacsak nem voltunk együtt a reggelimnél és az ebédednél): milyen kronométer mérné ezt az időtartamot?

Hétköznapi felfogásban az időtartam alapvetően sajátidő-tartamra vonatkozik: amikor azt mondom, hogy öt óra telt el a reggelim és az ebédem között (vagy a vonatra felszállásom és a leszállásom között stb.), a sajátidő-tartamomról beszélek. Tehát a szokásos **időtartam fogalmunk fizikai tényt tükröz**.

Ezzel ellentétben egészen más a helyzet a szokásos időpont fogalmunkkal.

Mi is egy időpont? Mi például a déli 12 óra? Mit jelent, hogy én itt Budapesten és te ott Szegeden 12 órakor ebédelünk? Mit jelent az „ugyanakkor" két különböző térpontban?

Tulajdonképpen az időpont problémája szerepelt a Bevezetésben, amikor az adott távolság megtételéhez szükséges idő kérdését taglaltuk, amely két különböző térpontban bekövetkezett két esemény között eltelt időtartam, speciálisan a két különböző térpontban bekövetkezett két esemény egyidejűségének intuitív fogalmára épül.

Egy anyagi pont kronométere (kvarckristály) azt méri, mennyi idő telik el (hány kettyenés történik) az anyagi pont két eseménye között, azt nem mutatja – van egyáltalán annak értelme? –, hogy mikor („hány órakor") történik az anyagi pont egy eseménye.

Most azt vizsgáljuk meg, hogyan értelmezhető egy esemény időpontja. Ha értelmezhető, akkor annak is van értelme, hogy (két különböző anyagi pont) két eseménye azonos időpontban következik be. Tegyük fel tehát így a kérdést: mi alapján állíthatjuk, hogy két esemény egyidejű?

Emberi méretű, hétköznapi tapasztalatunk a látáson alapszik. Mi történik *most* kinn az utcán? Kinézek az ablakon, és megnézem. Már itt kétely merülhet fel, hiszen amit látok, az nem „most" van, hanem egy kicsit korábban volt, mert időbe telt – ha még oly kevésbe is –, mire az utcáról hozzám ért a fény. Továbbá korántsem ilyen egyszerű a dolog, ha azt kérdezem, mi történik **most** egy 240 kilométerrel arrébb levő városban. Mondjuk Budapesten és Debrecenben robban egy-egy petárda: vajon egyidejűleg vagy sem? Még élesebben: gondoljunk egy szupernova-robbanásra és két meteor ütközésére az űrben; mi az értelme – van-e értelme – annak, hogy e két történés egyidejű?

Egy megfigyelő terének minden pontjában telik az idő (ketyeg egy kronométer), azonban ezek a különböző pontban telő idők eleve semmilyen viszonyban sincsenek egymással. Budapesten is, Debrecenben is rezeg egy-egy kvarckristály mérve az idő múlását; arról ezek semmiféle információt nem adnak – van egyáltalán annak értelme? –, mikor egyidejű egy-egy órakettyenés a két városban, konkrétan például, mikor van éjfél a két városban.

Hogyan is értelmezzük az egyidejűséget a Föld különböző pontjai között? ősrégi módszer szerint a Nap, illetve a csillagok állásával. Gondoljuk el a forgó Földet és a Napot az égitestek, az „állócsillagok" roppant rendszerében. Egy adott napon ismerjük a Föld helyzetét a Nap körüli pályáján, és ennek alapján határozzuk meg, hogy akkor van éjfél Budapesten, amikor a csillagok egy előírás szerint így és így állnak, és akkor van dél, amikor a Nap így és így áll. A budapesti éjféllel, illetve déllel egyidejű pillanatot Debrecenben a csillagoknak, illetve a Napnak az előzőtől megfelelően eltérő állása határozza meg. Az egyidejűség ilyen meghatározásához nagyon pontos iránymérés szükséges. A mérés pontatlansága néhány másodperces hibát is eredményezhet, ami azonban gyakorlatilag nem számít.

Manapság a mindennapi gyakorlatban másként is értelmezünk egyidejűséget, rádiójelekkel, ami a közvetlen közelünkben a látással kialakult egyidejűség kiterjesztése nagyobb távolságokra. Budapestről éjfélkor rádiójelet (pontos időjelzést) indítunk Debrecen felé; a rádiójel érkezésekor Debrecenben úgy állítjuk be az időpontot éjfél után, hogy – ismervén a Budapest-Debrecen távolságot – a távolság/időtartam megegyezzék az ismert fénysebességgel.

A Nap járása, a csillagok állása – vagyis a Föld forgása – kézenfekvővé tette az egyidejűség meghatározását a Föld felszínén, és ez a fogalom, együtt a fény által (látással) érzékelt egyidejűséggel már régesrég kialakult, a mindennapok részévé vált. Ezért szinte természettörvénynek tűnik az egyidejűség mindentől független létezése. Ezt az abszolút egyidejűséget kérdőjelezte meg – sőt vetette el – a relativitáselmélet. A relativitáselmélet ellen megfogalmazott paradoxonok okai között kivétel nélkül az is szerepel, hogy bújtatva az abszolút egyidejűséget vagy annak valamely következményét is felhasználják.

Jól lássuk: a hétköznapi gondolkozás a mondottakat úgy fogja fel, hogy van egyidejűség, és a fenti eljárásokkal ezt a létező egyidejűséget „mérjük meg", mint ahogy van távolság a két város között, és azt valamely eljárással megmérjük. A valóság azonban az, hogy nincs eleve adott (önmagában értelmes) egyidejűség, a fenti eljárások **definiálják** az egyidejűséget, és lehet, hogy nem is ugyanazt. Sőt, valóban nem ugyanazt az egyidejűséget eredményezi az, amelyet a csillagok állásából határozunk meg, és az, amelyet a rádiójelekkel, amint azt később megmutatjuk (lásd 14.2); az eltérés azonban csak a másodperc töredéke, ami gyakorlatilag semmi, de elvileg jelentős: **az egyidejűség – és ezzel az időpont – emberi konvenció, nem fizikai valóság**.

Az egyidejűség megadását **szinkronizációnak** nevezzük. A mondottak és alapelvünk szerint tehát szinkronizációk – és így az időpontok – nem kaphatnak szerepet egy téridőmodell felállításában.

Egy megfigyelő egy szinkronizáció időpontjait úgy tudja realizálni, hogy a terének minden pontjába odatesz egy szerkezetet, nevezzük **szinkrométernek**, amelyik folyamatosan mutatja a szinkronizációs időpontokat. Bár eddig a szinkronizáció létesítésének szemléltetésére városokat (egy megfigyelő egymástól távoli térpontjait) tekintettünk, minden ugyanúgy érvényes mondjuk egy épület különböző helyeire (egymáshoz közeli térpontokra). Például egy iskola minden pontjában mutatja („hallatja") a szinkrométer („csengő") a szünetkezdések és -befejezések pillanatát.

Mi itt bevezettük külön a kronométert, amely időtartamot *mér*, és a szinkrométert, amely időpontot *mutat*. Lényeges, hogy időpontot nem lehet mérni. Ezért is beszéltünk eddig nem számokkal jellemzett pillanatokról: ilyen az éjfél, a dél, a szünet kezdete az iskolában stb.

A kronométerek és a szinkrométerek teljesen különböző és elvileg független szerkezetek: szinkronizációs időpontok és sajátidő-tartamok különböző dolgok. Nem zárhatjuk ki annak a lehetőségét, hogy adott szinkronizáció szerinti két időpont között a megfigyelő két térpontjában más időtartam telik el (például a fentebb meghatározott dél és éjfél között nem ugyanannyit kettyentek a kronométerek Budapesten és Debrecenben). Ha ilyet nem tapasztalunk – legalábbis gyakorlatilag elhanyagolható hibán belül –, akkor egy kronométer és egy szinkrométer egyetlen szerkezetbe foglalható, a szokásos óraszerkezeteinkbe, mely a szinkronizációs időpontokat aszerint nevezi el, hogy mennyi idő telt el bármely megfigyelő-térpontban egy „kezdőpillanattól" (éjféltől) számítva.

1.3. Mozgások

1.3.1. Mozgások pályája

Tapasztaljuk, hogy anyagi objektumok mozognak hozzánk képest, azaz változtatják helyüket a terünkben. általában, egy megfigyelő mozgásokat észlelhet.

Emberi létezésünk alapján önkéntelenül mindig a Földhöz viszonyítjuk a mozgásokat. Mindig úgy gondoljuk, hogy az autó mozog a Földhöz képest, sohasem úgy, hogy a Föld mozog az autóhoz képest. Pedig ez utóbbi is igaz. Hogy jól felfogjuk a mozgás viszonylagosságát, „egyenrangú" megfigyelőket kell tekintenünk. Aki már ült úgy repülőn, hogy a gép sűrű felhőben volt, átérezhette, hogy nem mozog, hanem áll; és egyszercsak felbukkan egy másik gép, amelyik szédítő gyorsan elhúz mellettünk. Természetesen a másik gépen ülők is úgy érezhetik, hogy ők állnak, és a mi gépünk süvít el mellettük.

Gondoljunk egy meteorra az űrben. A meteor van, de önmagában nem mozog. Viszont mozog a Földhöz képest, mozog a Marshoz képest, másképp az egyikhez, mint a másikhoz. Repül egy madár: ugyanúgy a madár önmagában nem mozog; mozog az úthoz képest, mozog az úton haladó autóhoz képest, másképp az egyikhez, mint a másikhoz. A meteor létezik, a madár létezik, létezésüket különböző mozgásoknak észlelik a különböző megfigyelők.

A mozgás tehát viszonylagos. Egy megfigyelő által észlelhető mozgások tulajdonságai fontos információkat nyújtanak térről és időről.

Egy pontszerű test mozgásának a pályája egy megfigyelő terében azoknak a térpontoknak az összessége, amelyekkel a test a mozgása során találkozik.

Az első egyszerű tapasztalatunk bármely megfigyelőre:

(M1) Minden egyenes lehet mozgás pályája.

1.3.2. Mozgások gyorsasága

A fecske a Földhöz (a levegőhöz) képest gyorsabban repül, mint a veréb (az autóhoz képest már nem biztos: repüljön a fecske is, veréb is arra, amerre az autó halad; az autó (a benne levő ember) úgy észleli, hogy a fecske lassan, a veréb gyorsan távolodik hátrafelé). A mozgás gyorsasága is fontos tapasztalatunk közé tartozik. Hogyan állapítjuk meg egy mozgás gyorsaságát? Lényegében ezt jártuk körül a Bevezetés 3. pontjában. A 1.2.3 pontban mondottak szerint úgy fogalmazhatunk, hogy egy mozgás gyorsaságának mennyiségi jellemzéséhez elengedhetetlen a különböző térpontok egyidejűségének megállapítása, vagyis egy szinkronizáció. Minthogy ez nem fizikai tény, a mozgások gyorsaságának fogalmát nem használhatjuk a téridőmodell felépítéshez.

Két különböző térpontbeli esemény egyidejűsége és ezzel együtt korábbi-későbbi viszonya csak egy szinkronizáció esetén értelmes. Viszont egy térpontban fizikailag értelmes a korábbi-későbbi fogalma.

Tekintsünk egy futóversenyt. Joggal mondhatjuk például azt, hogy az indulás előtt a rajtnál, érkezés után a célban (de azt nem, hogy az indulás előtt a célban). A futók egyszerre indulnak a rajtnál, de nem egyszerre érkeznek a célba. Amelyik korábban ér célba, az gyorsabb, mint az, amelyik később. Tudjuk tehát, melyik futó a gyorsabb a másiknál anélkül, hogy tudnánk, melyiknek mennyi a – ki tudja, hogyan mért – időeredménye. Vagyis tudjuk, melyik a gyorsabb, anélkül, hogy tudnánk, milyen gyors.

A mondottak alapján ezt az igen fontos megállapítást tehetjük: **egy megfigyelőhöz képest azonos pályájú mozgások esetén szinkronizáció nélkül is van értelme annak, melyik a gyorsabb (lassabb)**, viszont annak, hogy milyen gyors a mozgás, csak szinkronizáció mellett van értelme.

A mozgások gyorsaságának összehasonlítására még további tapasztalataink is vannak.

Az első megállapításunk az, hogy bármely mozgás esetén van (ugyanazon a pályán) nála gyorsabb mozgás.

A második megállapítást egy kicsit körülményesebben fogalmazhatjuk meg. Legyen adott egy M „mozgó szerkezet” (futó, autó, fecske, lövedék, stb). Akármilyen (rövid vagy hosszú) T időtartamot is írunk elő, van olyan L (lassabb) „mozgó szerkezet”, amelyik az M-mel egyszerre indul, és ugyanazon a pályán haladva az M-nél T idővel később érkezik a célba.

Az azonos pályájú mozgásokra vonatkozó gyorsabb-lassabb nem függ szinkronizációtól, de függ a megfigyelőtől: idézzük fel a fecskéről és a verébről az előbbiekben mondottakat.

A fentiek alapján a következőket fogalmazhatjuk meg minden megfigyelőre:

(M2) **Bármely mozgás esetén ugyanazon a pályán létre jöhet nála gyorsabb mozgás.**

(M3) **Bármely mozgás esetén ugyanazon a pályán létre jöhet minden nála lassabb mozgás.**

1.3.3. Egyenes vonalú egyenletes mozgás

A fizika egyik sarkalatos pontja Newton első törvénye, amelyet idéztünk is a Bevezetésben, és amelyet a tehetetlenségi megfigyelő meghatározásaként szokás felfogni. Láttuk, milyen problémákat vet fel az értelmezése. Szokásos értelmezése mindenképp megkövetel egy szinkronizációt, nem is akármilyent; ugyanis lehetséges, hogy egy test valamely szinkronizáció esetén „egyenlő távolságokat egyenlő idő alatt tesz meg", egy másik szinkronizáció esetén viszont egyenlő távolságokat különböző idő alatt.

Newton első törvényét valójában csak így fogalmazhatnánk meg: „Van olyan megfigyelő és olyan szinkronizáció, amelyek szerint bármely teljesen magára hagyott (erőmentes) pontszerű test nyugalomban vagy egyenes vonalú egyenletes mozgásban van."

Ez valamely tulajdonságot állapít meg bizonyos megfigyelőkről és szinkronizációkról együtt; legfeljebb bújtatva (de hogyan?) mond valamit külön a megfigyelőkről, külön a szinkronizációkról. Ezzel nem lehet meghatározni a tehetetlenségi megfigyelőt. De nem is kell; a „teljesen magára hagyott (erőmentes) pontszerű test" és a „mozgás" szerepel a szokásos megfogalmazásban, tehát ezekről már tudni kellene, hogy micsodák. Ha meg már tudjuk, akkor a tehetetlenségi megfigyelő értelmezhető úgy, ahogy mi tettük: olyan megfigyelő, amelynek térpontjai egymáshoz képest nem mozgó, minden hatástól mentes anyagi pontok.

Csavarjunk egyet Newton első törvényén úgy, hogy megszabaduljunk a szinkronizációtól. Nevezetesen az időt mérje a mozgó test, a távolságot a megfigyelő. Tekintsük a következő eljárást. A test kronométere méri a sajátidejét. Előre meghatározott időtartamonként (meghatározott számú kettyenésenként) a test jelölje meg a megfigyelőnek azokat a térpontjait, amelyekkel a kérdéses időtartamok végén egybeesik. A megfigyelő pedig mérje meg a jelölt pontok távolságát.

A megfigyelő és a megfigyelt ilyen együttműködésével – a szokásostól eltérő módon – így fogalmazhatunk: „tehetetlenségi megfigyelő terében (nem nyugvó) tehetetlen anyagi pont egyenes pályán mozog, és egyenlő sajátidőtartamok alatt egyenlő távolságokat tesz meg".

Ez arra enged következtetni, hogy időmúlás és távolság között bizonyos összefüggés van, amely az egyenes arányosságra emlékeztet. Ezt így fogalmazzuk meg:

(U) **Egyenletes kapcsolat van a tehetetlenségi időmúlás és a tehetetlen térbeli távolságok között.**

1.4. Tehetetlenségi megfigyelők egyenértékűsége

Alapvető fizikai elvként szokás kimondani:

(E) **Tehetetlenségi megfigyelők fizikailag egyenértékűek.**

Ezen azt szokás érteni, hogy minden tehetetlenségi megfigyelő ugyanolyan jelenségeket tapasztal.

Ennek az elvnek az egyik alapfeltétele az, hogy „természetes” kapcsolat létesíthető a különböző tehetetlenségi megfigyelők terei között, amiről a Bevezetés 5. pontjában szóltunk, és amit most így fogalmazunk meg:

(**A**) **Fizikailag értelmezhető, mit jelent az, hogy egy tehetetlenségi megfigyelő térvektora egyenlő egy másik tehetetlenségi megfigyelő térvektorával.**

Ilyen értelemben mi is elfogadjuk a fent megfogalmazott elvet.

2. Téridőmodellek felépítése

2.1. Mértékegyenesek

Legelőször is a fizikai dimenziók, vagy másképpen a mértékegységek kérdését kell tisztáznunk, hiszen amikor időről és térről beszélünk, nem kerülhetjük ki az időmérést és a távolságmérést. Szokásos tárgyalásokban az időtartamokat és a távolságokat számokkal adják meg, azonban ezek valójában nem számok. 3 nem időtartam; 3 óra, vagy 3 perc, az igen. A számok mértékegységek számszorosait jelentik, azonban a szokásos keretek között a mértékegység pontosan meg nem határozott intuitív fogalom marad. Továbbá a mértékegységeket általában nem a természet adja, hanem emberi választás, ezért a valós számok ilyen értelmű használata a jelenségek leírásában nem kívánatos önkényt jelent.

Ha el akarjuk kerülni – és el akarjuk – az intuitív fogalmak használatából származó bonyodalmakat, akkor túl kell lépnünk a valós számokon. Meg kell alkotnunk a fizikai dimenziók (mértékegységek) pontos matematikai modelljét, amelyet persze a szokásos tulajdonságokra alapozunk: ha adott egy fizikai mennyiség akármely nem nulla értéke, akkor a fizikai mennyiség bármely lehetséges értékét annak egyértelmű számszorosaként állíthatjuk elő.

Általában a következőt mondhatjuk. Legyen $\mathtt{A}$ egy fizikai mennyiség lehetséges értékeinek összessége. Választva az $\mathtt{A}$ egy tetszőleges a elemét és egy pozitív α számot, értelmezhetjük az a α-szorosát, amelyet αa-val jelölünk. Ez a **pozitív számmal való szorzás** az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik: minden $a \in \mathtt{A}$ és $\alpha, \alpha' > 0$ valós szám esetén

(i) $1a = a$,

(ii) $\beta(\alpha a) = (\beta\alpha)a$,

(iii) ha $\alpha \neq \alpha'$, akkor $\alpha a \neq \alpha' a$,

továbbá

(iv) az $\mathtt{A}$ bármely b eleméhez van olyan β, hogy $b = \beta a$.

Ezen tulajdonságok alapján bevezethetünk egy **összeadást** $\mathtt{A}$-n: választva tetszőleges a elemet, ha $b = \beta a$ és $c = \gamma a$, akkor legyen $b + c := (\beta + \gamma)a$. Igen könnyen megmutatható, hogy az értelmezés nem függ a választásától.

Vezessük be ezután $-\mathtt{A}$-t mint a $(-1, a)$ alakú párok halmazát, ahol $a \in \mathtt{A}$, és használjuk a $-a := (-1, a)$ jelölést. Legyen végül $\mathbb{A}$ az $\mathtt{A}$ és $-\mathtt{A}$ valamint egy nullának nevezett és 0-val jelölt elem egyesítése (uniója). Ezen természetes módon megadhatunk egy valós számmal való szorzást és egy összeadást, amelyek az $\mathtt{A}$-n értelmezett műveletek kiterjesztései. Például minden $a \in \mathtt{A}$ esetén

$$\begin{aligned} \alpha a :&= -|\alpha| a \quad \text{ha} \quad \alpha < 0, \\ \alpha(-a) :&= -\alpha a \quad \text{ha} \quad \alpha > 0, \\ \alpha(-a) :&= |\alpha| a \quad \text{ha} \quad \alpha < 0. \end{aligned}$$

Ezekkel a műveletekkel $\mathbb{A}$ egydimenziós valós vektortér lesz, amelynek két „fele" különböző jelentőségű: az egyik fele, $\mathtt{A}$, tartalmazza a fizikailag értelmes mennyiségeket, a másik fele, $-\mathtt{A}$, célszerű matematikai konstrukció eredménye. Ezt a tényt úgy fejezzük ki, hogy $\mathbb{A}$ irányított egy dimenziós vektortér, irányítását épp $\mathtt{A}$ adja (az irányításról a matematikai melléklet ad bővebb felvilágosítást).

A vázolt konstrukció alkalmazható például a távolság, a tömeg, az erő mennyiségeire; néhány esetben – például az elektromos töltésnél – eleve egy egydimenziós egyenes van adva, amelyet valamiképp irányítunk (mi döntjük el, melyik töltést hívjuk pozitívnak).

Tehát elfogadjuk, hogy egy fizikai mennyiség értékeit egy dimenziós irányított vektortér – úgynevezett **mértékegyenes** – modellezi. A **mértékegység** választása azt jelenti, hogy kijelöljük a mértékegyenes egy pozitív elemét, és ezáltal bármely más elemét ennek számszorosaként reprezentáljuk. Például, ha a az $\mathbb{A}$ pozitív eleme, akkor $\mathbb{A}$ bármely b eleme az a-nak egyértelműen meghatározott számszorosa; ez szám, amelyet $\frac{b}{a}$-val jelölünk, reprezentálja b-t.

A gyakorlatban bizonyos mértékegységeket más mértékegységekből származtatnak szorzással, illetve osztással. Például, ha kg, m és s a tömeg, távolság és időtartam mértékegysége, akkor $\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}$ az erő mértékegysége.

Természetesen ennek is pontos matematikai értelmet kell adnunk. Hogyan definiálható (különböző) mértékegyenesek elemeinek szorzata és hányadosa? A válaszhoz idézzük fel e műveletekkel kapcsolatos szokásos számolási szabályokat; például

$$(\alpha \mathrm{kg})(\beta \mathrm{m}) = (\alpha\beta)(\mathrm{kg\,m}), \qquad \frac{\alpha \mathrm{m}}{\beta \mathrm{s}} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

minden α, β pozitív szám esetén.

Ezek alapján – a matematikai függelékben mondottak szerint – állíthatjuk, hogy itt tenzorszorzással és -osztással van dolgunk. Egyelőre az olvasónak nem kell sokat tudni e matematikai fogalmakról. Elég, ha elfogadja, hogy a szóban forgó műveletek jól értelmezhetők, és teljesítik a szokásos műveleti szabályokat; ha $\mathbb{D}$, $\mathbb{I}$ és $\mathbb{G}$ jelöli a távolságok, az időtartamok és a tömegek mértékegyenesét, akkor $\mathrm{kg\,m}$ jól értelmezett mint a $\mathbb{G} \otimes \mathbb{D}$ eleme, $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ pedig a $\frac{\mathbb{D}}{\mathbb{I}}$ eleme.

Megadtuk tehát a fizikai dimenziók (mértékegységek) és a közöttük alkalmazott műveletek pontos matematikai modelljét, amelyben a szokásosan használt szabályok érvényben maradnak. Megállapodásunknak megfelelően egydimenziós vektorterek elemeivel való tenzorszorzásnál a tenzorszorzás jelét elhagyjuk, a mértékegységekre vonatkozó szokásos formulákat kapjuk (és alkalmazhatjuk).

2.2. A téridő

Az eseményeket azzal szoktuk jellemezni, hol és mikor történtek. A hol egy térpontot jelöl, a mikor egy időpontot. Az előbbi, mint egy megfigyelő terének a pontja, önmagában való fizikai értelemmel bír; az utóbbi, mint egy szinkronizációnak, tehát művi konstrukciónak az eredménye, nem.

De a művi konstrukció lehetséges, ennyiben mégiscsak valóságos, és valahogy kapcsolatba hozható egymással tér és idő az 1.3.3 pontban szereplő (**U**) tulajdonság szerint.

Különböző megfigyelők különböző szinkronizációkkal ugyanahhoz az eseményhez különböző térpontot és időpontot rendelhetnek.

Ez sugallja azt, hogy az ugyanahhoz az eseményhez rendelt különböző tér- és időpontok speciális „képei” valamely egységes, mindentől független azaz **abszolút** létezőnek. Így jutunk el a **téridő** fogalmához.

A téridő egy pontját úgy foghatjuk föl, mint „itt és most” vagy „ott és akkor” önmagában való egységét, amelyben nincs külön az „itt” és a „most”. A téridő pontjait lehetséges fizikai történésekkel szemléltethetjük: például két picinyke (pontszerű) golyó összeütközésével vagy egy fényjel felvillanásával vagy egy petárda robbanásával. Az „itt és most” persze nagyon a földi szemlélethez kötődik; hogy ez ne befolyásolja absztrakciónkat, gondoljunk úgy a golyók ütközésére, fényjel felvillanására, hogy azok az űrben, a „semmiben” jönnek létre. Mi értelme van ez esetben annak, hol (milyen térpontban) és mikor (milyen időpillanatban) történnek?

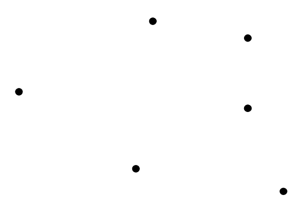
Az 1.1-beli (**S1**)-(**S3**) tulajdonságok alapján a tehetetlenségi megfigyelők terét háromdimenziós irányított affin térnek foghatjuk fel; a 1.2.2-beli (**T1**) és (**T2**) valamint az 1.3.3-beli (**U**) tulajdonság alapján a tehetetlen anyagi pont idejét egydimenziós irányított affin térnek, és végül ugyancsak (**U**) alapján azt mondhatjuk, hogy ezek az affin szerkezetek nem függetlenek egymástól.

Ezek szerint elfogadjuk:

Egy téridőmodell alapvető fogalma a **téridő,**
egy négydimenziós irányított affin tér.

Szokás a téridő pontjait eseményeknek nevezni; mi azonban kerüljük ezt, mert félrevezető (és már vezetett is félre), ugyanis az eseménynek egy bizonyos, jól meghatározott valószínűségszámítási értelme van, amelyet a fizika egyes területein is alkalmazunk, de itt másról van szó: az előbb említett történések nem a téridő eseményei, hanem a golyóké vagy a fényé vagy a petárdáé. Ezek az események csak illusztrálják a téridő egy pontját, nem azonosak vele. Ugyanazt a téridőpontot különféle történések illusztrálhatják: „itt és most” ütközhet két golyó és egyben villanhat fel egy fényjel.

A téridő pontjait **villanatoknak** vagy **világpontoknak** fogjuk nevezni. Ez utóbbi elnevezés onnan ered, hogy a téridőt olykor (különösen az angol szakirodalomban) világnak is mondják; világpont: a világ egy pontja.

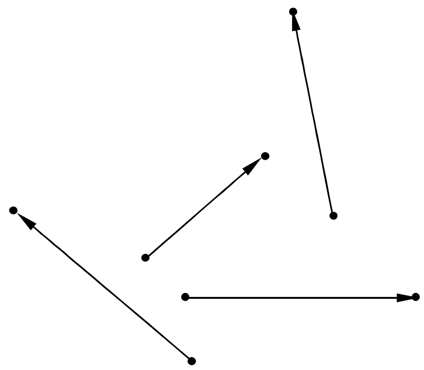


2.1. ábra. Villanatok

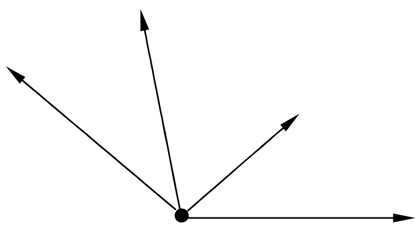
Az affin téridőt $\mathtt{M}$-mel jelöljük, az alulfekvő vektorteret pedig $\mathbf{M}$-mel.

Igen fontos, hogy a téridő pontjai ($\mathtt{M}$ elemei) és a téridő vektorai ($\mathbf{M}$ elemei) nem azonosak. A szokásos koordinátás tárgyalásokban ez a különbség elsikkad: mind a téridőpontokat, mind a téridővektorokat számnégyesekkel reprezentálják.

Az $\mathtt{M}$ téridőt a könyvlap síkjával fogjuk szemlélteni, a villanatokat tehát a lap síkjának pontjai jelenítik meg (2.1 ábra). Amennyire hasznos egy ilyen ábrázolás, annyira vigyázni is kell vele, hogy félre ne vezessen: a lap síkjának megszokott tulajdonságait óvatlanul ne higgyük a téridő tulajdonságának.



2.2. ábra. A téridő affin szerkezete



2.3. ábra. Téridő-vektorok

Például a lap két pontjával ellentétben két villanatnak általában nincs távolsága. Az affin szerkezetet úgy jelenítjük meg, hogy a téridő két pontja által meghatározott vektort a pontok közé húzott nyíllal ábrázoljuk (2.2 ábra).

Van, amikor a téridő-vektorokat magukat kell szemléltetnünk. Mivel nincs más lehetőségünk, **M**-et is a lap síkjával reprezentáljuk; ekkor a vektorokat a nulla-elemből húzott nyilak ábrázolják (2.3 ábra). Fontos észben tartani, hogy amennyire hasznosak az ilyen ábrák, annyira vigyázni is kell velük, hogy félre ne vezessenek: a téridővektoroknak (nyilaknak) általában nem értelmes a hossza, bezárt szögük.

Ügyelünk arra, hogy a kétféle szemléltetés jól elkülönüljön, mindig egyértelművé tesszük (jelezzük), `M`-ről vagy **M**-ről szól-e egy ábra.

2.3. Jövőszerű vektorok

2.3.1. Világvonalak

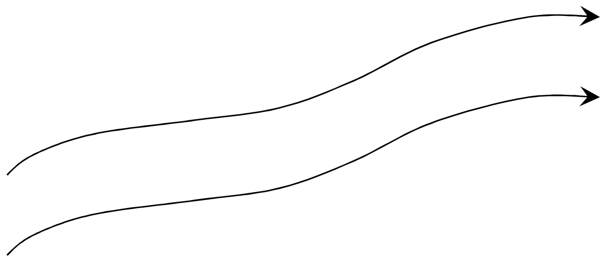
Egy „kicsinyke” anyagi objektum, egy (klasszikus) tömegpont élete (történelme) villanatok folyamatos sorozata: ez a modellben egy **összefüggő egydimenziós részsokaság** röviden **görbe** a téridőben.

Az anyagi pont életéhez (történelméhez) az is hozzá tartozik, hogy villanatai milyen sorrendben követik egymást, vagyis hétköznapi nyelven szólva, két villanat közül melyik a korábbi, melyik a későbbi (tekintsem magamat egy ilyen anyagi pontnak; ekkor a „megreggeliztem” korábbi, mint a „megebédeltem”). Ezt úgy tudjuk megfogalmazni, hogy az anyagi pont életét (történelmét) leíró görbe **irányított** (aminek a pontos matematikai értelme megtalálható a Függelékben).

Összefoglalva: egy klasszikus anyagi pont élete (történelme) **irányított görbe** a téridőben, amelyet **világvonalnak** hívunk.

2.4. ábra. Világvonal, a nyíl irányában a villanatai későbbiek

Az affin szerkezettel azt a fizikai tapasztalatunkat is kifejezhetjük, hogy „nincs kitüntetett része a térnek és időnek: ami megtörténhet itt és ekkor, az megtörténhet akármennyivel arrébb és akármennyivel későbben (korábban) is”, más szóval „a téridő homogén”. Ezért természetesnek vesszük, hogy egy $\mathtt{C}$ világvonal akármilyen eltoltja, vagyis $\mathtt{C} + \boldsymbol{a}$ akármely $\boldsymbol{a} \in \mathbf{M}$ esetén szintén világvonal kell legyen.



2.5. ábra. Egymáshoz képest eltolt világvonalak

Nem minden irányított görbe világvonal a téridőben. Ha egy görbe egy adott irányítással ellátva világvonal, akkor az ellentétes irányítással már nem az. Ezen túlmenően minden bizonnyal van olyan görbe, amely semmiféle irányítással nem világvonal (nem lehet egy anyagi pont villanatainak összessége). Ezt a következőképp szemléltethetjük. Tekintsünk egy épület díszkivilágítására szolgáló lámpafüzért. Megcsinálhatjuk azt, hogy a lámpák sorban „egymás után" villanjanak fel, és azt is, hogy „egyszerre". Az első esetben a felvillanásoknak világvonal felel meg, hisz úgy is megkaphatók, hogy egyetlen lámpa halad végig a drót mentén, és villog. A második esetben a felvillanásoknak nem felel meg világvonal, mert nem hozhatók létre egyetlen lámpa alkalmazásával.

A következőkben azt járjuk körül, hogyan jellemezhető, mely görbék lehetnek világvonalak.

2.3.2. Tehetetlen világvonalak

Az „egyenes vonalú egyenletes mozgás” egy tehetetlenül létező anyagi pontra vonatkozik. A téridő affin szerkezetének elfogadása magában foglalja, hogy **tehetetlen – erőhatástól mentes – anyagi pont világvonala irányított egyenes**.

Irányított egyenest egy pontja és egy irányvektora meghatározza. Ha egy egyenes adott irányítással világvonal, akkor az előzőek szerint azzal párhuzamos bármely egyenes, ugyanazzal az irányítással, szintén világvonal.

Tehát azt, hogy mely egyenesek (tehetetlenségi) világvonalak, a lehetséges irányvektorokkal jellemezhetjük. A tehetetlenségi világvonalak irányítását az irányvektorral úgy fejezhetjük ki, hogy az irányvektor mindig egy korábbi pont felől későbbi felé mutasson. Az ilyen irányvektort nevezzük **jövőszerűnek**. Tehát a lehetséges tehetetlen világvonalak leíráshoz a jövőszerű vektorok összességét kell kijelölnünk.

A mondottak szerint egy jövőszerű vektor negatív számszorosa nem jövőszerű. A korábbi-későbbi relációnak tranzitívnak kell lennie, azaz nagyvonalú megfogalmazással későbbinél későbbi szintén későbbi. Ez azt jelenti, hogy **jövőszerű vektor pozitív számszorosa is jövőszerű** kell legyen.

Továbbá a 1.3-beli (**M1**)-(**M3**) tulajdonságokból az következik, hogy **a jövőszerű vektorok halmaza konvex és nyílt** kell legyen. Ezt majd a 2.7.4 pontban bizonyítjuk be, amikor a megfigyelők modellbeli pontos meghatározása is a rendelkezésünkre áll.

Összefoglalva:

A téridőmodellben adva kell legyen az **M** egy $\mathtt{T}^{\rightarrow}$ részhalmaza, a **jövőszerű vektorok** összessége, amely nulla csúcsú nyílt konvex kúp.

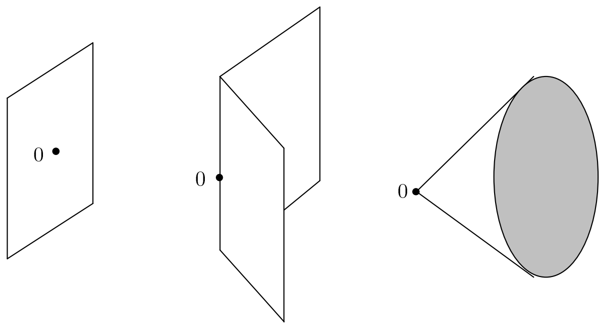
Formulában: $\mathtt{T}^{\rightarrow}$ nyílt, és bármely $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathtt{T}^{\rightarrow}$ és $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$ valós szám esetén $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in \mathtt{T}^{\rightarrow}$,

Jegyezzük meg, hogy a nulla vektor (amely $\mathtt{T}^{\rightarrow}$ „csúcsa”) nem tartozik $\mathtt{T}^{\rightarrow}$-hez. Sőt, a $\mathtt{T}^{\rightarrow}$ elemeinek negatív számszorosa sem tartozik $\mathtt{T}^{\rightarrow}$-hez.

A kúp szó olvastán (hallatán) $\mathtt{T}^{\rightarrow}$ kisiskolás tanulmányainkból ismert alakzatként jelenhet meg képzeletünkben, noha annál általánosabb formát is ölthet, ami azért lehetséges, mert ez „végtelen” kúp.

Igen fontos tulajdonsága $\mathtt{T}^{\rightarrow}$-nek, hogy – lévén konvex – összefüggő halmaz.

Három dimenzióban ábrázolva $\mathtt{T}^{\rightarrow}$ három lényegesen különböző alakját láthatjuk a 2.6 ábrán.

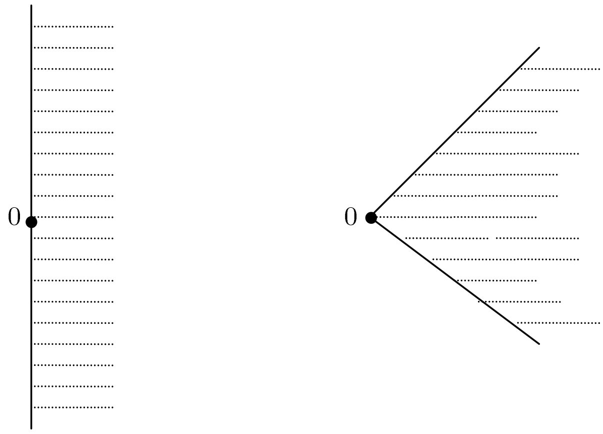


2.6. ábra. Jövőszerű kúpok

A lap síkjában szokásos szemléltetésünkben az első és a harmadik esetet a 2.7 ábra mutatja. A második esetről akár így, akár úgy festhetünk síkbeli képet, attól függően, honnan nézünk a kúpra.

Jövőszerű vektorok ellentettjét **múltszerűnek** nevezzük; összességük $\mathtt{T}^{\leftarrow} = -\mathtt{T}^{\rightarrow}$. A jövőszerű vagy múltszerű vektorokat közös néven **időszerűnek** hívjuk; összességük $\mathtt{T} := \mathtt{T}^{\leftarrow} \cup \mathtt{T}^{\rightarrow}$.

Ennek megfelelően a téridő x és y pontja esetén y az x-hez képest jövőszerű, ha $y - x \in \mathtt{T}^{\rightarrow}$, múltszerű, ha $y - x \in \mathtt{T}^{\leftarrow}$.



2.7. ábra. Jövőszerű kúpok

Tehát az x világponthoz képest jövőszerű világpontok összessége $x + \mathtt{T}^{\rightarrow} = \{x + \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathtt{T}^{\rightarrow}\}$.

Azt is mondjuk, hogy az x és y villanat **időszerűen szeparált**, ha $y - x$ időszerű vektor.

2.3.3. Világvonalak tulajdonságai

Mivel „kicsiben” minden görbe egyenessel közelíthető, ésszerű a következő meghatározásunk:

Egy világvonal olyan **görbe** a téridőben, amelynek **minden érintője időszerű**.

A görbék paraméterezésére vonatkozó ismereteink alapján (lásd a matematikai mellékletet) tehát, ha p egy világvonal paraméterezése, akkor minden a paraméterértékre $\dot{p}(a)$ időszerű. Az időszerű vektorok halmaza a jövőszerűek, illetve a múltszerűek halmazának diszjunkt uniója, a paraméterezés deriváltja pedig folytonos, ezért $\dot{p}(a)$ vagy jövőszerű, vagy múltszerű minden a paraméterértékre. A világvonal irányítását olyan paraméterezéssel adjuk meg, amelyre $\dot{p}(a)$ jövőszerű; az ilyet **előrehaladó** paraméterezésnek hívjuk.

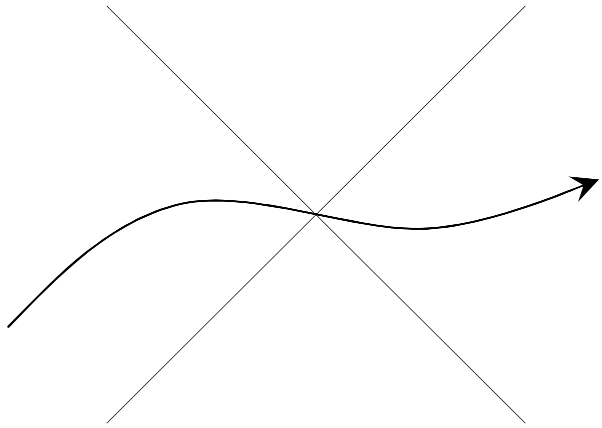
A világvonalak rendelkeznek egy igen fontos tulajdonsággal, amely abból következik, hogy a jövőszerű vektorok halmaza nyílt:

Egy világvonal bármely különböző két pontja közötti vektor időszerű.

Formulában: egy világvonal bármely két különböző x és y pontjára $y - x$ időszerű. Másként ugyanez: ha x egy $\mathtt{C}$ világvonal tetszőleges pontja, akkor $\mathtt{C}$ bármely másik pontja jövőszerű vagy múltszerű x-hez képest, azaz $\mathtt{C} \setminus \{x\} \subset x + \mathtt{T}^{\rightarrow}$.

Legyen p a $\mathtt{C}$ egy előrehaladó paraméterezése, és $x = p(0)$. Mivel p folytonosan differenciálható és $\dot{p}(0)$ jövőszerű, továbbá a jövőszerű vektorok halmaza nyílt, van olyan $b^+ > 0$ szám a p értelmezési tartományában, hogy minden $0 \le a \le b^+$ esetén $p(a)$ jövőszerű x-hez képest. Legyen s^+ a $\{b^+ > 0 \mid p(a) - x \in \mathtt{T}^{\rightarrow}$ minden $0 \le a \le b^+\}$ nem üres halmaz szuprémuma. Megmutatjuk, hogy s^+ nem lehet a p értelmezési tartományában.

Ez nyilvánvaló, ha $s^+ = \infty$. Legyen $s^+ < \infty$, és tegyük fel, hogy benne van a p értelmezési tartományában. Ekkor az előbbi gondolatmenettel – 0 helyett s^+ra alkalmazva – van egy olyan $d^+ > s^+$ szám, hogy minden $s^+ \le c \le d^+$ esetén $p(c) - p(s^+) \in \mathtt{T}^{\rightarrow}$. Ugyancsak az előbbi gondolatmenetet visszafelé alkalmazva s^+-ra, van egy olyan $d^- < s^+$ szám, hogy minden $d^- \le c \le$



2.8. ábra. Világvonal

s^+ esetén $p(s^+) - p(c) \in \mathtt{T}^{\to}$. Az s^+ értelmezése szerint $p(d^-) - p(0) \in \mathtt{T}^{\to}$, tehát $p(d^+) - p(0) = \big(p(d^+) - p(s^+)\big) + \big(\big(p(s^+) - p(d^-)\big) + \big(p(d^-) - p(0)\big) \in \mathtt{T}^{\to}$. Ez ellentmond s^+ értelmezésének, vagyis s^+ nem lehet a p értelmezési tartományában.

Végül tehát a p értelmezési tartományában levő minden $0 < a$ esetén $p(a) - x \in \mathtt{T}^{\to}$.

Hasonlóan érvelhetünk $\mathtt{C}$-nek a múltszerű részére.

Ezek szerint egy világvonal irányítását (későbbi-korábbi) a következőképp adhatjuk meg $\mathtt{T}^{\to}$ segítségével:

Egy világvonal y villanata **későbbi (korábbi)**, mint egy x villanata, ha y jövőszerű (múltszerű) x-hez képest.

Eredményünk alapján a továbbiakban világvonalról csak mint görbéről beszélünk, irányítását automatikusan a fentiek szerint értve. Az ábráinkon a világvonalakon az idő – a jövőszerű vektorok kúpjának 2.7. ábra szerint elfogadott ábrázolásának megfelelően – mindig „balról jobbra” telik. Ezért később, a konkrét téridőmodelleknél, amikor már megszokottá válik az ábrázolás szabálya, el is hagyjuk a világvonalak „jobb oldali” végéről a nyilat.

Vegyük észre, a fent mondottakból az is következik: ha x és y világpont

– és $y - x$ időszerű, akkor van olyan világvonal – például egy egyenes, azaz tehetetlenségi –, amely áthalad rajtuk,

– és $y - x$ nem időszerű, akkor nincs olyan világvonal, amely áthalad rajtuk.

2.4. Az időmúlás

2.4.1. Tehetetlenségi időmúlás

Az időmúlásnak a modellben való leírásához először is meg kell adnunk az időtartamok matematikai modelljét:

> Egy téridőmodellben adva kell legyen az **időtartamok mértékegyenese**, amelyet $\mathbb{I}$-vel jelölünk.

Az 1.3.3-beli (**U**) szerint azt gondolhatjuk, hogy tehetetlenségi világvonalon az idő „egyenletesen” múlik.

Ezt a modellben azzal fejezhetjük ki, hogy egy egyenes világvonal két villanata között eltelt idő csak a villanatok közötti vektortól függ, másrészt azzal, hogy egy vektor kétszereséhez, háromszorosához stb. kétszer annyi, háromszor annyi stb. eltelt idő tartozik.

Tehát minden $\mathbf{x}$ jővőszerű vektorhoz hozzá kell rendelnünk az $\mathbb{I}$-nek egy $\boldsymbol{P}(\mathbf{x})$-szel jelölt pozitív elemét úgy, hogy minden $\alpha > 0$ esetén

$$\boldsymbol{P}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\boldsymbol{P}(\mathbf{x}), \tag{2.1}$$

ami azt fejezi ki, hogy ha x és y világpont, y jövőszerű x-hez képest, akkor a két világpontot összekötő egyenes világvonalon a két villanat között az eltelt időtartam (tehetetlenségi időtartam) $\boldsymbol{P}(y - x)$.

A (2.1) formulára úgy hivatkozunk, hogy $\boldsymbol{P}$ **pozitív homogén**. Természetes követelményként azt is elvárjuk, hogy $\boldsymbol{P}$ legyen folytonos: egymáshoz „közeli” irányvektorú világvonalakon „közelítőleg egyformán” múljék az idő; sőt a folytonosságnál többet, simaságot (megfelelően sokszor differenciálhatóságot) követelünk meg.

összefoglalva:

Egy téridőmodellben adva kell legyen a **tehetetlenségi időmúlás**, egy $\boldsymbol{P} : \mathtt{T}^{\rightarrow} \to \mathbb{I}^{+}$ pozitív homogén és sima függvény.

2.4.2. Világvonalak sajátideje

Az előzőekkel azt is meghatározhatjuk, hogyan múlik az idő egy tetszőleges világvonalon. Egy világvonal kis szakaszát ugyanis közelítőleg egyenesnek tekinthetjük, a világvonalat pedig ilyen kis egyenes szakaszokból álló törött vonallal közelíthetjük. Ezért gondolhatjuk úgy, hogy a világvonalon telő időt közelíti az egyenes szakaszokon telő idők összege. Formulákban, ha p a $\mathtt{C}$ világvonal előrehaladó paraméterezése, és $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1}$ a paramétertartomány elemei, akkor a világvonal $x := p(a_1)$ és $y := p(a_{n+1})$ pontjai között eltelt idő közelítőleg

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{P}(p(a_{k+1}) - p(a_k)) \approx \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{P}(\dot{p}(a_k))(a_{k+1} - a_k),$$

ahol felhasználtuk a differenciálszámítás alapvető összefüggését, amely szerint $p(a_{k+1}) - p(a_k) = \dot{p}(a_k)(a_{k+1} - a_k) + \mathrm{ordo}(a_{k+1} - a_k)$, valamint $\boldsymbol{P}$ tulajdonságait (pozitív homogén és sima).

Jegyezzük meg, hogy előző eredményünk szerint $p(a_{k+1}) - p(a_k)$ jövőszerű minden k-ra, így értelmes a fenti kifejezés bal oldala.

A fenti formula jobb oldaláról felismerjük, hogy integrálközelítő összeg, ezért ésszerűnek látszik elfogadni: egy $\mathtt{C}$ világvonal x és y pontja között a **világvonalon eltelt sajátidő**

$$\boldsymbol{t}_{\mathtt{C}}(x, y) := \int_{p^{-1}(x)}^{p^{-1}(y)} \boldsymbol{P}(\dot{p}(a))da,$$

ahol p a világvonal tetszőleges előrehaladó paraméterezése.

Vegyük észre, hogy a fenti képletben x és y a $\mathtt{C}$ tetszőleges eleme. Attól függően, hogy y jövőszerű vagy múltszerű x-hez képest, $\boldsymbol{t}_{\mathtt{C}}(x, y)$ pozitív vagy negatív.

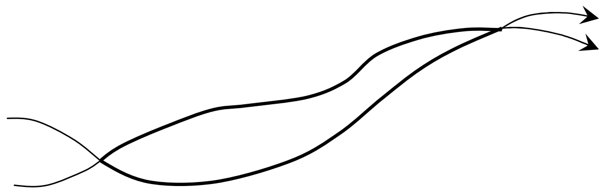
A világvonalon eltelt sajátidő, noha paraméterezéssel van definiálva, független a paraméterezéstől.

Legyen q is a világvonal előrehaladó paraméterezése, és x is, y is legyen benne mind p, mind q értékkészletében. Tudjuk, hogy $S := p^{-1} \circ q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, és $S' > 0$. Ezért $q = p \circ S$, azaz $\dot{q}(b) = \dot{p}(S(b))S'(b)$, és így

$$\int_{q^{-1}(x)}^{q^{-1}(y)} \boldsymbol{P}(\dot{q}(b))db = \int_{q^{-1}(x)}^{q^{-1}(y)} \boldsymbol{P}(\dot{p}(S(b)))S'(b)db = \int_{p^{-1}(x)}^{p^{-1}(y)} \boldsymbol{P}(\dot{p}(a))da;$$

az első egyenlőségnél $\boldsymbol{P}$ pozitív homogenitását, a másodiknál az integrálhelyettesítés ismert képletét használtuk.

Érdemes itt rávilágítani, hogy az eddigi meghatározásaink nem mondanak ellent annak, hogy két villanat között különböző világvonalakon különböző időtartamok múljanak el.



2.9. ábra. Különböző sajátidő-tartamok

2.4.3. Abszolút sebességek

A jövőszerű vektorokat a tehetetlenségi világvonalak irányvektoraiként vezettük be. Egy ilyen irányvektor bármely pozitív számszorosa ugyanolyan irányvektor. Az időmúlás lehetővé teszi nekünk, hogy az irányvektorokat bizonyos „egységvektorok” többszöröseként állítsuk elő.

Az ilyen egységvektorokhoz úgy jutunk, hogy a jövőszerű vektorokat elosztjuk a nekik megfelelő sajátidő-tartammal. Az előbbiek $\mathbf{M}$ elemei, az utóbbiak $\mathbb{I}$ elemei, tehát az osztás eredménye $\frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}}$-ben lesz. Ennek a tenzorhányadosnak a pontos értelme megtalálható a matematikai mellékletben.

Vezessük be a

$$\mathtt{V}(1) := \left\{ \frac{\mathbf{x}}{\boldsymbol{P}(\mathbf{x})} \;\middle|\; \mathbf{x} \in \mathtt{T}^{\to} \right\} \subset \frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}}$$

jelölést. Minthogy $\mathtt{V}(1)$ elemeinek fizikai értelme „sajátidő-egység alatt megtett életút”, nevezzük őket **abszolút sebességeknek**.

Az $\frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}}$ egy elemét jövőszerűnek mondjuk, ha egy $\boldsymbol{x} \in \mathtt{T}^{\to}$ és $\boldsymbol{s} \in \mathbb{I}^{+}$ hányadosa. Célszerű kiterjeszteni $\boldsymbol{P}$-t ilyen elemekre a pozitív homogén tulajdonság kiterjesztésével, azaz legyen $\boldsymbol{P}\left(\frac{\mathbf{x}}{\boldsymbol{s}}\right) := \frac{\boldsymbol{P}(\mathbf{x})}{\boldsymbol{s}}$.

Ezek szerint az is igaz lesz, hogy

$$\mathtt{V}(1) = \left\{ \boldsymbol{u} \in \frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}} \;\middle|\; \boldsymbol{u} \text{ jövőszerű, } \boldsymbol{P}(\boldsymbol{u}) = 1 \right\}.$$

Tehát, hogy jól értsük: ha $\boldsymbol{u} \in \mathtt{V}(1)$, akkor minden $0 < \boldsymbol{t} \in \mathbb{I}$ esetén $\boldsymbol{tu} \in \mathtt{T}^{\to}$, és ha $\boldsymbol{x} \in \mathtt{T}^{\to}$, akkor $\frac{\mathbf{x}}{\boldsymbol{P}(\mathbf{x})} \in \mathtt{V}(1)$.

$\mathtt{T}^{\rightarrow}$ minden eleme a $\mathtt{V}(1)$ egyértelműen meghatározott elemének egyértelműen meghatározott többszöröse. Ez maga után vonja, hogy $\mathtt{V}(1)$ is összefüggő halmaz.

Jegyezzük meg azt az igen fontos tényt, hogy – $\boldsymbol{P}$ pozitív homogenitása miatt – ha az $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{u}'$ abszolút sebesség párhuzamos egymással, akkor $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}'$.

Mivel a sebesség szóval óhatatlanul összekapcsolódik a hétköznapi értelemben használt sebesség fogalma, érdemes felfigyelni arra, hogy

– nincs nulla abszolút sebesség,
– nem értelmes az abszolút sebességek nagyság szerinti összehasonlítása,
– nem értelmes két abszolút sebesség bezárta szög,

amint azt konkrét téridőmodellek esetén jól fogjuk látni.

2.5. Megfigyelők

2.5.1. A megfigyelő fizikai értelme

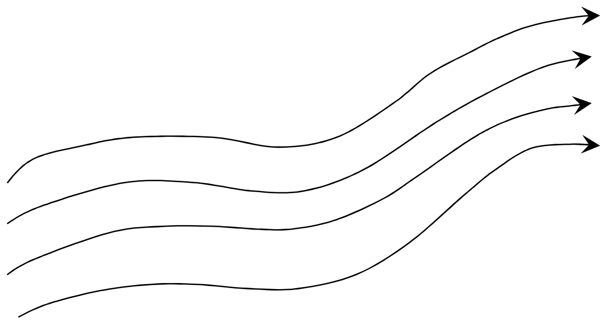
Előrebocsátandó, hogy a megfigyelő, vonatkoztatási rendszer, koordinátarendszer a fizikai irodalomban sokféle intuitív értelemben használatos fogalmak, néha egy tanulmányon belül ugyanarra több elnevezést is használnak, meg ugyanazon többfélét is értenek. Már csak ezért is nagyon fontos az ezzel kapcsolatos fogalmak tisztázása.

Mi a megfigyelő fogalmából indulunk ki, majd bevezetjük a vonatkoztatási rendszert és a koordinátarendszert is.

Sokszor egyetlen tömegpontot (világvonalat) neveznek megfigyelőnek. Ez azonban nem jó fogalom a megfigyelőre. Megfigyeléshez – azaz fizikai kísérletek elvégzéséhez és mérésekhez – anyagi pontok összessége kell: pl. ködkamrában az ionizációs csatorna nem lenne, ha a ködkamra egyetlen pont lenne. Mozgás, relatív sebesség stb. mind-mind csak „szomszédos" pontok együttesével értelmezhető.

Fizikai értelemben egy **megfigyelő** sok-sok anyagi pont együttese; ilyen a szoba, valamint az autó, amelyeket a 1.1 alfejezetben hoztunk példaként. Lényeges, hogy ez kiterjedt objektum, és nem pontszerű.

A megfigyelő egy anyagi pontja (a szoba sarka, az autó műszerfalán egy gomb) adja a megfigyelő terének egy pontját.



2.10. ábra. Megfigyelő terének pontjai

Mint említettük, egy anyagi pont története a téridőben egy világvonal. Így tehát egy megfigyelő terének egy pontja is egy világvonal.

Ehhez hozzá kell szoknunk: **amit mi a terünk egyetlen pontjaként észlelünk (a szoba sarka), az egy világvonal a téridőben**. Persze, ha jól utánagondolunk, nem is olyan különös ez: a szoba sarka tegnapelőtt is volt, tegnap is volt, ma is van, holnap is lesz (remélhetőleg); a szoba sarka az őt megvalósító anyagi pont élettörténete.

2.5.2. Általános megfigyelők

Ahhoz, hogy a megfigyelő „jól működjön", a térpontjainak – világvonalaknak – „szorosan egymás mellett, folytonosan" kell elhelyezkedniük. Ezt így közvetlenül nem könnyű pontos formába önteni. De gondoljuk meg, hogy minden világvonal minden pontjához hozzárendelhetjük az érintővektorát, amelyet a $\mathtt{V}(1)$ elemeként adunk meg. Ilyen módon létrehozunk egy sebességmezőt, azaz egy olyan függvényt, amely téridőpontokhoz abszolút sebességet rendel. Az viszont már egyszerű fogalom, hogy a sebességmező legyen nyílt halmazon értelmezve és sima. Egy ilyen sebességmező meghatározza azokat a világvonalakat, amelyek minden pontban az előírt érintővel rendelkeznek.

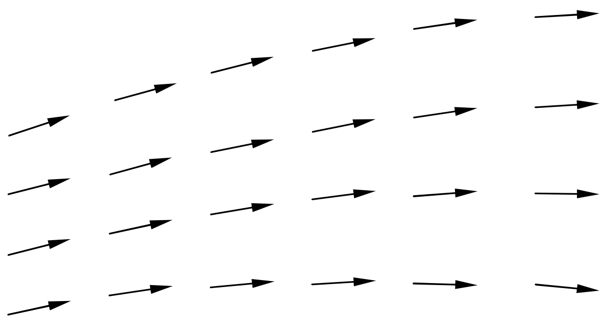
Ezután célszerűnek látjuk elfogadni:

Egy **megfigyelő** egy összefüggő és nyílt halmazon értelmezett, végtelenszer differenciálható $\boldsymbol{U} : \mathtt{M} \rightarrowtail \mathtt{V}(1)$ függvény.

A **megfigyelő térpontjai** az

$$(x : \mathbb{I} \to \mathtt{M})? \quad \dot{x} = \boldsymbol{U}(x)$$

differenciálegyenlet maximális integrálgörbéi (maximális megoldásainak értékkészlete).



2.11. ábra. Megfigyelő

Ismételjük meg, gyakoroljuk be a következőket.

Egy megfigyelő terének egy pontja a téridő részhalmaza: egydimenziós részsokaság, világvonal.

Ezeknek a világvonalaknak az összessége a megfigyelő tere. A **megfigyelő tere nem részhalmaza a téridőnek**; ez olyan halmaz, amelynek az elemei a téridő részhalmazai.

2.5.3. Tehetetlenségi megfigyelők

Heurisztikusan egy tehetetlenségi megfigyelő „egymáshoz képest nyugvó” tehetetlen anyagi pontok összessége. Egy tehetetlen anyagi pont világvonala egyenes; természetesen adódik, hogy egymáshoz képest nyugvó anyagi pontok világvonalai párhuzamos egyenesek. Egyenes világvonal érintője – abszolút sebessége – ugyanaz minden pontjában. Ezért magától értetődő elfogadni:

Egy **megfigyelő tehetetlenségi**, ha az előírt abszolút sebesség mindenütt ugyanaz, vagyis **a megfigyelő mint leképezés konstans** .

Ezután tehetetlenségi megfigyelőre a konstans értékével hivatkozunk, tehát az $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelőn az $\boldsymbol{U}(x) = \boldsymbol{u}$ $(x \in \mathtt{M})$ megfigyelőt értjük.

Az $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelő térpontjai az $\boldsymbol{u}$ vezette – tehát egymással párhuzamos – egyenesek. Az x világponton áthaladó ilyen egyenes $x + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$, ahol

$$\mathbb{I}\boldsymbol{u} := \{\boldsymbol{t}\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{t} \in \mathbb{I}\}$$

az $\boldsymbol{u}$ által meghatározott egydimenziós altér $\mathbf{M}$-ben, amely igen sokszor fog szerepelni a továbbiakban.

Az $\boldsymbol{u}$ vezette egyenesek összessége a tehetetlenségi megfigyelő tere, amelyet $\mathtt{E}_{\boldsymbol{u}}$-val jelölünk. Matematikailag ez nem más, mint az $\mathtt{M}/\mathbb{I}\boldsymbol{u}$ faktortér (a faktorterekről bővebben a matematikai melléklet 21.2 paragarafusa szól).

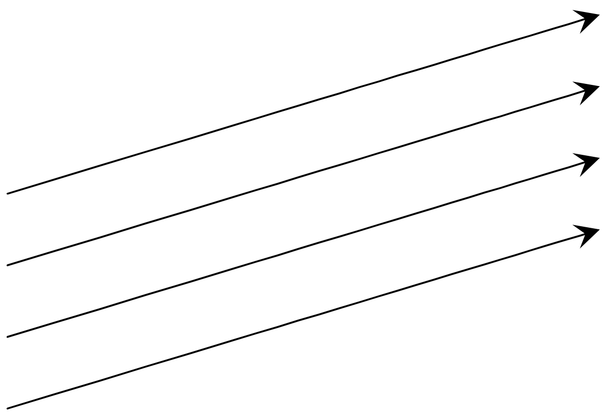
Tehát az $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelő tere, az $\boldsymbol{u}$ vezette egyenesek összessége

$$\mathtt{E}_{\boldsymbol{u}} := \mathtt{M}/\mathbb{I}\boldsymbol{u},$$

amely természetes módon háromdimenziós affin tér az $\mathbf{M}/\mathbb{I}\boldsymbol{u}$ vektortér fölött az

$$(x + \mathbb{I}\boldsymbol{u}) - (y + \mathbb{I}\boldsymbol{u}) := (x - y) + \mathbb{I}\boldsymbol{u} \tag{2.2}$$

kivonással.



2.12. ábra. Tehetetlenségi megfigyelő tere

Matematikailag tökéletes formában megkaptuk a modellben azt a tapasztalati tényt, hogy egy tehetetlenségi megfigyelő tere háromdimenziós affin tér. Látjuk magunk előtt a szobánk meghatározta teret, a szoba pontjait, a két pont közé – mondjuk az asztal sarkától a szekrény sarkáig – húzott vektort. Szobánk terének matematikai modelljéül már elfogadtuk a világvonalak összességét. Egy kicsit szokatlan lehetett először, hogy a terünk egy pontja tulajdonképpen egy világvonal, de remélhetőleg kellő magyarázattal szolgáltunk a 2.5.1 pontban, és ezért eléggé természetes, hogy a megfigyelő tere az $\boldsymbol{u}$ vezette egyenesek összessége, $\mathtt{M}/\mathbb{I}\boldsymbol{u}$. Matematikailag természetes az is, hogy ez affin tér $\mathbf{M}/\mathbb{I}\boldsymbol{u}$ fölött. Viszont $\mathbf{M}/\mathbb{I}\boldsymbol{u}$ elemeit egyáltalán nem tudjuk természetes módon az általunk tapasztalt vektorokkal kapcsolatba hozni, már csak azért sem, mert elemeit nem tudjuk megfelelő nyilakkal szemléltetni. Egyelőre el kell fogadnunk: tökéletes matematikai modellt adtunk a térpontjainkra és a térvektorainkra, a térpontok modellje szemléletes, a térvektoroké nem az. Speciális esetekben – mind a nemrelativisztikus, mind a relativisztikus téridőmodellben – „javítunk" a helyzeten, szemléletessé tehetjük a térvektorokat is.

2.5.4. Tehetetlenségi megfigyelő térirányítása

Emlékeztetünk, hogy azt a tapasztalati tényt, miszerint az időnk irányított, azaz jövő és múlt lényegesen különböző, a jövőszerű és a múltszerű vektorok megkülönböztetésével juttattuk kifejezésre. Továbbá azt a tapasztalati tényt, hogy az időnk is, a terünk is irányított, a modellben együttesen azzal fejeztük ki, hogy a téridő irányított. A modellben tehát téridőirányítás és időirányítás szerepel. Ebből a kettőből származtathatjuk a modellben a tehetetlenségi megfigyelők terének irányítását.

Nevezetesen, $\frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}\boldsymbol{u}}$ természetes módon ellátható irányítással úgy, hogy legyen az $(\mathbf{x}_1 + \mathbb{I}\boldsymbol{u}, \mathbf{x}_2 + \mathbb{I}\boldsymbol{u}, \mathbf{x}_3 + \mathbb{I}\boldsymbol{u})$ rendezett bázis **pozitívan irányított**, ha az $\mathbb{I}$ tetszőleges pozitív $\boldsymbol{t}$ elemére $(\boldsymbol{t}\boldsymbol{u}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ az $\mathbf{M}$ pozitívan irányított bázisa.

Egyszerűen látható, hogy ez a meghatározás jó, azaz ha $\boldsymbol{t}'\boldsymbol{u}, \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{x}'_3$ az $\mathbf{M}$-nek az előzővel azonos irányítású bázisa, ahol $\boldsymbol{t}'$ az $\mathbb{I}$ pozitív eleme, akkor $\mathbf{x}'_1 + \mathbb{I}\boldsymbol{u}, \mathbf{x}'_2 + \mathbb{I}\boldsymbol{u}, \mathbf{x}'_3 + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$ az $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$-nak az előzővel azonosan irányított bázisa.

Az $\mathbf{x}_0 := \boldsymbol{t}\boldsymbol{u}$, $\mathbf{x}'_0 := \boldsymbol{t}'\boldsymbol{u}$ jelöléssel az $\mathbf{x}'_i = \sum_{k=0}^{3} A_{ki}\mathbf{x}_k$ formula határozza meg az $\mathbf{M}$ „vesszőtlen" bázisáról a „vesszősre" való áttérés $\{A_{ki} \mid i,k = 0,1,2,3\}$ 4×4-es mátrixát, ugyanakkor az $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ „vesszőtlen" bázisáról a „vesszősre" való áttérés 3×3 mátrixa $\{A_{ki} \mid i,k = 1,2,3\}$. Minthogy $A_{00} = \frac{t'}{t}$, $A_{k0} = 0$ ha $k = 1,2,3$, a szóban forgó 4×4-es mátrix determinánsa a 3×3-as mátrix determinánsának $\frac{t'}{t} > 0$-szerese, vagyis a két determináns ugyanolyan előjelű.

2.6. Euklideszi szerkezetek

2.6.1. Távolságok, szögek megfigyelők terében

A térbeli pontok távolságának a modellben való leírásához meg kell adnunk a távolságok matematikai modelljét:

> Egy téridőmodellben adva kell legyen a **távolságok mértékegyenese**, amelyet $\mathbb{D}$-vel jelölünk.

Az 1.1-beli (**S4**) szerint a tehetetlenségi megfigyelők tere euklideszi. Ez azt jelenti, hogy minden $\boldsymbol{u} \in \mathtt{V}(1)$ esetén adva kell legyen az $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelő terének vektorain egy $\hat{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{u}}$ **euklideszi forma**, amelynek az értékei távolságnégyzetek, és amellyel a szokásosan értelmezzük a vektorok hosszát és a vektorok bezárta szöget (lásd a matematikai mellékletet).

Az $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelő térvektorai, amint azt az előző pontban mondtuk, nem igazán szemléletesek, maguk is és az euklideszi szerkezetük is, amely egy $\hat{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{u}} : \frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}\boldsymbol{u}} \times \frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}\boldsymbol{u}} \to \mathbb{D} \otimes \mathbb{D}$ szimmetrikus, pozitív definit bilineáris leképezés, egy kicsit körülményesen kezelhetők. Szerencsére módunk van az euklideszi forma helyett egy vele egyenértékű, egyszerűbb objektumot használni.

A

$$\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \hat{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x} + \mathbb{I}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y} + \mathbb{I}\boldsymbol{u}) \tag{2.3}$$

formulával olyan szimmetrikus, bilineáris leképezést definiálunk $\mathbf{M}$-en, amely pozitív szemidefinit és a magja $\mathbb{I}\boldsymbol{u}$, azaz

– $\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq \mathbf{0}$ és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\boldsymbol{x}$ párhuzamos $\boldsymbol{u}$-val,

– $\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$ az $\mathbf{M}$ minden $\boldsymbol{y}$ vektorára akkor és csak akkor teljesül, ha $\boldsymbol{x}$ párhuzamos $\boldsymbol{u}$-val.

Fordítva, ha adunk egy

$$\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}} : \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbb{D} \otimes \mathbb{D}$$

bilineáris, szimmetrikus, pozitív szemidefinit leképezést, amelynek a magja $\mathbb{I}\boldsymbol{u}$, akkor a (2.3) egyenlőség fordított irányban, azaz := helyett =: jellel, jól definiál egy $\hat{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{u}}$ euklideszi formát $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$-n. Mászóval:

$\hat{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{u}}$ és $\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}$ kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást.

Legyen először adott a szimmetrikus, bilineáris, $\hat{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{u}}$, amely pozitív definit. Ez utóbbi azt jelenti, hogy $\hat{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x} + \mathbb{I}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} + \mathbb{I}\boldsymbol{u}) \geq \mathbf{0}$, és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\boldsymbol{x} + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$ az $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ nullavektora, azaz $\boldsymbol{x} + \mathbb{I}\boldsymbol{u} = \mathbb{I}\boldsymbol{u}$. Ekkor a ((2.3)) egyenlőséggel definiált $\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}$ szimmetrikus, bilineáris (az $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$ leképezés linearitása miatt), és pozitív szemidefinit. Minden $\boldsymbol{y}$ vektorra $\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}(t\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}) = \hat{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{u}}(\mathbb{I}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y} + \mathbb{I}\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$, és ha minden $\boldsymbol{y}$ vektorra $\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$, akkor speciálisan $\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$, azaz $\hat{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x} + \mathbb{I}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} + \mathbb{I}\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$ és így az előbbiek szerint $\boldsymbol{x}$ párhuzamos $\boldsymbol{u}$-val, vagyis a $\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}$ magja valóban $\mathbb{I}\boldsymbol{u}$.

Legyen most adott a bilineáris, szimmetrikus $\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}$, amely pozitív szemidefinit, és a magja $\mathbb{I}\boldsymbol{u}$. Mindenek előtt azt kell megmutatnunk, hogy a ((2.3)) formula fordított irányban jól definiálja $\hat{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{u}}$-t, azaz ha $\boldsymbol{x}' + \mathbb{I}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{y}' + \mathbb{I}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{y} + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$, akkor $\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}') = \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Ez viszont igaz amiatt, hogy $\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}$ bilineáris és a magja $\mathbb{I}\boldsymbol{u}$, hiszen $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y} + s\boldsymbol{u}$ valamely t és s esetén. Ezután nyilvánvaló az, hogy $\hat{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{u}}$ örökli szimmetrikus, bilineáris, pozitív szemidefinit tulajdonságokat. Ha $\hat{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x} + \mathbb{I}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} + \mathbb{I}\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$, akkor $\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$, ami maga után vonja, hogy $\boldsymbol{x}$ párhuzamos $\boldsymbol{u}$-val, azaz $\boldsymbol{x} + \mathbb{I}\boldsymbol{u} = \mathbb{I}\boldsymbol{u}$, vagyis $\boldsymbol{x} + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$ az $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ nullavektora; tehát $\hat{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{u}}$ pozitív definit.

Ezért a továbbiakban célszerűen $\hat{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{u}}$ helyett mindig a $\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}$-t tekintjük, és megköveteljük, hogy simán függjön $\boldsymbol{u}$-tól, ami matematikailag azt jelenti, hogy minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{M}$ esetén az $\boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ hozzárendelés legyen sima. Ez azt a fizikai elvárásunkat fejezi ki, hogy „egymáshoz közeli" tehetetlenségi megfigyelők terének euklideszi szerkezete legyen „közelítőleg azonos".

Összefoglalva:

> Egy téridőmodellben adva kell legyen **minden tehetetlenségi megfigyelő euklideszi szerkezete**, azaz minden $\boldsymbol{u} \in \mathtt{V}(1)$ esetén egy $\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}} : \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbb{D} \otimes \mathbb{D}$ szimmetrikus, bilineáris, pozitív szemidefinit leképezés, amelynek a magja $\mathbb{I}\boldsymbol{u}$, és amely simán függ $\boldsymbol{u}$-tól.

Ismételjük meg: az $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelő $x + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$ és $y + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$ térpontjának a távolsága $\sqrt{\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}(x - y, x - y)}$; más szóval, a megfigyelő q és p térpontjának ($\boldsymbol{u}$ vezette egyeneseknek $\mathtt{M}$-ben) a távolsága $\sqrt{\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}(x - y, x - y)}$, ahol x a q-nak, y a p-nek tetszőleges eleme.

Megjegyezzük, ezután definiálhatjuk „apró lépésekkel" a nem tehetetlenségi megfigyelő terében is a távolság- és szögmérést, hasonlóképp (csak technikailag jóval bonyolultabban), mint a tehetetlenségi világvonalon múló időből a nem tehetetlenségin múló időt; ezt ilyen általánosságban nem részletezzük, nem lesz rá szükségünk.

2.6.2. Áthúzások

A 1.4 alfejezetben megfogalmazott (**A**) elv alapján értelmet kell adnunk a különböző megfigyelők terében levő vektorok egyenlőségének. Egy ilyen egyenlőség-fogalomnak természetes módon magában kell foglalnia a megfelelő vektorok hosszának és bezárt szögének az egyenlőségét is. Más szóval, minden $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{u}'$ abszolút sebesség esetén adott kell legyen egy irányítástartó lineáris bijekció a megfigyelők terei, azaz $\mathbf{M}/\mathbb{I}\boldsymbol{u}$ és $\mathbf{M}/\mathbb{I}\boldsymbol{u}'$ között, amely megtartja az euklideszi szerkezetetket.

Ezt így fogalmazzuk meg: minden $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{u}'$ abszolút sebesség esetén adott kell legyen egy $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ irányítástartó lineáris bijekció, amelyet az $\boldsymbol{u}$-ról az $\boldsymbol{u}'$-re való **áthúzásnak** hívunk, úgy hogy

$$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}',$$

$$\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}'}(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{M}$ esetén.

Az itteni első tulajdonság maga után vonja egy $\mathbf{M}/\mathbb{I}\boldsymbol{u} \to \mathbf{M}/\mathbb{I}\boldsymbol{u}'$ lineáris bijekció létezését az $(\boldsymbol{x} + \mathbb{I}\boldsymbol{u}) \mapsto (\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{x}) + \mathbb{I}\boldsymbol{u}'$ formulával.

A később tárgyalt konkrét téridőmodellek esetén természetszerűleg adódik egy $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}$ a fenti első tulajdonsággal, és ennek a segítségével a második tulajdonság alapján tudjuk meghatározni az euklideszi szerkezeteket.

2.7. Ismét a jövőszerű vektorokról

Adósak vagyunk még annak az igazolásával, hogy a jövőszerű vektorok összessége, $\mathtt{T}^{\to}$ konvex és nyílt kell legyen. A tehetetlenségi megfigyelők terének ismeretében most már leróhatjuk ezt az adósságunkat. Sajnos itt nem kerülhetjük el a megfigyelők térvektorainak kezelését.

2.7.1. Mozgás pályája

Vegyünk egy $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelőt. Egy $\mathtt{C}$ világvonalú anyagi pont általában mozog a megfigyelőhöz képest; mozgásának **pályája** a megfigyelőnek azokból a térpontjaiból áll, amelyekkel az anyagi pont találkozik:

$$\mathtt{C} + \mathbb{I}\boldsymbol{u} = \{x + \mathbb{I}\boldsymbol{u} \mid x \in \mathtt{C}\};$$

ez görbe (esetleg egyetlen pont) $\mathtt{E}_{\boldsymbol{u}}$-ban.

A továbbiakban csak tehetetlen anyagi pontról lesz szó. Ekkor van egy x_0 világpont és egy $\boldsymbol{u}'$ abszolút sebesség úgy, hogy a kérdéses világvonal $\mathtt{C} = \{x_0 + \boldsymbol{s}\boldsymbol{u}' \mid \boldsymbol{s} \in \mathbb{I}\}$. Az ennek megfelelő pálya az $\boldsymbol{u}$-térben

$$\{x_0 + \boldsymbol{s}\boldsymbol{u}' + \mathbb{I}\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{s} \in \mathbb{I}\}.$$

A pályának $\boldsymbol{s} + \boldsymbol{h}$ és $\boldsymbol{s}$ által meghatározott két pontja közötti $\boldsymbol{u}$-térvektor (2.2) szerint

$$(x_0 + (\boldsymbol{s} + \boldsymbol{h})\boldsymbol{u}' + \mathbb{I}\boldsymbol{u}) - (x_0 + \boldsymbol{s}\boldsymbol{u}' + \mathbb{I}\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{h}\boldsymbol{u}' + \mathbb{I}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}' + \mathbb{R}\boldsymbol{u}).$$

Látjuk, hogy az $\boldsymbol{u}$-térvektor a pálya bármely két pontja között az

$$\boldsymbol{u}' + \mathbb{R}\boldsymbol{u} \in \frac{\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}}{\mathbb{I}}$$

vektor többszöröse:

Az $\mathbf{u}$*-térben az* $\mathbf{u}'$ *abszolút sebességű tehetetlen anyagi pont pályája* $\mathbf{u}' \neq \mathbf{u}$ *esetén az* $\mathbf{u}' + \mathbb{R}\mathbf{u}$ *irányvektorú egyenes (és egyetlen pont, ha* $\mathbf{u}' = \mathbf{u}$*).*

2.7.2. Párhuzamos pályák

Tekintsünk két tehetetlenségi világvonalat, amelyek abszolút sebessége $\boldsymbol{u}'$, illetve $\boldsymbol{u}''$. Az előbbi eredmény szerint ezek pályája az $\boldsymbol{u}$-térben akkor és csak akkor párhuzamos, ha $\boldsymbol{u}' + \mathbb{R}\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{u}'' + \mathbb{R}\boldsymbol{u}$ egymás számszorosa, azaz létezik α' és α'' valós szám úgy, hogy $\alpha'(\boldsymbol{u}' + \mathbb{R}\boldsymbol{u}) = \alpha''(\boldsymbol{u}'' + \mathbb{R}\boldsymbol{u})$; ez utóbbi egyenértékű azzal, hogy van olyan α valós szám, amellyel $\alpha'\boldsymbol{u}' - \alpha''\boldsymbol{u}'' = \alpha\boldsymbol{u}$.

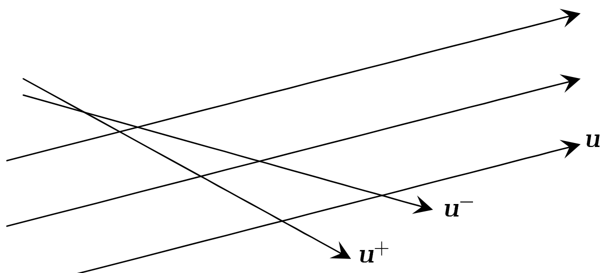
Tehát:

Az $\mathbf{u}'$ *és* $\mathbf{u}''$ *abszolút sebességű világvonalaknak az* $\mathbf{u}$*-térbeli pályája akkor és csak akkor párhuzamos, ha* $\mathbf{u}$*,* $\mathbf{u}'$ *és* $\mathbf{u}''$ *egy síkban vannak (lineárisan öszefüggők).*

Érdemes hangsúlyozni: két anyagi pont pályája lehet párhuzamos egy megfigyelőnek, és nem-párhuzamos egy másik megfigyelőnek.

2.7.3. Gyorsabb-lassabb a modellben

Tekintsünk egy tehetetlenségi megfigyelőt és két tehetetlen anyagi pontot, amelyek a megfigyelő terében ugyanazon a pályán mozognak. Legyen a tehetetlenségi megfigyelő $\boldsymbol{u}$, az anyagi pontok világvonalának abszolút sebessége (irányvektora) $\boldsymbol{u}^-$, illetve $\boldsymbol{u}^+$.



2.13. ábra. Az $\boldsymbol{u}$ szerint $\boldsymbol{u}^-$ lassabb, mint $\boldsymbol{u}^+$

Amint a 2.13 ábra mutatja, a két anyagi pont találkozása után az $\boldsymbol{u}^-$ abszolút sebességű anyagi pont később ér el egy másik $\boldsymbol{u}$-térpontot, mint az $\boldsymbol{u}^+$ sebességű.

Ennek alapján azt mondjuk, hogy $\boldsymbol{u}^-$ **lassabb**, mint $\boldsymbol{u}^+$ **az** $\boldsymbol{u}$**-hoz viszonyítva**, ha minden $\boldsymbol{t}^+$ pozitív időtartam esetén van olyan $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}^-$ pozitív időtartam, hogy

$$\boldsymbol{t}^+\boldsymbol{u}^+ + \boldsymbol{t}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{t}^-\boldsymbol{u}^-.$$

Megfordítva ugyanez: $\boldsymbol{u}^+$ **gyorsabb**, mint $\boldsymbol{u}^-$ **az $\boldsymbol{u}$-hoz viszonyítva**, ha minden $\boldsymbol{t}^-$ pozitív időtartam esetén van olyan $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}^+$ pozitív időtartam, hogy

$$\boldsymbol{t}^-\boldsymbol{u}^- - \boldsymbol{t}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{t}^+\boldsymbol{u}^+.$$

Érdemes hangsúlyozni, nehogy a jelölés félrevezessen: a $+$ és $-$ jel az $\boldsymbol{u}$ megfigyelő szerinti gyorsabb-lassabb összehasonlításra utal; más megfigyelők esetén más lehet a helyzet. Nevezetesen, ha adott két tehetetlen anyagi pont (két egyenes világvonal), amelyek találkoznak egy világpontban, akkor van olyan tehetetlenségi megfigyelő,

– amelyre az egyik gyorsabb, mint a másik,
– amelyre a másik gyorsabb, mint az egyik,
– amely nem tudja eldönteni, melyik a gyorsabb (mert az anyagi pontok különböző pályákon mozognak a megfigyelő terében).

2.7.4. Konvex és nyílt halmaz

Az 1.3-beli (**M1**) szerint minden $\boldsymbol{u}$-térirányban létrejöhet mozgás, ami azt jelenti, hogy $\mathtt{T}^{\rightarrow}$-ben lennie kell $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ és $\boldsymbol{h}_3$ lineárisan független vektornak úgy, hogy $\boldsymbol{h}_1+\mathbb{I}\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{h}_2+\mathbb{I}\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{h}_3+\mathbb{I}\boldsymbol{u}$ az $\boldsymbol{u}$ térvektorainak bázisát alkotják. Ekkor tetszőleges $\boldsymbol{t} \in \mathbb{I}^+$ esetén a jövőszerű $\boldsymbol{t}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{h}_3$ bázist alkotnak $\mathbf{M}$-ben. Ezért az $\mathbf{M}$ minden $\mathbf{x}$ vektora felbontható $\mathbf{x} = \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2$ alakba, ahol mind $\boldsymbol{k}_1$, mind $\boldsymbol{k}_2$ a $\mathtt{T}^{\rightarrow}$ eleme. Valóban, ha $\mathbf{x} \neq 0$ nem időszerű, akkor az adott bázissal vett lineáris kombinációjában a pozitív együtthatójú elemek összege $\boldsymbol{k}_1$, a negatív együtthatójúaké $\boldsymbol{k}_2$. Ha $\mathbf{x}$ jövőszerű, akkor $\boldsymbol{k}_1 := 2\mathbf{x}$, $\boldsymbol{k}_2 := \mathbf{x}$, és ha $\mathbf{x}$ múltszerű, akkor $\boldsymbol{k}_1 := -\mathbf{x}$, $\boldsymbol{k}_2 := 2\mathbf{x}$.

Az 1.3.2 pontbeli (**M3**) és a fentebb megállapított gyorsabb-lassabb reláció szerint, minden $\boldsymbol{u}$ abszolút sebesség esetén tetszőleges $\boldsymbol{h}^+$ jövőszerű vektorhoz $\left(\boldsymbol{u}^+ := \frac{\boldsymbol{h}^+}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{h}^+)}\right)$ és az $\mathbb{I}$ minden pozitív $\boldsymbol{t}^+$ eleméhez létezik egy $\boldsymbol{h}^-$ jövőszerű vektor $\left(\boldsymbol{u}^- := \frac{\boldsymbol{h}^-}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{h}^-)}\right)$ úgy, hogy $\boldsymbol{h}^+ + \boldsymbol{t}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{h}^-$.

Minthogy minden jövőszerű vektor $\boldsymbol{t}\boldsymbol{u}$ alakú valamely $\boldsymbol{t}$ és $\boldsymbol{u}$ esetén, azt az eredményt kaptuk, hogy $\mathtt{T}^{\rightarrow}$ bármely két elemének az összege is $\mathtt{T}^{\rightarrow}$-ben van. Mivel $\mathtt{T}^{\rightarrow}$ bármely elemének a pozitív számszorosát is tartalmazza, végül is $\mathtt{T}^{\rightarrow}$ **nulla csúcsú konvex kúp**, azaz minden $\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k} \in \mathtt{T}^{\rightarrow}$ és $\alpha, \beta > 0$ esetén $\alpha\boldsymbol{h} + \beta\boldsymbol{k} \in \mathtt{T}^{\rightarrow}$.

Az 1.3.2 pontbeli (**M2**) szerint és fentebb megállapított gyorsabb-lassabb reláció szerint, minden $\boldsymbol{u}$ abszolút sebesség esetén tetszőleges $\boldsymbol{h}^-$ jövőszerű vektorhoz $\left(\boldsymbol{u}^- := \frac{\boldsymbol{h}^-}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{h}^-)}\right)$ létezik az $\mathbb{I}$-nek pozitív $\boldsymbol{t}^+$ eleme és egy $\boldsymbol{h}^+$ jövőszerű vektor $\left(\boldsymbol{u}^+ := \frac{\boldsymbol{h}^+}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{h}^+)}\right)$ úgy, hogy $\boldsymbol{h}^- - \boldsymbol{t}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{h}^+$.

Minthogy minden jövőszerű vektor $\boldsymbol{t}\boldsymbol{u}$ alakú valamely $\boldsymbol{t}$ és $\boldsymbol{u}$ estén, átfogalmazhatjuk az eredményünket úgy, hogy minden $\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k} \in \mathtt{T}^{\rightarrow}$ esetén van olyan $\beta > 0$, hogy $\boldsymbol{h} - \beta\boldsymbol{k} \in \mathtt{T}^{\rightarrow}$. Az előbbiek szerint, ha $\eta < \beta$, akkor $\boldsymbol{h} - \eta\boldsymbol{k} = \boldsymbol{h} - \beta\boldsymbol{k} + (\beta - \eta)\boldsymbol{k}$ a $\mathtt{T}^{\rightarrow}$ eleme. Megállapíthatjuk tehát, hogy ha $\boldsymbol{h}$ tetszőleges jövőszerű vektor, akkor minden $\boldsymbol{k} \in \mathtt{T}^{\rightarrow}$ esetén van olyan $\beta_{\boldsymbol{k}} > 0$ szám, hogy $\boldsymbol{h} - \eta\boldsymbol{k}$ is a $\mathtt{T}^{\rightarrow}$ eleme minden $0 < \eta < \beta_{\boldsymbol{k}}$ esetén.

Vegyünk ezután egy akármilyen nem nulla vektort: $0 \neq \mathbf{x} = \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2$, ahol $\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2 \in \mathtt{T}^{\rightarrow}$. Legyen $\boldsymbol{h}$ tetszőleges jövőszerű vektor. Osszuk ki a fenti $\boldsymbol{k}$ szerepét $\boldsymbol{k}_2$-re. Ekkor $\boldsymbol{h} - \eta\boldsymbol{k}_2 \in \mathtt{T}^{\rightarrow}$ minden (a $\boldsymbol{k}_2$-től függő) „elég kicsi” pozitív η-ra.

$\mathtt{T}^{\rightarrow}$ konvex kúp, ezért $\boldsymbol{h} + \eta \boldsymbol{k}_1 \in \mathtt{T}^{\rightarrow}$. Végül, az utóbbi két vektor összegének a fele, azaz $\boldsymbol{h} + \frac{\eta}{2}\mathbf{x}$ is jövőszerű vektor minden (az $\mathbf{x}$-től függő) „elég kicsi” pozitív η-ra. összegezve: a $\mathtt{T}^{\rightarrow}$ minden $\boldsymbol{h}$ elemének egy környezete is $\mathtt{T}^{\rightarrow}$-ben van, tehát $\mathtt{T}^{\rightarrow}$ **nyílt**.

2.8. A téridőmodellek matematikai struktúrája

2.8.1. Pontos meghatározás

Az eddigieket most már pontos matematikai meghatározásba foglalhatjuk össze:

Egy **téridőmodell** $(\mathtt{M}, \mathbb{I}, \mathbb{D}, \mathtt{T}^{\rightarrow}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{d})$, ahol
– $\mathtt{M}$ a **téridő**, amely négydimenziós irányított affin tér az $\mathbf{M}$ vektortér fölött,
– $\mathbb{I}$ az **időtartamok** mértékegyenese,
– $\mathbb{D}$ a **távolságok** mértékegyenese,
– $\mathtt{T}^{\rightarrow}$ a **jövőszerű vektorok összessége**, amely nyílt, nulla csúcsú konvex kúp $\mathbf{M}$-ben,
– $\boldsymbol{P} : \mathtt{T}^{\rightarrow} \to \mathbb{I}^{+}$ az **időmúlás** kifejezése, amely pozitív homogén, sima leképezés,
és ez utóbbi kettővel értelmezzük az abszolút sebességek

$$\mathtt{V}(1) := \left\{ \boldsymbol{u} \in \frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}} \;\middle|\; \boldsymbol{u} \text{ jövőszerű, } \boldsymbol{P}(\boldsymbol{u}) = 1 \right\}$$

halmazát,
– $\boldsymbol{d}$ az **euklideszi szerkezetek összessége**, más szóval a **távolságok és szögek** meghatározója, amely minden $\boldsymbol{u}$ abszolút sebességhez sima módon hozzárendel egy $\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}} : \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbb{D} \otimes \mathbb{D}$ szimmetrikus, pozitív szemidefinit bilineáris leképezést, amelynek a magja $\mathbb{I}\boldsymbol{u}$.

Egy ilyen téridőmodellben

– a múltszerű, illetve időszerű vektorok összessége $\mathtt{T}^{\leftarrow} := -\mathtt{T}^{\rightarrow}$, illetve $\mathtt{T} := \mathtt{T}^{\leftarrow} \cup \mathtt{T}^{\rightarrow}$,

– világvonal olyan görbe, amelynek minden érintője időszerű,

– tehetetlenségi világvonal egyenes, egy ilyennek az x és y pontja között eltelt idő $\boldsymbol{P}(y - x)$,

– egy $\mathtt{C}$ világvonal x és y pontja között a világvonalon eltelt idő

$$\boldsymbol{t}_{\mathtt{C}}(x, y) := \int_{p^{-1}(x)}^{p^{-1}(y)} \boldsymbol{P}(\dot{p}(a))da,$$

ahol p a világvonal tetszőleges előrehaladó paraméterezése,

– megfigyelő egy $\boldsymbol{U} : \mathtt{M} \rightarrowtail \mathtt{V}(1)$ összefüggő, nyílt halmazon értelmezett végtelenszer differenciálható sebességmező,

– az $\boldsymbol{U}$ megfigyelő terének egy pontja vagy röviden $\boldsymbol{U}$-térpont az $\boldsymbol{U}$ vektormező egy maximális integrálgörbéje,

– tehetetlenségi megfigyelő konstans sebességmező, térpontjai párhuzamos egyenesek; az $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelő tere $\mathtt{E}_{\boldsymbol{u}} := \mathtt{M}/\mathbb{I}\boldsymbol{u}$ háromdimenziós irányított affin tér $\mathbf{M}/\mathbb{I}\boldsymbol{u}$ fölött,

– az $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelő $\boldsymbol{x} + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{y} + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$ térvektorának skaláris szorzata $\boldsymbol{d_u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, ami szerint tehát a megfigyelő $x + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$ és $y + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$ térpontjának a távolsága $\sqrt{\boldsymbol{d_u}(x - y, x - y)}$.

2.8.2. Izomorfizmusok

Különféle modelleket készíthetünk, attól függően, milyen tapasztalatainkat akarjuk a modellben összefoglalni.

Persze alakilag különböző téridőmodelleknek lehet ugyanaz a fizikai tartalma, más szóval a modellek lehetnek fizikailag „ugyanolyanok”, ami azt jelenti, hogy a modellek matematikai struktúrája izomorf.

Vegyük az $(\mathtt{M}, \mathbb{I}, \mathbb{D}, \mathtt{T}^{\to}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{d})$ és $(\mathtt{M}', \mathbb{I}', \mathbb{D}', (\mathtt{T}^{\to})', \boldsymbol{P}', \boldsymbol{d}')$ téridőmodellt. Matematikai struktúráját tekintve $\mathtt{M}$ és $\mathtt{M}'$, $\mathbb{I}$ és $\mathbb{I}'$, valamint $\mathbb{D}$ és $\mathbb{D}'$ izomorfak, azaz létezik (kontinuum sok)

(i) $L : \mathtt{M} \to \mathtt{M}'$ irányítástartó, affin bijekció (az $\boldsymbol{L} : \mathbf{M} \to \mathbf{M}'$ lineáris bijekció felett),

(ii) $\boldsymbol{B} : \mathbb{I} \to \mathbb{I}'$ irányítástartó lineáris bijekció,

(iii) $\boldsymbol{Z} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}'$ irányítástartó lineáris bijekció.

Más szóval minden téridőmodell első három komponense lényegében ugyanolyan. A különbözőség az utolsó három komponensben lehet.

A két téridőmodellt akkor nevezzük **izomorfnak**, ha van olyan L, $\boldsymbol{B}$ és $\boldsymbol{Z}$, amelyek „megfelelő módon” átviszik $\mathtt{T}^{\to}$-t $(\mathtt{T}^{\to})'$-be, $\boldsymbol{P}$-t $\boldsymbol{P}'$-be és $\boldsymbol{d}$-t $\boldsymbol{d}'$-be.

Az első két feltételt könnyű megadni:

(I) $\boldsymbol{L}[\mathtt{T}^{\to}] = (\mathtt{T}^{\to})'$,

(II) $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ minden $\boldsymbol{x} \in \mathtt{T}^{\to}$ esetén.

A harmadik feltétel pontos meghatározásához a tenzoriális műveletek ismeretében (lásd a matematikai mellékletet) azt kell felhasználnunk, hogy $\boldsymbol{L_B} : \frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}} \to \frac{\mathbf{M}'}{\mathbb{I}'}$, $\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{t}} \mapsto \frac{\boldsymbol{Lx}}{\boldsymbol{Bt}}$ jól értelmezett lineáris leképezés, amelyre az előző két feltétel alapján

$$\boldsymbol{L_B}[\mathtt{V}(1)] = \mathtt{V}(1)'$$

teljesül. Ezzel azt követeljük meg, hogy

(III) $\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{L_B u}}(\boldsymbol{Lx}, \boldsymbol{Ly}) = (\boldsymbol{Z} \otimes \boldsymbol{Z})\boldsymbol{d_u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ minden $\boldsymbol{u} \in \mathtt{V}(1)$ és $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{M}$ esetén.

Ekkor az $(L, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{Z})$ hármast a két téridőmodell közötti **izomorfizmusnak** hívjuk.

Mivel $\boldsymbol{L}$ lineáris bijekció, szembeötlő, hogy ha $\mathtt{T}^{\to}$ és $(\mathtt{T}^{\to})'$ a 2.6 ábrán mutatottak közül eltérő jellegűek, akkor a két téridőmodell nem lehet izomorf.

2.8.3. Szimmetriák

Egy téridőmodellnek az önmagával való izomorfizmusát a téridő **szimmetriájának**, nevezzük, ha a benne szereplő $\boldsymbol{B} : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ és $\boldsymbol{Z} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ lineáris leképezések az identitások; ezeket az identitásokat a szimmetriára való hivatkozásnál elhagyjuk.

Tehát az $(\mathtt{M}, \mathbb{I}, \mathbb{D}, \mathtt{T}^{\to}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{d})$ téridőmodell egy szimmetriája olyan $L : \mathtt{M} \to \mathtt{M}$ irányítástartó affin bijekció, amely alatti $\boldsymbol{L} : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ lineáris bijekció – ez a **vektori szimmetria** nevet viseli – a következő tulajdonságokkal bír:

(I) $\boldsymbol{L}[\mathtt{T}^{\to}] = \mathtt{T}^{\to}$,

(II) $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Lx}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ minden $\boldsymbol{x} \in \mathtt{T}^{\to}$ esetén,

(III) $\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{Lu}}(\boldsymbol{Lx}, \boldsymbol{Ly}) = \boldsymbol{d_u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ minden $\boldsymbol{u} \in \mathtt{V}(1)$ és $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{M}$ esetén.

Ezeknek a szimmetriáknak a fizikai értelme a következő. Van intuíciónk arról, mikor tekintünk két fizikai tárgyat, történést stb. fizikailag ugyanolyannak; ezt a téridőmodellben azzal fejezzük ki, hogy **definíció szerint** két objektum **fizikailag egyenértékű**, más szóval **ugyanolyan**, ha a téridő valamely szimmetriája viszi át egymásba őket.

Például a $\mathtt{C}$ és $\mathtt{C}'$ két világvonal – azaz két tömegpont történelme – fizikailag egyenértékű (ugyanolyan), ha van olyan L téridő-szimmetria, hogy $\mathtt{C}' = L[\mathtt{C}]$. Speciálisan, bármely $\boldsymbol{a}$ vektorral való eltolás, $x \mapsto x + \boldsymbol{a}$ ilyen szimmetria, hiszen az alulfekvő lineáris leképezés az $\mathbf{M}$ identitása. Ezzel pontos értelmet nyert a téridő homogenitása, amelyet a 2.3.2 pontban említettünk.

Továbbá az $\boldsymbol{U}$ és $\boldsymbol{U}'$ globális (azaz mindenütt értelmezett) megfigyelő fizikailag egyenértékű, ha van olyan L téridő-szimmetria (az $\boldsymbol{L}$ vektori szimmetria fölött), hogy $\boldsymbol{U}'(x) = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{U}(L^{-1}(x))$ minden x világpontra.

Alapvető meggyőződésünk, hogy a tehetetlenségi megfigyelők egyenértékűek. A 1.4 alfejezetben mondottak alapján tehát a 2.6.2 pontban megadott *áthúzásoktól elvárjuk azt is, hogy vektori szimmetriák legyenek.*

3. Egyéb fogalmak

A következőkben adottnak veszünk egy $(\mathtt{M}, \mathbb{I}, \mathbb{D}, \mathtt{T}^{\rightarrow}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{d})$ téridőmodellt.

3.1. Szinkronizációk

3.1.1. Egyidejűség meghatározása

A Bevezetésben is, az 1.2.3 pontban is találkoztunk az időpontok, a szikronizáció problémájával. Egy téridőmodell keretében világos és pontos értelmet adhatunk ezeknek.

Általában egy megfigyelő a pontjai között egyidejűséget valamely „kézenfekvő”, de mindenképpen önkényesen választott eljárással határoz meg; az egyidejűség létrehozását **szinkronizációnak** nevezzük.

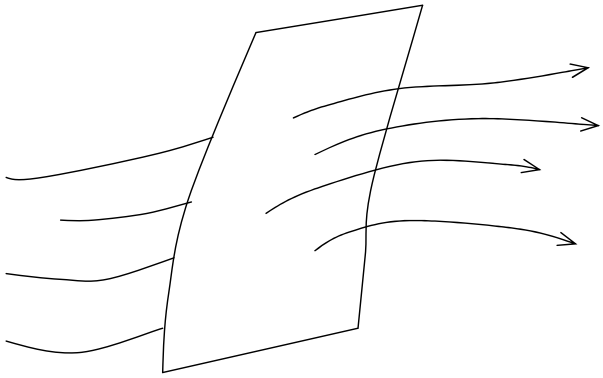
Tartsuk észben: ugyanaz a megfigyelő esetleg különböző szinkronizációkat is létrehozhat.

A szinkronizáció alaptulajdonságának fogadjuk el, hogy **semely világvonal két különböző villanata (egy kronométer két különböző kettyenése) nem lehet egyidejű**.

A szinkronizációval tulajdonképpen **időpontokat (pillanatokat)** határozunk meg: az egyidejűnek tekintett villanatok azonos pillanatban történnek.

Most igen fontos gondolat következik. Gondoljuk el egy megfigyelő terét a 2.10 ábrának megfelelően, sőt az ott szemléltetettnél egy kicsit „kövérebben”, vagyis a megfigyelő térpontjai (világvonalak) ne csak a lap síkjában haladjanak, hanem mögötte is, előtte is; ekkor a megfigyelő terének pontjait jelentő világvonalak mintegy köteget alkotnak.

Minden térpontban jelöljük be a szinkronizáció szerint egyidejű villanatokat (mondjuk, a jól-érthetőség kedvéért, az éjfélt). Ezek az egyidejű villanatok a világvonalak kötegének egy keresztmetszetét adják, amint azt a 3.1 ábra próbálja szemléltetni. Egy ilyen keresztmetszet háromdimenziós részsokaság a téridőben (egyelőre ne törődjünk ennek pontos matematikai meghatározásával), amelyet **világfelületnek** nevezünk.



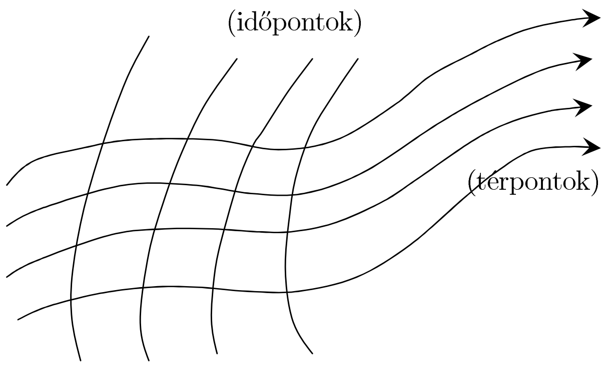
3.1. ábra. Szinkronizációs időpont

Ez elég jól indokolja, hogy egy szinkronizáció szerinti időpontot (pillanatot) a legcélszerűbb úgy felfogni, mint az azonos idejűnek meghatározott világpontok összességét. Például az éjfél mint időpont a budapesti, debreceni, miskolci, győri, pécsi, szegedi stb. éjfelek összessége.

Ehhez hozzá kell szoknunk: **amit mi egyetlen szinkronizációs időpontnak gondolunk (éjfél), az egy világfelület a téridőben**. Persze, a mondottak szerint nem is olyan különös ez: az éjfél itt is van, ott is van, mindenütt van.

Egy **szinkronizációs időpont** világfelület a téridőben. A **szinkronizációs idő** a szinkronizációs időpontok összessége.

Visszatérve a lap síkjában történő ábrázolásra, a világfelületet is egy görbe fogja mutatni; ennek megfelelően szemléltethetjük a szinkronizációs időt.



3.2. ábra. Megfigyelő térpontjai és szinkronizáció időpontjai

Ismételjük meg, gyakoroljuk be a következőket.

Egy szinkronizációnak egy időpontja a téridő részhalmaza: háromdimenziós részsokaság, világfelület.

Ezeknek a világfelületeknek az összessége a szinkronizációs idő. A **szinkronizációs idő tehát nem részhalmaza a téridőnek**; ez olyan halmaz, melynek az elemei a téridő részhalmazai.

Végezetül hangsúlyozzuk: a szinkronizáció technikai szempontból fontos, elvileg viszont nem az; a szinkronizáció emberi konvenció kérdése, nem fizikai valóság, ezért is **a szinkronizáció nem része a téridőmodell struktúrájának**, hanem csak abból definiált fogalom.

3.1.2. Egyenletes szinkronizációk

A szinkronizáció pontos matematikai megfogalmazása általában egy kissé bonyolult. Kivételt képeznek az egyenletes szinkronizációk, amelyben az időpontok párhuzamos háromdimenziós hipersíkok.

Most pusztán matematikai szempontból vizsgáljuk a szinkronizációt, azt nem, milyen fizikai eljárásnak felel ez meg, illetve megfelelhet-e egyáltalán.

Legyen $\mathbf{E}_s$ háromdimenziós altér $\mathbf{M}$-ben. Az $\mathbf{E}_s$ **meghatározta egyenletes szinkronizáció** szerint az x és y világpontok **egyidejűek**, ha $y - x \in \mathbf{E}_s$. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért ahelyett, hogy az $\mathbf{E}_s$ háromdimenziós altér meghatározta egyenletes szinkronizáció, csak $\mathbf{E}_s$ egyenletes szinkronizációt mondunk.

Az x világponttal az $\mathbf{E}_s$ egyenletes szinkronizáció szerint azonos idejű világpontok összessége $x+\mathbf{E}_s$. Ez azt jelenti, hogy a szinkronizáció szerint azonos idejű világpontok összessége – egy szinkronizációs időpont – egy $\mathbf{E}_s$ vezette hipersík. A szinkronizációs idő pedig az ilyen hipersíkok összessége, amely matematikailag $\mathtt{M}/\mathbf{E}_s$.

A szinkronizációk alaptulajdonsága szerint elvárjuk, hogy semmilyen világvonal két különböző villanata ne legyen egyidejű. Vegyünk egy $\boldsymbol{u}$ abszolút sebességű tehetetlen világvonalat (egyenest). Ennek két pontja pontosan akkor nem egyidejű $\mathbf{E}_s$ szerint, ha $\mathbb{I}\boldsymbol{u}$ és $\mathbf{E}_s$ csak egy pontban (a nullában) találkozik, más szóval ha $\boldsymbol{u}$ és $\mathbf{E}_s$ transzverzális.

Ez azt jelenti, hogy csak olyan három dimenziós altérrel létesítünk egyenletes szinkronizációt, amely minden abszolút sebességre transzverzális. Itt szerepet kap az, hogy a jövőszerű vektorok halmaza konvex és nyílt: emiatt létezik minden jövőszerű vektorra (tehát minden abszolút sebességre) transzverzális háromdimenziós altér.

3.2. Vonatkoztatási rendszerek

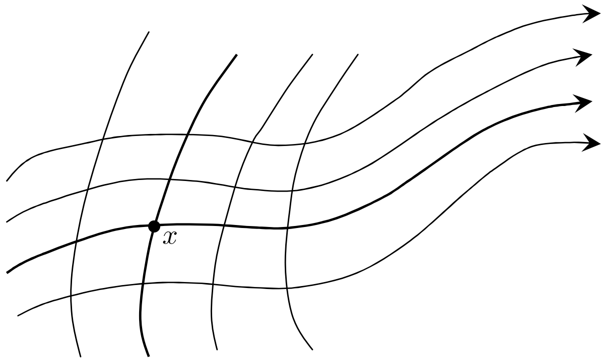
3.2.1. A téridő széthasításai

Egy megfigyelőt és egy szinkronizációt együtt **vonatkoztatási rendszernek** nevezünk.

Egy vonatkoztatási rendszer bármely világponthoz hozzárendeli a világpontnak megfelelő szinkronizációs időpontot és megfigyelő-térpontot, vagyis azt a világfelületet a szinkronizációs időben és azt a világvonalat a megfigyelő terében, amelyek tartalmazzák a kérdéses világpontot. Azt mondjuk, a vonatkoztatási rendszer **széthasítja** a téridőt időre és térre.

Ennek a széthasításnak a fizikai értelme az, hogy a vonatkoztatási rendszer a villanatokat azzal jellemzi, szerinte mikor és hol történnek. Más szóval, a téridő széthasítása a modellben annak a valóságos ténynek felel meg, hogy egy megfigyelő, miután szinkronizációt vezetett be, miként észleli a téridőt külön időnek és külön térnek.

Jegyezzük meg, hogy különböző vonatkoztatási rendszerek merőben más időpontot és térpontot rendelhetnek hozzá ugyanahhoz a villanathoz.



3.3. ábra. Téridő széthasítása időre és térre

3.2.2. Mozgások leírása

Egy test mozgásának a leírása azt jelenti, hogy megmondjuk, a test mikor hol volt; tehát a leírás egy szinkronizációt (mikor) és egy megfigyelőt (hol) követel meg, vagyis egy vonatkoztatási rendszert.

Tekintsünk egy $\mathtt{C}$ világvonalat, amely egy tömegpont létezését reprezentálja. Vegyünk egy $\boldsymbol{U}$ megfigyelőből és egy $\boldsymbol{S}$ szinkronizációból álló vonatkoztatási rendszert. A szinkronizáció t pillanatában (világfelületen) a tömegpont a $t \cap \mathtt{C}$ világpontban van; ez meghatározza a megfigyelőnek azt a $q(t)$ pontját (világvonalat), amely áthalad rajta. A mozgás leírását tehát a $t \mapsto q(t)$ függvény adja meg.

3.2.3. Tehetetlenségi rendszerek

Azokat a vonatkoztatási rendszereket, amelyek tehetetlenségi megfigyelőből és egyenletes szinkronizációból állnak, **tehetetlenségi rendszereknek** hívjuk.

A tehetetlenségi rendszerek fontos tulajdonsága:

Egyenletes szinkronizáció két pillanata között tehetetlenségi megfigyelő terének bármely pontjában ugyanannyi sajátidő telik.

Tekintsük ugyanis az $\boldsymbol{u}$ megfigyelő két pontját, $x + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$-t és $y + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$-t, és tegyük fel, hogy x és y egyidejű az $\mathbf{E}_s$ szinkronizáció szerint, azaz $y - x \in \mathbf{E}_s$. Ekkor $x + \boldsymbol{tu}$ akkor és csak akkor egyidejű $y + \boldsymbol{su}$-val, azaz $(y + \boldsymbol{su}) - (x + \boldsymbol{tu}) \in \mathbf{E}_s$, ha $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{t}$.

Ebből következik egy másik fontos tény:

Tehetetlenségi rendszerhez képest egy tehetetlen világvonal egyenes vonalú egyenletes mozgást ad.

A bizonyítás egy kissé körülményes, majd konkrét téridőmodellek esetén egyszerűbben is megkapjuk ezt az eredményt.

Legyen $\boldsymbol{u}$ a megfigyelő, $\mathbf{E}_s$ a szinkronizáció, és $\mathtt{C}$ egy $\boldsymbol{u}'$ abszolút sebességű tehetetlen világvonal.

Vegyünk két szinkronizációs időpontot, t-t és s-et. Legyen $x := t \cap \mathtt{C}$ és $y := s \cap \mathtt{C}$. Ekkor van olyan $\boldsymbol{t}' \in \mathbb{I}$, hogy $y - x = \boldsymbol{t}'\boldsymbol{u}'$. A világvonallal megadott tehetelen tömegpont a t, illetve az s szinkronizációs időpontban a megfigyelőnek az $x + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$, illetve az $y + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$ térpontjában van.

Ezen megfigyelő-térpontokban a t és s szinkronizációs időpont között ugyanaz a $\boldsymbol{t}$ sajátidőtartam telik el; ezt az $(x + \boldsymbol{tu}) - y = (x - y) + \boldsymbol{tu} = \boldsymbol{tu} - \boldsymbol{t}'\boldsymbol{u}' \in \mathbf{E}_s$ összefüggés határozza meg. Minthogy $\boldsymbol{u}'$ és $\mathbf{E}_s$ transzverzális egymásra, $\boldsymbol{tu}$ egyértelműen felbontható $\mathbb{I}\boldsymbol{u}'$-ben és $\mathbf{E}_s$-ben levő vektorok összegére, vagyis a szóban forgó összefüggés a $\boldsymbol{t}'$-t egyértelműen megadja a $\boldsymbol{t}$ függvényében; jelöljük ezt így: $\boldsymbol{t}'(\boldsymbol{t})$. Az is nyilvánvaló, hogy kétszer, háromszor stb. nagyobb $\boldsymbol{t}$-hez kétszer, háromszor, stb nagyobb $\boldsymbol{t}'$ tartozik, vagyis az időtartamok közötti összefüggés lineáris: van olyan α szám, hogy $\boldsymbol{t}'(\boldsymbol{t}) = \alpha\boldsymbol{t}$.

A szóban forgó megfigyelő-térpontok közötti vektor $(y+\mathbb{I}\boldsymbol{u})-(x+\mathbb{I}\boldsymbol{u}) = (y-x)+\mathbb{I}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{t}'\boldsymbol{u}'+\mathbb{I}\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{t}\boldsymbol{u}' + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$.

Látjuk, hogy tehetetlen világvonalnak a vonatkoztatási rendszerhez viszonyított mozgása a $\boldsymbol{t}$ időtartam alatt $(\alpha\boldsymbol{u}' + \mathbb{R}\boldsymbol{u})\boldsymbol{t}$ vektorral megy arrébb: a mozgás egyenes vonalú és egyenletes.

3.3. Koordinátarendszerek

Ismételjük meg, megéri: egy megfigyelő tere és az egyes térpontjaiban telő idő fizikai valóság, míg egy szinkronizáció – bár az is fizikai eljárással van meghatározva a gyakorlatban – önkényes.

Egy vonatkoztatási rendszerben tehát fizikai valóság és emberi önkény keveredik.

További önkényes eljárással jutunk el a **koordinátarendszerekhez** úgy, hogy a szinkronizációs időpontokat számokkal, a megfigyelő terének pontjait számhármasokkal reprezentáljuk, vagyis a téridőpontokat összességében számnégyesekkel.

Az ilyen számnégyesekhez a gyakorlatban legegyszerűbben a következőképpen jutunk (affin vonatkoztatási rendszert tekintve).

Választunk egy „kezdőpontot" (Budapest, nulla kilométerkő; a szobánk egyik sarka) a megfigyelő terében és egy „kezdőpontot" (éjfél) a szinkronizációs időben. Ezután választunk egy időegységet vagy más szóval egységnyi időtartamot (másodperc: egy kvarckristály adott számú kettyenése), valamint egy távolságegységet (méter: kvarckristály adott számú molekulájából álló egyenes lánc hossza). Továbbá választunk három egyenest a megfigyelő terében (tengelyeket), amelyek átmennek a térbeli kezdőponton.

Egy szinkronizációs időpontot úgy jellemzünk egy számmal, hogy megmérjük, az egységnyi időtartam hányszorosa telt el a térbeli kezdőpontban az időbeli kezdőpont óta az adott időpontig.

Egy megfigyelő-térpontot úgy jellemzünk egy számhármassal, hogy megmérjük az adott pont távolságát a tengelyektől, és megadjuk, ezek a távolságok hányszorosai a távolságegységnek.

Jegyezzük meg, hogy ugyanahhoz a vonatkoztatási rendszerhez sokféleképpen határozhatunk meg koordinátarendszert, de különböző vonatkoztatási rendszerekhez nem tartozhat azonos koordinátarendszer. Végül: különböző koordinátarendszerek merőben más számnégyest rendelhetnek hozzá ugyanahhoz a villanathoz.

Mindezeket speciális – nemrelativisztikus és relativisztikus – téridőmodellek estén pontos matematikai formába öntjük.

Látjuk, a koordinátarendszerek mennyi esetleges, önkényes adatot tartalmaznak. Már ez is érzékelteti, milyen felesleges bonyodalmakat okozhat a téridők szokásos koordinátás tárgyalása.

IV. Abszolút idő

4. Alapfogalmak és feltevések

Ebben a fejezetben adottnak veszünk egy téridőmodellt, amelyre a 2.8.1 pont fogalmait és jelöléseit használjuk, és megvizsgáljuk, $\mathtt{T}^{\rightarrow}$, $\boldsymbol{P}$ és $\boldsymbol{d}$ milyen tulajdonságokkal rendelkezik az abszolút időmúlás feltételezése mellett.

Eredményül a hétköznapi gondolkodásnak megfelelő úgynevezett nemrelativisztikus téridőmodellt kapjuk. Aki csak e modell és fizikai alkalmazásai iránt érdeklődik, és nem kívánja végigjárni a hozzá vezető utat, a továbbiak meg nem értésének a veszélye nélkül átugorhatja ezt a fejezetet.

4.1. Abszolút időmúlás

Egy korábbi példánkban szóltunk arról, hogy egyszerű, mondhatni felületes tapasztalatunk szerint ugyanannyit kettyent a találkozásaik között egy otthon hagyott kronométer és egy magunkkal vitt kronométer. A téridőről alkotott klasszikus felfogás (kimondatlanul) arra a hétköznapi tapasztalatra épül, hogy az idő mindenkinek ugyanúgy telik: (tökéletes) kronométerek mindentől függetlenül egyformán járnak. Itt ketyeg együtt két kronométer, majd szétválnak és ha egyszer újra találkoznak, a találkozásukig ugyanannyit kettyent mindkettő, függetlenül attól, mit élt át az egyik, mit a másik.

Most olyan téridőmodellt készítünk, amely ezt az **abszolút időmúlást** feltételezi. Közelebbről azt, hogy ha két világvonal két pontban találkozik, a két pont között a két világvonalon eltelt időtartamok megegyeznek.

Formulában: ha x és y olyan világpont, hogy $y-x$ jövőszerű, akkor bármely $\mathtt{C}_1$ és $\mathtt{C}_2$ világvonalra, amely tartalmazza ezeket a világpontokat, $\boldsymbol{t}_{\mathtt{C}_1}(x,y) = \boldsymbol{t}_{\mathtt{C}_2}(x,y)$.

Speciálisan, ha $\mathtt{C}_1$ a két világponton áthaladó egyenes (tehetetlenségi világvonal), $\mathtt{C}_2$ pedig két egyenes szakaszból áll, az egyik x-től z-ig, a másik z-től y-ig, akkor azt kapjuk, hogy $\boldsymbol{P}(y-x) = \boldsymbol{P}(y-z) + \boldsymbol{P}(z-x)$. Minthogy $y-z$ is, $z-x$ is jövőszerű, valamint $y-x = (y-z)+(z-x)$, ez végülis azt adja – $\boldsymbol{P}$ pozitív homogenitásával együtt –, hogy

$$\boldsymbol{P}(\alpha\mathbf{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{P}(\mathbf{x}) + \beta\boldsymbol{P}(\boldsymbol{y})$$

minden α, β pozitív valós számra és $\mathbf{x}, \boldsymbol{y}$ jövőszerű vektorra.

Ebből egyszerűen adódik:

Van olyan egyértelműen meghatározott $\boldsymbol{\tau} : \mathbf{M} \to \mathbb{I}$ lineáris leképezés, amelynek $\mathtt{T}^{\rightarrow}$-re való leszűkítése egyenlő $\boldsymbol{P}$-vel.

Úgy is fogalmazhatunk, hogy $\boldsymbol{P}$ egyértelműen kiterjeszthető $\mathbf{M}$-re lineáris leképezéssé. Az 2.7.4 pont első bekezdése szerint az $\mathbf{M}$ minden eleme $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}$ alakú, ahol $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ a $\mathtt{T}^{\rightarrow}$ eleme. Definiáljuk ezután a $\boldsymbol{\tau}$ leképezést úgy, hogy $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{P}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$. Persze meg kell mutatnunk, hogy ez a definíció jó, azaz ha $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}'-\boldsymbol{x}'$, akkor $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{y}') - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')$. Ekkor ugyanis $\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{y}'+\boldsymbol{x}$, és itt mindkét oldal már a $\mathtt{T}^{\rightarrow}$ eleme, ezért alkalmazva rájuk $\boldsymbol{P}$-t és felhasználva $\boldsymbol{P}$ fenti speciális tulajdonságát azt kapjuk, hogy $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{y}')+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$, amiből már következik, amit akartunk. Ugyancsak $\boldsymbol{P}$ pozitív homogenitása miatt $\boldsymbol{\tau}$ nyilvánvalóan lineáris lesz.

Ezért a következőkben $\boldsymbol{P}$ helyett $\boldsymbol{\tau}$-t írunk.

A pontosság kedvéért megjegyezzük, hogy itt egy kicsit eltértünk a világvonal eredeti meghatározásától; ugyanis a két egyenes szakaszból álló halmaz nem görbe az általunk használt értelemben, „törés" van benne, nincs folytonosan differenciálható paraméterezése. Definiálhattuk volna a világvonalat, mint szakaszos görbét, és akkor most semmi zavar nem lenne. Viszont sehol máshol nem kell ilyen általánosabb görbéket tekintenünk, ezért megtakarítottuk a szakaszos görbe pontos (kissé körülményes) definícióját, viszont itt megengedtük magunknak az egyszerűen érthető, két egyenes szakaszból álló görbét.

4.2. A jövőszerű vektorok

Az abszolút időmúlás maga után vonja az abszolút egyidejűség értelmét. A modellben ezt a következőképpen fogalmazhatjuk meg. Vegyünk egy tetszőleges z világpontot; az $x \in z+\mathtt{T}^{\rightarrow}$ és $y \in z+\mathtt{T}^{\rightarrow}$ „természetszerűleg" egyidejű a z-ből tekintve, ha z-től x-ig ugyanannyi idő telik el, mint z-től y-ig, azaz $\boldsymbol{\tau}\cdot(x-z) = \boldsymbol{\tau}\cdot(y-z)$. Ezért $\boldsymbol{\tau}\cdot(y-x) = \boldsymbol{\tau}\cdot((y-z)+(z-x)) = 0$; látjuk, hogy y és x egyidejűségi viszonyának kifejezésében a segéd z végül is nem szerepel, vagyis azt mondhatjuk, hogy y és x pontosan akkor **abszolút egyidejű** , ha $\boldsymbol{\tau}\cdot(y-x) = 0$.

Vezessük be az

$$\mathbf{E} := \{\boldsymbol{q} \in \mathbf{M} \mid \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{q} = 0\}$$

jelölést. Másképpen szólva, ez a $\boldsymbol{\tau}$ lineáris leképezés magja; minthogy τ értékkészlete egydimenziós, $\mathbf{E}$ háromdimenziós lineáris altér $\mathbf{M}$-ben.

Tehát az y és x világpont akkor és csak akkor (abszolút) egyidejű, ha $y-x \in \mathbf{E}$.

Egy további szokásos, természetesnek vélt (de felületes) tapasztalatunk, hogy a terünkben bármely pályán **bármilyen gyors mozgás létrejöhet**. Ez nem ugyanaz, mint az 1.3.2-ben szereplő (**M3**) tulajdonság, annál erősebb, és általában meg sem fogalmazható, mit jelent a bármilyen gyors. Az abszolút idővel azonban ezt mondhatjuk: ha x és y nem abszolút egyidejű világpont, akkor van olyan tehetetlen világvonal, amely átmegy rajtuk. Más szóval, ha x és y nem abszolút egyidejű világpontok, akkor az egyik a másikhoz képest jövőszerű, azaz $y-x$ vagy $x-y$ a $\mathtt{T}^{\rightarrow}$ eleme. Ez azt jelenti, hogy ha $\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{x} \neq 0$, akkor $\mathbf{x}$ vagy $-\mathbf{x}$ jövőszerű. Következésképpen

$$\boxed{\mathtt{T}^{\rightarrow} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{M} \mid \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{x} > 0\}. \qquad (4.1)}$$

Ilyen $\mathtt{T}^{\rightarrow}$-t mutat a 2.7 ábra első rajza.

Az abszolút sebességek definíciója szerint (lásd 2.4.3) pedig, figyelembe véve az abszolút időmúlást,

$$\mathtt{V}(1) = \left\{ \boldsymbol{u} \in \frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}} \,\middle|\, \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{u} = 1 \right\}, \tag{4.2}$$

amely affin hipersík $\frac{\mathbf{E}}{\mathbb{I}}$ fölött.

4.3. Az euklideszi szerkezetek

4.3.1. Térvektorok

Egy tehetetlenségi megfigyelő térpontjait, egymással párhuzamos egyeneseket, jól szemléltethetjük. Ezzel szemben a térvektorait – a szóban forgó egyenesek különbségeit – már nem. Azonban az abszolút egyidejűség segítségével minden tehetetlenségi megfigyelő térvektorait természetszerűleg reprezentálhatjuk – vagyis **azonosíthatjuk** – $\mathbf{E}$ elemeivel. Ez azt jelenti, hogy két $\boldsymbol{u}$-térpont ($\boldsymbol{u}$-vezette egyenes) különbségeként az azonos abszolút idejű pontjaik közötti vektort tekintjük. Közelebbről, ha q és p a tehetetlenségi megfigyelő $\mathtt{E}_{\boldsymbol{u}}$ terének pontjai (azaz $\boldsymbol{u}$ vezette egyenesek), akkor

$$q - p := x - y \qquad (x \in q,\ y \in p,\ \boldsymbol{\tau} \cdot (x - y) = 0). \tag{4.3}$$

Tehát különböző tehetetlenségi megfigyelők térvektorai ugyanazzal az $\mathbf{E}$-vel reprezentálhatók, ami azt is jelenti, hogy természetes megfeleltetés van a különböző megfigyelők térvektorai között oly módon, hogy minden megfigyelő térvektorai ugyanazok. Ezért az $\mathbf{E}$ elemeit **abszolút térszerű vektoroknak** nevezzük.

4.3.2. Áthúzások

A 2.6.2 pontnak megfelelően az előbbiek szerint természetszerűleg adódik, hogy az $\boldsymbol{u}$-ról az $\boldsymbol{u}'$-re való áthúzás az abszolút térszerű vektorokat önmagukba képezi, tehát az áthúzást a

$$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}', \qquad \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q} \qquad (\boldsymbol{q} \in \mathbf{E})$$

formula határozza meg.

4.3.3. Az abszolút euklideszi szerkezet

Minden $\boldsymbol{u}$ esetén adva kell legyen egy $\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}} : \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbb{D} \otimes \mathbb{D}$ bilineáris, szimmetrikus pozitív szemidefinit leképezés, amelynek a magja $\mathbb{I}\boldsymbol{u}$. Minthogy $\mathbf{E}$ transzverzális $\mathbb{I}\boldsymbol{u}$-ra, $\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}$ leszűkítése $\mathbf{E}$-re pozitív definit. Ez a leszűkítés adja meg az $\boldsymbol{u}$-tér euklideszi szerkezetét, hiszen $\mathbf{E}$ reprezentálja a térvektorokat.

Az áthúzásokra kirótt követelmény szerint

$$\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}'}(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

kell, hogy teljesüljön minden $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ vektorra. Ebből és az áthúzás tulajdonságából arra jutunk, hogy $\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}'}$ és $\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}$ leszűkítése $\mathbf{E}$-re meg kell, hogy egyezzék. Ez pontosan a következőt jelenti:

Van egy egyértelműen meghatározott

$$\boldsymbol{b} : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbb{D} \otimes \mathbb{D} \tag{4.4}$$

bilineáris, szimmetrikus, pozitív definit leképezés, az **abszolút euklideszi szerkezet** úgy, hogy bármely $\boldsymbol{d_u}$-nak a leszűkítése $\mathbf{E}$-re egyenlő $\boldsymbol{b}$-vel.

Mivel $\boldsymbol{d_u}$ magja $\mathbb{I}\boldsymbol{u}$, bármely $\boldsymbol{x}$ esetén $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{x})$ az $\mathbf{E}$ eleme (és hasonlóan $\boldsymbol{y}$-ra), tehát $\boldsymbol{d_u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{d_u}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{y}))$, azt állíthatjuk végül, hogy

$$\boldsymbol{d_u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{b}\big(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{y})\big) \qquad (\boldsymbol{u} \in \mathtt{V}(1),\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{M}). \tag{4.5}$$

5. A nemrelativisztikus téridőmodell

Az előző fejezetben bevezetett – **nemrelativisztikusnak** nevezett – téridőmodellhez az általában elfogadottakon túl a következő két feltevéssel jutottunk el:

– *az időmúlás abszolút, azaz két villanat között bármely világvonalon ugyanakkora időtartam telik el;*

– *a nem abszolút egyidejű világpontokra abszolút későbbi-korábbi összefüggés igaz.*

A nemrelativisztikus téridőmodell adja vissza a téridőről alkotott egyszerű képzeteinket, és – kimondatlanul, nem ilyen pontos formában – alkotja a klasszikus mechanika hátterét, ezért beleivódott a fizikai gondolkodásba is.

Ebben a fejezetben az előzőek felhasználása nélkül – vagyis anélkül, hogy hivatkoznánk arra, hogyan jutottunk el hozzá – definiáljuk e modellt, majd tárgyaljuk a tulajdonságait. égy tekintjük, mintha az előző fejezet nem is létezne, hogy azok is, akik azt átugrották, tökéletesen megértsék a nemrelativisztikus téridőmodellt. Ezért sok minden, ami már megjelent az előző fejezetben, itt újra felbukkan mint újdonság, igaz egy kicsit más oldalról megközelítve.

5.1. A modell alaptulajdonságai

5.1.1. A modell új jelölése

A nemrelativisztikus téridőmodellt az általános $(\mathtt{M}, \mathbb{I}, \mathbb{D}, \mathtt{T}^{\to}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{d})$ helyett az egyszerűbb és kifejezőbb jelölés kedvéért az $(\mathtt{M}, \mathbb{I}, \mathbb{D}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{b})$ szimbólummal határozzuk meg, ahol

– $\mathtt{M}$ a **téridő**, négydimenziós irányított affin tér (az $\mathbf{M}$ vektortér fölött),

– $\mathbb{I}$ az **időtartamok** mértékegyenese,

– $\mathbb{D}$ a **távolságok** mértékegyenese,

– $\boldsymbol{\tau} : \mathbf{M} \to \mathbb{I}$ lineáris ráképezés, az **abszolút időmúlás** kifejezője, amelynek az $\mathbf{E} := \{\boldsymbol{q} \in \mathbf{M} \mid \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{q} = 0\}$ magjával

– $\boldsymbol{b} : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbb{D} \otimes \mathbb{D}$ bilineáris, szimmetrikus, pozitív definit leképezés, az **abszolút euklideszi szerkezet**;

ezekkel

– a jövőszerű vektorok halmaza

$$\mathtt{T}^{\to} := \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{M} \mid \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{x} > 0\},$$

– a tehetetlenségi időmúlás $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{x}\quad (\boldsymbol{x}\in \mathtt{T}^{\to})$,
aminek következtében az abszolút sebességek halmaza

$$\mathtt{V}(1) := \left\{\boldsymbol{u}\in\frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}}\;\middle|\;\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{u}=1\right\},$$

– a tehetetlenségi megfigyelők euklideszi szerkezeteit

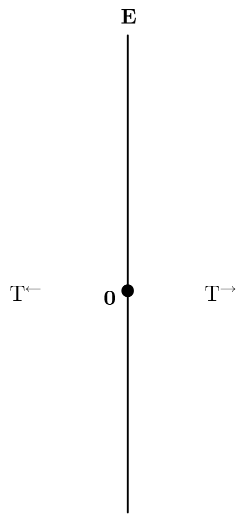
$$\boldsymbol{d_u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{b}\big(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{x}),\boldsymbol{y}-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{y})\big)\qquad (\boldsymbol{u}\in\mathtt{V}(1),\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{M})$$

adja meg.

Továbbá (lásd 2.3.2) a **múltszerű**, illetve az **időszerű vektorok** halmaza

$$\mathtt{T}^{\leftarrow} = -\mathtt{T}^{\to},\qquad \mathtt{T} = \mathtt{T}^{\leftarrow}\cup\mathtt{T}^{\to} = \{\boldsymbol{x}\in\mathbf{M}\mid\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{x}\neq 0\},$$

valamint **E** az **abszolút térszerű vektorok** összessége, amely háromdimenziós lineáris altér.



5.1. ábra. Téridővektorok

Érdemes megjegyezni, hogy bármely $\boldsymbol{u}$ abszolút sebesség esetén

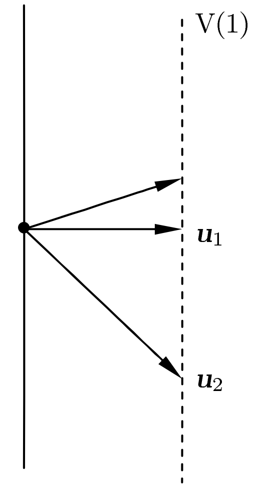
$$\boldsymbol{d_u}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$$

minden $\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}$ abszolút térszerű vektorra.

A téridővektorokat a lap síkjában a 5.1 ábra szerint szemléltetjük; ezt az aritmetikai modell (lásd 5.2) sugallja két változóban, a koordinátatengelyek elhagyásával.

Az abszolút sebességek összessége háromdimenziós affin tér $\frac{\mathbf{E}}{\mathbb{I}}$ fölött. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy

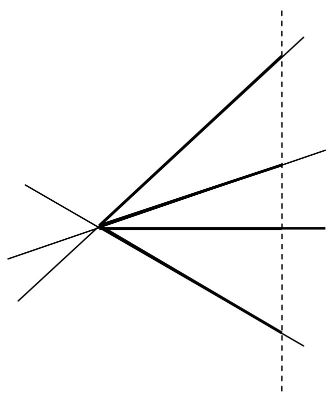
– nincs nulla abszolút sebesség,
– nem értelmes az abszolút sebességek nagyság szerinti összehasonlítása,
– nem értelmes két abszolút sebesség bezárta szög;



5.2. ábra. Abszolút sebességek

legyünk elővigyázatosak, a szemléltetés tulajdonságai ne vezessenek félre: az 5.2. ábrán levő $\boldsymbol{u}_2$ nem hosszabb, mint $\boldsymbol{u}_1$, nincs az $\boldsymbol{u}_1$ és $\boldsymbol{u}_2$ által bezárt szög, $\boldsymbol{u}_1$ nem merőleges $\frac{\mathbf{E}}{\mathbb{I}}$-re.

A különböző abszolút sebességű egyeneseken eltelt azonos időtartamokat az ábráinkon általában különböző hosszúságú szakaszok szemléltetnek. Minél nagyobb szöget zár be az ábrán az abszolút sebesség a vízszintessel, annál hoszszabb szakasz jelöl ugyanolyan időtartamot; azonos hosszúság felel meg azonos időtartamnak két olyan abszolút sebesség esetén, amelyek a vízszintessel – fölötte és alatta – azonos szöget zár be. Ezért, ha két abszolút sebességgel kapcsolatos összefüggéseket tárgyalunk, szemléltetésként mindig ilyen abszolút sebességeket rajzolunk. Végezetül ismét hangsúlyozzuk, hogy vízszintes (a térszerű vektorokra merőleges vonal) és bezárt szög nem értelmes a modellben, ezek csak a szemléltető ábrák tulajdonságai.



5.3. ábra. Azonos időtartamok

5.1.2. Duálisok

Az $\mathbf{E}$ vektortér duálisa, $\mathbf{E}^*$, az $\mathbf{E} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezések összessége szintén háromdimenziós vektortér, amely a $\boldsymbol{b}$ euklideszi szerkezet segítségével természetes kapcsolatba hozható $\mathbf{E}$-vel, pontosabban a következő **azonosítást** tehetjük:

$$\frac{\mathbf{E}}{\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}} \equiv \mathbf{E}^*, \qquad \frac{\boldsymbol{q}}{\mathrm{m}^2} \equiv \frac{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{q},\cdot)}{\mathrm{m}^2}.$$

Másképp is felfoghatjuk ugyanezt: $\mathbf{E}$ elemei azonosíthatók $\mathbf{E} \to \mathbb{D}\otimes\mathbb{D}$ lineáris leképezésekkel: $\boldsymbol{q} \equiv \boldsymbol{b}(\boldsymbol{q},\cdot)$. Ezért, a lineáris leképezésekre vonatkozó megállapodásunknak megfelelően, $\boldsymbol{b}$ helyett pontszorzást írunk:

$$\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p} := \boldsymbol{b}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \in \mathbb{D}\otimes\mathbb{D} \qquad (\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}\in\mathbf{E}).$$

Igen fontos, hogy ugyanakkor $\mathbf{M}^*$ **és M között nincs természetes megfeleltetés**. Ez a szokásos szempontból azt jelenti: $\mathbf{M}$ koordinátázásával „felső indexes" számnégyeseket kapunk, $\mathbf{M}^*$ koordinátázásával „alsó indexes" számnégyeseket, és „nincs átjárás" közöttük, azaz nem létesíthető megfeleltetés a felső indexes mennyiségek és alsó indexes mennyiségek között (lásd 5.10).

$\mathbf{E}$ az $\mathbf{M}$-nek „kitüntetett" háromdimenziós lineáris altere; elemeit **abszolút térszerű vektoroknak** nevezzük.

A $\boldsymbol{\tau} : \mathbf{M} \to \mathbb{I}$ lineáris ráképezés transzponáltja, $\boldsymbol{\tau}^* : \mathbb{I}^* \to \mathbf{M}^*$ lineáris injekció, ennek az értékkészlete pedig az $\mathbf{M}^*$-ban egy „kitüntetett" egydimenziós lineáris altér. Ennek az elemeit **abszolút időszerű kovektoroknak** hívjuk. Egyszerű formában: a $\boldsymbol{k}$ kovektor pontosan akkor abszolút időszerű, ha van olyan (egyértelműen meghatározott) $\boldsymbol{e} \in \mathbb{I}^*$, hogy $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{e}\boldsymbol{\tau}$.

5.1.3. Sajátidők

Egy anyagi pont történelme világvonal a téridőben. Ha az x és y villanat nem abszolút egyidejű, akkor a közöttük eltelt tehetetlenségi idő, az időmúlás értelmezése szerint $\boldsymbol{\tau}\cdot(y-x)$. Egy bármely más $\mathtt{C}$ világvonalon az x és y pontja között eltelt sajátidő 2.4.2 szerint a világvonal tetszőleges előrehaladó p paraméterezésével most

$$\begin{aligned}\boldsymbol{t}_{\mathtt{C}}(x,y) = &\int_{p^{-1}(x)}^{p^{-1}(y)} \boldsymbol{\tau}\cdot\dot{p}(a)da = \boldsymbol{\tau}\cdot\int_{p^{-1}(x)}^{p^{-1}(y)} \dot{p}(a)da = \\ =&\boldsymbol{\tau}\cdot(y-x).\end{aligned}$$

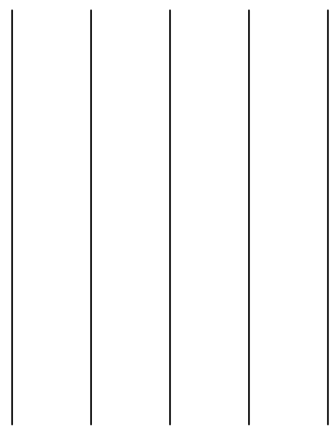
Eredményünk az **abszolút időmúlás**:

> Két nem abszolút egyidejű világpont között bármely világvonalon ugyanannyi sajátidő telik el, mint a tehetetlen világvonalon.

5.1.4. Az abszolút időpontok

Az abszolút időmúlás adja az abszolút időpontok heurisztikáját: kronométerekből óraszerkezeteket állítunk elő, amelyek „gombnyomásra" mérik az indítástól eltelt időtartamot. Egy megfigyelő (mondjuk a Föld) egy tetszőleges térpontjában (mondjuk Budapesten) egyszerre indított órákat küld mindenfelé (Debrecenbe, Miskolcra, Győrbe, Pécsre, Szegedre stb); az oda megérkezett órák azonos állásai egyidejű pillanatokat jelölnek.

A modellben ezt úgy fogalmazhatjuk meg, hogy az y és x világpont pontosan akkor egyidejű, ha $\boldsymbol{\tau} \cdot (y - x) = 0$, azaz $y - x \in \mathbf{E}$; más szóval, az x-szel egyidejű világpontok összessége $x + \mathbf{E}$. Tehát $\mathbf{E}$ létesíti a szóban forgó szinkronizációt. Minthogy a jövőszerű vektorok halmaza féltér, amelynek a határa $\mathbf{E}$, így $\mathbf{E}$ az egyetlen háromdimenziós altér, amely transzverzális minden jövőszerű vektorra; ezért az általa létesített szinkronizáció az egyetlen lehetséges, amelyet **abszolút szinkronizációnak** nevezünk.



5.4. ábra. Abszolút időpontok

Az abszolút szinkronizációs pillanatok tehát az $\mathbf{E}$ vezette hipersíkok, az **abszolút idő** ezeknek az összessége, $\mathtt{I} := \mathtt{M}/\mathbf{E}$, amely természetes módon egydimenziós affin tér $\mathbb{I}$ fölött az

$$(y + \mathbf{E}) - (x + \mathbf{E}) := \boldsymbol{\tau} \cdot (y - x) \tag{5.6}$$

kivonással. Vezessük be a

$$\tau : \mathtt{M} \to \mathtt{I}, \qquad x \mapsto x + \mathbf{E} \tag{5.7}$$

leképezést, amelyet **időkiértékelésnek** nevezünk. Az időkiértékelés tehát minden világponthoz hozzárendeli a neki megfelelő abszolút időpontot[1]. A fenti kivonást ezzel úgy is írhatjuk, hogy

$$\tau(y) - \tau(x) = \boldsymbol{\tau} \cdot (y - x),$$

tehát τ affin leképezés a $\boldsymbol{\tau}$ lineáris leképezés fölött.

Másképp is fogalmazhatunk a kivonást illetően: az s és t abszolút pillanat különbsége a hipersíkok egy-egy tetszőlegesen választott világpontjai között eltelt abszolút időtartam:

$$t - s := \boldsymbol{\tau} \cdot (y - x), \qquad (y \in t, x \in s). \tag{5.8}$$

[1] A T. Matolcsi: *Spacetime without Reference Frames* (Budapest, 1993, Akadémiai Kiadó) könyvben a nemrelativisztikus téridőmodellre az $(\mathtt{M}, \mathtt{I}, \tau, \mathbb{D}, \boldsymbol{b})$ szimbólumot használtam, ahol $\mathtt{I}$ az abszolút idő, τ az időkiértékelés. A mostani jelölés jobban illeszkedik a téridőmodellek általános tárgyalásába.

Ha az x és y villanat olyan, hogy $\tau(y) - \tau(x) = \boldsymbol{\tau} \cdot (y - x) > 0$, azaz y (abszolút) jövőszerű x-hez képest, akkor azt írjuk, hogy $\tau(y) > \tau(x)$, ami azt jelenti, hogy y későbbi, mint x.

5.2. Az aritmetikai téridőmodell

Valós számokból felépíthetünk egy nemrelativisztikus téridőmodellt, amelyet **aritmetikainak** nevezünk. Ebben

– $\mathtt{M} = \mathbb{R}^4$ a standard irányítással (ekkor $\mathbf{M} = \mathbb{R}^4$ szintén),
– $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ a standard irányítással,
– $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ a standard irányítással,
– $\boldsymbol{\tau} \cdot (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3) = \xi^0$,
következésképpen

$$\mathbf{E} = \{(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3) \mid \xi^0 = 0\} = \{0\} \times \mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{R}^3,$$

– $\boldsymbol{b}$ a szokásos skalárszorzat $\mathbb{R}^3$-on.

Továbbá itt

$$\mathtt{T}^{\rightarrow} = \{(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3) \mid \xi^0 > 0\} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3,$$

$$\mathtt{V}(1) = \{(\nu^0, \nu^1, \nu^2, \nu^3) \mid \nu^0 = 1\} = \{1\} \times \mathbb{R}^3.$$

A $(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ és az $(\eta^0, \eta^1, \eta^2, \eta^3)$ világpontok pontosan akkor egyidejűek, ha $\xi^0 = \eta^0$. Tehát az $\mathtt{I}$ abszolút idő pillanatai (az $\mathbf{E} = \{0\} \times \mathbb{R}^3$ vezette hipersíkok) természetszerűleg azonosíthatók valós számokkal: a t valós számnak megfelelő pillanat $\{t\} \times \mathbb{R}^3$. Ennek megfelelően tekinthetjük úgy, hogy $\mathtt{I} = \mathbb{R}$, és ekkor a τ időkiértékelés megegyezik $\boldsymbol{\tau}$-val.

Ismételjük el: az aritmetikai téridőmodellben

– az $\mathtt{M}$ téridő és a téridővektorok $\mathbf{M}$ összessége ugyanaz a halmaz,
– az $\mathtt{I}$ abszolút idő és az időtartamok $\mathbb{I}$ mértékegyenese ugyanaz a halmaz,
– a τ időkiértékelés és a $\boldsymbol{\tau}$ időmúlás ugyanaz a leképezés.
– $\mathbb{I}$ és $\mathbb{D}$ ugyanaz a halmaz, nevezetesen a valós egyenes, tehát minden mértékegyenes is $\mathbb{R}$, ezért például $\frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}} = \mathbf{M} = \mathbb{R}^4$, $\frac{\mathbf{E}}{\mathbb{D} \otimes \mathbb{D}} = \mathbf{E} = \mathbb{R}^3$, stb.

A szokásos formuláknak megfelelően $\mathbf{M}^* \equiv \mathbb{R}^4$; minthogy $\mathbf{M}$ is $\mathbb{R}^4$-gyel egyenlő, viszont $\mathbf{M}$ és $\mathbf{M}^*$ elemei között nincs megfeleltetés, ezért a kovektorok komponenseit alsó indexszel látjuk el, hogy megkülönböztessük őket a vektoroktól: ha $\boldsymbol{k} = (\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ és $\boldsymbol{x} = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$, akkor $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} = \kappa_0\xi^0 + \kappa_1\xi^1 + \kappa_2\xi^2 + \kappa_3\xi^3$.

5.3. Izomorfizmusok

A modellek izomorfizmusa igen fontos fogalom: az mondja meg, hogy két formailag különböző modell azonos fizikai tartalommal bír-e vagy sem (lásd 2.8.2).

5.3.1. Izomorfizmusok alakja

Emlékeztetünk, hogy ha az $(L, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{Z})$ hármas izomorfizmus az $(\mathtt{M}, \mathbb{I}, \mathbb{D}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{b})$ és az $(\mathtt{M}', \mathbb{I}', \mathbb{D}', \boldsymbol{\tau}', \boldsymbol{b}')$ nemrelativisztikus téridőmodell között (lásd 2.8.2), akkor

(i) $L : \mathtt{M} \to \mathtt{M}'$ irányítástartó affin bijekció (az $\boldsymbol{L} : \mathbf{M} \to \mathbf{M}'$ lineáris bijekció fölött),

(ii) $\boldsymbol{B} : \mathbb{I} \to \mathbb{I}'$ irányítástartó lineáris bijekció

(iii) $\boldsymbol{Z} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}'$ irányítástartó lineáris bijekció,
amelyek „megfelelő módon” átviszik $\mathtt{T}^{\to}$-t $(\mathtt{T}^{\to})'$-be, $\boldsymbol{P}$-t $\boldsymbol{P}'$-be és $\boldsymbol{d}$-t $\boldsymbol{d}'$-be. Minthogy $\boldsymbol{\tau}$ határozza meg $\mathtt{T}^{\to}$-t és $\boldsymbol{P}$-t is, az általánosan kimondott első két feltétel egybe foglalható:

(I)-(II) $\boldsymbol{\tau}' \cdot (\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{x})$ minden $\boldsymbol{x} \in \mathbf{M}$ esetén.

A következőkben használni fogjuk az $\mathbf{E}' := \mathrm{Ker}\boldsymbol{\tau}'$ jelölést.

A fenti egyenlőség miatt $\boldsymbol{L}$ az $\mathbf{E}$-t $\mathbf{E}'$-re képezi, ezért az euklideszi szerkezetekre kirótt feltétel erre egyszerűsödik:

(III) $\boldsymbol{b}'(\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{q}, \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{p}) = (\mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z})\boldsymbol{b}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ minden $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p} \in \mathbf{E} := \mathrm{Ker}\boldsymbol{\tau}$ esetén.

Érdemes észrevenni, hogy ha a két téridőmodell izomorf, akkor létezik olyan $B : \mathtt{I} \to \mathtt{I}'$ affin bijekcó $\boldsymbol{B}$ fölött, hogy $\tau' \circ L = B \circ \tau$, azaz $B(x + \mathbf{E}) = L(x) + \mathbf{E}'$ minden x világpont esetén. Valóban, ez az egyenlőség maga a B definíciója; csak azt kell látnunk, hogy a definíció jó, azaz ha $x + \mathbf{E} = y + \mathbf{E}$, akkor $L(x) + \mathbf{E}' = L(y) + \mathbf{E}'$, azaz ha $x - y \in \mathbf{E}$, akkor $L(x) - L(y) = \boldsymbol{L}(x - y) \in \mathbf{E}'$, ami viszont teljesül az előbb mondottak szerint.

5.3.2. Nemrelativisztikus téridőmodellek izomorfak

Ezután egyszerűen megmutathatjuk:

> Bármely nemrelativisztikus téridőmodell izomorf az aritmetikaival, aminek egyenes következménye, hogy bármely két nemrelativisztikus téridőmodell izomorf egymással.

Tekintsünk ugyanis egy $(\mathtt{M}, \mathbb{I}, \mathbb{D}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{b})$ nemrelativisztikus téridőmodellt. Vegyünk

– egy $\mathrm{s} \in \mathbb{I}^+$ időegységet,
– egy $\mathrm{m} \in \mathbb{D}^+$ távolságegységet,
– egy o „kezdőpontot” $\mathtt{M}$-ben,
– egy $\boldsymbol{e}_0$ jövőszerű vektort, amelyre $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{e}_0 = \mathrm{s}$ teljesül,
– egy $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, m-re normált pozitívan irányított ortogonális bázist $\mathbf{E}$-ben (azaz $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k = \mathrm{m}^2 \delta_{ik}$ (Kronecker-delta) és $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ pozitívan irányított bázis $\mathbf{M}$-ben),

és legyen

$$L : \mathtt{M} \to \mathbb{R}^4, \qquad x \mapsto \{x - o \text{ koordinátái az } \boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \text{ bázisban}\},$$

$$\boldsymbol{B} : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, \qquad \boldsymbol{t} \mapsto \frac{\boldsymbol{t}}{\mathrm{s}},$$

$$\boldsymbol{Z} : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \qquad \boldsymbol{d} \mapsto \frac{\boldsymbol{d}}{\mathrm{m}}.$$

Könnyű ellenőrizni, hogy ezek valóban izomorfizmust létesítenek a két téridőmodell között. Ugyanis ha $\boldsymbol{x} = \sum_{i=0}^{3} \xi^i \boldsymbol{e}_i$, akkor $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{x} = \xi^0 \boldsymbol{e}_0$; ha $\boldsymbol{q} = \sum_{i=1}^{3} \xi^i \boldsymbol{e}_i$ és $\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{3} \eta^i \boldsymbol{e}_i$ az $\mathbf{E}$ elemei, akkor $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \left(\sum_{i=1}^{3} \xi^i \eta^i\right) \mathrm{m}^2$.

Az izomorfizmusról szóló eredményünk azt mondja, hogy minden nemrelativisztikus téridőmodellnek ugyanaz a fizikai tartalma, bármelyiket ugyanolyan joggal használhatjuk. Mégsem egészen mindegy, hogy melyiket. Gyakorlati szempontból, azaz konkrét feladatok megoldására, konkrét számításokra például igen jó az aritmetikai téridőmodell (egy alkalmas koordinátázáson keresztül, lásd később). Elméleti meggondolásokra azonban egy speciális modell kevésbé alkalmas, mert egy ilyennek lehetnek olyan többlet-tulajdonságai,

– amelyeknek semmi köze a modell struktúrájához, és ezek vigyázatlanul mégis a modell tulajdonságainak vélhetők,

– amelyek elfedik a modell struktúrájának lényeges vonásait.

A mondottak fényében újra hangsúlyozzuk: nem eleve rossz az aritmetikai téridőben (koordinátákban) dolgozni, hiszen minden nemrelativisztikus téridőmodell fizikai tartalma ugyanaz, általános meggondolásokra mégis jobb kerülni az aritmetikait, mert könnyen tévútra vezethetnek a speciális tulajdonságai, nevezetesen:

– a téridő pontjai és a téridővektorok egybeesnek,

– az időpontok és az időtartamok nem különülnek el, az időkiértékelés és az időmúlás egybeesik,

– a téridő pontjai mint időpontok és térpontok együttese jelenik meg,

– minden mértékegyenes a valós egyenes, vagyis a fizikai dimenziók nem különülnek el,

hogy csak a legalapvetőbbeket említsük. Ha azt akarjuk, hogy ne csússzunk el, állandóan ellenőrizni kell, van-e annak valódi (fizikai) értelme, amit a speciális keretek között mondunk, és ez egyrészt igencsak fáradságos, másrészt valami apróság könnyen elkerülheti a figyelmünket. Később a 6.9 alfejezetben meggyőző példát hozunk arra, hogyan csal tévútra a koordinátákban való gondolkodás.

5.3.3. Galilei- és Noether-transzformációk

Az $(\mathtt{M}, \mathbb{I}, \mathbb{D}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{b})$ téridőmodellben a **Galilei-transzformációk** olyan $\boldsymbol{L} : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ lineáris bijekciók, amelyekre

(I) $\boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{L} \cdot \mathbf{x}) = \pm \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{x}$ minden $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$ esetén,

(II) $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{q}, \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ minden $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p} \in \mathbf{E}$ esetén.

A **Noether-transzformációk** pedig a Galilei-transzformációk fölötti $L : \mathtt{M} \to \mathtt{M}$ affin bijekciók.

Azokat a Galilei- illetve Noether-transzformációk, amelyek irányítástartók és amelyekre (I)-ben a pozitív előjel szerepel, **valódi Galilei- illetve valódi Noether-transzformációknak** nevezzük. Az általános definíció szerint (lásd 2.8.3) ezek a nemrelativisztikus téridőmodell **(vektori) szimmetriái**.

Azokat a valódi Galilei-transzformációkat, melyeknek az $\mathbf{E}$-re való leszűkítése az identitás, **speciális Galilei-transzformációknak** szokás nevezni. Ha $\boldsymbol{L}$ speciális Galilei-transzformáció, akkor bármely $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{u}'$ abszolút sebesség esetén $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{u}' - \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{L} \cdot (\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u}$, ezért $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} =: \mathbf{v}_{\boldsymbol{L}}$. Következésképpen $\boldsymbol{L} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} + (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{v}_{\boldsymbol{L}}$ minden $\mathbf{x}$ vektorra, azaz

$$\boldsymbol{L} = \mathbf{1} + \mathbf{v}_{\boldsymbol{L}} \otimes \boldsymbol{\tau}. \tag{5.9}$$

5.4. Tehetetlenségi megfigyelő tere és térvektorai

5.4.1. Térvektorok reprezentációja

Emlékezzünk (lásd 2.5.3), hogy az $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelő tere az $\boldsymbol{u}$ vezette egyenesek $\mathtt{M}$-ben,

$$\mathtt{E}_{\boldsymbol{u}} := \mathtt{M} / \mathbb{I}\boldsymbol{u},$$

és térvektorai az $\boldsymbol{u}$ vezette egyenesek $\mathbf{M}$-ben, összességük $\mathbf{M}/\mathbb{I}\boldsymbol{u}$.

Az $\boldsymbol{u}$-térpontok $x + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$ alakúak, az $\boldsymbol{u}$-térvektorok $\boldsymbol{x} + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$ alakúak. $\mathtt{E}_{\boldsymbol{u}}$ affin tér $\mathbf{M}/\mathbb{I}\boldsymbol{u}$ fölött az

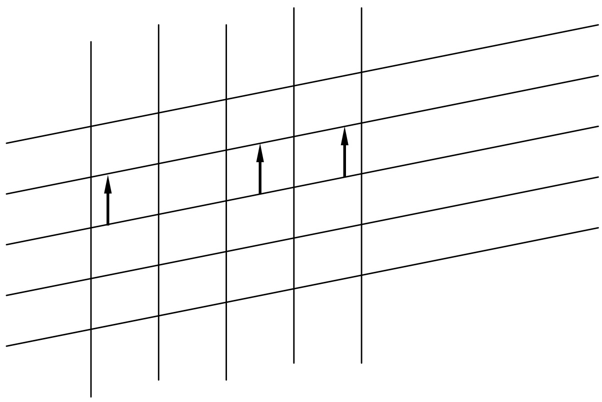
$$(x + \mathbb{I}\boldsymbol{u}) - (y + \mathbb{I}\boldsymbol{u}) = (x - y) + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$$

kivonással.

Az így meghatározott térvektorok nem szemléletesek és körülményesen kezelhetők. Azonban $\mathbf{E}$, az abszolút térszerű vektorok háromdimenziós altere transzverzális minden abszolút sebességre, és ez az egyetlen ilyen, így a segítségével bármely tehetetlenségi megfigyelő térvektorait természetszerűleg azonosíthatjuk az $\mathbf{E}$ elemeivel azáltal, hogy az $\mathbb{I}\boldsymbol{u}$ és $\mathbf{E}$ transzverzalitása miatt az

$$\mathbf{E} \to \mathbf{M}/\mathbb{I}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{q} \mapsto \boldsymbol{q} + \mathbb{I}\boldsymbol{u} \tag{5.10}$$

hozzárendelés lineáris bijekció.



5.5. ábra. Tehetetlenségi megfigyelő térvektorai

Vezessük be a

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \mathbf{x} := \mathbf{x} - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{x}) \tag{5.11}$$

jelölést. Nyilvánvaló, hogy

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} = \mathbf{1} - \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{\tau} : \mathbf{M} \to \mathbf{E}$$

lineáris ráképezés. Könnyű látni azt is, hogy

$$\mathbf{M}/\mathbb{I}\boldsymbol{u} \to \mathbf{E}, \quad \mathbf{x} + \mathbb{I}\boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \mathbf{x}$$

az 5.10 lineáris bijekció inverze.

Az említett azonosítás tehát

$$\mathbf{E} \equiv \mathbf{M}/\mathbb{I}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{q} \equiv \boldsymbol{q} + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$$

ugyanez másként,

$$\mathbf{M}/\mathbb{I}\boldsymbol{u} \equiv \mathbf{E}, \qquad \mathbf{x} + \mathbb{I}\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \mathbf{x}.$$

Az $\mathbf{E}$-t természetes módon láthatjuk el irányítással is: az $\mathbf{E}$-nek $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ rendezett bázisa legyen pozitív irányítású, ha $(t\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ az $\mathbf{M}$-nek pozitív irányítású bázisa az $\mathbb{I}$ valamely (egyben tetszőleges) pozitív $\boldsymbol{t}$ elemével. Könnyű meggyőződni arról, hogy ez a meghatározás jó, azaz ha $(\boldsymbol{tu}, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ is pozitív irányítású **M**-ben, akkor $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ és $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ azonos irányítású **E**-ben. Továbbá az is nyilvánvaló, hogy ez az irányítás megfelel a 2.5.4 pontban megadott irányításnak.

Az abszolút térszerű vektorok **E** összessége háromdimenziós euklideszi tér, amelyre vonatkozó ismeretek megtalálhatók a matematikai mellékletben.

Vezessük be a

$$\sigma_{\boldsymbol{u}}(x) := x + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$$

jelölést; $\sigma_{\boldsymbol{u}}(x)$ az x villanatot tartalmazó $\boldsymbol{u}$-térpont. A fenti azonosításnak megfelelően a kivonás az $\boldsymbol{u}$ terében:

$$\sigma_{\boldsymbol{u}}(x) - \sigma_{\boldsymbol{u}}(y) = (x + \mathbb{I}\boldsymbol{u}) - (y + \mathbb{I}\boldsymbol{u}) = (x - y) + \mathbb{I}\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot (x - y) \qquad (5.12)$$

lesz. Másképpen ugyanez: ha q és p a tehetetlenségi megfigyelő $\mathtt{E}_{\boldsymbol{u}}$ terének pontjai, akkor

$$q - p := \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot (x - y) \qquad (x \in q,\ y \in p),$$

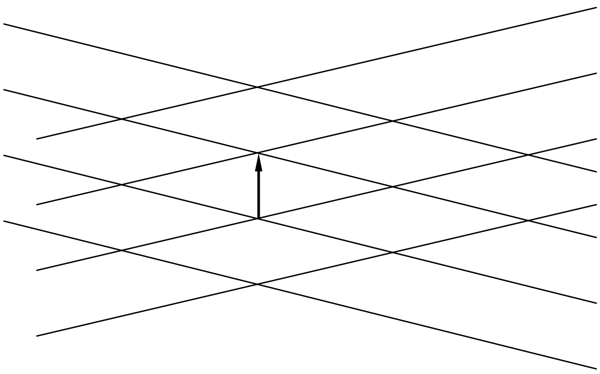
ami egyenértékű azzal, hogy

$$q - p = x - y \qquad (x \in q,\ y \in p,\ x - y \in \mathbf{E}).$$

Figyeljünk fel arra, hogy (5.12) szerint $\sigma_{\boldsymbol{u}} : \mathtt{M} \to \mathtt{E}_{\boldsymbol{u}},\ x \mapsto x + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$ affin leképezés a $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} : \mathbf{M} \to \mathbf{E}$ lineáris leképezés fölött.

Hangsúlyozzuk, hogy bármely tehetetlenségi megfigyelő térvektorait ugyanannak az **E** vektortérnek az elemeivel azonosítjuk. Ennek alapján azt is mondhatjuk:

Különböző tehetetlenségi megfigyelők terei **különböző** háromdimenziós affin terek **ugyanazon** vektortér fölött.



5.6. ábra. Különböző terek, azonos térvektorok

5.4.2. Áthúzások

Az előbb mondottak szerint matematikai szempontból „magától értetődő, természetes” dolog, mit jelent az, hogy egy tehetetlenségi megfigyelő terében egy vektor (egy egyenes) egyenlő (párhuzamos) egy hozzá képest mozgó megfigyelő terében egy vektorral (egyenessel).

Ennek megfelelően az $\boldsymbol{u}$-ról az $\boldsymbol{u}'$-re való **áthúzást** (lásd 2.6.2) a

$$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}', \qquad \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q} \quad (\boldsymbol{q} \in \mathbf{E})$$

formulával határozzuk meg. Jól láthatóan ez valódi Galilei-transzformáció (lásd 5.3.3), azaz vektori szimmetria, amint azt el is várjuk.

Egyszerű ellenőrizni, hogy tömör képletben

$$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} = \mathbf{1} + (\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u}) \otimes \boldsymbol{\tau}.$$

Ebből azonnal látszik, hogy

$$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'} = \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}^{-1}$$

és

$$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}'',\boldsymbol{u}'}\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}',\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}'',\boldsymbol{u}}.$$

A különböző terekben levő vektorok egyenlősége fizikailag úgy értelmezhető, hogy az egyik megfigyelő **pillanatszerű lenyomatot** készít a másik megfigyelő vektoráról, azaz megjelöli terében azokat a pontokat, amelyek egy adott pillanatban találkoznak a szóban forgó vektor (egyenes szakasz) pontjaival (lásd az 5.6 ábrát).

5.5. Relatív sebesség

Vegyünk egy $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelőt, és egy $\boldsymbol{u}'$ vezette egyenest, amely egy tehetetlen tömegpont világvonala. Ha $\boldsymbol{u}' \neq \boldsymbol{u}$, a megfigyelő úgy észleli, a tömegpont mozog hozzá képest. A tömegpontnak a megfigyelőhöz viszonyított sebességét következőképp határozhatjuk meg.

Jelölje $r(t)$ a tömegpont világvonalának a pontját a t pillanatban ($r(t)$ a tömegpont világvonalának és a t hipersíknak a metszéspontja); ekkor az s pillanatban a a világvonal pontja $r(s) = r(t) + (s-t)\boldsymbol{u}'$. A tömegpont a t pillanatban az $\boldsymbol{u}$ megfigyelő terének $\sigma_{\boldsymbol{u}}(r(t))$ pontjában van, az s pillanatban pedig a $\sigma_{\boldsymbol{u}}(r(s))$ $\boldsymbol{u}$-térpontban. Felhasználva az (5.12) és (5.6) képleteket, értelmezése szerint a relatív sebesség a t pillanatban

$$\lim_{s\to t} \frac{\sigma_{\boldsymbol{u}}(r(s)) - \sigma_{\boldsymbol{u}}(r(t))}{s-t} = \lim_{s\to t} \frac{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot ((s-t)\boldsymbol{u}')}{s-t} = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u}' = \; = \boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u}.$$

Az eredmény független az időtől: egy tehetetlen tömegpont állandó sebességgel mozog egy tehetetlenségi megfigyelőhöz képest. Az $\boldsymbol{u}'$ abszolút sebességnek az $\boldsymbol{u}$-ra vonatkozó **relatív sebessége** a

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} := \boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u} \in \frac{\mathbf{E}}{\mathbb{I}}$$

mennyiség: az $\boldsymbol{u}'$ és $\boldsymbol{u}$ abszolút sebességek különbsége.

5.6. Vektori széthasítások és transzformációs szabályok

5.6.1. Széthasítások

Minthogy $\mathbb{I}\boldsymbol{u}$ és $\mathbf{E}$ kiegészítő alterek, bármely téridő-vektor egyértelműen megadható ezen alterekben levő vektorok összegeként. Az $\mathbf{x}$ vektor esetén az (5.11) jelöléssel $\mathbf{x} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{x}) + \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \mathbf{x}$ ez a szóban forgó összeg. Más szóval azt mondjuk, hogy az $\mathbf{x}$ téridő-vektort az $\boldsymbol{u}$ megfigyelő **széthasítja** a $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{x}$ **időszerű komponensre** és a $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \mathbf{x}$ **$\boldsymbol{u}$-térszerű komponensre**. Maga a

$$\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}} := (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}) : \mathbf{M} \to \mathbb{I} \times \mathbf{E}, \qquad \mathbf{x} \mapsto (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \mathbf{x}) \tag{5.13}$$

lineáris bijekció a **téridő-vektorok széthasítása $\boldsymbol{u}$ szerint**.

Jegyezzük meg, hogy

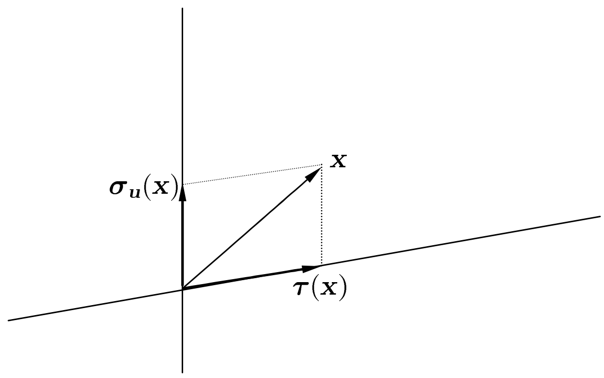
$$\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}}^{-1}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{t}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{q} \qquad ((\boldsymbol{t}, \boldsymbol{q}) \in \mathbb{I} \times \mathbf{E}).$$

Természetesen $\mathbf{M}$-nek mértékegyenessel való tenzorszorzatai és tenzorhányadosai, például $\frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}}$, $\frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}}$ is a fenti formulának megfelelően hasítódnak szét, alkalmazva azt a szabályunkat, hogy a mértékegyenesek elemeivel való szorzást és osztást kiemelhetjük lineáris leképezések elé. Például az $\boldsymbol{u}'$ abszolút sebesség időszerű komponense $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{u}' = 1$, $\boldsymbol{u}$-térszerű komponense

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u}. \tag{5.14}$$

Az 5.5 alfejezetben mondottak szerint tehát az $\boldsymbol{u}'$-nek az $\boldsymbol{u}$-ra vonatkozó relatív sebessége nem más, mint az $\boldsymbol{u}'$-nek az $\boldsymbol{u}$-térszerű komponense. Összefoglalva:

$$\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u}' = (1, \mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}).$$



5.7. ábra. Vektorok széthasítása

A vektorok széthasítása meghatározza a kovektorok széthasítását is az

$$\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{u}} := \left(\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}}^{-1}\right)^* : \mathbf{M}^* \to (\mathbb{I} \times \mathbf{E})^* = \mathbb{I}^* \times \mathbf{E}^*$$

formulával.

Mivel egy $\boldsymbol{k}$ kovektorra $(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{k}) \cdot (\boldsymbol{t}, \boldsymbol{q}) = \left(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}}^{-1}\right)(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{t} + \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{q}$, úgy önthetjük jól kezelhető formába ezt a széthasítást, hogy bevezetjük az $\boldsymbol{i} : \mathbf{E} \to \mathbf{M}$ beágyazó leképezést, azaz

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q} \qquad (\boldsymbol{q} \in \mathbf{E},\ \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{q} \in \mathbf{M})).$$

Ennek transzponáltja

$$\boldsymbol{i}^* : \mathbf{M}^* \to \mathbf{E}^*, \quad \boldsymbol{k} \mapsto \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{k}|_{\mathbf{E}},$$

ahol $|_{\mathbf{E}}$ az $\mathbf{E}$-re való leszűkítést jelöli.

A szokásnak megfelelően megfordíthatjuk $\boldsymbol{k}$ és $\boldsymbol{u}$ szerepét a dualitásban, vagyis felfoghatjuk $\boldsymbol{u}$-t, mint a duálison ható lineáris leképezést; azonban a matematikai mellékletben szereplő formuláktól eltérve a szerepcseréhen $\boldsymbol{u}$ helyett $\boldsymbol{u}^*$-ot írunk a későbbiek jobb áttekinthetősége érdekében. Így tehát a **téridő-kovektorok széthasítása** az $\boldsymbol{u}$ megfigyelő szerint a

$$\boldsymbol{k} \mapsto (\boldsymbol{u}^* \cdot \boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{k}) = (\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{u}, \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i})$$

lineáris bijekció. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i}$ a $\boldsymbol{k}$ kovektor **$\boldsymbol{u}$-időszerű komponense**, illetve **térszerű komponense**.

Tömör formában:

$$\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{i}^*).$$

A széthasítás inverze $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{u}}^{-1} = \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}}^* : \mathbb{I}^* \times \mathbf{E}^*$, amelyet a

$$\Big(\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}}^*(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{p})\Big) \cdot \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{p}) \cdot (\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{p}) \cdot \Big(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{x}\Big) =$$
$$= \boldsymbol{e} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{x})$$

képlet alapján így foglalhatunk össze:

$$\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{u}}^{-1}(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{\tau}^* \cdot \boldsymbol{e} + \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}^* \cdot \boldsymbol{p} \quad ((\boldsymbol{e}, \boldsymbol{p}) \in \mathbb{I}^* \times \mathbf{E}^*).$$

Jegyezzük meg: a **vektorok időszerű komponense abszolút**, azaz független a megfigyelőtől, míg a **kovektorok térszerű komponense abszolút**.

A vektorok térszerű komponense általában függ a megfigyelőtől, kivéve az abszolút térszerű vektorokat: a $\boldsymbol{q} \in \mathbf{E}$ vektor időszerű komponense nulla, $\boldsymbol{u}$-térszerű komponense pedig maga $\boldsymbol{q}$ minden $\boldsymbol{u}$ esetén. Ezt fordítva is megállapíthatjuk: ha az $\boldsymbol{x}$ vektor időszerű komponense nulla, azaz $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{x} = 0$,akkor $\boldsymbol{x}$ az $\mathbf{E}$ eleme.

A kovektorok időszerű komponense általában függ a megfigyelőtől, kivéve az abszolút időszerű kovektorokat, vagyis a $\boldsymbol{\tau}^*[\mathbb{I}^*]$ elmeit: a $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{\tau}^* \cdot \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\tau}$ kovektor $\boldsymbol{u}$-időszerű komponense $\boldsymbol{e}$ miden $\boldsymbol{u}$ esetén, térszerű komponense pedig nulla. Ezt fordítva is megállapíthatjuk: ha a $\boldsymbol{k}$ kovektor térszerű komponense nulla, azaz $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0$, akkor $\boldsymbol{k}$ abszolút időszerű, azaz létezik olyan $\boldsymbol{e} \in \mathbb{I}^*$, hogy $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{e}\boldsymbol{\tau}$.

A vektorok és kovektorok széthasítása egyelőre csak mint matematikai formula jelent meg, azonban látni fogjuk, hogy fizikai tartalommal is bír: egy megfigyelő nem magukat a vektorokat, hanem azok komponenseit „észleli” fizikailag. Azt már láttuk is például, hogy $\boldsymbol{u}'$-nek az $\boldsymbol{u}$-térszerű komponense az $\boldsymbol{u}'$-nek az $\boldsymbol{u}$-ra vonatkozó relatív sebessége.

5.6.2. Transzformációs szabályok

A különböző tehetetlenségi megfigyelők különbözőképpen hasítják szét a vektorokat. Pontosabban, az időszerű komponens mindig ugyanaz, a térszerű komponens viszont függ a megfigyelőtől. Ahhoz, hogy lássuk, mennyire különböznek egymástól a széthasítások, össze kell hasonlítani őket. Ezt a következőképp tehetjük meg. Legyen $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{q})$ és $(\boldsymbol{t}', \boldsymbol{q}')$ ugyanannak a vektornak széthasított alakja az $\boldsymbol{u}$ illetve az $\boldsymbol{u}'$ tehetetlenségi megfigyelő szerint. Ekkor

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{t}', \boldsymbol{q}') =&\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}'}\big(\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}}^{-1}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{q})\big) = \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}'}(\boldsymbol{t}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{q}) = \\ =&(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{q} - \boldsymbol{t}(\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u})).\end{aligned}$$

A $\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} := \boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u}$ relatív sebességgel a fenti formula nem más, mint a jól ismert

$$\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{t}, \qquad \boldsymbol{q}' = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{t}\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}$$

Galilei-transzformációs szabály, ezért a

$$\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} := \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}'} \cdot \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} & \mathbf{1} \end{pmatrix} : (\mathbb{I} \times \mathbf{E}) \to (\mathbb{I} \times \mathbf{E})$$

lineáris leképezést az $\boldsymbol{u}$-ról az $\boldsymbol{u}'$-re történő **Galilei-féle transzformációs szabálynak** hívjuk .

Ám még ez sem az igazán a szokásos alak, hiszen az koordinátákra vonatkozik, tehát $\mathbb{I}$ helyett $\mathbb{R}$, $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ helyett $\mathbb{R}^3$ szerepel, és ekkor a „két térbeli koordinátarendszer megfelelő tengelyei párhuzamosak".

A kovektorok transzformációs szabályát az

$$\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} := \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{u}'} \cdot \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{u}}^{-1} = (\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}'}^{-1})^* \cdot \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}}^* = (\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}^{-1})^* = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} : (\mathbb{I}^* \times \mathbf{E}^*) \to (\mathbb{I}^* \times \mathbf{E}^*)$$

lineáris leképezés adja meg.

Ha tehát $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{p})$ és $(\boldsymbol{e}', \boldsymbol{p}')$ ugyanannak a kovektornak az $\boldsymbol{u}$ illetve az $\boldsymbol{u}'$ megfigyelő szerint széthasított alakja, akkor

$$\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e} + \boldsymbol{p} \cdot \mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}, \qquad \boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p}.$$

Látjuk, hogy a kovektori transzformációs szabály merőben más, mint a vektori.

5.7. Tenzori széthasítások és transzformációs szabályok

5.7.1. Széthasítások

Egyes fizikai elméletekben – mint például az elektromágnességben – nem csak vektorok és kovektorok, hanem különféle tenzorok is megjelennek. Ezeknek az alapos ismeretéhez a matematikai melléklet nyújt segítséget.

Az $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelő széthasítja a különféle tenzorokat, azaz $\mathbf{M} \otimes \mathbf{M}$, $\mathbf{M} \otimes \mathbf{M}^*$, $\mathbf{M}^* \otimes \mathbf{M}$ és $\mathbf{M}^* \otimes \mathbf{M}^*$ elemeit is. Emlékeztetünk, hogy ezek a tenzorok rendre $\mathbf{M}^* \to \mathbf{M}$, $\mathbf{M} \to \mathbf{M}$, $\mathbf{M}^* \to \mathbf{M}^*$ és $\mathbf{M} \to \mathbf{M}^*$ lineáris leképezéseknek tekinthetők.

A $\boldsymbol{G} \in \mathbf{M} \otimes \mathbf{M}$ azaz $\boldsymbol{G} : \mathbf{M}^* \to \mathbf{M}$ széthasítottja a

$$\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}}^* : (\mathbb{I} \times \mathbf{E})^* \to (\mathbb{I} \times \mathbf{E})$$

tenzor. Mivel $\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}})$ és $\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}}^* = (\boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}^*)$, és $(\mathbb{I}\times\mathbf{E})^* = \mathbb{I}^* \times \mathbf{E}^*$, a széthasított tenzort mátrixformába írva a

$$\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}}^* = \;= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\tau}^* & \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}^* \\ \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\tau}^* & \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}^* \end{pmatrix},$$

eredményre jutunk, amelynek komponensei bővebben kifejtve

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}^* = \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{G} - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{\tau}^*), \quad \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{\tau}^* = \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{\tau}^* - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{\tau}^*),$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}^* = \boldsymbol{G} - \boldsymbol{u}\otimes(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{G}) - (\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{\tau}^*)\otimes\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{\tau}^*).$$

Hasonlóan kapjuk az $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{u}}^* = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{i})$ formula felhasználásával, hogy az $\boldsymbol{L} \in \mathbf{M}\otimes\mathbf{M}^*$ $\boldsymbol{u}$-széthasított alakja,

$$\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{u}}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{u}) & \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{i} - \boldsymbol{u}\otimes(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{i}) \end{pmatrix}.$$

A $\boldsymbol{P} \in \mathbf{M}^*\otimes\mathbf{M}$ $\boldsymbol{u}$-széthasított alakja

$$\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^*\cdot\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{\tau}^* & \boldsymbol{u}^*\cdot\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}^* \\ \boldsymbol{i}^*\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{\tau}^* & \boldsymbol{i}^*\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}^* \end{pmatrix}.$$

Az $\boldsymbol{F} \in \mathbf{M}^*\otimes\mathbf{M}^*$ $\boldsymbol{u}$-széthasított alakja

$$\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{u}}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^*\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{u}^*\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{i}^*\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{i}^*\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{i} \end{pmatrix}.$$

Az $\mathbf{M}\otimes\mathbf{M}$ és $\mathbf{M}^*\otimes\mathbf{M}^*$ elemei lehetnek antiszimmetrikusak, ami külön figyelmet érdemel.

Ha $\boldsymbol{G} \in \mathbf{M}\wedge\mathbf{M}$, azaz antiszimmetrikus, tehát $\boldsymbol{G} = -\boldsymbol{G}^*$, akkor $\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{G} = -\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{\tau}^*$ és $\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{\tau}^* = 0$, ezért az $\boldsymbol{u}$-széthasítottja

$$\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{G} \\ -\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{G} & \boldsymbol{G} - \boldsymbol{u}\wedge(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{G}) \end{pmatrix};$$

itt az „alsó" két komponense meghatározza a többit, ezért csak ezekre szoktunk hivatkozni

$$(\!(-\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G} - \boldsymbol{u}\wedge(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{G}))\!) \in (\mathbf{E}\otimes\mathbb{I})\times(\mathbf{E}\wedge\mathbf{E})$$

alakban. Az elsőt a $\boldsymbol{G}$ **időszerű komponensének** hívjuk – ez függetlenül $\boldsymbol{u}$-tól mindig ugyanaz –, a másodikat pedig az **$\boldsymbol{u}$-térszerű komponensének**.

Igen egyszerű látni, hogy ha $\boldsymbol{G}$-nek az $\boldsymbol{u}$-széthasított alakja $(\!(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{u}})\!)$, akkor

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{D}.$$

Hasonlóan, ha $\boldsymbol{F} \in \mathbf{M}^*\wedge\mathbf{M}^*$, azaz antiszimmetrikus, tehát $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F}^*$, akkor $\boldsymbol{u}^*\cdot\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{u}^*\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u} = 0$, így az $\boldsymbol{u}$-széthasítottja

$$\begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{i}^*\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{i}^*\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{i}^*\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{i} \end{pmatrix}.$$

Mint az előbb, most is csak a két „alsó" komponenst szokás tekinteni

$$(\!(\boldsymbol{i}^*\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}, \boldsymbol{i}^*\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{i})\!) \in (\mathbf{E}^*\otimes\mathbb{I}^*)\times(\mathbf{E}^*\wedge\mathbf{E}^*)$$

alakban. Az első az $\boldsymbol{F}$ **$\boldsymbol{u}$-időszerű komponense**, a második pedig a **térszerű komponense**, amely az $\boldsymbol{u}$-tól függetlenül mindig ugyanaz.

Itt sem nehéz meggyőződni arról, hogy ha $\boldsymbol{F}$-nek az $\boldsymbol{u}$-széthasított alakja $(\!(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{B})\!)$, akkor

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}^*\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{\tau}^*\wedge\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}^*\cdot\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}.$$

5.7.2. Transzformációs szabályok

A különböző tenzori széthasítások összehasonlításával kapjuk a tenzori transzformációs szabályokat. Most csak az antiszimmetrikus tenzorokra és kotenzorokra vonatkozó formulákkal foglalkozunk.

Ha $(\!(\boldsymbol{D},\boldsymbol{H})\!)$ és $(\!(\boldsymbol{D}',\boldsymbol{H}')\!)$ ugyanannak az antiszimmetrikus tenzornak az $\boldsymbol{u}$ illetve az $\boldsymbol{u}'$ szerinti széthasítottja, akkor $(\!(\boldsymbol{D}',\boldsymbol{H}')\!) = \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \cdot (\!(\boldsymbol{D},\boldsymbol{H})\!) \cdot \boldsymbol{h}^*_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}$; a mátrixalakot és az egyszerűségért a $\mathbf{v} := \mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}$ jelölést használva

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathbf{v} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{v} \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{D} & \mathbf{v}\wedge\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H} \end{pmatrix},$$

tehát

$$\boldsymbol{D}' = \boldsymbol{D}, \qquad \boldsymbol{H}' = \mathbf{v}\wedge\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}.$$

Ha $(\!(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})\!)$ és $(\!(\boldsymbol{E}',\boldsymbol{B}')\!)$ ugyanannak az antiszimmetrikus kotenzornak az $\boldsymbol{u}$ illetve az $\boldsymbol{u}'$ szerinti széthasítottja, akkor a mátrixalakot használva

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{v} \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{v} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\cdot\mathbf{v}) \\ \boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\cdot\mathbf{v} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix},$$

tehát

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\cdot\mathbf{v}, \qquad \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}.$$

5.8. Téridő széthasítások és transzformációs szabályok

5.8.1. Széthasítások

A 3.2 alfejezet szerint egyenletes szinkronizáció és tehetetlenségi megfigyelő együttese alkot egy tehetetlenségi rendszert. Minthogy jelen modellünkben **egyetlen szinkronizáció létezik**, egy tehetetlenségi megfigyelő egyértelműen meghatároz egy tehetetlenségi rendszert; ezért elhagyhatjuk a szinkronizációra való utalást, vagyis **tehetetlenségi rendszer helyett is tehetetlenségi megfigyelőt mondunk**.

Tehát egy $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelő a világpontokat azzal jellemzi, mikor és hol történnek (történtek), a korábbi elnevezésünk szerint **széthasítja** a téridőt időre és térre; közelebbről, egy x téridő-ponthoz hozzárendeli annak $\tau(x) = x+\mathbf{E}$ abszolút idejét, és a $\sigma_{\boldsymbol{u}}(x) = x + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$ $\boldsymbol{u}$-térpontot:

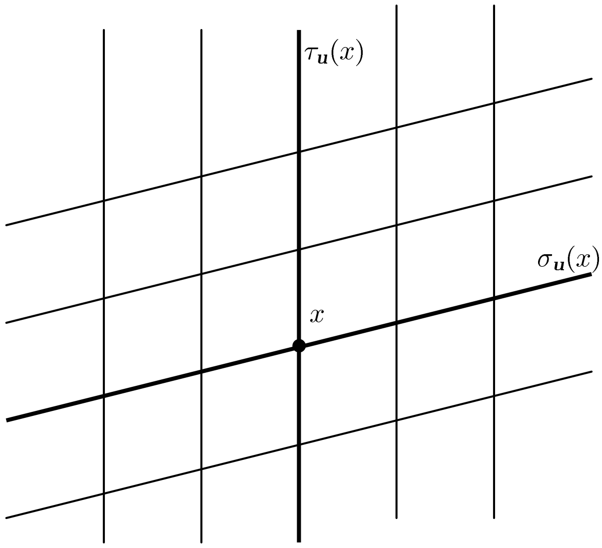
$$h_{\boldsymbol{u}} : \mathtt{M} \to \mathtt{I}\times\mathtt{E}_{\boldsymbol{u}}, \qquad x \mapsto \big(\tau(x), \sigma_{\boldsymbol{u}}(x)\big).$$

Ez az (5.6), (5.12) és (5.13) képletek alapján affin bijekció a $\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}}$ vektori széthasítás fölött. E széthasítás inverze – amely megmondja, mely világpont felel meg egy időpontnak és egy $\boldsymbol{u}$-térpontnak –

$$h_{\boldsymbol{u}}^{-1} : \mathtt{I}\times\mathtt{E}_{\boldsymbol{u}} \to \mathtt{M}, \qquad (t,q) \mapsto t\cap q.$$

Minthogy az affin terek helyett sokszor célszerűbb az alulfekvő vektorterekkel dolgozni, a megfigyelő – a mindennapi gyakorlatnak megfelelően, amikor az időpontokat valamely időponttól eltelt időtartammal, a térpontokat valamely origóból odahúzott vektorral jellemezzük – választva egy t_o „idő-kezdőpontot” és egy q_o „$\boldsymbol{u}$-tér-kezdőpontot”, vektorizálja az időt és a terét az

$$\mathtt{I}\times\mathtt{E}_{\boldsymbol{u}} \to \mathbb{I}\times\mathbf{E}, \qquad (t,q) \mapsto (t-t_o, q-q_o)$$



5.8. ábra. A téridő széthasítása

képlettel.

t_o és q_o választása egyenértékű egy o „kezdő-világpont” választásával: $o = t_o \cap q_o$, $t_o = \tau(o) = o + \mathbf{E}$, $q_o = \sigma_{\boldsymbol{u}}(o) = o + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$, és a mondottak alapján igen egyszerű tény, hogy a téridő $\boldsymbol{u}$-széthasítása majd az idő és $\boldsymbol{u}$-tér vektorizálása együtt a

$$h_{\boldsymbol{u},o} : \mathtt{M} \to \mathbb{I} \times \mathbf{E}, \qquad x \mapsto \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}} \cdot (x - o) = \big(\boldsymbol{\tau} \cdot (x - o), \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot (x - o)\big) \tag{5.15}$$

hozzárendelést adja, amelynek neve a téridőnek o és $\boldsymbol{u}$ szerinti **vektorizált széthasítása**. Ennek inverze

$$\mathbb{I} \times \mathbf{E} \to \mathtt{M}, \qquad (\boldsymbol{t}, \boldsymbol{q}) \mapsto o + \boldsymbol{t}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{q}.$$

5.8.2. Transzformációs szabályok

A téridő-széthasítások közötti transzformációs szabályt $h_{\boldsymbol{u}'} \circ h_{\boldsymbol{u}}^{-1} : I \times \mathtt{E}_{\boldsymbol{u}} \to I \times \mathtt{E}_{\boldsymbol{u}'}$ adná meg. Az a baj ezzel, hogy az indulási halmaza (értelmezési tartománya) és az érkezési halmaza (értékkészlete) két különböző halmaz, így nem kézzel fogható, mi a különbség az indulási és érkezési értékek között. Ezért célszerűen a vektorizált széthasításokat hasonlítjuk össze, hiszen azok értékkészlete mindig $\mathbb{I} \times \mathbf{E}$.

Legyen $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{q})$ és $(\boldsymbol{t}', \boldsymbol{q}')$ ugyanannak a téridőpontnak a vektorizált széthasított alakja az $(\boldsymbol{u}, o)$ illetve az $(\boldsymbol{u}', o')$ szerint. Ekkor

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{t}', \boldsymbol{q}') =& h_{\boldsymbol{u}',o'}\big(h_{\boldsymbol{u},o}^{-1}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{q})\big) = \\ =& h_{\boldsymbol{u}',o'}(o + \boldsymbol{t}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{q}) = \big(\boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{t}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{q} + o - o'),\ \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}'} \cdot (o - o' + \boldsymbol{t}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{q})\big) = \\ =& \big(\boldsymbol{t} + \boldsymbol{\tau} \cdot (o - o'), \boldsymbol{q} - \boldsymbol{t}\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}'} \cdot (o - o')\big),\end{aligned}$$

vagyis a $\boldsymbol{t}_0 := \boldsymbol{\tau} \cdot (o - o')$ és $\boldsymbol{q}_0 = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}'} \cdot (o - o')$ jelöléssel

$$\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{t} + \boldsymbol{t}_0, \qquad \boldsymbol{q}' = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{t}\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{q}_0,$$

ami a jól ismert úgynevezett **inhomogén Galilei-transzformációs szabály**.

Ez átmegy a (vektori) Galilei transzformációs szabályba, ha a két megfigyelő ugyanazt a téridő-kezdőpontot választja ($o = o'$), ami megfelel annak, hogy a két megfigyelő ugyanazt a pillanatot választja idő-kezdőpontnak ($t_o = t'_o$) és a kezdő pillanatban a térbeli origójuk egybeesik ($t_o \cap q_o = t_o \cap q'_o$).

Jól jegyezzük meg:

– az inhomogén Galilei-transzformációs szabály affin leképezés, és az affin téridő különféle széthasításainak összehasonlítására szolgál,

– a Galilei-transzformációs szabály lineáris leképzés, és téridő-vektorok széthasításainak összehasonlítására szolgál.

5.9. Transzformációk és transzformációs szabályok

Tekintsük a $\boldsymbol{L} = \mathbf{1} + \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{\tau}$ speciális Galilei-transzformációnak (lásd (5.9)) az $\boldsymbol{u}$ szerinti $\boldsymbol{h_u} \cdot \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{h_u}^{-1}$ széthasítottját (lásd 5.7.1). $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ és $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{i} = \mathbf{1}$ (az $\mathbf{E}$ identitása), így $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{L u} = 1$ és $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{i} = 0$; ezért a széthasítottat mátrixalakban írva (hiszen $\boldsymbol{L} \in \mathbf{M} \otimes \mathbf{M}^*$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{v} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

adódik. Az $\boldsymbol{u}' := \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ jelöléssel $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_{u'u}} = -\boldsymbol{v_{uu'}}$, tehát az eredmény az $\boldsymbol{u}'$-ről az $\boldsymbol{u}$-ra való Galilei-transzformációs szabály (lásd 5.6.2). Minthogy $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{B_{u'u}}$, megállapíthatjuk, hogy

$$\boldsymbol{h_{uu'}} = \boldsymbol{h_u} \cdot \boldsymbol{B_{u'u}} \cdot \boldsymbol{h_u}^{-1},$$

vagyis az $\boldsymbol{u}'$-ről az $\boldsymbol{u}$-ra vonatkozó vektori transzformációs szabály éppen az $\boldsymbol{u}$-ról az $\boldsymbol{u}'$-re való áthúzásnak az $\boldsymbol{u}$-széthasított alakja.

Noha a mondottak alapján bizonyos kapcsolat van a speciális Galilei-transzformációk (áthúzások) és a Galilei-transzformációs szabályok között, mind fogalmilag, mind matematikailag lényegesen különböznek egymástól. A **transzformációk** a téridő struktúráját tükröző $\mathbf{M} \to \mathbf{M}$ leképezések (szimmetriák), míg a **transzformációs szabályok** a megfigyelők szerinti széthasításokat összehasonlító $\mathbb{I} \times \mathbf{E} \to \mathbb{I} \times \mathbf{E}$ leképezések.

Hasonló mondható a speciális Noether-transzformációk (amelyek alatti lineáris leképezés speciális Galilei-transzformcáió) vektorizált széthasításaira.

A szokásos koordinátás tárgyalásban a transzformációs szabályok és a téridő-szimmetriák összemosódnak, mert mind az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ ugyanolyan transzformációi. Ez néha fogalmi zavarhoz vezet; például amikor azt mondják, az a téridő szimmetriája, hogy a tehetetlenségi megfigyelők fizikailag ekvivalensek, és fizikai rendszerek szimmetriáit azzal próbálják magyarázni, hogy egy megfigyelőről áttérve egy másikra mi hogyan transzformálódik [2].

[2]Szép példáját találjuk ennek a zavarnak a következő könyvben: L. D. Landau– E. M. Lifsic: *Elméleti mechanika* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1984). Egyrészt a 16. oldalon a szabad tömegpont Lagrange-függvényének alakjára vonatkozóan (homályosan ugyan, de) a tér és idő homogenitására utal (helyesen, amit később a 28. oldalon pontosan is megfogalmaz: egy zárt rendszer tulajdonságai nem változnak meg, ha a rendszert mint egységes egészet önmagával párhuzamosan eltoljuk a téridőben). Másrészt a 17. oldalon arra utal (helytelenül), hogy lényegében semmi sem változik, ha átülünk egy másik, az előzőhöz képest mozgó koordinátarendszerre, és onnan nézzük a tömegpontot (ahelyett, hogy itt is azt mondaná, a zárt rendszer tulajdonságai nem változnak meg, ha a rendszert mint egységes egészet korábbi önmagához képest egyenletes sebességgel mozgatjuk).

Az irodalomban néha található utalás arra, hogy két különböző dolog jelenik meg ugyanabban a formában, amikor is aktív és passzív transzformációkról beszélnek, az előbbin a téridőszimmetriákat értve, az utóbbin a transzformációs szabályokat.

5.10. Koordinátázások

Az időtartamokat úgy szokás számokkal jellemezni, hogy egy választott s időegység (szekundum) számszorosaiként adjuk meg őket; formulában, $\mathrm{s} \in \mathbb{I}^+$ és az időtartamok koordinátázása

$$\mathbb{I} \to \mathbb{R}, \qquad \boldsymbol{t} \mapsto \frac{\boldsymbol{t}}{\mathrm{s}}.$$

A térvektorokat egy választott m távolságegységgel (méter), három „jobb sodrású", egymásra merőleges, m hosszúságú térvektor alkotta bázisra vonatkozó koordinátákkal (számhármasokkal) szokás jellemezni. Formulában, $\mathrm{m} \in \mathbb{D}^+$, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ az $\mathbf{E}$-nek egy pozitívan irányított, m-re normált ortogonális bázisa, és vesszük a vektoroknak az erre vonatkozó koordinátáit:

$$\mathbf{E} \to \mathbb{R}^3, \qquad \boldsymbol{q} \mapsto \left(\frac{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{q}}{\mathrm{m}^2}, \frac{\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{q}}{\mathrm{m}^2}, \frac{\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{q}}{\mathrm{m}^2} \right).$$

Az $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelő úgy koordinátázza a téridővektorokat, hogy

– széthasítja $\mathbf{M}$-et az 5.6.1-ben mondottak szerint $\mathbb{I} \times \mathbf{E}$-re,
– $\mathbb{I}$-t koordinátázza s-sel,
– $\mathbf{E}$-et koordinátázza $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$-mal.

Más szóval, bevezetve az $\boldsymbol{e}_0 := \mathrm{s}\boldsymbol{u}$ jelölést, a téridővektorok koordinátázása az

$$\mathbf{M} \to \mathbb{R}^4, \qquad \mathbf{x} \mapsto \{\mathbf{x} \text{ koordinátái az } \boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \text{ bázisban }\},$$

lineáris bijekció.

Tehát ha $(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ az $\mathbf{x}$ vektor koordinátái, akkor $\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{3} \xi^i \boldsymbol{e}_i$, és könyen adódik, hogy

$$\xi^0 = \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{x}}{\mathrm{s}}, \qquad \xi^i = \frac{\boldsymbol{e}_i \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \mathbf{x})}{\mathrm{m}^2}, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Jegyezzük meg, hogy a szokásnak megfelelően, egy vektor koordinátáit felső indexszel jelöljük.

A téridő koordinátázásához a tehetetlenségi megfigyelő még választ egy o **kezdőpontot** is $\mathtt{M}$-ben, ennek segítségével vektorizálja téridőt, majd alkalmazza az előbb leírt koordinátázást, ami végül ezt adja:

$$\mathtt{M} \to \mathbb{R}^4, \qquad x \mapsto \{x - o \text{ koordinátái az } \boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \text{ bázisban }\}.$$

A mondottaknak megfelelően egy **tehetetlenségi koordinátarendszer**

$$(\mathrm{s}, \mathrm{m}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, o),$$

ahol s időegység, m távolságegység, $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelő, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ az m-re normált pozitívan irányított ortogonális bázis $\mathbf{E}$-ben és o világpont.

Visszalapozva a 5.10 ponthoz, megállapíthatjuk, hogy a téridőnek megfigyelő általi koordinátázása valójában az aritmetikai téridőmodellre való áttérést jelenti. Azt is láthatjuk, hogy mennyi esetleges és önkényes objektum van elrejtve az aritmetikai téridőmodellben: egy időegység, egy távolságegység, egy megfigyelő, egy ortogonális térbázis és egy téridő-kezdőpont.

A koordinátarendszer nemcsak a téridővektorokat, hanem a kovektorokat és a különféle tenzorokat is megfelelően koordinátákkal jeleníti meg. Például a $\boldsymbol{k}$ kovektor kordinátái

$$(\chi_i := \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{e}_i \mid i = 0, 1, 2, 3).$$

Felhívjuk a figyelmet, hogy a kovektorok is számnégyesként jelennek meg koordinátákban, és a szokásnak megfelelően, hogy a kovektorok számnégyeseit megkülönböztessük a vektorok számnégyeseitől, a kovektorok koordinátáit alsó indexszel jelöljük.

Egy $\boldsymbol{G} \in \mathbf{M} \otimes \mathbf{M}$ tenzor koordinátái $(i, k = 1, 2, 3)$:

$$G^{00} := \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\tau}^*}{\mathrm{s}^2}, \quad G^{0k} = \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}^* \cdot \boldsymbol{e}_k}{\mathrm{sm}}, \quad G^{k0} = \frac{\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\tau}^*}{\mathrm{sm}},$$

$$G^{ik} = \frac{\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}^* \cdot \boldsymbol{e}_k}{\mathrm{m}^2}$$

Egy $\boldsymbol{F} \in \mathbf{M}^* \otimes \mathbf{M}^*$ kotenzor koordinátái $(i, k = 0, 1, 2, 3)$:

$$F_{ik} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_k.$$

5.11. Deriváltak

Tekintsünk egy $f : \mathtt{M} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényt. Mint ismeretes (lásd a matematikai mellékletet), egy x pontban a deriváltja $\mathcal{D}f(x) : \mathbf{M} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, vagyis az $\mathbf{M}^*$ eleme. Ezt a kovektort az $\boldsymbol{u}$ megfigyelő széthasítja a

$$(\mathcal{D}f(x)) \cdot \boldsymbol{u} =: \mathcal{D}_{\boldsymbol{u}} f(x),$$

$\boldsymbol{u}$-időszerű komponensre és

$$(\mathcal{D}f(x))|_{\mathbf{E}} =: \nabla f(x)$$

térszerű komponensre, amelyeknek közvetlen értelem is adható a következőképp.

Szűkítsük le f-et az x-en áthaladó $\boldsymbol{u}$-vezette egyenesre, azaz tekintsük az $\mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{t} \mapsto f(x + \boldsymbol{t}\boldsymbol{u})$ függvényt. Ennek a deriváltja a nulla értéknél – kompozíciók deriválásának szabálya szerint – $(\mathcal{D}f(x)) \cdot \boldsymbol{u}$.

Szűkítsük le f-et az x-en áthaladó $\mathbf{E}$-vezette hipersíkra, azaz tekintsük az $\mathbf{E} \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{q} \mapsto f(x+\boldsymbol{q})$ függvényt. Ennek a deriváltja a nullában – a kompozíciók deriválásának szabálya szerint – $(\mathcal{D}f(x))|_{\mathbf{E}}$.

Ezeknek megfelelően $\mathcal{D}_{\boldsymbol{u}}f$-et az f **$\boldsymbol{u}$-időszerű deriváltjának**, ∇f-et pedig az f **térszerű deriváltjának** hívjuk.

Ha a téridőt a szokásosan koordinátázzuk (lásd 5.10), akkor a függvényt $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3) \mapsto \hat{f}(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3) := f(o + \sum_{k=0}^{3} \xi^k \boldsymbol{e}_k)$ formában adjuk meg, és ekkor $\partial_k \hat{f}(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3) = \mathcal{D}f(o + \sum_{k=0}^{3} \xi^k \boldsymbol{e}_k) \cdot \boldsymbol{e}_k$, vagyis a parciális deriváltak a $\mathcal{D}f$ koordinátái. A szokásnak megfelelően, az egyszerűség kedvéért egy kis pongyolasággal elhagyjuk a „kalapot” és azt írjuk, hogy

$$\mathcal{D}f \quad \text{koordinátái} \quad \partial_k f \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Világos, hogy a nulladik parciális derivált az $\boldsymbol{u}$-időszerű derivált koordinátázott alakja (ahol persze $\boldsymbol{u} = s\boldsymbol{e}_0$), a többi parciális derivált pedig a térszerű derivált koordinátázott alakja.

A $\mathcal{D}$ differenciálás általában – tehát nem csak skalár értékű függvényekre – szimbolikus kovektorként fogható fel, amelynek $\boldsymbol{u}$-széthasított alakja $(\mathcal{D}_{\boldsymbol{u}}, \nabla) := (\boldsymbol{u}^* \cdot \mathcal{D}, \boldsymbol{i}^* \cdot \mathcal{D})$.

Például egy $\boldsymbol{J} : \mathtt{M} \to \mathbf{M}$ vektormező $\mathcal{D}\boldsymbol{J}$ deriváltjának az értékei az $\mathbf{M} \otimes \mathbf{M}^*$ elemei. A matematikai mellékletben mondottak szerint célszerűen a derivált helyett a transzponáltját fogjuk használni, amelyet $\mathcal{D} \otimes \boldsymbol{J}$ alakba írunk; ennek értékei az $\mathbf{M}^* \otimes \mathbf{M}$ elemei. Széthasított formája

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{J}) & \mathcal{D}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{J}) \\ \nabla(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{J}) & \nabla \otimes (\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{J}) \end{pmatrix},$$

koordinátákban $\partial_i J^k$ $(i, k = 0, 1, 2, 3)$.

$(\mathcal{D} \otimes \boldsymbol{J})(x)$-nek vehetjük a nyomát (lásd a matematikai mellékletet), így értelmezzük a $\boldsymbol{J}$ **divergenciáját**:

$$(\mathcal{D} \cdot \boldsymbol{J})(x) := \mathrm{Tr}(\mathcal{D} \otimes \boldsymbol{J}(x)),$$

széthasítással

$$\mathcal{D} \cdot \boldsymbol{J} = \mathcal{D}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{J}) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{J}),$$

ami koordinátákban $\sum_{k=0}^{3} \partial_k J^k$.

A jobb áttekinthetőség kedvéért vezessük be a $\sim$ jelet, amellyel arra utalunk, milyen a szóban forgó derivált széthasított, illetve koordinátázott alakja. A koordinátaindexek mindig a $0, 1, 2, 3$ értéken futnak végig, és egy formulában az azonos alsó-felső indexre összegezni kell 0-tól 3-ig. Tehát ha

$$\boldsymbol{J} \quad \sim \quad (\rho, \boldsymbol{j}_{\boldsymbol{u}}) \quad \sim \quad J^k,$$

akkor

$$\mathcal{D} \cdot \boldsymbol{J} \quad \sim \quad \mathcal{D}_{\boldsymbol{u}}\rho + \nabla \cdot \boldsymbol{j}_{\boldsymbol{u}} \quad \sim \quad \partial_k J^k.$$

Egy $\boldsymbol{K} : \mathtt{M} \to \mathbf{M}^*$ kovektormezőre $\mathcal{D} \otimes \boldsymbol{K}$ értékei az $\mathbf{M}^* \otimes \mathbf{M}^*$ elemei, széthasítva

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}^* \cdot \boldsymbol{K}) & \mathcal{D}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{K}) \\ \nabla(\boldsymbol{u}^* \cdot \boldsymbol{K}) & \nabla \otimes (\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{K}) \end{pmatrix},$$

koordinátákban $\partial_i K_k$ $(i, k = 0, 1, 2, 3)$.

$(\mathcal{D} \otimes \boldsymbol{K})(x)$-nek vehetjük az antiszimmetrikus részét, így értelmezzük a K **külső deriváltját**:

$$\mathcal{D} \wedge \boldsymbol{K} := \mathcal{D} \otimes \boldsymbol{K} - (\mathcal{D} \otimes \boldsymbol{K})^*,$$

ami széthasítva

$$(\!(\nabla(\boldsymbol{u}^* \cdot \boldsymbol{K}) - \mathcal{D}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{K}), \nabla \wedge (\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{K}))\!),$$

koordinátákban pedig $\partial_k K_i - \partial_i K_k$.

Az előbbi áttekintéssel: ha

$$\boldsymbol{K} \quad \sim \quad (-V_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{A}) \quad \sim \quad K_k,$$

akkor

$$\mathcal{D} \wedge \boldsymbol{K} \quad \sim \quad (\!(-\nabla V_{\boldsymbol{u}} - \mathcal{D}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{A}, \nabla \wedge \boldsymbol{A})\!) \quad \sim \quad \partial_i K_k - \partial_k K_i.$$

Jegyezzük meg jól:
– **vektormezőnek van divergenciája, nincs külső deriváltja,**
– **kovektormezőnek van külső deriváltja, nincs divergenciája.**

Teljesen hasonlóan, egy $\boldsymbol{G} : \mathtt{M} \to \mathbf{M} \wedge \mathbf{M}$ antiszimmetrikus tenzormezőnek van divergenciája, amelynek az értékei $\mathbf{M}$-ben vannak; ha

$$\boldsymbol{G} \quad \sim \quad ((\boldsymbol{D}, \boldsymbol{H_u})) \quad \sim \quad G^{ik},$$

akkor

$$\mathcal{D} \cdot \boldsymbol{G} \quad \sim \quad (\nabla \cdot \boldsymbol{D}, -\mathcal{D}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{D} + \nabla \cdot \boldsymbol{H_u}) \quad \sim \quad \partial_i G^{ik}. \tag{5.16}$$

Egy $\boldsymbol{F} : \mathtt{M} \to \mathbf{M}^* \wedge \mathbf{M}^*$ antiszimmetrikus kotenzormezőnek van $\mathcal{D} \wedge \boldsymbol{F}$ külső deriváltja, amelynek az értékei $\mathbf{M}^* \wedge \mathbf{M}^* \wedge \mathbf{M}^*$-ban vannak; ha

$$\boldsymbol{F} \quad \sim \quad ((\boldsymbol{E_u}, \boldsymbol{B})) \quad \sim \quad F_{ik},$$

akkor

$$\mathcal{D} \wedge \boldsymbol{F} \quad \sim \quad (((\nabla \wedge \boldsymbol{E} + \mathcal{D}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{B}, \nabla \wedge \boldsymbol{B}))) \quad \sim \quad \partial_j F_{ik} + \partial_k F_{ji} + \partial_i F_{kj}, \tag{5.17}$$

ahol a ((( ))) zárójel azt jelenti, hogy a benne foglalt két mennyiség már meghatározza az egész harmadrendű antiszimmetrikus tenzort.

6. A pontmechanika alapjai a téridőmodellben

Ebben a fejezetben a fizika alapvető és legegyszerűbb elméletének a fogalmait és összefüggéseit tárgyaljuk a nemrelativisztikus téridőmodellben. A klasszikus mechanika jól ismert és jól kidolgozott elmélet a szokásos (megfigyelőhöz viszonyított, illetve koordinátás) keretek között. Ezért kitűnő lehetőséget nyújt, hogy általa jobban megértsük és elmélyítsük a téridőmodellről szerzett tudásunkat.

6.1. Világvonal-függvények

6.1.1. Alaptulajdonságok

Egy anyagi pont történelme világvonal a téridőben. Egy ilyen világvonalat – görbét – természetes módon paraméterezhetünk az abszolút idővel.

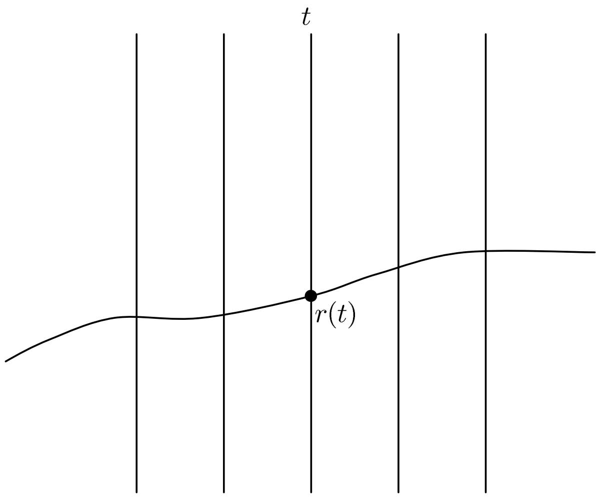
A $\mathtt{C}$ világvonalat úgy paraméterezzük, hogy a t pillanathoz hozzárendeljük a $t \cap \mathtt{C}$ világpontot (ne feledjük, t egy háromdimenziós hipersík a téridőben). Így jutunk el a **világvonal-függvény** fogalmához: ez olyan (elég sokszor differenciálható) leképezés, amely bármely t abszolút időponthoz olyan világpontot rendel, amelynek abszolút időpontja t:

$$r : \mathtt{I} \to \mathtt{M}, \qquad \tau(r(t)) = t.$$

Egyszerű tény, hogy egy világvonalfüggény és az értékkészlete – egy világvonal – egyértelműen meghatározzák egymást.

Az ilyen függvény $\dot{r}(t) \in \frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}}$ deriváltjára nyilvánvalóan

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{r}(t) = 1$$



6.1. ábra. Világvonal-függvény

áll fenn, vagyis $\dot{r}(t)$ abszolút sebesség. Ebből azonnal adódik az $\ddot{r}(t) \in \frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}}$ abszolút gyorsulásra, hogy abszolút térszerű:

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \ddot{r}(t) = 0,$$

vagyis

$$\ddot{r}(t) \in \frac{\mathbf{E}}{\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}}.$$

Nyilvánvaló, hogy $\frac{\mathbf{E}}{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}}$ minden eleme előáll valamely világvonal-függvény gyorsulásaként (például $\boldsymbol{a}$ a $t \mapsto o + (t - \tau(o))\boldsymbol{u} + \frac{(t-\tau(o))^2\boldsymbol{a}}{2}$ világvonal-függvényé), tehát az **abszolút gyorsulások** össszessége háromdimenziós euklideszi tér. Ellentétben az abszolút sebességekkel,

- van nulla abszolút gyorsulás,
- értelmes az abszolút gyorsulás nagysága,
- értelmes két abszolút gyorsulás bezárta szög.

6.2. Mozgások

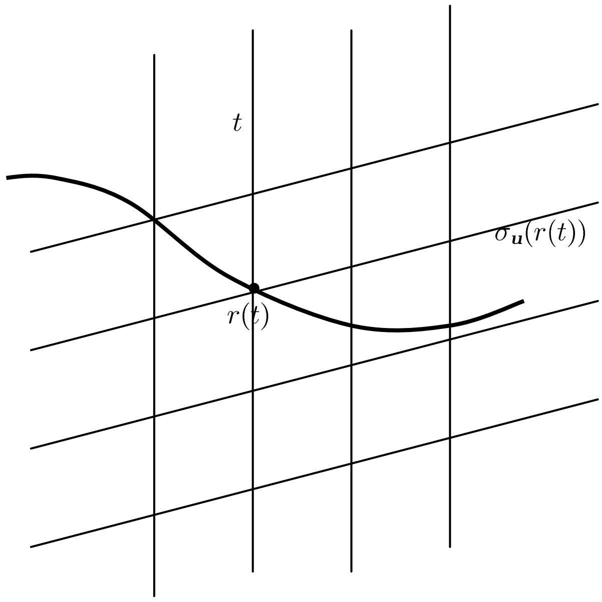
Általában mozgásokat egy megfigyelő csak úgy tud leírni, ha választ egy szinkronizációt, hiszen a mozgást az jellemzi, *mikor hol* van a szóban forgó test. Mozgás tehát csak vonatkoztatási rendszerhez képest értelmes. A nemrelativisztikus téridőmodellben azonban egyetlen szinkronizáció létezik, így egy megfigyelő egyértelműen meghatároz egy vonatkoztatási rendszert. Ezért a továbbiakban tehetetlenségi rendszer (tehetetlen megfigyelő és egyenletes szinkronizáció együttese) helyett is tehetetlenségi megfigyelőt mondunk.

6.2.1. Relatív sebességek

Egy $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelő – azaz tehetetlenségi rendszer – egy anyagi pontot (egy világvonalat) megfigyelve „mozgást észlel”, amelyet úgy ír le, hogy egy t

abszolút pillanathoz ($\mathbf{E}$ vezette hipersíkhoz) azt az $\boldsymbol{u}$-térpontot ($\boldsymbol{u}$ vezette egyenest) rendeli, amelyik a t pillanatban találkozik az anyagi ponttal (világvonallal). Az r világvonal-függvénynek megfelelő $\boldsymbol{u}$-mozgás tehát

$$\mathtt{I} \to \mathtt{E}_{\boldsymbol{u}}, \quad t \mapsto r_{\boldsymbol{u}}(t) := \sigma_{\boldsymbol{u}}(r(t)) = r(t) + \mathbb{I}\boldsymbol{u}.$$



6.2. ábra. Mozgás leírása

Az anyagi pont $\boldsymbol{u}$-ra vonatkozó relatív sebessége az $\boldsymbol{u}$-mozgás időderiváltja; az (5.12) formula alpján,

$$\dot{r}_{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \dot{r}(t) = \dot{r}(t) - \boldsymbol{u}. \tag{6.18}$$

Ez általánosságban is igazolja a tehetetlen mozgásokra az 5.5 alfejezetben kapott eredményünket, amely szerint az $\boldsymbol{u}'$ abszolút sebességnek az $\boldsymbol{u}$-ra vonatkozó **relatív sebessége** a

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} := \boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u} \in \frac{\mathbf{E}}{\mathbb{I}}$$

mennyiség.

Bármely abszolút sebességnek bármely másik abszolút sebességre vonatkozó relatív sebessége ugyanabban a háromdimenziós euklideszi vektortérben van. Tehát ellentétben az abszolút sebességgel,

– van nulla relatív sebesség,
– értelmes a relatív sebesség nagysága,
– értelmes két relatív sebesség bezárta szög.

A definícióból látszik a relatív sebességek **reciprocitása**,

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'} = -\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}},$$

és **tranzitivitása** (összeadódása),

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}''\boldsymbol{u}'} + \mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} = \mathbf{v}_{\boldsymbol{u}''\boldsymbol{u}}.$$

Ezek az összefüggések megfelelnek a hétköznapi elképzelésünknek.

6.2.2. Relatív gyorsulások

A 6.18 -ból azonnal következik, hogy **a relatív gyorsulás megegyezik az abszolút gyorsulással**:

$$\ddot{r}_{\boldsymbol{u}}(t) = \ddot{r}(t) \in \frac{\mathbf{E}}{\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}}.$$

6.3. Abszolút Newton-egyenlet

6.3.1. A tömeg mértékegyenese

A tömeg kg mértékegysége a hétköznapi gyakorlatban független az idő s mértékegységétől és a távolság m mértékegységétől. Ahhoz tehát, hogy a mechanika alavető fogalmait a téridőmodell keretein belül tárgyaljuk, be kell vezetnünk a tömeg mértékegyenesét, amely – úgy látszik – kívül esik a téridőmodell keretein. Azonban a kvantummechanika felderítette, hogy a $\hbar$ Planck-állandó – egy a természet által kitüntetett mennyiség – kapcsolatot létesít a tömeg, idő és távolság mértékegysége között:

$$\hbar = (1,05\ldots)10^{-34}\frac{\mathrm{m}^2\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}.$$

Választhatjuk tehát a tömeg mértékegyeneséül $\frac{\mathbb{I}}{\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}}$-t úgy, hogy

$$\mathrm{kg} := (9,52\ldots)10^{33}\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}^2}$$

legyen, vagyis ezen választás mellett a Planck-állandó az 1 valós szám.

Nyilvánvaló, hogy a mechanika általános elveinek megfogalmazásában ez a választás formai könnyebbséget jelent, hiszen nem kell egy a téridőmodell keretein kívüli mértékegyenessel bíbelődnünk. Ezért könyvünkben ezt az utat követjük.

Persze más a helyzet a mechanika gyakorlati alkalmazásaiban, amikor a hétköznapi kg használata jelent előnyt.

6.3.2. Abszolút erők

Az abszolút Newton-egyenletet „tömeg×abszolút gyorsulás = abszolút erő” formában fogadjuk el, ahol az abszolút erő a téridőpontoktól és az abszolút sebességektől függhet.

Minthogy a „tömeg×abszolút gyorsulás” értékei az $\frac{\mathbb{I}}{\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}} \otimes \frac{\mathbf{E}}{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}\otimes\mathbb{I}}$ vektortérben vannak, az abszolút erőt

$$\boldsymbol{f} : \mathtt{M} \times \mathtt{V}(1) \to \frac{\mathbf{E}}{\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}\otimes\mathbb{I}} \equiv \frac{\mathbf{E}^*}{\mathbb{I}}$$

alakú függvénnyel írhatjuk le.

Tehát az $\boldsymbol{f}$ abszolút erő hatása alatt létező m tömegű anyagi pont lehetséges világvonal-függvényeit az

$$(x : \mathtt{I} \to \mathtt{M})? \qquad m\ddot{x} = \boldsymbol{f}(x, \dot{x}) \tag{6.19}$$

másodrendű differenciálegyenlet, az **abszolút Newton-egyenlet** határozza meg.

Ez másodrendű közönséges differenciálegyenlet; egyértelmű megoldásához kezdeti értékként – egymástól függetlenül – a tömegpont téridő-helyzetét és abszolút sebességét kell megadni. Ezért, ha tehát $t \mapsto r(t)$ a Newton-egyenlet megoldása, akkor célszerű (a szokásnak megfelelően) a tömegpont **folyamatának** az $(r, \dot{r})$ párt tekinteni, hiszen ennek egyetlen időpontbeli értéke már meghatározza az egész függvényt.

A tömegpont **fejlődési tere** az a halmaz, amelyben a folyamatok az értékeiket felvehetik, tehát $\mathtt{M} \times \mathtt{V}(1)$.

A következőkben azt a célszerű (a szokásnak megfelelő) megállapodást követjük, hogy

– a fejlődési tér elemeit $(x, \dot{x})$ alakban írjuk, mert a Newton-egyenletben így szerepelnek (de mint függvény-változónak $\dot{x}$-nak eleve semmi köze x-hez, egy akármilyen abszolút sebességet jelöl!)

– egy akármilyen („absztrakt") folyamatot, tehát egy időfüggvényt is $(x, \dot{x})$ jelöl,

– egy konkrét folyamatot $(r, \dot{r})$) jelöl.

Mint ismeretes, különleges szerepet játszanak a **potenciálos** erők. Egy **potenciál**

$$\boldsymbol{K} : \mathtt{M} \to \mathbf{M}^*$$

kétszer differenciálható függvény. A potenciálnak megfelelő **mezőerősség** a potenciál külső deriváltja,

$$\boldsymbol{F} := \mathcal{D} \wedge \boldsymbol{K},$$

és az ez által meghatározott erő

$$\boldsymbol{f}(x, \dot{x}) := \boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{F}(x) \cdot \dot{x}.$$

A potenciál és mezőerősség ilyen meghatározását a következőkben indokoljuk (lásd a 6.5.2 pontot).

6.4. Impulzusok

Tekintsünk egy m tömegű anyagi pontot, amelynek az abszolút sebessége $\dot{x}$.

Elfogadjuk az

„abszolút impulzus := tömeg×abszolút sebesség" $(m\dot{x})$

meghatározást. Mivel

„abszolút impulzus időderiváltja = tömeg× abszolút gyorsulás"

$((m\dot{x})^{\cdot} = m\ddot{x})$,

az abszolút Newton-egyenlet kétféleképp is megfogalmazható:

„abszolút impulzus időderiváltja = abszolút erő",

„tömeg×abszolút gyorsulás = abszolút erő".

Vegyünk egy $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelőt. A szokásnak megfelelően,

„$\boldsymbol{u}$-relatív impulzus := tömeg× $\boldsymbol{u}$-relatív sebesség" $(m\mathbf{v}_{\dot{x}\boldsymbol{u}})$,

amire az is igaz, hogy

„$\boldsymbol{u}$-relatív impulzus=abszolút impulzus $\boldsymbol{u}$-térszerű komponense” ($\boldsymbol{\sigma_u} \cdot (m\dot{x})$).

Továbbá

„$\boldsymbol{u}$-relatív impulzus idõderiváltja = tömeg$\times$ $\boldsymbol{u}$-relatív gyorsulás”,

tehát a relatív Newton-egyenlet akárcsak az abszolút, kétféleképpen felfogható:

„$\boldsymbol{u}$-relatív impulzus idõderiváltja = $\boldsymbol{u}$-relatív erő”,

„tömegszer $\boldsymbol{u}$-relatív gyorsulás = $\boldsymbol{u}$-relatív erő”.

Ezek a körülményesnek ható felsorolások a relativisztikus esettel kapcsolatban válnak jelentőssé.

6.5. Relatív Newton-egyenlet

6.5.1. Értelmezés

Egy $\boldsymbol{u}$ megfigyelő az r világvonal-függvényű anyagi pont létezését mozgásnak észleli, a mozgást az $r_{\boldsymbol{u}} : \mathtt{I} \to \mathtt{E}_{\boldsymbol{u}}$, $t \mapsto \sigma_{\boldsymbol{u}}(r(t))$ függvénnyel írja le. Ez a mozgás egy relatív Newton-egyenletnek tesz eleget, amelyet az előző alfejezet felsorolása alapján „tömeg$\times$ $\boldsymbol{u}$-relatív gyorsulás = $\boldsymbol{u}$-relatív erő”, vagy ami ugyanaz, „$\boldsymbol{u}$-relatív impulzus idõderiváltja=$\boldsymbol{u}$-relatív erő” formájúnak fogunk fel.

Az $\boldsymbol{u}$-relatív erő függhet az időpontoktól, az $\boldsymbol{u}$-térpontoktól és az $\boldsymbol{u}$-relatív sebességektől; tehát az **$\boldsymbol{u}$-relatív Newton egyenlet**

$$(q : \mathtt{I} \to \mathtt{E}_{\boldsymbol{u}})? \qquad m\ddot{q} = \boldsymbol{f_u}(t, q, \dot{q})$$

alakú másodrendű differenciálegyenlet.

6.5.2. Relatív erők

Minthogy a relatív gyorsulás megegyezik az abszolút gyorsulással, a relatív Newton-egyenlet bal oldala egyenlő az abszolút Newton-egyenlet bal oldalával; ezért a relatív erő *lényegében* megegyezik az abszolút erővel, azzal a kis módosulással, hogy az abszolút erő változóiban az abszolút objektumokat a relatívokkal kell kifejezni. A t időpontnak ($\mathbf{E}$-vezette hipersíknak) és a q $\boldsymbol{u}$-térpontnak ($\boldsymbol{u}$-vezette egyenes) megfelelő téridőpont $t \cap q$, a $\dot{q}$ $\boldsymbol{u}$-relatív sebességnek megfelelő abszolút sebesség $\boldsymbol{u} + \dot{q}$, tehát

$$\boldsymbol{f_u}(t, q, \dot{q}) := \boldsymbol{f}(t \cap q, \boldsymbol{u} + \dot{q}).$$

Jegyezzük meg, hogy a relatív erőből könnyedén visszakaphatjuk az abszolút erőt:

$$\boldsymbol{f}(x, \dot{x}) = \boldsymbol{f_u}(\tau(x), \sigma_{\boldsymbol{u}}(x), \mathbf{v}_{\dot{x}\boldsymbol{u}}). \tag{6.20}$$

Vizsgáljuk most meg, milyen az alakja az olyan relatív erőnek, amely potenciálos abszolút erőből származik.

Idézzük fel az 5.11 alfejezet formuláit a $\boldsymbol{K}$ potenciálra! Legyen a

$$\boldsymbol{K} \quad \boldsymbol{u}\text{-széthasított alakja} \quad (-V_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{A}),$$

ekkor

$$\boldsymbol{F} := \mathcal{D} \wedge \boldsymbol{K} \quad \boldsymbol{u}\text{-széthasított alakja} \quad ((-\nabla V_{\boldsymbol{u}} - \mathcal{D}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{A}, \nabla \wedge \boldsymbol{A})) =: ((\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{B})).$$

Az erő, definíció szerint

$$\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{F}(x) \cdot \dot{x} = \boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{F}(x) \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{F}(x) \cdot (\dot{x} - \boldsymbol{u});$$

az első tag épp az $\boldsymbol{F}$ $\boldsymbol{u}$-időszerű komponense, a második tagban $(\dot{x} - \boldsymbol{u})$ abszolút térszerű, ezért írhatunk helyette $\boldsymbol{i} \cdot (\dot{x} - \boldsymbol{u})$-t, így ott az $\boldsymbol{F}$ térszerű komponense, és az $\boldsymbol{u}$-relatív sebesség szerepel, tehát

$$\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{F}(x) \cdot \dot{x} \quad \boldsymbol{u}\text{-széthasított alakja} \quad \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{B} \cdot \mathbf{v}_{\dot{x}\boldsymbol{u}}.$$

Felismerjük: elektromágneses esetben $V_{\boldsymbol{u}}$ a skalárpotenciál, $\boldsymbol{A}$ a vektorpotenciál, $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}$ az elektromos erő, $\boldsymbol{B} \cdot \mathbf{v}_{\dot{x}\boldsymbol{u}}$ a mágnességből származó Lorentz-erő.

Persze nemcsak elektromágnességre alkalmazható a formulánk, hanem gravitációra és rugalmasságra is, ahol $\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{K} = \boldsymbol{A} = 0$, és ezért $\boldsymbol{B} = 0$. Az 5.1.2 pont szerint ez esetben a potenciál abszolút időszerű, azaz van olyan – **abszolút skalárpotenciálnak** nevezett $V : \mathtt{M} \to \mathbb{I}^*$ függvény, amellyel

$$\boldsymbol{K} = -V\boldsymbol{\tau}.$$

Ekkor az erő nem függ a sebességtől.

6.6. Néhány konkrét abszolút erő

Ebben az alfejezetben megvizsgáljuk, milyen az alakja a téridőben a szokásosan leggyakrabban tárgyalt erőknek.

6.6.1. A legegyszerűbb speciális esetek

a) *Sebesség-független erő*: van olyan $\boldsymbol{k} : \mathtt{M} \to \frac{\mathbf{E}^*}{\mathbb{I}}$ függvény, hogy

$$\boldsymbol{f}(x, \dot{x}) = \boldsymbol{k}(x).$$

Az ennek megfelelő $\boldsymbol{u}$-relatív erő

$$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{u}}(t, q, \dot{q}) = \boldsymbol{k}(t \cap q).$$

Speciális esetei:

b) *Csak időtől függő erő*: van olyan $\boldsymbol{h} : \mathtt{I} \to \frac{\mathbf{E}^*}{\mathbb{I}}$ függvény, hogy

$$\boldsymbol{f}(x, \dot{x}) = \boldsymbol{h}(\tau(x)).$$

Az ennek megfelelő $\boldsymbol{u}$-relatív erő

$$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{u}}(t, q, \dot{q}) = \boldsymbol{h}(t).$$

c) *állandó erő*: van olyan $\boldsymbol{g} \in \frac{\mathbf{E}^*}{\mathbb{I}}$, hogy

$$\boldsymbol{f}(x, \dot{x}) = \boldsymbol{g}$$

Ilyennel modellezzük a Föld felszíne közelében a gravitációs hatást a szokásos szabadesés és hajítás leírásában.

Ez az erő abszolút skalárpotenciálos, skalárpotenciálja

$$V(x) = -\boldsymbol{g} \cdot (\boldsymbol{\sigma_u} \cdot (x - o))$$

tetszőleges $o \in M$ és $\boldsymbol{u} \in \mathtt{V}(1)$ esetén; maga a potenciál tehát

$$\boldsymbol{K}(x) = \boldsymbol{g} \cdot (\boldsymbol{\sigma_u} \cdot (x - o))\boldsymbol{\tau}. \tag{6.21}$$

d) A mechanika szokásos tárgyalásaiban idő- és sebességfüggetlen, úgynevezett sztatikus erők is szerepelnek. Jegyezzük meg azt a fontos tényt, hogy az állandó erőt kivéve **nincs sztatikus abszolút erő**. Az előfordulhat, hogy valamely relatív erő csak a megfigyelő térpontjaitól függ. Ez pontosan azt jelenti, hogy az abszolút erő állandó valamely $\boldsymbol{u}_c$ abszolút sebesség vezette egyenesek mentén, amit a következőképpen önthetünk formulába.

$\boldsymbol{u}_c$-sztatikus erő az olyan, amelyre

$$\boldsymbol{f}(x, \dot{x}) = \boldsymbol{f}(x + \boldsymbol{t}\boldsymbol{u}_c)$$

teljesül minden $\boldsymbol{t} \in \mathbb{I}$ esetén. Ezzel egyenértékű: van olyan $\boldsymbol{l} : \mathbf{E} \to \frac{\mathbf{E}^*}{\mathbb{I}}$ függvény és $o \in M$, hogy

$$\boldsymbol{f}(x, \dot{x}) = \boldsymbol{l}(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}_c} \cdot (x - o)).$$

Az ennek megfelelő $\boldsymbol{u}$-relatív erő

$$\boldsymbol{f_u}(t, q, \dot{q}) = \boldsymbol{l}(q - q_o - (t - t_o)\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{u}_c \boldsymbol{u}}),$$

ahol $q_o := \sigma_{\boldsymbol{u}}(o)$ és $t_o := \tau(o)$. Ennek a képletnek a helyességéről (6.20) alapján győződhetünk meg: t helyébe $\tau(x)$-et, q helyébe $\sigma_{\boldsymbol{u}}(x)$-et írva és felhasználva, hogy $\sigma_{\boldsymbol{u}}(x) - \sigma_{\boldsymbol{u}}(o) = (x - o) - \boldsymbol{\tau} \cdot (x - o)\boldsymbol{u}$, visszakapjuk az abszolút erőt.

Látható, hogy ez akkor és csak akkor időfüggetlen, ha $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_c$, amikor is tehát

$$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{u}_c}(t, q, \dot{q}) = \boldsymbol{l}(q - q_o).$$

6.6.2. Centrális erők

Egyszerű képzettel: centrálisnak mondunk egy erőt, ha az csak egy középponttól (centrumtól) húzott térvektortól függ. Ilyen egy tömegpont vonzóereje, egy rugalmas erő. A centrum maga egy anyagi pontot, azaz egy világvonalat jelent a téridőben. Az erőt bármely világpontban a világpont és a centrumnak vele egyidejű pontja közötti vektor határozza meg (6.3 ábra). Tehát egy centrális abszolút erőt egy r_c világvonal-függvény és egy $a : \mathbb{D} \to \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{D} \otimes \mathbb{D} \otimes \mathbb{I}}$ függvény adja meg úgy, hogy

$$\boldsymbol{f}(x, \dot{x}) := a\big(|x - r_c(\tau(x))|\big)\big(x - r_c(\tau(x)\big).$$

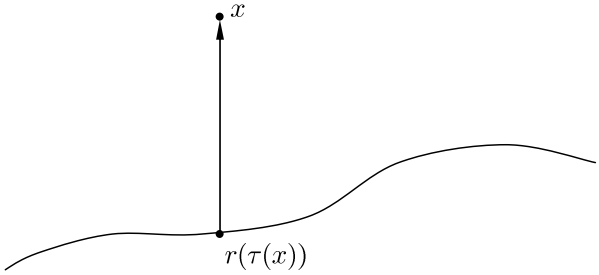
Az ennek megfelelő $\boldsymbol{u}$-relatív erő

$$\boldsymbol{f_u}(t, q, \dot{q}) = a\big(|q - q_c(t)|\big)\big(q - q_c(t)\big),$$

ahol $q_c(t) := \sigma_{\boldsymbol{u}}(r_c(t))$, a centrum t pillanatbeli helyzete az $\boldsymbol{u}$ megfigyelő terében.

Különleges eset, amikor a centrum tehetetlenségi, $\boldsymbol{u}_c$ abszolút sebességgel. Ekkor a centrum tetszőleges o világpontjával

$$\boldsymbol{f}(x, \dot{x}) = a\big(|\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}_c} \cdot (x - o)|\big)\big(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}_c} \cdot (x - o)\big).$$



6.3. ábra. Centrális erők meghatározása

Ez az erő $\boldsymbol{u}_c$-sztatikus és abszolút skalárpotenciálos, skalárpotenciálja

$$V(x) := -b(|\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{u}_c} \cdot (x - o)|),$$

ahol b a $\xi \mapsto a(\xi)\xi$ egy primitív függvénye. Maga a potenciál tehát

$$\boldsymbol{K}(x) := b(|\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{u}_c} \cdot (x - o)|)\boldsymbol{\tau}. \tag{6.22}$$

Ennek az erőnek az $\mathbf{u}_c$-relatív alakja:

$$\mathbf{f}_{\mathbf{u}_c}(t, q, \dot{q}) = a(|q - q_o|)(q - q_o),$$

ahol $q_o := \sigma_{\mathbf{u}_c}(o)$ a centrum (nyugvó) helyzete az $\boldsymbol{u}_c$ megfigyelő terében.

Speciálisan:

a) *Tömegpont vonzóereje*:

$$\boldsymbol{f}(x, \dot{x}) = -\frac{\gamma m_c m}{|x - r_c(\tau(x))|^3}\big(x - r_c(\tau(x))\big),$$

ahol γ a gravitációs állandó, m_c a vonzócentrum tömege és m annak az anyagi pontnak a tömege, amelyre a vonzás hat.

b) *Rugalmas erő*:

$$\boldsymbol{f}(x, \dot{x}) = -k\big(x - r_c(\tau(x))\big),$$

ahol k a rugalmas állandó.

6.7. Mozgási energia és teljesítmény

Egy m tömegű és $\dot{x}$ abszolút sebességű anyagi pontnak az ***u*-mozgási energiája**, definíció szerint

$$\frac{m|\mathbf{v}_{\dot{x}\boldsymbol{u}}|^2}{2} \in \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{I}} \equiv \mathbb{I}^*.$$

Ez a mennyiség nyilvánvalóan függ a megfigyelőtől; minthogy $\mathbb{I}^*$ értékű, arra gondolnánk, hogy egy kovektor $\boldsymbol{u}$-időszerű komponense, de az nem áll: minthogy a fenti kifejezés nem lineáris, hanem kvadratikus $\boldsymbol{u}$-ban, **nincs olyan kovektor, amelynek a mozgási energia az időszerű komponense volna**.

Emlékeztetünk, hogy $\mathbf{v}_{\dot{x}\boldsymbol{u}} = \dot{x} - \boldsymbol{u}$; ezzel beszorozva a (6.19) abszolút Newton-egyenletet, figyelembe véve, hogy $\ddot{x} = (\dot{x} - \boldsymbol{u})^{\boldsymbol{\cdot}}$, arra jutunk, hogy

$$\left(\frac{m|\mathbf{v}_{\dot{x}\boldsymbol{u}}|^2}{2}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} = \boldsymbol{f}(x, \dot{x}) \cdot \mathbf{v}_{\dot{x}\boldsymbol{u}}.$$

A bal oldalon a mozgási energia időderiváltja áll; a jobb oldali mennyiség neve: az $\boldsymbol{f}$ erőnek az $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelőre vonatkozó **relatív teljesítménye** .

Itt érdemes egy mesterkéltnek tűnő, kis kitérőt tennünk a relativisztikus eset majdani jobb megértése céljából. Az abszolút erő $\frac{\mathbf{E}^*}{\mathbb{I}}$ értékű; ezért gondolhatjuk, hogy egy kovektornak a térszerű komponense. Nem is kell sokáig keresgélnünk, hogy értelmes megoldást találjunk: $\boldsymbol{f}(x,\dot{x})$ legyen annak a kovektornak a térszerű komponense, amelynek $\dot{x}$-időszerű komponense nulla. Ezek a feltételek egyértelműen meghatározzák az

$$\hat{\boldsymbol{f}} : \mathtt{M} \times \mathtt{V}(1) \to \frac{\mathbf{M}^*}{\mathbb{I}}, \qquad \hat{\boldsymbol{f}}(x,\dot{x}) := \boldsymbol{f}(x,\dot{x})(\mathbf{1} - \dot{x} \otimes \boldsymbol{\tau})$$

függvényt, amelyre tehát

$$\hat{\boldsymbol{f}}(x,\dot{x}) \cdot \dot{x} = 0, \qquad \boldsymbol{i}^* \cdot \hat{\boldsymbol{f}}(x,\dot{x}) = \boldsymbol{f}(x,\dot{x})$$

teljesül. Ekkor

$$\boldsymbol{f}(x,\dot{x}) \cdot \mathbf{v}_{\dot{x}\boldsymbol{u}} = \hat{\boldsymbol{f}}(x,\dot{x}) \cdot (\dot{x} - \boldsymbol{u}) = -\hat{\boldsymbol{f}}(x,\dot{x}) \cdot \boldsymbol{u},$$

vagyis létezik egyetlen olyan abszolút kovektor-fügvény, amelynek negatív $\boldsymbol{u}$-időszerű komponense az $\boldsymbol{u}$-teljesítmény, térszerű komponense az erő.

Figyelem: lehet, hogy maga $\boldsymbol{f}$ független $\dot{x}$-tól, de $\hat{\boldsymbol{f}}$ már nem az!

6.8. Megmaradási tételek

6.8.1. Hatás-ellenhatás

Tekintsünk két anyagi pontot, amelyek – anélkül is, hogy érintkeznének – erőt gyakorolnak egymásra (ezek az úgynevezett **távolható** erők).

A Newton-féle **hatás-ellenhatás törvénye** szerint az anyagi pontok közötti kölcsönhatás egyrészt **pillanatszerű**, ami azt jelenti, hogy egymásra hatásuk az azonos pillanatú világpontjaiktól és abszolút sebességüktől függ, másrészt a **ható erők egymás ellentettjei**.

Formulában: az x_1 világpontban levő, $\dot{x}_1$ abszolút sebességű „első” anyagi pontra az x_2 világpontban levő, $\dot{x}_2$ abszolút sebességű „második” anyagi pont $\boldsymbol{f}_{12}(x_1,\dot{x}_1,x_2,\dot{x}_2)$ erőt gyakorol, és szerepcserével kapjuk az $\boldsymbol{f}_{21}(x_2,\dot{x}_2,x_1,\dot{x}_1)$ erőt; ezekre

$$(\tau(x_1) = \tau(x_2)), \qquad \boldsymbol{f}_{21}(x_2,\dot{x}_2,x_1,\dot{x}_1) = -\boldsymbol{f}_{12}(x_1,\dot{x}_1,x_2,\dot{x}_2)$$

kell, hogy teljesüljön.

Ha az anyagi pontok tömege m_1, illetve m_2, akkor az együttesük Newton-egyenlete

$$\big((x_1,x_2) : \mathtt{I} \to \mathtt{M} \times \mathtt{M}\big)? \qquad \begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= \boldsymbol{f}_{12}(x_1,\dot{x}_1,x_2,\dot{x}_2), \\ m_2\ddot{x}_2 &= \boldsymbol{f}_{21}(x_2,\dot{x}_2,x_1,\dot{x}_1). \end{aligned}$$

A hatás-ellenhatás törvényéből azonnal következik, hogy

$$(m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2)^{\cdot} = 0,$$

vagyis az **össz abszolút impulzus megmarad**, azaz nem változik kölcsönhatás folyamán.

Speciális eset az, amikor a kölcsönható erő abszolút skalárpotenciálból származik, amely csak az anyagi pontok távolságától függ, azaz van olyan $V : \mathbb{D} \to \mathbb{I}^*$ folytonosan differenciálható függvény, amellyel

$$\boldsymbol{f}_{12}(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = -\frac{\partial V(|x_1 - x_2|)}{\partial x_1} = -V'(|x_1 - x_2|)\frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|};$$

itt a vessző a V változója szerinti differenciálást jelenti.

Szorozzuk be ebben az esetben a fenti Newton-egyenlet első tagját $(\dot{x}_1 - \boldsymbol{u})$-val, a másodikat $(\dot{x}_2 - \boldsymbol{u})$-val, majd adjuk össze a két tagot. A bal oldalon a két mozgási energia összegének az időderiváltját kapjuk, a jobb oldalon pedig $-V(|x_1 - x_2|)$ időderiváltját. V-t **potenciális energiának** felfogva azt állíthatjuk tehát, hogy az

$$\frac{m_1|\mathbf{v}_{\dot{x}_1\boldsymbol{u}}|^2}{2} + \frac{m_2|\mathbf{v}_{\dot{x}_2\boldsymbol{u}}|^2}{2} + V(|x_1 - x_2|)$$

$\boldsymbol{u}$-mechanikai energia megmarad azaz nem változik a kölcsönhatás folyamán tetszőleges $\boldsymbol{u}$ esetén.

6.8.2. Ütközések

Alapvető fizikai tényként fogadjuk el az abszolút impulzus megmaradását olyan folyamatokban is, amelyeket nem lehet erőkkel és Newton-egyenlettel leírni. Ilyen például, amikor az anyagi pontok ütköznek.

Tekintsük most azt az esetet, amikor a két tömegpont találkozik és egyesülnek (teljesen rugalmatlanul ütköznek). Legyen a tömegük m_1 és m_2, találkozási abszolút sebességük $\boldsymbol{u}_1$ és $\boldsymbol{u}_2$, és legyen az egyesülésükből keletkezett anyagi pont tömege m_3, abszolút sebessége $\boldsymbol{u}_3$. Alapfeltevésünk, az **össz abszolút impulzus megmaradása** szerint tehát

$$m_1\boldsymbol{u}_1 + m_2\boldsymbol{u}_2 = m_3\boldsymbol{u}_3.$$

Ennek időszerű komponense (alkalmazva rá $\boldsymbol{\tau}$-t) adja a **tömegmegmaradást**:

$$m_1 + m_2 = m_3.$$

Természetesen bármely $\boldsymbol{u}$ megfigyelő szerinti térszerű komponense pedig az **$\boldsymbol{u}$-relatív impulzus megmaradását** eredményezi:

$$m_1\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}} + m_2\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}} = m_3\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{u}}.$$

Ahhoz a megfigyelőhöz viszonyítva, amelyhez képest a keletkezett részecske nyugszik, az anyagi pontok mozgási energiája az ütközés előtt

$$\frac{m_1|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_3|^2}{2} + \frac{m_2|\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3|^2}{2}, \tag{6.23}$$

az ütközés után 0. Tehát ha $\boldsymbol{u}_1$ és $\boldsymbol{u}_2$ nem egyenlő $\boldsymbol{u}_3$-mal (és ez az igazi ütközés), akkor az $\boldsymbol{u}_3$-mozgási energia az ütközésben eltűnt.

Úgy tapasztaljuk azonban, hogy az egyesülés folytán a keletkezett részecskének olyan tulajdonsága alakul ki, amit épp ezzel az energiaveszteséggel magyarázhatunk; például kémiai kötés, magasabb hőmérséklet. Ezért bevezetjük a **belső energia** fogalmát, és úgy fogjuk fel, hogy a keletkezett részecskéhez viszonyított ütközés előtti mozgási energia az új részecske belső energiájává alakul át, vagyis ütközésekben az összenergia megmarad.

Pontosabban a következőképp fogalmazhatunk. Bármely $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelő esetén az

„$\boldsymbol{u}$-relatív energia:=$\boldsymbol{u}$-mozgási energia + belső energia"

meghatározással elfogadjuk az **$\boldsymbol{u}$-relatív energia megmaradását** minden $\boldsymbol{u}$ esetén. Persze be kell látnunk, hogy ez a kijelentésünk helyes: ha valamely abszolút sebesség – mondjuk a fenti $\boldsymbol{u}_3$ – esetén igaz, akkor bármely más $\boldsymbol{u}$ esetén is. Egyszerűen: minden $\boldsymbol{u}$ esetén az $\boldsymbol{u}$-mozgási energia ütközés előtti és ütközés utáni értékének a különbsége ugyanaz, mint az $\boldsymbol{u}_3$-mozgási energia ütközés előtti és ütközés utáni értékének a különbsége.

Ez pedig igaz. Ugyanis $|\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}|^2 = |\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_3|^2+2(\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_3)\cdot(\boldsymbol{u}_3-\boldsymbol{u})+|\boldsymbol{u}_3-\boldsymbol{u}|^2$, és ugyanilyen egyenlőség áll fenn a 2 indexre is, továbbá $m_1(\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_3)+m_2(\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_3) = m_1\boldsymbol{u}_1+m_2\boldsymbol{u}_2-(m_1+m_2)\boldsymbol{u}_3 = 0$ felhasználásával kapjuk, hogy

$$\frac{m_1|\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}|^2}{2}+\frac{m_2|\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}|^2}{2}-\frac{(m_1+m_2)|\boldsymbol{u}_3-\boldsymbol{u}|^2}{2}= \\ =\frac{m_1|\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_3|^2}{2}+\frac{m_2|\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_3|^2}{2}.$$

6.9. A rakétaegyenlet

Elemi mechanika könyvekben sokszor megtalálható az a kijelentés, hogy a (relatív, mert csak azt ismerik) Newton-egyenletnek a 6.4 alfejezetben megadott két megfogalmazása nem egyenértékű akkor, ha a tömeg is változik, és ekkor a másodikat fogadják el megfelelőnek: a (relatív) impulzus idősderiváltja egyenlő a (relatív) erővel. Az erő természetesen „nem tud" arról, hogy változik-e a test tömege vagy sem (gondoljunk például arra, hogy elektromágneses erő hat egy testre, amelynek a töltése állandó, de a tömege „porladozik"), tehát változó tömeg esetén az előzőekben szereplő relatív Newton-egyenlet jobb oldala változatlan marad, bal oldala viszont az említett elképzelés szerint módosulna, és így azt kapnánk, hogy $(m\dot{q})^{\cdot} = \dot{m}\dot{q}+m\ddot{q} = \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{u}}(t,q,\dot{q})$, ami értelmesnek látszik.

Akkor bukik ki a baj, ha azután érdeklődünk, milyen abszolút egyenletből származik ez. Világos, hogy a fenti egyenlet bal oldala, expliciten kiírva a széthasításokat, $(m\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}\cdot\dot{x})^{\cdot} = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}\cdot(\dot{m}\dot{x}+m\ddot{x})$, ezért változó tömeg esetén az abszolút Newton-egyenlet $(m\dot{x})^{\cdot} = \dot{m}\dot{x}+m\ddot{x} = \boldsymbol{f}(x,\dot{x})$ volna. Alkalmazva erre az egyenlőségre $\boldsymbol{\tau}$-t azt kapjuk (mivel $\boldsymbol{f}$ és $m\ddot{x}$ értékei térszerűek), hogy $\dot{m}=0$, vagyis a tömeg nem változik. Ez azt jelenti, hogy változó tömeg esetén nem helyes a relatív Newton-egyenletet úgy felírni, hogy az impulzus idősderiváltja egyenlő az erővel.

Ez kiváló példa arra, hogy a relatívban – pláne koordinátákban – való gondolkodás hogyan viszi tévútra az embert.

Mi hát a megfelelő Newton-egyenlet változó tömeg esetén? Az az érdekes, hogy a szokásos mechanika könyvekben megtalálható a válasz, igaz hogy néhány fejezettel arrébb, és más kérdésre felelve. A helyes egyenlet az úgynevezett rakéta-egyenlet, amelyet abszolút formában a következőképpen fogalmazhatunk meg.

Adott a tömeg mint az idő függvénye, $m : \mathtt{I} \to \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}}$, valamint a kiáramló anyagnak a rakétához viszonyított sebessége az idő függvényében, $\boldsymbol{v} : \mathtt{I} \to \frac{\mathbf{E}}{\mathbb{I}}$, és ezekkel **az abszolút rakétaegyenlet**

$$(x : \mathtt{I} \mapsto \mathtt{M})? \qquad m\ddot{x} - \dot{m}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}(x, \dot{x}).$$

Természetesen ez nem csak rakétára vonatkozik, hanem bármely testre, amelynek változik a tömege; és a változás nem csak tömegcsökkenés lehet, mint a rakétánál, hanem tömegnövekdés is (például egy esőcsepp hízik, miközben áthalad a felhőn). Nincs kizárva persze az sem, hogy a tömegnövekedés és -csökkenés kombinálódik (az esőcseppre egy ideig kicsapódik a pára a felhőben, aztán az esőcsepp párolog a napsütésben).

A rakétaegyenlet $\boldsymbol{u}$-relatív formája

$$m\ddot{q} - \dot{m}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f_u}(t, q, \dot{q}).$$

Jegyezzük meg, hogy a $\boldsymbol{v}$ relatív sebesség értelme a következő: ahhoz a tehetetlenségi megfigyelőhöz képest, amelyben a rakéta a t pillanatban áll – azaz a megfigyelő abszolút sebessége $\dot{r}(t)$ – a t pillanatban kiáramló tömeg relatív sebesége $\boldsymbol{v}(t)$. Más szóval, a kiáramló tömeg abszulót sebessége $\dot{r}(t) + \boldsymbol{v}(t)$.

Érdemes megnézni, hogyan jutunk a rakétaegyenlethez. Tekintsük azt az esetet, amikor a rakétára nem hat erő, és írjuk fel az abszolút impulzus megmaradását a t pillanat és az azt követő $t + \boldsymbol{h}$ pillanatra vonatkozóan; e két pillanat között a rakétából kiáramlott tömeg mennyisége $m(t) - m(t+\boldsymbol{h})$, abszolút sebessége $\dot{r}(t) + \boldsymbol{v}(t)$ és $\dot{r}(t+\boldsymbol{h}) + \boldsymbol{v}(t+\boldsymbol{h})$ között változik, tehát a kiáramlott tömeg átlagos abszolút sebessége $\dot{r}(t) + \boldsymbol{v}(t) + \mathrm{ordo}(\boldsymbol{h})$, így az impulzusmegmaradásból

$$m(t)\dot{r}(t) = m(t+\boldsymbol{h})\dot{r}(t+\boldsymbol{h}) + \big(m(t) - m(t+\boldsymbol{h})\big)\big(\dot{r}(t) + \boldsymbol{v}(t) + \mathrm{ordo}(\boldsymbol{h})\big).$$

Átrendezve, elosztva $\boldsymbol{h}$-val és aztán tartva vele a nullához, kapjuk:

$$m(t)\ddot{r}(t) - \dot{m}(t)\boldsymbol{v}(t) = 0.$$

7. Az elektromágnesség alapjai a téridőmodellben

Az elektromágnesség nem olyan egyszerű, mint a mechanika, de szintén jól ismert és jól kidolgozott elmélet a szokásos (megfigyelőhöz viszonyított, illetve koordinátás) keretek között. Éppen a kissé bonyolultabb formulái miatt további lehetőséget kínál, hogy az alapvető fogalmain keresztül jobban megértsük és elmélyítsük a nemrelativisztikus téridőmodellről szerzett tudásunkat. Ezen kívül az elektromágnességnek fő szerepe volt a relativitáselmélet kialakulásában; tárgyalásunk segítséget nyújt e szerep jobb megértéséhez is.

7.1. Maxwell-egyenletek

7.1.1. Relatív Maxwell-egyenletek

Az elektromágnesség szokásos Maxwell-egyenletei megfigyelőre vonatkoztatott mennyiségekkel – amelyek „időtől és tértől” függnek – vannak megfogalmazva, azaz relatív egyenletek.

Idézzük fel és vizsgáljuk meg őket, hogy segítségükkel megtaláljuk az abszolút Maxwell-egyenleteket.

Az elemi töltés léte lehetővé teszi, hogy az elektromos töltést valós számmal mérjük (vagyis az elektromos töltés mértékegyeneséül a valós számokat vegyük); noha ez nem szokás a gyakorlatban, most mi megtesszük az egyszerűbb formulák kedvéért.

Ennek megfelelően a ρ töltéssűrűségnek, amely $\frac{\text{töltés}}{\text{térfogat}}$, a fizikai dimenziója $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}}$. A töltések $\boldsymbol{j}$ áramsűrűségének fizikai dimenziója $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}\otimes\mathbb{I}}$.

A szokásos – természetesen relatív mennyiségekkel – felírt Maxwell-egyenletek

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho, \tag{7.24}$$

$$-\partial_0\boldsymbol{D} + \mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}, \tag{7.25}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} + \partial_0\boldsymbol{B} = 0, \tag{7.26}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0, \tag{7.27}$$

ahol a ∂_0 az idő szerinti parciális deriváltat jelöli. Ezek az egyenletek rögzítik $\boldsymbol{D}$ és $\boldsymbol{H}$ fizikai dimenzióját. $\boldsymbol{E}$ és $\boldsymbol{B}$ fizikai dimenzióját a töltésekre ható erő formulája adja meg (lásd később).

Továbbá igen fontos, hogy e szokásos tárgyalásban a $\boldsymbol{H}$ mágneses gerjesztés és a $\boldsymbol{B}$ mágneses mezőerősség értékei axiálvektorok; ezek valójában antiszimmetrikus térszerű tenzorok (lásd a matematikai mellékletet). Váltsunk át arra, hogy a mágneses mennyiségek térszerű antiszimmetrikus tenzorok. Ekkor a fenti egyenletekben a matematikai melléklet jelöléseivel $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{H})$-nak, illetve $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{B})$-nek kell szerepelnie; azon túl, hogy ez a $\boldsymbol{j}$ jel összekeverhető lenne az áramsűrűséggel, egyszerűsítjük az írásmódot azzal, hogy elhagyjuk, és a továbbiakban $\boldsymbol{H}$ és $\boldsymbol{B}$ már a térszerű antiszimmetrikus tenzorokat jelöli. Ezzel és a térszerű parciális deriváltak ∇ „vektorával" a 22.3 alfejezet szerint

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H}\ (\nabla\times\boldsymbol{H})\ \text{ helyett }\ \nabla\cdot\boldsymbol{H},$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B}\ (\nabla\cdot\boldsymbol{B})\ \text{ helyett }\ \nabla\wedge\boldsymbol{B}$$

írandó. Mivel az elektromos mennyiségek vektorok,

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D}\ \text{ helyett }\ \nabla\cdot\boldsymbol{D}, \qquad \mathrm{rot}\boldsymbol{E}\ \text{helyett}\ \nabla\wedge\boldsymbol{E}$$

fog szerepelni.

Kétségkívül, az axiálvektorok helyett az antiszimmetrikus tenzorok használata gyakorlatilag bonyolítja a formulákat, viszont elméletileg ez a helyes, amit a következő pont is bizonyít.

7.1.2. Abszolút Maxwell-egyenletek

Mint említettük, az előzekben szerepelt elektromágneses mennyiségek egy megfigyelőre vannak vonatkoztatva. Az ehhez képest $\boldsymbol{v}$ sebességgel mozgó úgy észleli, hogy azok a töltések, amelyek az eredetiben nyugszanak, hozzá képest $-\boldsymbol{v}$ sebességgel mozognak, tehát $\boldsymbol{j} - \rho\boldsymbol{v}$ áramsűrűséget észlel. Ez az 5.6.2 pont formulái alapján azt mutatja, hogy a töltéssűrűség és az áramsűrűség egy $\boldsymbol{J} : \mathtt{M} \to \frac{\mathbf{M}}{\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}\otimes\mathbb{I}}$ vektormező, az **elektromos áramlássűrűség** $\boldsymbol{u}$**-széthasítottja**,

$$\rho := \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{J}, \qquad \boldsymbol{j}_{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{J};$$

a fenti jelölésben már kifejezésre jutattuk, hogy a szokásos áramsűrűség megfigyelőfüggő.

Ismert a Lorentz-erő képlete: egy megfigyelő úgy észleli, hogy a hozzá képest $\boldsymbol{v}$ sebességgel mozgó egységnyi töltésre – szokásosan axiálvektornak tekintett – $\boldsymbol{B}$ mágneses mezőben $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ erő hat, természetesen az esetleg jelen levő elektromos mezőből eredő $\boldsymbol{E}$ erőn kívül; ha áttérünk arra, hogy a mágneses mező térszerű antiszimmetrikus tenzor, akkor a Lorentz-erő kifejezése $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{v}$ lesz. A sajátmagát állónak tekintő töltés úgy fogja fel a helyzetet, hogy rá $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{v}$ elektromos erő hat. Ez az 5.7.2 formulái alapján azt mutatja, hogy az elektromos mező és a mágneses mező egy $\boldsymbol{F} : \mathtt{M} \to \mathbf{M}^* \wedge \mathbf{M}^*$ kotenzormező, az **elektromágneses mező $\boldsymbol{u}$**-széthasítottja,

$$\boldsymbol{E_u} := \boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{B} := \boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{i};$$

a fenti jelölésben már kifejezésre juttattuk, hogy az elektromos mező megfigyelőfüggő.

Ugyancsak arra juthatunk, hogy az elektromos gerjesztés és mágneses gerjesztés egy $\boldsymbol{G} : \mathtt{M} \to \frac{\mathbf{M} \wedge \mathbf{M}}{\mathbb{D} \otimes \mathbb{D} \otimes \mathbb{D} \otimes \mathbb{I}}$ tenzormező, az **elektromágenses gerjesztés $\boldsymbol{u}$**-széthasítottja,

$$\boldsymbol{D} := -\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{G} \cdot, \qquad \boldsymbol{H_u} := \boldsymbol{G} - \boldsymbol{u} \wedge (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{G}).$$

Írjuk át a mondottak szerint az idézett Maxwell-egyenleteket, amelyeket valamely abszolút egyenletek $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelő szerinti széthasítottjának fogunk fel; mivel ekkor az idő szerinti parciális derivált helyét az $\boldsymbol{u}$-irányú derivált veszi át, ezt kapjuk:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho, \tag{7.28}$$
$$-\mathcal{D}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{D} + \nabla \cdot \boldsymbol{H_u} = \boldsymbol{j_u}, \tag{7.29}$$
$$\nabla \wedge \boldsymbol{E_u} + \mathcal{D}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{B} = 0, \tag{7.30}$$
$$\nabla \wedge \boldsymbol{B} = 0. \tag{7.31}$$

Ebből az 5.11 alfejezet alapján az **abszolút Maxwell-egyenletek**:

$$\mathcal{D} \cdot \boldsymbol{G} = \boldsymbol{J}, \qquad \mathcal{D} \wedge \boldsymbol{F} = 0. \tag{7.32}$$

A $\boldsymbol{G}$ elektromágneses gerjesztés – a neve is ezt mutatja – az első egyenlet alapján azt adja meg valahogy, miképpen keltik a töltések az elektromágneses hatást.

A $\boldsymbol{F}$ elektromágneses mezőerősség – mint a neve is mutatja – azt adja meg, milyen erő hat az elektromos töltésekre az adott elektromágneses mezőben, nevezetesen az x téridőpontban az $\dot{x}$ abszolút sebességű és e töltésű anyagi pontra ható erő $e\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{F}(x) \cdot \dot{x}$ (ez szerepelt már a 6.3.2 pontban, csak ott nem jelöltük a töltést az egyszerűség kedvéért).

Figyeljük meg azt a fontos tényt, hogy **$\boldsymbol{G}$ tenzor**, viszont **$\boldsymbol{F}$ kotenzor**, vagyis az elektromágneses gerjesztés és az elektromágneses mezőerősség más jellegű mennyiségek!

Megjegyezzük, a Maxwell-egyenletek ilyen formája folytonos töltéseloszlás esetén érvényes, vagyis amikor a töltések áramlását valóban vektormező írja le. Általában – például egyetlen ponttöltés által keltett elektromágneses mezőre – hasonló alakú, de más matematikai objektumokkal (úgynevezett disztribúciókkal) megfogalmazott egyenletek állnak fenn.

7.2. Konstitúciós relációk

7.2.1. Általános formulák

Természetesen valami kapcsolat kell legyen $\boldsymbol{G}$ és $\boldsymbol{F}$ között. Fizikailag ismert tény, hogy ugyanaz a tölteseloszlás (áramlássűrűség) más és más közegben más és más elektromágneses mezőt kelt. A szokásos egyszerű esetben a „$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$" és „$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}$" úgynevezett anyagi egyenleteket tekintik.

Ennek megfelelően általában meg kell adnunk az elektromágneses mennyiségek között egy **konstitúciós relációt** – magyarul: állagegyenletet –, amelyet

$$\boldsymbol{G} = \Gamma(\boldsymbol{F})$$

formában írunk; ez az összefüggés azt a fizikai tényt kívánja tükrözni, hogy a téridőben létező anyag miként befolyásolja az elektromágneses jelenségeket.

Ezzel jutunk a

$$\mathcal{D} \cdot \Gamma(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{J}, \qquad \mathcal{D} \wedge \boldsymbol{F} = 0$$

konstitúciós abszolút Maxwell-egyenletekhez, amelyekben már csak az elektromágneses mező szerepel, a gerjesztés nem.

Egy megfigyelő természetesen széthasítja a konstitúciós relációt is, aminek eredménye

$$\boldsymbol{D} = \eta_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{B}), \qquad \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{u}} = \gamma_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{B}). \tag{7.33}$$

7.2.2. Egy speciális eset

Tegyük fel, hogy a mindenséget kitölti egy közeg, amely egymáshoz képest nyugvó, tehetetlen anyagi pontokból áll. A közeg valójában egy tehetetlenségi megfigyelőt jelent, legyen az abszolút sebessége $\boldsymbol{u}_\mathrm{o}$. Ekkor a szokásos $\boldsymbol{u}_\mathrm{o}$-relatív konstitúciós reláció az ϵ permittivitással és a μ permeabilitással

$$\boldsymbol{D} = \frac{\epsilon}{c}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}_\mathrm{o}}, \qquad \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{u}_\mathrm{o}} = \frac{c}{\mu}\boldsymbol{B}, \tag{7.34}$$

ahol c a $\frac{\mathbb{D}}{\mathbb{I}}$ pozitív eleme.

Ebből felírhatjuk az abszolút konstitúciós relációt is:

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{u}_\mathrm{o}} - \boldsymbol{u}_\mathrm{o} \wedge \boldsymbol{D} = \frac{c}{\mu}\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{i} - \frac{\epsilon}{c}\boldsymbol{u}_\mathrm{o} \wedge (\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_\mathrm{o}).$$

Természetes, hogy $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{u}_\mathrm{o}$ esetén az $\boldsymbol{u}$-relatív konstitúciós reláció más alakú, mint az $\boldsymbol{u}_\mathrm{o}$-relatív, $\boldsymbol{D} \neq \frac{\epsilon}{c}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}$ és $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{u}} \neq \frac{c}{\mu}\boldsymbol{B}$. Ez fizikailag is érthető: az $\boldsymbol{u}_\mathrm{o}$ megfigyelőt a valóságos közeg megkülönbözteti minden más megfigyelőtől.

7.3. Mi a baj a nemrelativisztikus elektromágnességgel

Szögezzük le: a relatív Maxwell-egyenletek (7.28) alakja ugyanolyan (a szokásos) minden tehetetlenségi megfigyelő szerint!

Ez azért lényeges, mert a relativitáselmélettel kapcsolatban sokszor hangzik el, hogy a Maxwell-egyenletek „nem jól transzformálódnak" a nemrelativisztikus elméletben, azaz különféle megfigyelők szerint különféle alakúak.

Eredményünk megkérdőjelezhetetlen, tökéletesen pontos formulákon alapszik. Nem volna igaz a szokásos állítás a nem jól transzformálódásról? De igen, az is igaz, csak megfelelően kell megfogalmazni.

Tekintsük az üres mindenséget, a vákuumot. Milyen abszolút konstitúciós relációt állapíthatunk meg? A vákuum permittivitása és permeabilitása 1, ezért azt szokták venni, hogy – elhagyva a megfigyelőre utaló jelet –

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{c}\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{H} = c\boldsymbol{B}. \tag{7.35}$$

Igen, ha elhagyjuk a jelet, elsikkadhat a kérdés: milyen megfigyelő szerinti széthasításban érvényes ez? Minthogy nincs a fizikai valóság által kitüntetett közeg, csak egy elfogadható válasz volna: minden megfigyelőre. Ez azonban lehetetlen; ha visszaírjuk a megfigyelőre utaló jelet – $\boldsymbol{E}$ helyett $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}$, $\boldsymbol{H}$ helyett $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{u}}$ –, akkor látjuk, hogy mindkét egyenlőségben az egyik oldalon a megfigyelőtől független mennyiség áll, a másikon pedig a megfigyelőtől függő.

Ahhoz, hogy egy (7.35) alakú relatív konstitúciós reláció érvényes legyen, ki kell jelölni egy tehetetlenségi megfigyelőt. Így jutunk el a vákuumot jelképező éterhez, mint egy (képzeletbeli) közeghez, amely elektromágnesesen semleges, vagyis mind a permittivitása, mind a permeabilitása 1.

Összefoglalva: nincs a vákuumot – egy megfigyelőktől független abszolút tényt – leíró abszolút konstitúciós reláció; más szóval, a vákuumra használt szokásos (7.35) relatív konstitúciós reláció az, ami „nem jól transzformálódik", azaz nem állhat fenn minden megfigyelő esetén. Ezért persze a vákuumra vonatkozó relatív konstitúciós Maxwell-egyenletek sem jól transzformálódnak.

Még egyszer tehát: tegyük fel, hogy valamely $\boldsymbol{u}_\mathrm{o}$ tehetetlenségi megfigyelő esetén a

$$\boldsymbol{D} = \frac{\epsilon}{c}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}_\mathrm{o}}, \qquad \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{u}_\mathrm{o}} = \frac{c}{\mu}\boldsymbol{B}$$

konstitúciós reláció áll fönn. Ekkor az $\boldsymbol{u}_\mathrm{o}$-relatív konstitúciós Maxwell-egyenletek is a szokásos alakúak. Azonban más alakúak $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{u}_\mathrm{o}$ esetén mind az $\boldsymbol{u}$-relatív konstitúciós reláció, mind az $\boldsymbol{u}$-relatív konstitúciós Maxwell-egyenletek.

Mindez érthető és rendben van, amikor valóságos fizikai közeg által kitüntetett $\boldsymbol{u}_\mathrm{o}$ megfigyelőről van szó.

Vákuum esetén azonban – amikor nincs valóságos közeg – ez (persze az $\epsilon = \mu = 1$ értékkel) fizikailag nem elfogadható. Ahhoz, hogy értelmet nyerjenek a dolgok, ki kellett találni egy képzeletbeli közeget, az étert.

8. Egyenletes forgás, forgó megfigyelők

A téridőmodellben kitűnően tárgyalhatók nemtehetetlenségi megfigyelők is. Egyszerűen értelmezhető a merev megfigyelő mint olyan, amelynek bármely két pontja között minden (abszolút) pillanatban ugyanaz a távolság. Az ilyen megfigyelőkhöz viszonyított mozgások, Coriolis-erő, stb. egzaktul származtathatók[3]. Most csak a forgó megfigyelőkről ejtünk néhány szót.

Először megvizsgáljuk, milyen világvonal eredményez „egyenletes körmozgást" egy $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelő terében, azaz a mozgás pályája körvonal, a relatív sebesség nagysága pedig állandó. Ez utóbbit az állandó szögsebességgel adhatjuk meg. A szögsebesség – amelyet szokásosan vektorként, pontosabban axiálvektorként adnak meg – valójában térszerű antiszimmetrikus tenzor, hasonlóan, mint ahogy a mágneses mező is az, és nem vektor. Tehát a forgás

[3] Mindez megtalálható a T. Matolcsi: *Spacetime without Reference Frames* (Budapest, 1993, Akadémiai Kiadó) könyvben

szögsebessége $\Omega : \mathbf{E} \to \frac{\mathbf{E}}{\mathbb{I}}$ antiszimmetrikus lineáris leképezés (másként ugyanez: az $\frac{\mathbf{E}\wedge\mathbf{E}}{\mathbb{I}\otimes\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}}$ eleme). A mozgás pályája az Ω magjára merőleges síkban van, magát a mozgást az

$$r_{\boldsymbol{u}}(t) = q_c + e^{(t-t_0)\Omega} \cdot \boldsymbol{q}_0 \qquad (t \in \mathtt{I})$$

formában írhatjuk le, ahol t_0 egy tetszőleges pillanat („kezdőpillanat"), q_c a kör középpontja és $\boldsymbol{q}_0 \in \mathbf{E}$ a középpontból a kezdőpillanatbeli helyzethez húzott vektor. A matematikai melléklet 19.3 alfejezete szerint $e^{(t-t_0)}\Omega$ az Ω magja körüli $(t-t_0)|\Omega|$ szögű forgatás A t pillanatban a relatív sebesség

$$\dot{r}_{\boldsymbol{u}}(t) = \Omega \cdot e^{(t-t_0)\Omega} \cdot \boldsymbol{q}_0 = \Omega \cdot (r_{\boldsymbol{u}}(t) - q_c),$$

amelynek nagysága $|\Omega \cdot \boldsymbol{q}_0|$ állandó.

Ebből már kikövetkeztethetjük, hogy ezt a mozgást az

$$r(t) = o + \boldsymbol{u}(t - t_0) + e^{(t-t_0)\Omega} \cdot \boldsymbol{q}_0 \qquad (t \in \mathtt{I}), \tag{8.36}$$

világvonal-függvény eredményezi, ahol o a q_c $\boldsymbol{u}$-térpont és a t_0 pillanat által meghatározott világpont (egyenes világvonal és hipersík metszéspontja: $o := t_0 \cap q_c$), tehát az is igaz, hogy $q_c = o + \mathbb{I}\boldsymbol{u} = \sigma_{\boldsymbol{u}}(o)$ és $t_0 = o + \mathbf{E} = \tau(o)$. Nevezzük ezt az $o + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$ középpont körül Ω szögsebességgel **egyenletesen forgó világvonal-függvénynek**. Ennek abszolút sebessége a t pillanatban

$$\dot{r}(t) = \boldsymbol{u} + \Omega \cdot e^{(t-t_0)\Omega} \cdot \boldsymbol{q}_0 = \boldsymbol{u} + \Omega \cdot \boldsymbol{\sigma_u} \cdot (r(t) - o).$$

A tehetetlen középpontú, egyenletesen forgó megfigyelő minden pontja azonos középpont körül azonos szögsebességgel forgó világvonal. Az iménti formulánk alapján nem nehéz rájönni, hogy ezt az $\mathtt{M}$ egy o pontjával (a középpont egy villanatával), egy $\boldsymbol{u}$ abszolút sebességgel (a középpont sebességével) és egy $\Omega : \mathbf{E} \to \frac{\mathbf{E}}{\mathbb{I}}$ leképezéssel (a forgás szögsebességével) adhatjuk meg

$$\boldsymbol{U}(x) := \boldsymbol{u} + \Omega \cdot \boldsymbol{\sigma_u} \cdot (x - o) \qquad (x \in \mathtt{M})$$

alakban. Ez a megfigyelő merev.

Ugyanis egy 8.36 világvonal-függvénynek és egy hasonlónak – $\boldsymbol{q}_0$ helyett $\boldsymbol{q}_0'$-vel – a távolsága a t pillanatban

$$|e^{(t-t_0)\Omega} \cdot \boldsymbol{q}_0 - e^{(t-t_0)\Omega} \cdot \boldsymbol{q}_0'| = |e^{(t-t_0)\Omega}(\boldsymbol{q}_0 - \boldsymbol{q}_0')| = |\boldsymbol{q}_0 - \boldsymbol{q}_0'|.$$

V. Abszolút fényterjedés

9. Alapfogalmak és feltevések

Ebben a fejezetben is adottnak veszünk egy téridőmodellt, amelyre a 2.8.1 pont fogalmait és jelöléseit használjuk, és megvizsgáljuk, $\mathtt{T}^{\rightarrow}$, $\boldsymbol{P}$ és $\boldsymbol{d}$ milyen tulajdonságokkal rendelkezik az abszolút fényterjedés feltételezése mellett.

Eredményül a hétköznapi gondolkodástól lényegesen eltérő (speciális) relativisztikus téridőmodellt kapjuk. Aki csak e modell és fizikai alkalmazásai iránt érdeklődik, és nem kívánja végigjárni a hozzá vezető utat, a továbbiak meg nem értésének a veszélye nélkül átugorhatja ezt a fejezetet.

9.1. Fényjelek

Mindeddig csak anyagi pontok történelméről beszéltünk, így jutottunk el a világvonalakhoz. Tapasztalataink szerint egy „pontszerű fénycsomag a vákuumban", nevezzük **fényjelnek**, bizonyos szempontból hasonlóan viselkedik, mint egy anyagi pont: valamely pályán mozog a terünkben, és szabad (akadálytalanul terjedő) fényjel pályája egyenes. Más szempontból viszont egy fényjel más, mint egy anyagi pont: nem nyugodhat semmilyen megfigyelő terében.

Fényjel történelmét is görbe adja meg a téridőben. Akadálytalan fényjelet egyenes ír le (egyenes szakaszokból álló vonal, ha például tükrökön visszaverődik). Ilyen egyenesnek az irányvektora nem lehet időszerű (mert akkor a fényjel együtt haladhatna egy anyagi ponttal, más szóval nyugodna egy megfigyelő terében).

Ezek szerint a nemrelativisztikus téridőmodellben fényjelek irányvektorainak **E**-ben kellene lenniük. Viszont ez azt jelentené, hogy tetszőleges fényjel egyidejűleg volna bármely megfigyelőnek minden pontjában; például egy a forrásához visszatérő fényjel (egy tükrön visszaverődve) az indulással egyidőben érkezne meg. Ez ellentmond a tapasztalatnak. Tehát nemrelativisztikus téridőmodellben a fényjelek nem tárgyalhatók:

Téridőmodellben az abszolút egyidejűség és a fényjelenségek jó leírása kizárják egymást.

9.2. A fényterjedés heurisztikája

9.2.1. Fényjelek mozgása

A vákuumban akadálytalanul terjedő fényjelekkel kapcsolatban bármely tehetetlenségi megfigyelőre vonatkozóan az alapvető tapasztalataink a következők:

(**L1**) **Fényjel pályája** a megfigyelő terében **egyenes**.

(**L2**) A megfigyelő terében **bármely egyenes lehet fényjel pályája**.

(**L3**) **Fényjel minden vele azonos pályán mozgó anyagi pontnál gyorsabb**.

(**L4**) **Bármely fényjel haladása tetszőleges pontossággal megközelíthető anyagi pont mozgásával**.

Az első két kijelentés nem kíván kommentárt, a harmadik is csak annyit, hogy értelmes szinkronizáció nélkül, amint arról már szóltunk.

A negyediknek a pontos értelme – szintén szinkronizáció nélkül – a következő. Vegyünk két pontot a terünkben, nevezzük őket rajtnak és célnak. A rajtból egyszerre indított fényjel és anyagi pont közül a fényjel hamarabb ér a célhoz. A célban lehet mérni az érkezések közti időkülönbséget. A szóban forgó kijelentés értelme az, hogy minden előírt időtartam esetén létezik olyan indítása az anyagi pontnak, hogy a célban az érkezések közti időkülönbség kisebb, mint az előírt időtartam.

A harmadik és a negyedik tulajdonság, amilyen egyszerűek, olyan nagy jelentőségűek együtt. Először is, maguk után vonják:

Azonos pályájú fényjelek azonos gyorsaságúak.

Ugyanis, ha egy fényjel gyorsabb volna egy másiknál, akkor az első mozgását megfelelő pontossággal közelítő anyagi pont már gyorsabb volna a másodiknál.

Ebből pedig megállapíthatjuk:

Egy fényjel történelme független attól, milyen forrásból származik.

Ezt egyszerű példával szemléltethetjük: áll egy lámpa a vasúti vágány mellett, amelyen robog a vonat, a vonaton is egy lámpa. Amint a két lámpa találkozik (félretéve most azt, hogy pontos találkozásnál a lámpak összetörnének), mindkettő felvillan. A két fényjel együtt fog haladni mind a vágány (Föld) terében, mind a vonat terében, sőt akármilyen megfigyelő terében[1].

Más szóval a végső következtetés:

A fény terjedése a téridőben abszolút.

9.2.2. Homogén, izotróp fényterjedés

A relativitáselmélet szokásos tárgyalásának alapjául a fény homogén, izotróp terjedése szolgál[2], ami pontosan azt jelenti, hogy a fény bármely tehetetlenségi megfigyelő bármely pontjából indulva minden irányban ugyanolyan gyorsan halad. Ez azonban különböző irányú mozgások gyorsaságának egyenlőségéről beszél, aminek csak szinkronizáció mellett van értelme (lásd 1.3.2). Minthogy a fényjelek és az abszolút szinkronizáció kizárják egymást, meg kellene mondani, mely szinkronizációra igaz a homogén, izotróp terjedés, hiszen ha egy szinkronizációra teljesül, egy másikra már nem. Márpedig az említett tárgyalások előbb beszélnek a homogén izotróp terjedésről, és csak azután szinkronizációról, ami azt a téves képzetet sugallja, hogy a szinkronizáció a homogén és izotróp fényterjedés következménye.

[1] Az ugyanolyan lámpák kibocsátotta fényjelek színe (frekvenciája) lesz különböző a különböző megfigyelőknek

[2] „... a fény vákuumbeli terjedési sebessége ugyanaz a $c = 3 \cdot 10^8 m/s$ állandó érték kell legyen minden tehetetlenségi rendszerben"

A homogén, izotróp fényterjedés ilyen formában tehát a levegőben lóg, semmiképp sem fogadhatjuk el alapul.

Megjegyezzük, a homogén, izotróp fényterjedés meghökkentő a hétköznapi szemlélet szempontjából, hiszen ha hozzám képest valami (egy fényjel) mozog, és te is ugyanolyan irányban mozogsz hozzám képest, akkor az a képzetünk, hogy az a valami hozzád képest lassabban kell mozogjon, mint hozzám képest. De nem ezért elfogadhatatlan a homogén, izotróp fényterjedés szokásos megfogalmazása, hanem azért, mert meg nem határozott szinkronizációra utal (és egyáltalán, szinkronizációra utal).

A homogén, izotróp fényterjedést másképp kell érteni: a kísérleti eredmények valami hasonlót, de mást mondanak, valami olyat, ami szinkronizáció nélkül is értelmes. Ez már régóta ismert[3], csak még nem ment át eléggé a köztudatba.

A kísérletek ugyanis oda-vissza fényjelekről, vagy más néven **kétutas fényjelekről** szólnak: egy tehetetlenségi megfigyelő egy térpontjából (forrásból) elindul egy fényjel, egy másik térpontban (tükrön) visszafordul, majd visszaér a forráshoz (odamegy a tükörhöz és visszajön). Ismerjük a tükör és a forrás távolságát, mérjük a forrásnál eltelt időt az indulás és az érkezés között, ebből kiszámíthatjuk a fény **kétutas gyorsaságát**[4]. Ehhez, jól látható, nem kell szinkronizáció, csak egy térpontban telő idő.

Változtatva a forrás és a tükör helyzetét megmérhetjük különböző helyekről indítva, különböző irányokba, különböző hosszúságú oda-vissza úton a fény kétutas gyorsaságait. Hasonlóan, amikor a fényjel két vagy több tükröződés után tér vissza a forráshoz – sőt például fényvezető szálon körbefutva –, mérhető a fény **körutas gyorsasága**. A tapasztalatok szerint:

(**L5**) Minden tehetetlenségi megfigyelő terében **a fény körutas gyorsasága ugyanaz bármely pályán** (homogén, izotróp körutas terjedés).

Ez a körutas gyorsaság a $c := (2,99793\dots)10^8\mathrm{m/s}$ természeti állandó.

Jól lássuk, a körutas gyorsaság semmit sem mond az egyutas (csak oda vagy csak vissza) gyorsaságról, nem is mondhat, mert ahhoz szinkronizáció kell.

9.2.3. Távolságok mérése időtartammal

A fény homogén, izotróp körutas sebessége lehetőséget nyújt arra, hogy egy tehetetlenségi megfigyelő terében két pont távolságát annak az időtartamnak a felével mérjük, amely eltelik az egyik pontban az onnan indított és a másik pontról visszaverődő fény indulása és érkezése között. Noha a mindennapjainkban nem élünk ezzel a lehetőséggel, a csillagászatban jól ismert a fényév mint távolság.

A téridőmodell formulái egyszerűbbek lesznek, ha ilyen távolságmérést használunk, ezért elfogadjuk. Ekkor a relativisztikus téridőmodellben a távolságok $\mathbb{D}$ mértékegyenese megegyezik az időtartamok $\mathbb{I}$ mértékegyenesével úgy, hogy

$$\mathrm{m} := (3,336\dots)10^{-9}\mathrm{s}$$

legyen, vagyis ezen választás mellett a fény körutas sebességének az értéke az 1 valós szám.

[3] H. Reichenbach: *The Philosophy of Space and Time*, Dover, 1957

[4] Fizeau is, Foucault is a XIX. század második felében lényegében így mérték meg a fény gyorsaságát

Ekkor persze – a Planck-állandó értékét továbbra is 1-nek tekintve – a tömeg mértékegyenese $\frac{\mathbb{I}}{\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}} = \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}} = \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{I}} = \mathbb{I}^*$ és

$$\text{kg} := (8,55\dots)10^{50}\frac{1}{\text{s}}.$$

9.3. Fényszerű vektorok

Az (**L1**) és (**L5**) tulajdonság szerint a fényjelek tehetetlenségi megfigyelő terében oda-vissza egyenletesen és egyenes pályán mozognak; ebből a téridő affin szerkezete folytán természetesen adódik, hogy (akadálytalan) fényjelek történelme a téridőben egyenes, ugyanúgy, mint a tehetetlen anyagi pontoké.

Emlékezzünk, hogy tehetetlen anyagi pont történelmét leíró egyenest irányítottnak vesszük, az irányítást a sajátidő szerinti korábbi-későbbi adja meg. Noha nem állíthatjuk, hogy egy fényjelnek is múlik a saját ideje (erre semmiféle kísérlet nem ad felvilágosítást), az anyagi pontok eseményeinek korábbi-későbbi relációja – egy visszatükrözött fényjel mindig az indítás után érkezik vissza – irányítást ad meg a fényjelek egyenesein is.

Fényvonalnak nevezzük a fényjelek történelmét leíró irányított egyeneseket.

Ugyanúgy, mint világvonalakkal kapcsolatban mondtuk, a téridő affin szerkezete miatt bármely fényvonal eltoltja szintén fényvonal. Ezért, ismét csak ugyanúgy, mint világvonalak esetén, a fényvonalak összességének meghatározásához mindössze a lehetséges irányvektorokat – nevezzük őket **fény-jövőszerű vektoroknak** – kell meghatároznunk.

Az $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelő terében bármely vektort megkaphatunk tehetetlen anyagi pont pályájaként, azaz minden $\boldsymbol{u}$-térvektort előállíthatunk $\boldsymbol{h} + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$ alakban, ahol $\boldsymbol{h}$ jövőszerű. Minthogy egy $\boldsymbol{a}$ fény-jövőszerű vektorral rendelkező fényvonal pályájának az iránya az $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelő terében $\boldsymbol{a} + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$, megállapíthatjuk (**L2**) alapján, hogy minden $\boldsymbol{h}$ jövőszerű vektorhoz létezik $\boldsymbol{a}$ fény-jövőszerű úgy, hogy $\boldsymbol{a} + \mathbb{I}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{h} + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$. És viszont, minden $\boldsymbol{a}$ fény-jövőszerű vektorhoz létezik $\boldsymbol{h}$ jövőszerű vektor úgy, hogy $\boldsymbol{a} + \mathbb{I}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{h} + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$. Más szóval, minden $\boldsymbol{u}$ esetén

(i) minden $\boldsymbol{h}$-hoz létezik $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{t} \in \mathbb{I}$ úgy, hogy $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{t}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{h}$,

(ii) minden $\boldsymbol{a}$-hoz létezik $\boldsymbol{h}$ és $\boldsymbol{t} \in \mathbb{I}$ úgy, hogy $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{t}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{h}$.

Az (**L3**) tulajdonság szerint jővő-fényszerű vektor nem lehet jövőszerű. Továbbá, ugyanúgy, ahogy a 2.7.4 pontban következtettünk ($\boldsymbol{h} = \boldsymbol{t}^-\boldsymbol{u}^-$), az előbbiekben szereplő időtartamok poztitívok kell legyenek.

Az (**L4**) tulajdonság szerint az előbbi (ii) állításnál több is igaz: ha $\boldsymbol{a}$ fény-jövőszerű, akkor minden $\boldsymbol{u}$ abszolút sebesség és *minden* $\boldsymbol{t} \in \mathbb{I}^+$ esetén $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{t}\boldsymbol{u} \in \mathtt{T}^{\to}$. Véve $\boldsymbol{t} \to 0$ határértéket azt találjuk, hogy $\boldsymbol{a}$ a $\mathtt{T}^{\to}$ határának eleme.

Legyen most $\boldsymbol{b} \neq 0$ a $\mathtt{T}^{\to}$ határának eleme. Ekkor a $\boldsymbol{b}$-t tartalmazó minden nyílt halmaz – így $\boldsymbol{b} + \mathtt{T}^{\to}$ is – belemetsz $\mathtt{T}^{\to}$-be. Ez azt jelenti, hogy minden $\boldsymbol{u}$ esetén van olyan $\boldsymbol{s} > 0$, hogy $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{s}\boldsymbol{u} =: \boldsymbol{h} \in \mathtt{T}^{\to}$. Az előbbi (i) állítás alapján viszont van olyan $\boldsymbol{a}$ fény-jövőszerű vektor és $\boldsymbol{t} > 0$, hogy $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{t}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{s}\boldsymbol{u}$. Az előbbiek szerint $\boldsymbol{a}$ is a $\mathtt{T}^{\to}$ határának az eleme. Ha $\boldsymbol{t}$ nagyobb volna $\boldsymbol{s}$-nél, akkor $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{t} - \boldsymbol{s})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a}$ lenne, ami lehetetlen, mert a bal oldal $\mathtt{T}^{\to}$ eleme (lásd 2.7.4). Hasonlóan lehetetlen az $\boldsymbol{s} > \boldsymbol{t}$ eset. Végereményül $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$, vagyis a $\mathtt{T}^{\to}$ határának minden nem nulla eleme fény-jövőszerű.

Összefoglalva: a **fény-jövőszerű vektorok** összessége

$$\mathtt{L}^{\to} := \partial\mathtt{T}^{\to} \setminus \{0\}.$$

Ennek megfelelően $\mathtt{L}^{\leftarrow} := -\mathtt{L}^{\to}$ a **fény-múltszerű** vektorok összessége, és $\mathtt{L} := \mathtt{L}^{\leftarrow} \cup \mathtt{L}^{\to}$ a **fényszerű** vektorok összessége.

Érdemes itt felidézni a 2.7.4 alfejezet eredményeit.

Világos, hogy $\mathtt{L}^{\to}$ is nulla csúcsú kúp, azaz ha $\boldsymbol{a} \in \mathtt{L}^{\to}$ és $\alpha > 0$ valós szám, akkor $\alpha\boldsymbol{a} \in \mathtt{L}^{\to}$.

Minthogy $\mathtt{T}^{\to}$ lezártja zárt konvex, konvex halmazt kapunk akkor is, ha a lezártból elhagyjuk a nullát, így $\mathtt{T}^{\to} \cup \mathtt{L}^{\to}$ is nulla csúcsú konvex kúp. Ha tehát $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathtt{T}^{\to} \cup \mathtt{L}^{\to}$ és α, β nemnegatív valós számok, $\alpha + \beta \neq 0$, akkor $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in \mathtt{T}^{\to} \cup \mathtt{L}^{\to}$.

Ennél egy kicsit többet is mondhatunk:

Ha $\boldsymbol{a} \in \mathtt{L}^{\to}$ *és* $\boldsymbol{h} \in \mathtt{T}^{\to}$*, akkor* $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h} \in \mathtt{T}^{\to}$*; hasonlóan, ha* $\boldsymbol{a}' \in \mathtt{L}^{\to}$*, akkor* $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}' \in \mathtt{T}^{\to}$*.*

Mivel $\mathtt{T}^{\to}$ nyílt, van a $\boldsymbol{h}$-nak olyan $\mathtt{G}$ nyílt környezete, amely része $\mathtt{T}^{\to}$-nek. Ezért az előbbiek szerint $\boldsymbol{a} + \mathtt{G}$, amely nyílt halmaz, része $\mathtt{T}^{\to} \cup \mathtt{L}^{\to}$-nek, így $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}$ a $\mathtt{T}^{\to} \cup \mathtt{L}^{\to}$ belsejének, azaz $\mathtt{T}^{\to}$-nek eleme.

Ha $\boldsymbol{h} \in \mathtt{T}^{\to}$ *és* $\mathbf{x}$ *akármely a* $\boldsymbol{h}$*-val nem párhuzamos vektor, akkor van olyan nem-nulla* α *szám, hogy* $\mathbf{x} + \alpha\boldsymbol{h} \in \mathtt{L}^{\to}$*.*

Mivel $\mathtt{T}^{\to}$ nyílt, van olyan β, hogy $\boldsymbol{h} + \beta\mathbf{x} \in \mathtt{T}^{\to}$. Ez azonban minden β-ra nem állhat fenn, mert akkor $\mathtt{T}^{\to}$ tartalmazna egy egyenest. Az ilyen β-k szuprémuma vagy infimuma (esetleg mindkettő) mindenképpen véges, és az lesz az α.

9.4. A homogén, izotróp körutas fényterjedés

9.4.1. A körutas fényterjedés formalizálása

Vegyünk egy $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelőt. A megfigyelő egy térpontjából – fényforrásból – indított fényjel érjen el egy másik térpontot – tükröt –, és onnan visszaverődve érkezzen vissza a forráshoz. Legyen $\boldsymbol{a}$, illetve $\boldsymbol{a}'$ a fényjel fény-jövőszerű vektora a forrástól a tükörig, illetve a tükörtől a forrásig.

A fényforrás és a tükör közötti távolság $\sqrt{\boldsymbol{d_u}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = \sqrt{\boldsymbol{d_u}(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{a}')}$ (lásd 2.6). Ezért, a homogén, izotróp kétutas fényterjedés szerint a fényforrásnál az indítás és az érkezés között eltelt idő

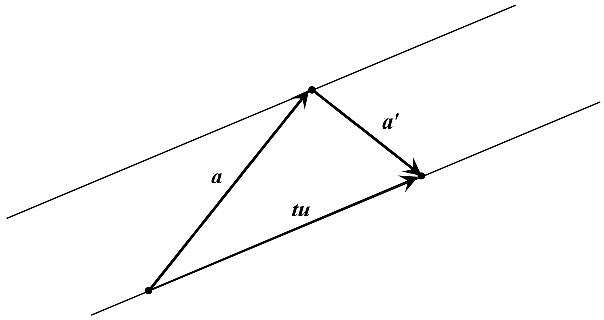
$$\boldsymbol{t} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{d_u}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} + \sqrt{\boldsymbol{d_u}(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{a}')}}{c},$$

ahol c a fény körutas sebessége. Megállapodásunk szerint olyan mértékegyeneseket használunk, amelyekben $c = 1$, ezért a fénysebesség a következőkben nem jelenik meg.

Mivel $\boldsymbol{tu} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}'$ (9.1), megállapíthatjuk, hogy a modellünkben a homogén, izotróp kétutas fényterjedést a következő jellemzi:

Ha $\boldsymbol{u} \in \mathtt{V}(1)$ és $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}'$ az $\mathtt{L}^{\to}$ olyan elemei, hogy valamely $\boldsymbol{t} \in \mathbb{I}$ esetén

$$\boldsymbol{tu} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}', \quad \text{akkor} \quad \boldsymbol{t} = \sqrt{\boldsymbol{d_u}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} + \sqrt{\boldsymbol{d_u}(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{a}')}. \tag{9.1}$$



9.1. ábra. Kétutas fényterjedés

Ekkor az is igaz, hogy

$$\boldsymbol{a} - \sqrt{\boldsymbol{d_u}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{u} = \sqrt{\boldsymbol{d_u}(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{a}')}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{a}'. \tag{9.2}$$

Hasonlóan, több tükrön való visszaverődést tekintve, modellünkben a homogén, izotróp körutas fényterjedést a következő jellemzi:

Ha $\boldsymbol{u} \in \mathtt{V}(1)$, $n \geq 2$ természetes szám és $\boldsymbol{a}_1, \dots \boldsymbol{a}_n$ az $\mathtt{L}^{\to}$ olyan elemei, hogy valamely $\boldsymbol{t} \in \mathbb{I}$ esetén

$$\boldsymbol{tu} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{a}_k, \quad \text{akkor} \quad \boldsymbol{t} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\boldsymbol{d_u}(\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_k)}. \tag{9.3}$$

Mindezek kapcsolatot jelentenek $\boldsymbol{d}$ és $\mathtt{L}^{\to}$ között; más szóval, ha a téridőmodellben a fény körutas homogén, izotróp terjedéséről számot akarunk adni – márpedig akarunk –, akkor nem adhatjuk meg egymástól függetlenül $\boldsymbol{d}$-t és $\mathtt{L}^{\to}$-et.

9.4.2. A megfigyelők standard térvektorai

Az előzőekben a körutas fényterjedésre kapott formulát $n \geq 2$ esetén átírhatjuk $\sum_{k=1}^{n} \left(\boldsymbol{a}_k - \sqrt{\boldsymbol{d_u}(\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_k)}\boldsymbol{u}\right) = 0$ alakba; n nem lehet 1, mert fényszerű vektor és időszerű vektor különbsége nem lehet nulla. Vizsgáljuk meg, milyen tulajdonsággal bírnak azok a vektorok, amelyek a fenti egyenlőség bal oldalán állnak $n = 1$ esetén, vagyis vegyük szemügyre az

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} := \left\{\boldsymbol{a} - \sqrt{\boldsymbol{d_u}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{u} \;\middle|\; \boldsymbol{a} \in \mathtt{L}^{\to}\right\} \cup \{0\} \tag{9.4}$$

halmazt.

Ezt találjuk:

$\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ *háromdimenziós lineáris altér, amely nem tartalmaz sem időszerű, sem fényszerű vektort; speciálisan, transzverzális* $\mathbb{I}\boldsymbol{u}$*-ra.*

Az $\mathtt{L}^{\to}$ pozitív homogenitása miatt $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ is pozitív homogén.

Ha $\boldsymbol{a} \in \mathtt{L}^{\to}$, akkor a 9.3 b) pontját alkalmazva adott $\boldsymbol{t}_0 \in \mathbb{I}^+$ esetén a $\boldsymbol{h} := \boldsymbol{t}_0\boldsymbol{u}$ és az $\boldsymbol{x} := -\boldsymbol{a}$ vektorra azt kapjuk, hogy van olyan α szám, amellyel $-\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{t}_0\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a}' \in \mathtt{L}^{\to}$ teljesül. A $\mathtt{T}^{\to} \cup \mathtt{L}^{\to}$ konvexitása miatt α szükségszerűen pozitív. Más szóval, minden $\boldsymbol{a} \in \mathtt{L}^{\to}$ esetén van olyan pozitív

$t \in \mathbb{I}$ és $a' \in \mathrm{L}^{\to}$, hogy $tu = a + a'$. A homogén, izotróp kétutas fényterjedés formulája (9.1) alapján $\sqrt{d_u(a,a)}u - a = a' - \sqrt{d_u(a',a')}u$. Tehát, ha $q \in \mathbf{E}_u$, akkor $-q \in \mathbf{E}_u$ szintén.

Következésképpen $\mathbf{E}_u$ homogén, azaz ha $q \in \mathbf{E}_u$, akkor $\alpha q \in \mathbf{E}_u$ minden α valós szám esetén.

Ha $a_1, a_2 \in \mathrm{L}^{\to}$, akkor az előbbi gondolatmenetet alkalmazva $-(a_1+a_2)$-re azt kapjuk, hogy van olyan $t \in \mathbb{I}$, amelyre $-(a_1 + a_2) + tu =: a' \in \mathrm{L}^{\to}$. A homogén, izotróp körutas (valójában csak háromutas) fényterjedés formulája alapján, az előzőhöz hasonlóan az adódik, hogy $a_1 - \sqrt{d_u(a_1,a_1)}u + a_2 - \sqrt{d_u(a_2,a_2)}u = \sqrt{d_u(a',a')}u - a'$.

Következésképpen $\mathbf{E}_u$ additív, azaz ha $q_1, q_2 \in \mathbf{E}_u$, akkor $q_1 + q_2 \in \mathbf{E}_u$.

Mindent összevetve tehát $\mathbf{E}_u$ lineáris altér.

Tekintsük most az $\mathbf{M} \to \mathbf{M}/\mathbb{I}u$ kanonikus szürjekciónak az $\mathbf{E}_u$-ra való leszűkítését, azaz az $\mathbf{E}_u \to \mathbf{M}/\mathbb{I}u$, $q \mapsto q + \mathbb{I}u$ lineáris leképezést. Az $\mathbf{E}_u$ nem-nulla $a - \sqrt{d_u(a,a)}u$ elemére $a - \sqrt{d_u(a,a)}u + \mathbb{I}u = a + \mathbb{I}u \neq \mathbb{I}u$ teljesül, ami azt jelenti, hogy a szóban forgó lineáris leképezés injektív. Szürjektív is a 9.3 c) pontja alapján.

Következésképpen $\mathbf{E}_u$ háromdimenziós.

Minthogy $\mathbf{E}_u$ lineáris altér, elég azt megmutatni, hogy sem jövőszerű, sem fény-jövőszerű vektort nem tartalmaz.

Ha $x \in \mathrm{T}^{\to} \cup \mathrm{L}^{\to}$ egyenlő volna az $\mathbf{E}_u$ egy $a - \sqrt{d_u(a,a)}u$ elemével, akkor a egyenlő volna $x + \sqrt{d_u(a,a)}u$-vel, ami a 9.3 a) szerint lehetetlen.

$\mathbf{E}_u$ elemeit az u tehetetlenségi megfigyelő **standard térvektorainak** hívjuk; az elnevezést később megindokoljuk (lásd 10.4).

A továbbiak érdekében jegyezzük meg, hogy (9.2) szerint

$$\mathbf{E}_u = \left\{ \sqrt{d_u(a',a')}u - a' \mid a' \in \mathrm{L}^{\to} \right\} \cup \{0\} \tag{9.5}$$

is igaz, továbbá, ha

$$q = a - \sqrt{d_u(a,a)}u = \sqrt{d_u(a',a')}u - a',$$

akkor

$$d_u(a,a) = d_u(a',a') = d_u(q,q), \tag{9.6}$$

ezért

$$\mathbf{E}_u = \left\{ q \in \mathbf{M} \;\middle|\; q + \sqrt{d_u(q,q)}u \in \mathrm{L}^{\to} \right\} \cup \{0\}. \tag{9.7}$$

Mivel $\mathbf{E}_u$ és $\mathbb{I}u$ kiegészítő alterek, van egy egyértelműen meghatározott $\tau_u : \mathbf{M} \to \mathbb{I}$ lineáris leképzés úgy, hogy

$$\tau_u \cdot u = 1,$$

és

$$\mathbf{E}_u = \{ q \in \mathbf{M} \mid \tau_u \cdot q = 0 \}. \tag{9.8}$$

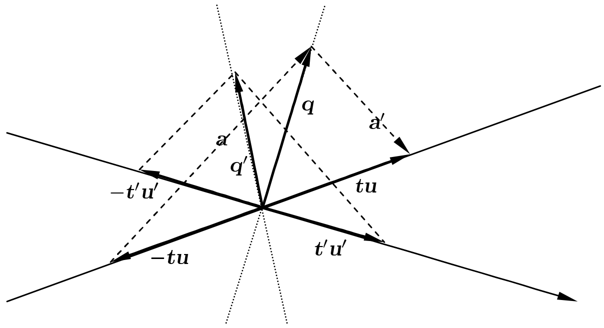
A (9.4) egyenlőség alapján

$$\sqrt{d_u(a,a)} = \tau_u \cdot a \tag{9.9}$$

minden a fény-jövőszerű vektorra; ezt át lehet írni

$$d_u(a,a) - (\tau_u \cdot a)^2 = 0 \qquad (a \in \mathrm{L}^{\to}, u \in \mathrm{V}(1)) \tag{9.10}$$

alakba.



9.2. ábra. $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ és $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}$ különbözők

9.4.3. Különböző megfigyelők, különböző standard térvektorok

Ha $\boldsymbol{u}$ *és* $\boldsymbol{u}'$ *különböző abszolút sebességek, akkor az előző pontban bevezett* $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ *és* $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}$ *lineáris alterek különbözők.*

Legyen $\boldsymbol{q}$ az $\boldsymbol{u}' - (\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u}')\boldsymbol{u}$ többszöröse; $\boldsymbol{q}$ az $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ eleme, hiszen $\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}}$ a nullába képezi. Ezért (9.4), (9.5) és (9.6) szerint van olyan $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{a}'$ fény-jövőszerű vektor és $\boldsymbol{t} \in \mathbb{I}$, hogy

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{t}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{t}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{a}'. \tag{9.11}$$

$\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{a}'$ az $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{u}'$ kifeszítette síkban vannak és nem lehetnek párhuzamosak egymással, mert akkor fényszerű vektor egyenlő volna egy időszerűvel. Tehát a szóban forgó síkot $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{a}'$ is, vagy $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{u}'$ is, vagy $\boldsymbol{a}'$ és $\boldsymbol{u}'$ is kifeszíti.

Tegyük fel, hogy $\boldsymbol{q}$ az $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}$-ban is benne van. Ekkor – értelemszerű jelölésekkel – azt találjuk, hogy

$$\boldsymbol{q} = \alpha\boldsymbol{a} - \boldsymbol{t}'\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{t}'\boldsymbol{u}' - \alpha'\boldsymbol{a}'. \tag{9.12}$$

A (9.11), illetve a (9.12) egyenlőségekből $2\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}' = \alpha\boldsymbol{a} - \alpha'\boldsymbol{a}'$ következik, azaz $(1-\alpha)\boldsymbol{a} = (1-\alpha')\boldsymbol{a}'$. Mivel $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{a}'$ nem párhuzmos egymással, ez csak úgy lehet, ha $\alpha = \alpha' = 1$ Következésképpen $\boldsymbol{t}'\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{t}\boldsymbol{u}$, tehát $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}$ adódik, ami ellentmondás.

Mivel $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ és $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}$ különböző háromdimenziós lineáris alterek a négydimenziós $\mathbf{M}$ vektortérben, a közös részük, $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \cap \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}$ kétdimenziós lineáris altér.

Jegyezzük meg, hogy eredményünk szerint

– $\boldsymbol{u}' - (\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u}')\boldsymbol{u}$ többszörösei az $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ elemei, de nem elemei $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}$-nek;
– $\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{\tau}'_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}'$ többszörösei az $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}$ elemei, de nem elemei $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$-nak.

Továbbá, mivel sem $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ sem $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}$ nem tartalmaz jövőszerű vektort,

$$\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u}' > 0, \quad \text{és} \quad \boldsymbol{\tau}'_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u} > 0$$

kell, hogy teljesüljön.

9.5. Áthúzások

A 2.6.2 pontnak megfelelően az előbbiek szerint természetszerűleg adódik, hogy az $\boldsymbol{u}$-ról az $\boldsymbol{u}'$-re való áthúzás az $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \cap \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}$ elemeit önmagukba képezi. Továbbá az is természetes, hogy az $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \cap \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}$ közös részen kívül eső, az $\boldsymbol{u}$-nak, illetve az $\boldsymbol{u}'$-nek azonos szerepet játszó $\boldsymbol{u}' - (\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u}')\boldsymbol{u}$, illetve $\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{\tau}'_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}'$ vektorokat egymásba képezze. Tehát az áthúzást a

$$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}', \qquad \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q} \qquad (\boldsymbol{q} \in \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \cap \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}),$$

$$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \cdot \big(\boldsymbol{u}' - (\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u}')\boldsymbol{u}\big) = -\big(\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{\tau}'_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}'\big)$$

formulákkal határozzuk meg; a negatív előjel azért kell, mert így lesz az áthúzás irányítástartó.

9.6. Az abszolút Lorentz-forma

9.6.1. A Lorentz-forma származtatása

Minden $\boldsymbol{u}$ esetén adva kell legyen egy $\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}} : \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$ bilineáris, szimmetrikus pozitív szemidefinit leképezés, amelynek a magja $\mathbb{I}\boldsymbol{u}$. Minthogy $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ transzverzális $\mathbb{I}\boldsymbol{u}$-ra, $\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}$ leszűkítése $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$-ra pozitív definit. Ez a leszűkítés adja meg az $\boldsymbol{u}$-tér euklideszi szerkezetét, hiszen $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ reprezentálja a térvektorokat.

Az áthúzásokra kirótt követelmény szerint

$$\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}'}(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

kell, hogy teljesüljön minden $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ vektorra. Ebből és az áthúzás tulajdonságából arra jutunk, hogy $\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}'}$ és $\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}$ leszűkítése $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \cap \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}$-re meg kell, hogy egyezzék:

$$\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}'}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}) \qquad \text{ha} \qquad \boldsymbol{q} \in \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \cap \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}; \tag{9.13}$$

az egyszerűség kedvéért a továbbiakban $|\boldsymbol{q}|^2$ jelöli ezt a mennyiséget.

Ha $\boldsymbol{q} \in \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \cap \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}$, akkor mind $\boldsymbol{q} + |\boldsymbol{q}|\boldsymbol{u}'$, mind $-\boldsymbol{q} + |\boldsymbol{q}|\boldsymbol{u}'$ fény-jövőszerű vektor, tehát (9.10) alapján $\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}(\pm\boldsymbol{q} + |\boldsymbol{q}|\boldsymbol{u}', \pm\boldsymbol{q} + |\boldsymbol{q}|\boldsymbol{u}') = \big(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}} \cdot (\boldsymbol{q} + |\boldsymbol{q}|\boldsymbol{u}')\big)^2$, azaz

$$|\boldsymbol{q}|^2 \pm 2|\boldsymbol{q}|\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u}') + |\boldsymbol{q}|^2\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{u}') = |\boldsymbol{q}|^2(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u}')^2,$$

ami azt eredményezi, hogy

$$\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u}') = 0 \qquad (\boldsymbol{q} \in \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \cap \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}), \tag{9.14}$$

és

$$(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u}')^2 - \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{u}') = 1. \tag{9.15}$$

Az $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{u}'$ szerepcseréjével ugyanilyen összefüggések adódnak, azaz

$$\boldsymbol{d}'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u}) = 0 \qquad (\boldsymbol{q} \in \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \cap \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}),$$

$$(\boldsymbol{\tau}'_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u})^2 - \boldsymbol{d}'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 1.$$

Ugyancsak az áthúzúsok tulajdonsága szerint

$$\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}'}\big(\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{\tau}'_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}', \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{\tau}'_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}'\big) = \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}\big(\boldsymbol{u}' - (\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u}')\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}' - (\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u}')\boldsymbol{u}\big),$$

ami arra vezet, hogy

$$\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}'}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{u}').$$

Ebből a fentiek alapján

$$\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{\tau}'_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u} \tag{9.16}$$

következik.

Egy tetszőleges $\boldsymbol{x}$ téridő-vektor felbontható

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{t}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{t}'\boldsymbol{u}'$$

alakba, ahol $\boldsymbol{q}$ az $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \cap \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}$ eleme, $\boldsymbol{t}$ és $\boldsymbol{t}'$ az $\mathbb{I}$ elemei. (9.14) és (9.15) alapján ez a

$$\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = |\boldsymbol{q}|^2 + (\boldsymbol{t}')^2(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u}')^2$$

egyenlőséget eredményezi. Továbbá

$$\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}} \cdot \mathbf{x} = \boldsymbol{t} + \boldsymbol{t}'\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u}',$$

tehát

$$\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - (\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}} \cdot \mathbf{x})^2 = |\boldsymbol{q}|^2 - \boldsymbol{t}^2 - (\boldsymbol{t}')^2 - 2\boldsymbol{t}\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u}'.$$

Ugyanilyen eredményre jutunk $\boldsymbol{u}$ helyett $\boldsymbol{u}'$-vel is (9.16) felhasználásával, ezért igaz, hogy

$$\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - (\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}} \cdot \mathbf{x})^2 = \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - (\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}'} \cdot \mathbf{x})^2 \tag{9.17}$$

minden $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{u}'$ tehetetlenségi megfigyelőre (abszolút sebességre) és $\mathbf{x}$ téridő-vektorra. Alkalmazva ezt az egyenlőséget $\boldsymbol{y}$-ra és $\mathbf{x} + \boldsymbol{y}$ is azt kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}} \cdot \mathbf{x})(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}'}(\mathbf{x}, \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}'} \cdot \mathbf{x})(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}'} \cdot \mathbf{x}).$$

Ez azt mondja nekünk, hogy van egy $\boldsymbol{g} : \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$ bilineáris, szimmetrikus leképezés úgy, hogy bármely $\boldsymbol{u} \in \mathtt{V}(1)$ esetén

$$\boldsymbol{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{y}) := -(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}} \cdot \mathbf{x})(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{y}). \tag{9.18}$$

Ez a $\boldsymbol{g}$ $\mathbb{I}\boldsymbol{u} \times \mathbb{I}\boldsymbol{u}$-n negatív értékű, $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \times \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$-n pedig pozitív definit, tehát $1-3$ típusú, azaz Lorentz-forma (lásd a matematikai mellékletben a Minkowski-tereket tárgyaló fejezetet).

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért pontszorzást írunk $\boldsymbol{g}$ helyett (kivéve persze, ha valamely oknál fogva hangsúlyozni akarjuk $\boldsymbol{g}$-t):

$$\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{y} := \boldsymbol{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{y}). \tag{9.19}$$

9.6.2. A jövőszerű vektorok

A (9.18) Lorentz-forma és az (9.10) egyenlőség szerint $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ minden fény-jövőszerű $\mathbf{x}$ vektorra, és természetesen minden fényszerűre is. Továbbá $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = -(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{u})^2 = -1$ minden $\boldsymbol{u}$ abszolút sebességre, tehát $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} < 0$ minden jövőszerű $\mathbf{x}$ vektorra, és természetesen időszerűre is. Minthogy $\mathtt{L}^{\to}$ a $\mathtt{T}^{\to}$ határa, kivéve a nullát, a Lorentz-formák tulajdonságainak ismeretében az is igaz, hogy a fényszerű, illetve az időszerű vektorokat a fenti egyenlőség, illetve egyenlőtlenség jellemzi. Az időszerű vektorokon belül a jövőszerűek a Lorentz-forma **nyílirányítását** jelentik. Összefoglalva tehát:

$$\boxed{\mathtt{T}^{\to} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{M} \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} < 0,\ \mathbf{x} \text{ pozitív nyilú}\}. \qquad (9.20)}$$

Következésképpen

$$\mathtt{L}^{\to} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{M} \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0},\ \mathbf{x} \text{ pozitív nyilú}\}, \tag{9.21}$$

és itt a pozitív nyilú azt jelenti, hogy $\mathbf{x}$ a $\mathtt{T}^{\to}$ határában van. Végül

$$\mathtt{V}(1) = \left\{\boldsymbol{u} \in \frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}} \middle| \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = -1,\ \boldsymbol{u} \text{ pozitív nyilú}\right\}. \tag{9.22}$$

9.6.3. A tehetetlenségi időmúlás

Tudjuk a $\boldsymbol{P}$ időmúlásról, hogy ha $\mathbf{x}$ jövőszerű, akkor $\frac{\mathbf{x}}{\boldsymbol{P}(\mathbf{x})}$ abszolút sebesség, tehát $\frac{\mathbf{x}}{\boldsymbol{P}(\mathbf{x})} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\boldsymbol{P}(\mathbf{x})} = -1$. Ezért az időmúlás a Lorentz-formával a következőképp fejezhető ki:

$$\boxed{\boldsymbol{P}(\mathbf{x}) = \sqrt{-\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} \qquad (\mathbf{x} \in \mathtt{T}^{\rightarrow}). \qquad (9.23)}$$

9.6.4. Az euklideszi szerkezetek

Minthogy a $\boldsymbol{q}$ vektor akkor és csak akkor van $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$-ban, ha $\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{q} = 0$, a Lorentz-forma definíciójából látható, hogy $\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{q} = \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})$ minden $\boldsymbol{u}$ abszolút sebesség és $\boldsymbol{q} \in \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ esetén. Így (9.7) és (9.21) azt eredményezi, hogy $\boldsymbol{q}$ akkor és csak akkor van $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$-ban, ha $(\boldsymbol{q} + \sqrt{\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{q}}\ \boldsymbol{u}) \cdot (\boldsymbol{q} + \sqrt{\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{q}}\ \boldsymbol{u}) = 0$, amiből megállapíthatjuk, hogy

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} = \{\boldsymbol{q} \in \mathbf{M} \mid \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{q} = 0\}.$$

Tehát bármely $\mathbf{x}$ vektorra a $\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}} \cdot \mathbf{x} = 0$ egyenlőség egyenértékű azzal, hogy $\boldsymbol{u} \cdot \mathbf{x} = 0$; mi több, $\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u} = 1 = -\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}$, ezért

$$\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}} \cdot \mathbf{x} = -\boldsymbol{u} \cdot \mathbf{x} \qquad (\mathbf{x} \in \mathbf{M}) \qquad (9.24)$$

Végülis:

$$\boxed{\begin{gathered} \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{y} + (\boldsymbol{u} \cdot \mathbf{x})(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{g}\big(\mathbf{x} - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}} \cdot \mathbf{x}), \boldsymbol{y} - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{y})\big) \quad (9.25) \\ (\boldsymbol{u} \in \mathtt{V}(1) \quad \text{és} \quad \mathbf{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{M}), \end{gathered}}$$

ahol kiírtuk $\boldsymbol{g}$-t, hogy hangsúlyozzuk a (4.5) formulával fennálló hasonlóságot.

10. A relativisztikus téridőmodell

Az előző fejezetben tárgyalt – **speciális relativisztikusnak** nevezett – téridő-modellhez úgy jutottunk el, hogy az általában elfogadottakon túl feltettük:

A fényterjedés a téridőben a 9.2 alfejezetben felsorolt tulajdonságokkal rendelkezik.

A fényjelek leírása összeférhetetlen az abszolút egyidejűséggel. Ezért itt nem érvényesek a nemrelativisztikus téridőmodellnek azok a tulajdonságai, amelyek az abszolút egyidejűségből származnak, és amelyek beleivódtak a hétköznapi gondolkodásba. Óvatosnak kell tehát lennünk, nehogy áthozzuk ide a nemrelativisztikus esetben érvényes gondolatokat.

Ebben a fejezetben az előzőek felhasználása nélkül – vagyis anélkül, hogy hivatkoznánk arra, hogyan jutottunk el hozzá – definiáljuk e modellt, majd tárgyaljuk a tulajdonságait. Úgy tekintjük, mintha az előző fejezet nem is létezne, hogy azok is, akik azt átugrották, tökéletesen megértsék a speciális relativisztikus téridőmodellt. Ezért sok minden, ami már megjelent az előző fejezetben, itt újra felbukkan mint újdonság, igaz esetleg egy kicsit más oldalról megközelítve.

Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban a „speciális” jelzőt elhagyjuk.

10.1. A modell alaptulajdonságai

10.1.1. A modell új jelölése

A relativisztikus téridőmodellt az általános $(\mathtt{M}, \mathbb{I}, \mathbb{D}, \mathtt{T}^{\to}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{d})$ helyett az egyszerűbb és kifejezőbb jelölés kedvéért az $(\mathtt{M}, \mathbb{I}, \boldsymbol{g})$ szimbólummal határozzuk meg, ahol

– $\mathtt{M}$ a **téridő**, négydimenziós irányított affin tér (az $\mathbf{M}$ vektortér fölött),

– $\mathbb{I}$ az **időtartamok és távolságok** mértékegyenese,

– $\boldsymbol{g} : \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$ nyílirányított Lorentz-forma, **az időmúlások és az euklideszi szerkezetetek** kifejezője,

amelyet az egyszerűség kedvéért többnyire pontszorzásként írunk, azaz $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} := \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, továbbá felhasználjuk a matematikai mellékletnek a Minkowski-terekre vonatkozó fogalmait és jelöléseit (pszeudohossz), valamint eredményeit (fordított Cauchy-egyenlőtlenség, fordított háromszög-egyenlőtlenség), és amellyel

– a jövőszerű vektorok halmaza

$$\mathtt{T}^{\to} := \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{M} \mid \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} < 0,\ \boldsymbol{x} \text{ pozitív nyilú}\},$$

– a tehetetlenségi időmúlás $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) := \sqrt{-\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = |\boldsymbol{x}|$ $(\boldsymbol{x} \in \mathtt{T}^{\to})$,

aminek következtében az abszolút sebességek halmaza

$$\mathtt{V}(1) := \left\{ \boldsymbol{u} \in \frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}} \,\middle|\, \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = -1,\ \boldsymbol{u} \text{ pozitív nyilú} \right\},$$

– $\mathbb{D} = \mathbb{I}$, és a tehetetlenségi megfigyelők euklideszi szerkezeteit

$$\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{y})\big) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x})(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{y}) \tag{10.26}$$

$$(\boldsymbol{u} \in \mathtt{V}(1) \ \text{ és } \ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{M})$$

adja meg.

Vegyük észre azt a nagy jelentőségű különbséget, hogy az időmúlást és az euklideszi szerkezeteket nemrelativisztikusan két külön matematikai objektum – $\boldsymbol{\tau}$ és $\boldsymbol{b}$ – írja le, míg relativisztikusan ezek egyetlen matematikai objektumból – $\boldsymbol{g}$-ből – származnak.

További elnevezések (lásd 2.3.2):

$$\mathtt{T}^{\leftarrow} := -\mathtt{T}^{\to}, \qquad \mathtt{T} := \mathtt{T}^{\leftarrow} \cup \mathtt{T}^{\to} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{M} \mid \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} < 0\}$$

a **múltszerű**, illetve az **időszerű vektorok** halmaza,

$$\mathtt{L}^{\to} := \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{M} \mid \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = 0,\ \boldsymbol{x} \text{ pozitív nyilú}\}$$

a **fény-jövőszerű** vektorok halmaza,

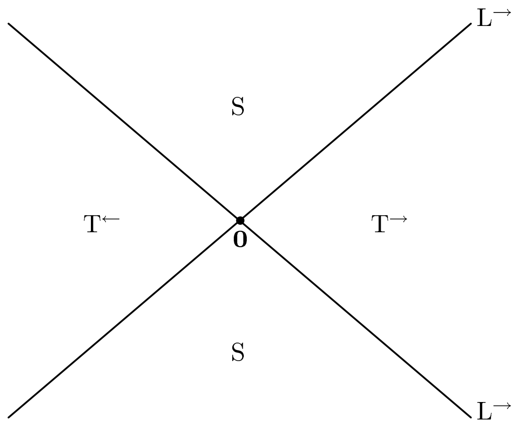
$$\mathtt{L}^{\leftarrow} := -\mathtt{L}^{\to}, \qquad \mathtt{L} := \mathtt{L}^{\leftarrow} \cup \mathtt{L}^{\to} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{M} \mid \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = 0,\ \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}\}$$

a **fény-múltszerű**, illetve a **fényszerű vektorok** halmaza,

$$\mathtt{S} := \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{M} \mid \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} > 0\} \cup \{0\}$$

a **térszerű vektorok** halmaza

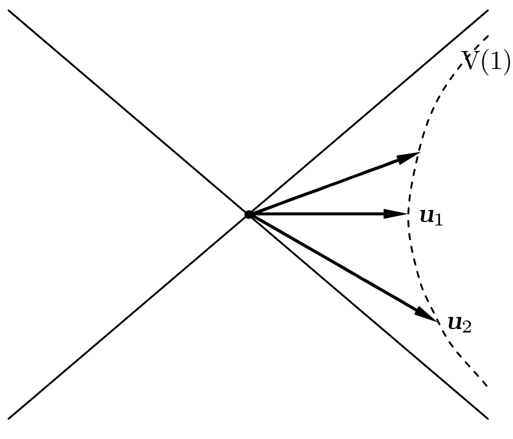
A téridővektorok fenti osztályozását a 10.1 ábrán szemléltetjük, amit az aritmetikai Lorentz-forma (lásd 10.2) sugall két változóban, a koordinátatengelyek elhagyásával. Vigyázat, a rajz egy kissé félrevezető, mert az időszerű vektorok halmazát és a térszerűekét azonos formában mutatja; jobb képet kapunk, ha három dimenzióban próbáljuk láttatni őket úgy, hogy az ábrát megforgatjuk egy „vízszintes" tengely körül.



10.1. ábra. Téridővektorok

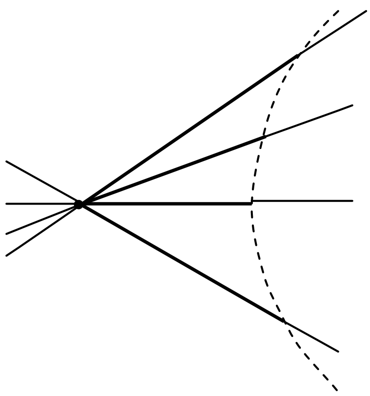
Az abszolút sebességek összessége háromdimenziós részsokaság $\frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}}$-ben, amelyet a 10.2 ábra szemléltet. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy
- nincs nulla abszolút sebesség,
- nem értelmes az abszolút sebesség nagysága,
- nem értelmes két abszolút sebesség bezárta szög;

legyünk vigyázatosak, a szemléltetés tulajdonságai ne vezessenek félre: az ábrán levő $\boldsymbol{u}_2$ nem hosszabb, mint $\boldsymbol{u}_1$, nincs az $\boldsymbol{u}_1$ és $\boldsymbol{u}_2$ által bezárt szög, $\boldsymbol{u}_1$ nem középvonala a $\mathtt{T}^{\to}$ kúpnak.



10.2. ábra. Abszolút sebességek

A különböző abszolút sebességű egyeneseken eltelt azonos időtartamokat az ábráinkon általában különböző hosszúságú szakaszok szemléltetnek. Minél nagyobb szöget zár be az ábrán az abszolút sebesség a vízszintessel, annál hoszszabb szakasz jelöl ugyanolyan időtartamot; azonos hosszúság felel meg azonos időtartamnak két olyan abszolút sebesség esetén, amelyek a vízszintessel – fölötte és alatta – azonos szöget zárnak be. Ezért, ha két abszolút sebességgel kapcsolatos összefüggéseket tárgyalunk, szemléltetésként mindig ilyen abszolút sebességeket rajzolunk. Végezetül ismét hangsúlyozzuk, hogy vízszintes (az időszerű kúp felezővonala) és bezárt szög nem értelmes a modellben, ezek csak a szemléltető ábrák tulajdonságai.



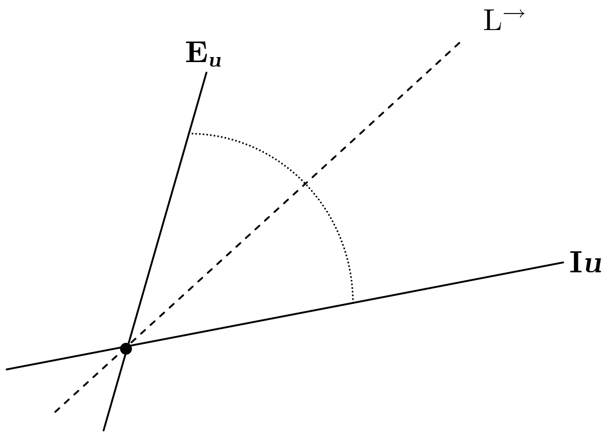
10.3. ábra. Azonos időtartamok

10.1.2. Néhány fontos tudnivaló

A fordított Cauchy-egyenlőtlenség szerint fennáll az igen fontos

$$-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}' \geq 1 \qquad (\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}' \in V(1)),$$

összefüggés, amelyben egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}'$.



10.4. ábra. $\boldsymbol{u}$-térszerű vektorok

Ha $\boldsymbol{u} \in \mathtt{V}(1)$, akkor

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} := \{\boldsymbol{q} \in \mathbf{M} \mid \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{q} = 0\}$$

háromdimenziós térszerű altér $\mathbf{M}$-ben, az elemeit **$\boldsymbol{u}$-térszerűeknek** hívjuk; a Lorentz-forma leszűkítése $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$-ra **euklideszi szerkezet** (azaz pozitív definit). Ha $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p} \in \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$, akkor

$$\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}).$$

A szemléltetés szabályai szerint $\boldsymbol{u}$ és $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ fénykúp vonalával azonos szöget zár be (lásd a 10.4 ábrát); jegyezzük meg, hogy ezeknek a szögeknek a modellben nincs értelme, ezek a lap síkjában létező fogalmak, amelyeket felhasználunk a szemléltetéshez.

Igen könnyű belátni, hogy ha $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{u}'$, akkor $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \neq \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}$. Ez a Lorentz-forma tulajdonságainak egyszerű következménye, de közvetlenül is megmutathatjuk:

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} := \frac{\boldsymbol{u}'}{-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}'} - \boldsymbol{u} \in \frac{\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}}{\mathbb{I}} \tag{10.27}$$

az $\frac{\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}}{\mathbb{I}}$ eleme de nem eleme $\frac{\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}}{\mathbb{I}}$-nek. Sőt, a fenti vektor merőleges a metszet-altérre, hiszen ha $\boldsymbol{q} \in \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \cap \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}$, akkor $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{q} = \boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{q} = 0$. Ugyanígy,

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'} := \frac{\boldsymbol{u}}{-\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u}' \in \frac{\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}}{\mathbb{I}} \tag{10.28}$$

merőleges a metszet-altérre.

Érdemes jól megjegyezni, hogy mind $\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}$, mind $\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'}$ merőleges a metszet-altérre:

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \perp \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \cap \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'} \perp \mathbf{v}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'}.$$

Minthogy $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ és $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}$ egymással nem egyenlő háromdimenziós lineáris altér $\mathbf{M}$-ben, a metszetük, $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \cap \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}$ kétdimenziós lineáris altér.

10.1.3. A relativisztikus faktor

Az $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{u}'$ tehetetlenségi megfigyelőkre vonatkozó formulákban minduntalan felbukkan a $-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}'$ mennyiség, az $\boldsymbol{u}'$ és $\boldsymbol{u}$ közötti **relativisztikus faktor**.

Az (10.27) és (10.28) formulákkal bevezetett mennyiségekre

$$|\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}|^2 = |\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'}|^2 = 1 - \frac{1}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}')^2} < 1 \tag{10.29}$$

áll fönn, tehát

$$-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}' = \frac{1}{\sqrt{1-|\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-|\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'}|^2}}; \tag{10.30}$$

ez a relativisztikus faktor szokásos alakja, ugyanis később látni fogjuk, hogy $\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}$ az $\boldsymbol{u}'$-nek az $\boldsymbol{u}$-ra vonatkozó standard relatív sebessége, $\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'}$ pedig az $\boldsymbol{u}$-nak az $\boldsymbol{u}'$-re vonatkozó standard relatív sebessége.

10.1.4. Duálisok

Az $\mathbf{M}$ duálisa, $\mathbf{M}^*$, az $\mathbf{M} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezések, a kovektorok összessége szintén négydimenziós vektortér, amely a $\boldsymbol{g}$ Lorentz-forma segítségével természetes kapcsolatba hozható $\mathbf{M}$-mel, pontosabban a következő **Lorentz-azonosítást** tehetjük:

$$\frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}} \equiv \mathbf{M}^*, \qquad \frac{\mathbf{x}}{\mathrm{s}^2} \equiv \frac{\boldsymbol{g}(\mathbf{x},\cdot)}{\mathrm{s}^2}.$$

Másképp is felfoghatjuk ugyanezt: $\mathbf{M}$ elemei azonosíthatók $\mathbf{M} \to \mathbb{I}\otimes\mathbb{I}$ lineáris leképezésekkel: $\mathbf{x} \equiv \boldsymbol{g}(\mathbf{x}, \cdot)$. Ez tükröződik a már korábban is elfogadott megállapodásunkban, hogy $\boldsymbol{g}$ helyett pontszorzást írunk.

Ez a szokásos szempontból azt jelenti: $\mathbf{M}$ koordinátázásával „felső indexes" számnégyeseket kapunk, $\mathbf{M}^*$ koordinátázásával „alsó indexes" számnégyeseket, és „átjárás van" közöttük, azaz megfeleltetés létesíthető a felső indexes mennyiségek és alsó indexes mennyiségek között. Erre később visszatérünk.

10.1.5. Sajátidők

Egy anyagi pont történelme világvonal a téridőben. A $\mathtt{C}$ világvonal x és y pontja között eltelt sajátidő 2.4.2 szerint a világvonal tetszőleges előrehaladó p paraméterezésével most

$$\boldsymbol{t}_{\mathtt{C}}(x, y) = \int_{p^{-1}(x)}^{p^{-1}(y)} |\dot{p}(a)| da,$$

ahol $|\ |$ a pszeudohosszat jelöi, azaz $|\dot{p}(a)| = \sqrt{-\dot{p}(a) \cdot \dot{p}(a)}$.

Legyen y jövőszerű x-hez képest (azaz $y - x \in \mathtt{T}^{\to}$). Vegyük a fenti integrálnak egy közelítő összegét úgy, hogy egyetlen közbülső z pontot választunk. A közelítő érték ekkor az x-től a z-ig és a z-től az y-ig haladó egyenesen eltelt tehetetlenségi idő összege, azaz $|(z - x)| + |y - z|$; a fordított háromszögegyenlőtlenség szerint ez kisebb, mint az x-től az y-ig eltelt tehetetlenségi idő, $|y - x|$ (kivéve, persze, ha a három világpont egy egyenesbe esik). Újabb osztópontok választásával az újabb közelítő összeg még kisebb lesz.

Eredményül ezt kapjuk:

Ha $\boldsymbol{t}(x, y)$ jelöli az x és a hozzá képest jövőszerű y világpont között eltelt tehetetlenségi időt és $\mathtt{C}$ nem-tehetetlenségi világvonal, amely összeköti x-et és y-t akkor

$$\boldsymbol{t}_{\mathtt{C}}(x, y) < \boldsymbol{t}(x, y).$$

10.2. Az aritmetikai téridőmodell

Valós számokból felépíthetünk egy speciális relativisztikus téridőmodellt, amelyet **aritmetikainak** nevezünk. Ebben

- $\mathtt{M} = \mathbb{R}^4$ a standard irányítással (ekkor $\mathbf{M} = \mathbb{R}^4$ szintén),
- $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ a standard irányítással,
- $\boldsymbol{g}$ a szokásos Lorentz-forma $\mathbb{R}^4$-en, azaz

$$\boldsymbol{g}((\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3), (\eta^0, \eta^1, \eta^2, \eta^3)) = -\xi^0\eta^0 + \sum_{i=1}^{3} \xi^i\eta^i,$$

amellyel

$$\mathtt{T}^{\to} = \{(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3) \mid -(\xi^0)^2 + \sum_{i=1}^{3}(\xi^i)^2 < 0,\ \xi^0 > 0\}.$$

Továbbá itt

$$\mathtt{V}(1) = \{(\nu^0, \nu^1, \nu^2, \nu^3) \mid -(\nu^0)^2 + \sum_{i=1}^{3} (\nu^i)^2 = -1,\ \nu^0 > 0\}.$$

Ismételjük el: az aritmetikai téridőmodellben
– az $\mathtt{M}$ téridő és a téridővektorok $\mathbf{M}$ összessége ugyanaz a halmaz.
– $\mathbb{I}$ a valós egyenes, ezért minden mértékegyenes is $\mathbb{R}$, tehát például $\frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}} = \frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}} = \mathbb{R}^4$, stb.

A szokásos formuláknak megfelelően $\mathbf{M}^* \equiv \mathbb{R}^4$ és a duális vektorok komponenseit alsó indexszel látjuk el: ha $\boldsymbol{k} = (\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ és $\boldsymbol{x} = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$, akkor $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} = \kappa_0\xi^0 + \kappa_1\xi^1 + \kappa_2\xi^2 + \kappa_3\xi^3$.

A Lorentz-forma indukálta $\mathbf{M} \equiv \mathbf{M}^*$ azonosítás a

$$(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3) \mapsto (-\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3) =: (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

leképezés. Ennek megfelelően a Lorentz-szorzást kényelmes

$$-\xi^0\eta^0 + \sum_{i=1}^{3} \xi^i\eta^i = \sum_{\alpha=0}^{3} \xi_\alpha\eta^\alpha$$

alakba írni.

10.3. Izomorfizmusok

A modellek izomorfizmusa igen fontos fogalom: az mondja meg, hogy két formailag különböző modell azonos fizikai tartalommal bír-e vagy sem (lásd 2.8.2).

10.3.1. Izomorfizmusok alakja

Mivel relatiavisztikus téridőmodellekben az időtartamok és a távolságok mértékegyenese ugyanaz, az izomorfizmusok általános meghatározásában (lásd 2.8.2) szereplő $\boldsymbol{B}$ és $\boldsymbol{Z}$ megegyezik, ezért az $(L, \boldsymbol{B})$ pár izomorfizmus az $(\mathtt{M}, \mathbb{I}, \boldsymbol{g})$ és az $(\mathtt{M}', \mathbb{I}', \boldsymbol{g}')$ relativisztikus téridőmodell között, ha

(i) $L : \mathtt{M} \to \mathtt{M}'$ irányítás- és nyílirányítástartó affin bijekció (az $\boldsymbol{L} : \mathbf{M} \to \mathbf{M}'$ lineáris bijekció fölött),

(ii) $\boldsymbol{B} : \mathbb{I} \to \mathbb{I}'$ irányítástartó lineáris bijekció,

amelyek „megfelelő módon” átviszik $\mathtt{T}^{\to}$-t $(\mathtt{T}^{\to})'$-be, $\boldsymbol{P}$-t $\boldsymbol{P}'$-be és $\boldsymbol{d}$-t $\boldsymbol{d}'$-be. Minthogy $\boldsymbol{g}$ határozza meg $\mathtt{T}^{\to}$-t, $\boldsymbol{P}$-t és $\boldsymbol{d}$-t is, az álalánosan kimondott három feltétel egybe foglalható:

$$\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{B})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{M}$ esetén.

10.3.2. Relativisztikus téridőmodellek izomorfak

Ezután egyszerűen megmutathatjuk:

Bármely relativisztikus téridőmodell izomorf az aritmetikaival, aminek egyenes következménye, hogy bármely két relativisztikus téridőmodell izomorf egymással.

Tekintsünk ugyanis egy $(\mathtt{M}, \mathbb{I}, \boldsymbol{g})$ relativisztikus téridőmodellt.
Vegyünk
– egy $\mathrm{s} \in \mathbb{I}^+$ időegységet,
– egy o „kezdőpontot” $\mathtt{M}$-ben,
– egy $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, s-re normált pozitívan irányított $\boldsymbol{g}$-ortogonális bázist $\mathbf{M}$-ben úgy, hogy $\boldsymbol{e}_0$ jövőszerű,
és legyen

$$L : \mathtt{M} \to \mathbb{R}^4, \qquad x \mapsto \{x - o \text{ koordinátái az } \boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \text{ bázisban } \},$$

$$\boldsymbol{B} : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, \qquad \boldsymbol{t} \mapsto \frac{\boldsymbol{t}}{\mathrm{s}}.$$

Könnyű ellenőrizni, hogy ezek valóban izomorfizmust létesítenek a két téridőmodell között.

Az izomorfizmusról szóló eredményünk azt mondja, hogy minden relativisztikus téridőmodellnek ugyanaz a fizikai tartalma, bármelyiket ugyanolyan joggal használhatjuk. Mégsem egészen mindegy, hogy melyiket. Gyakorlati szempontból, azaz konkrét feladatok megoldására, konkrét számítások elvégzésére például igen jó az aritmetikai téridőmodell (egy alkalmas koordinátázás által, lásd később). Elméleti meggondolásokra azonban egy speciális modell kevésbé alkalmas, mert egy ilyennek lehetnek olyan többlet-tulajdonságai,
– amelyeknek semmi köze a modell struktúrájához, és ezek vigyázatlanul mégis a modell tulajdonságainak vélhetők,
– amelyek elfedik a modell struktúrájának lényeges vonásait.
A mondottak fényében újra hangsúlyozzuk: nem eleve rossz az aritmetikai téridőben (koordinátákban) dolgozni, hiszen minden relativisztikus téridőmodell fizikai tartalma ugyanaz, általános meggondolásokra mégis jobb kerülni az aritmetikait, mert könnyen tévútra vezethetnek a speciális tulajdonságai, nevezetesen:
– a téridő pontjai és a téridővektorok egybeesnek,
– a téridő pontjai mint időpontok és térpontok együttese jelenik meg (ezt később pontosan megmutatjuk),
– minden mértékegyenes a valós egyenes, vagyis a fizikai dimenziók nem különülnek el,
hogy csak a legalapvetőbbeket említsük. Ha azt akarjuk, hogy ne csússzunk el, állandóan ellenőrizni kell, van-e annak valódi (fizikai) értelme, amit a speciális keretek között mondunk, és ez egyrészt igencsak fáradságos, másrészt valami apróság könnyen elkerülheti a figyelmünket.

10.3.3. Lorentz- és Poincaré-transzformációk

Az $(\mathtt{M}, \mathbb{I}, \boldsymbol{g})$ téridőmodellben a **Lorentz-transzformációk** olyan $\boldsymbol{L} : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ lineáris bijekciók, amelyekre
$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{M}$ esetén.
A **Poincaré-transzformációk** pedig a Lorentz-transzformációk fölötti $\boldsymbol{L} : \mathtt{M} \to \mathtt{M}$ affin bijekciók.

Azokat a Lorentz- illetve Poincaré-transzformációkat, amelyek irányítás- és nyílirányítástartók **valódi Lorentz- illetve valódi Poincaré-transzformációknak** nevezzük. Az általános definíció szerint (lásd 2.8.3) ezek a relativisztikus téridőmodell **(vektori) szimmetriái**.

10.4. Tehetetlenségi megfigyelő tere és térvektorai

10.4.1. Térvektorok standard reprezentációja

Emlékezzünk (lásd 2.5.3), hogy az $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelő tere az $\boldsymbol{u}$ vezette egyenesek $\mathtt{M}$-ben,

$$\mathtt{E}_{\boldsymbol{u}} := \mathtt{M}/\mathbb{I}\boldsymbol{u},$$

és térvektorai az $\boldsymbol{u}$ vezette egyenesek $\mathbf{M}$-ben, összességük $\mathbf{M}/\mathbb{I}\boldsymbol{u}$.

Az $\boldsymbol{u}$-térpontok $x + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$ alakúak, az $\boldsymbol{u}$-térvektorok $\mathbf{x} + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$ alakúak. $\mathtt{E}_{\boldsymbol{u}}$ affin tér $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ fölött az

$$(x + \mathbb{I}\boldsymbol{u}) - (y + \mathbb{I}\boldsymbol{u}) = (x - y) + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$$

kivonással.

Az így meghatározott térvektorok nem szemléletesek és körülményesen kezelhetők.

Nemrelativisztikusan az abszolút térszerű vektorokkal természetszerűleg reprezentálhattuk minden tehetetlenségi megfigyelő térvektorait. Most ennél kevésbé egyszerű a helyzet, nem egyetlen háromdimenziós altér van, amely transzverzális minden abszolút sebességre. A Lorentz-forma viszont kitüntet egy háromdimenziós térszerű vektorteret minden tehetetlenségi megfigyelőhöz; az $\boldsymbol{u}$-hoz az

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{M} \mid \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{x} = 0\}$$

vektorteret.

Az $\mathbb{I}\boldsymbol{u}$ és $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ transzverzalitása miatt az $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelő térvektorait természetszerűleg (standard módon) azonosíthatjuk az $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ elemeivel annak alapján, hogy az

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \to \mathbf{M}/\mathbb{I}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{q} \mapsto \boldsymbol{q} + \mathbb{I}\boldsymbol{u} \tag{10.31}$$

hozzárendelés lineáris bijekció.

Vezessük be a

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \mathbf{x} := \mathbf{x} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u} \cdot \mathbf{x}) \tag{10.32}$$

jelölést. Nyilvánvaló, hogy

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} = \mathbf{1} + \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} : \mathbf{M} \to \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$$

lineáris ráképezés. Könnyű látni azt is, hogy

$$\mathbf{M}/\mathbb{I}\boldsymbol{u} \to \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}, \quad \mathbf{x} + \mathbb{I}\boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \mathbf{x}$$

az 10.31 lineáris bijekció inverze.

Az említett azonosítás tehát

$$\mathbf{E} \equiv \mathbf{M}/\mathbb{I}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{q} \equiv \boldsymbol{q} + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$$

ugyanez másként,

$$\mathbf{M}/\mathbb{I}\boldsymbol{u} \equiv \mathbf{E}, \qquad \mathbf{x} + \mathbb{I}\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \mathbf{x}.$$

Ezen azonosítás alapján a továbbiakban $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ elemeit tekintjük az $\boldsymbol{u}$ megfigyelő térvektorainak, és **$\boldsymbol{u}$-térszerű vektoroknak** hívjuk őket.

A (10.26)-ban meghatározott euklideszi szerkezetet az $\boldsymbol{u}$-térszerű vektorokon a Lorentz-forma leszűkítése adja meg.

Tehát $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ háromdimenziós euklideszi tér, amely természetes módon ellátható irányítással is: az $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$-nak $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ rendezett bázisa legyen pozitív irányítású, ha $(\boldsymbol{tu}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ az $\mathbf{M}$-nek pozitív irányítású bázisa az $\mathbb{I}$ valamely (és egyben tetszőleges) pozitív $\boldsymbol{t}$ elemével. Minden további is elmondhatunk róla, amit $\mathbf{E}$-ről a nemrelativisztikus esetben (vektorok hossza, bezárt szöge, axiális vektorok stb.).

Vezessük be a

$$\sigma_{\boldsymbol{u}}(x) := x + \mathbb{I}\boldsymbol{u};$$

jelölést; $\sigma_{\boldsymbol{u}}(x)$ az x villanatot tartalmazó $\boldsymbol{u}$-térpont.

A fenti azonosításnak megfelelően a kivonás az $\boldsymbol{u}$ terében:

$$\sigma_{\boldsymbol{u}}(x) - \sigma_{\boldsymbol{u}}(y) = (x + \mathbb{I}\boldsymbol{u}) - (y + \mathbb{I}\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot (x - y) \tag{10.33}$$

lesz. Másképpen ugyanez: ha q és p a tehetetlenségi megfigyelő $\mathtt{E}_{\boldsymbol{u}}$ terének pontjai, akkor

$$q - p = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot (x - y) \qquad (x \in q,\ y \in p), \tag{10.34}$$

ami egyenértékű azzal, hogy

$$q - p = x - y \qquad (x \in q,\ y \in p,\ x - y \in \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}).$$

Figyeljünk fel arra, hogy (10.33) szerint $\sigma_{\boldsymbol{u}} : \mathtt{M} \to \mathtt{E}_{\boldsymbol{u}},\ x \mapsto x + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$ affin leképezés a $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} : \mathbf{M} \to \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ lineáris leképezés fölött.

10.4.2. Különböző megfigyelők, különböző standard térvektorok

A 10.1.2 pontban mondottak szerint ha $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{u}'$, akkor $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \neq \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}$. Ez azt jelenti, hogy nincs egyetlen olyan háromdimenziós altér, amellyel természetes módon azonosíthatnánk minden tehetetlenségi megfigyelő térvektorait: $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{u}'$ esetén $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \neq \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}$. Ezért a következőt mondhatjuk:

Különböző tehetetlenségi megfigyelők terei **különböző** háromdimenziós affin terek **különböző** vektorterek fölött.

Fontos megjegyezni, hogy a különböző megfigyelők térvektorainak különbözősége elvész a szokásos koordinátás tárgyalásban, mert ott bármely tehetetlenségi megfigyelő térvektorait $\mathbb{R}^3$-mal reprezentálják.

Az ábrákon való szemléltetés szabálya szerint $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$-t olyan egyenessel jelenítjük meg, amely ugyanakkora szöget zár be a fénykúp vonalával, mint amekkora szöget $\boldsymbol{u}$. Hangsúlyozzuk, természetesen a bezárt szögnek itt nincs fizikai értelme, ez csak a szemléltetés szabályához tartozik.

10.4.3. Áthúzások

Tudjuk, értelmezni kell, mit jelent az, hogy egy tehetetlenségi megfigyelő terében egy vektor (egy egyenes) egyenlő (párhuzamos) egy hozzá képest mozgó megfigyelő terében egy vektorral (egyenessel), azaz meg kell adnunk minden $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{u}'$ esetén az $\boldsymbol{u}$-ról az $\boldsymbol{u}'$-re való **áthúzást** (lásd 2.6.2).

A megfigyelő-térvektorokra vonatkozó ismereteink alapján az áthúzás természetes tulajdonságai

$$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u} := \boldsymbol{u}', \qquad \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{q} =: \boldsymbol{q} \quad (\boldsymbol{q} \in \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \cap \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'})$$

összefüggések. Továbbá meg kell tartania az euklideszi szerkezeteket (hosszakat és szögeket); a 10.1.2-ben mondottak alapján ez akkor teljesül, ha

$$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{u}'}{-\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u}\right) := -\left(\frac{\boldsymbol{u}}{-\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}'} - \boldsymbol{u}'\right);$$

a negatív előjel az irányítástartás miatt kell. Jól láthatóan ez valódi Lorentz-transzformáció (lásd 10.3.3), azaz vektori szimmetria, amint azt el is várjuk.

Egyszerű ellenőrizni, hogy tömör képletben

$$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} = \mathbf{1} + \frac{(\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}) \otimes (\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u})}{1 - \boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{u}} - 2\boldsymbol{u}' \otimes \boldsymbol{u}, \tag{10.35}$$

ugyanis a jobb oldali leképezés az előírt tulajdonságokkal rendelkezik. Ezzel azt sem nehéz belátni, hogy

$$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'} = \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}^{-1}. \tag{10.36}$$

Ennél egy kicsit körülményesebb megmutatni:

$$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}'',\boldsymbol{u}'}\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}',\boldsymbol{u}} \neq \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}'',\boldsymbol{u}}, \tag{10.37}$$

általában; egyenlőség pontosan akkor áll, ha $\mathbf{u}$,$\mathbf{u}'$ *és* $\mathbf{u}''$ *egy síkban vannak.*

Ha egy síkban vannak, mondjuk $\boldsymbol{u}'' = \alpha\boldsymbol{u} + \alpha'\boldsymbol{u}'$, akkor közvetlen számolással igyazolható a fenti két oldal egyenlősége.

Tegyük fel, hogy a fenti két oldal egyenlő, és $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}'$, $\boldsymbol{u}''$ különbözők. Alkalmazzuk mindkét oldalt tetszőleges $\boldsymbol{q} \in \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \cap \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}''}$ vektorra. Az eredmény $\boldsymbol{q} + (\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{q})f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}', \boldsymbol{u}'') = \boldsymbol{q}$ lesz, ahol $f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}', \boldsymbol{u}'')$ az abszolút sebességek lineáris kombinációja. Ez csak úgy lehet, hogy

1. $f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}', \boldsymbol{u}'') = 0$, amikor nyilvánvaló, hogy az abszolút sebességek egy síkban vannak;
2. $\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{q} = 0$, amikor így érvelhetünk: $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \cap \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}''}$, $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{u}''$ kifeszíti $\mathbf{M}$-et, tehát $\boldsymbol{u}'$ megadható ilyen lineáris kombinációként; mivel $\boldsymbol{q} \in \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \cap \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}''}$ tetszőleges, a szóan forgó egyenlőség azt jelenti, hogy $\boldsymbol{u}'$ benne kell legyen az $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{u}''$ kifeszítette kétdimenziós altérben.

Eredményünket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}'')} := \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}''}\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}''\boldsymbol{u}'}\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}$$

akkor és csak akkor az identitás, ha $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}'$ és $\boldsymbol{u}''$ egy síkban vannak.

$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}'')}$ olyan szimmetria (irányítás- és nyílirányítástartó Lorentz-transzformáció), amely $\boldsymbol{u}$-t $\boldsymbol{u}$-ba képezi; ezért a leszűkítése $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$-ra irányitástartó euklideszi leképezés, egyszerű néven forgatás. Elnevezése: az $\boldsymbol{u}'$ és $\boldsymbol{u}''$ meghatározta **Thomas-rotáció $\boldsymbol{u}$-ban.**

Az áthúzás tehát két megfigyelő között **szimmetrikus** a (10.36) egyenlőség alapján, viszont általában **nem tranzitív** (10.37) szerint.

Megismételjük szavakban, mit jelent ez. Az áthúzás természetes megfeleltetést létesít a különböző megfigyelő-terek között, amivel például értelmet lehet adni annak a szokásos hallgatólagos megállapodásnak, hogy két egymáshoz képest mozgó térbeli koordinátarendszer tengelyei párhuzamosak egymással.

Én, te és ő üljünk egy-egy űrhajóban. Ha az én vektorom áthúzva hozzád egyenlő a te vektoroddal (az én egyenesem párhuzamos a te egyeneseddel), akkor a te vektorod áthúzva hozzám egyenlő az én vektorommal (a te egyenesed párhuzamos az én egyenesemmel). Viszont ha az én vektorom áthúzva hozzád egyenlő a te vektoroddal, és a te vektorod áthúzva hozzá egyenlő az ő vektorával, akkor általában az én vektorom áthúzva hozzá nem egyenlő az ő vektorával.

A relativitáselmélet egyik újabb paradoxona azon alapszik, hogy természetesnek veszik a különböző tehetetlenségi megfigyelő terében levő vektorok egyenlőségének – vagyis az áthúzásoknak – tranzitivitását (lásd 14.1).

Az áthúzások gyakorlati megvalósítását később tárgyaljuk (lásd 10.5.6).

10.5. Fényjelek

10.5.1. Fényvonalak

A relativisztikus téridőmodell bevezetésénél definiáltuk a fényszerű vektorokat, de eddig még sehol sem kerültek elő.

Mindeddig csak anyagi pontok történelméről beszéltünk, így jutottunk el a világvonalakhoz. Tapasztalataink szerint egy „pontszerű fénycsomag a vákuumban”, nevezzük **fényjelnek**, bizonyos szempontból hasonlóan viselkedik, mint egy anyagi pont.

Fényjel történelmét is görbe adja meg a téridőben, amelyet **fényvonalnak** nevezünk: olyan görbe, amelynek minden érintője fényszerű. Az érintőket célszerű a

$$\mathtt{V}^{\rightarrow} := \left\{ \boldsymbol{w} \in \frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}} \;\middle|\; \mathbb{I}^{+}\boldsymbol{w} \subset \mathtt{L}^{\rightarrow} \right\}$$

halmaz elemeivel, a **fényirányokkal** jellemezni, mint ahogy az abszolút sebességekkel a világvonalak érintőit. Egyszerűen szólva, $\boldsymbol{w} \in \frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}}$ pontosan akkor fényirány, ha fény-jövőszerű. Bár a fényirányok olyan szerepet játszanak, mint az abszolút sebességek, de – lévén a pszeudohosszuk nulla – ha $\boldsymbol{w}$ fényirány, akkor $\alpha\boldsymbol{w}$ is az minden α pozitív szám esetén.

Egy abszolút sebességgel nulla Lorentz-szorzatot adó vektorok térszerűek; a fényirányok nem térszerűek és a jövőszerű vektorok halmazának határpontjai; két abszolút sebesség Lorentz-szorzata negatív; ezek alapján az is igaz, hogy

$$-\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} > 0$$

minden $\boldsymbol{u}$ abszolút sebességre és $\boldsymbol{w}$ fényirányra.

10.5.2. Az abszolút fényterjedés

Akadálytalanul létező fényjelet egyenes fényvonallal írunk le, mint ahogy akadálytalan (azaz tehetetlen) tömegpontot egyenes világvonallal.

A fényjelek alapvető tulajdonsága, hogy történelmük független attól, milyen forrásból származnak; ez az úgynevezett abszolút fényterjedés a következő tapasztalati tényeken nyugszik (amelyek a relativisztikus téridőmodell felépítésének alapját adták): tehetetlenségi megfigyelő terében

1) *akadálytalan fényjel pályája egyenes,*

2) *minden irányban haladhat fényjel,*

3) *fényjel minden vele azonos pályán mozgó anyagi pontnál gyorsabb,*

4) *bármely irányú fényjel haladása tetszőleges pontossággal megközelíthető anyagi pont mozgásával.*

Megmutatjuk, hogy mindezek teljesülnek a téridőmodellben. Vegyük az $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelőt és a $\boldsymbol{w}$ fényirányt.

Az 1) állítás bizonyítását a 2.7.1 pontban mondottak lemásolásával adhatjuk meg, $\boldsymbol{u}'$ helyett $\boldsymbol{w}$-vel: az $\boldsymbol{u}$-térben a $\boldsymbol{w}$ irányú fényvonal pályája a $\boldsymbol{w} + \mathbb{R}\boldsymbol{u}$ vezette egyenes. Az $\boldsymbol{u}$-térvektorok standard reprezentációja szerint ennek az egyenesnek az irányvektora $\boldsymbol{\sigma_u} \cdot \boldsymbol{w}$.

A 2) állításhoz azt kell belátnunk, hogy minden $0 \neq \boldsymbol{v} \in \frac{\mathbf{E_u}}{\mathbb{I}}$ esetén létezik $\boldsymbol{w}$ fényirány úgy, hogy $\boldsymbol{\sigma_u} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$. Ez igen egyszerű: $\boldsymbol{w} := |\boldsymbol{v}|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$.

A 3) állítás bizonyításának az alapja az, hogy ha az $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelő terében a $\boldsymbol{w}$ fényirányú fényjel és az $\boldsymbol{u}'$ abszolút sebességű anyagi pont azonos pályán azonos irányban mozog, akkor van olyan $\alpha > 0$ szám, amellyel $\boldsymbol{\sigma_u} \cdot \boldsymbol{w} = \alpha \boldsymbol{\sigma_u} \cdot \boldsymbol{u}'$. A

$$\boldsymbol{w} + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{u} = \alpha(\boldsymbol{u}' + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}')\boldsymbol{u})$$

egyenlőséget négyzetre emelve (önmagával Lorentz-szorozva)

$$\alpha = \frac{(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})^2}{\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{w} + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}')}$$

adódik, amelyek szerint $\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{w} + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}') > 0$. Az előbbi egyenlőség átrendezve:

$$\boldsymbol{w} = \alpha \boldsymbol{u}' + (\alpha \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{u} =: \beta' \boldsymbol{u}' - \beta \boldsymbol{u}$$

2.7.2 és a 2.7.3 szerint a fényjel mozgása pontosan akkor gyorsabb az anyagi pont mozgásánál, ha β' és β pozitívak. Látjuk, hogy $\beta' = \alpha > 0$; továbbá az α-ra kapott összefüggésünk azt eredményezi, hogy $\beta = -(\alpha \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}) = \frac{(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})(\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{w})}{\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{w} + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}')} > 0$, ugyanis $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} < 0$ és $\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{w} < 0$.

A 4) állítás így formalizálható: adott $\boldsymbol{u}$ abszolút sebesség (tehetetlenségi megfigyelő) és $\boldsymbol{w}$ fényirány (fényvonal) esetén minden $\beta > 0$ számhoz létezik $\boldsymbol{u}'$ abszolút sebesség (tehetetlen anyagi pont) és $\beta' > 0$ szám úgy, hogy $\boldsymbol{w} = \beta' \boldsymbol{u}' - \beta \boldsymbol{u}$. Ez nyilvánvaló abból, hogy jövőszerű és jövő-fényszerű vektorok összege jövőszerű (lásd a matematikai mellékletet); tehát $\beta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$ jövőszerű, és így $\boldsymbol{u}' := \frac{\beta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}}{|\beta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}|}$.

Az imént bizonyított tények már maguk után vonják:

Két fényjel történelme azonos, ha ugyanabban a világpontban keletkeznek és valamely tehetetlenségi megfigyelő terében azonos irányban haladnak.

Ez az abszolút fényterjedés fontos tulajdonsága, amelyet most az előbbiektől függetlenül közvetlenül is belátunk.

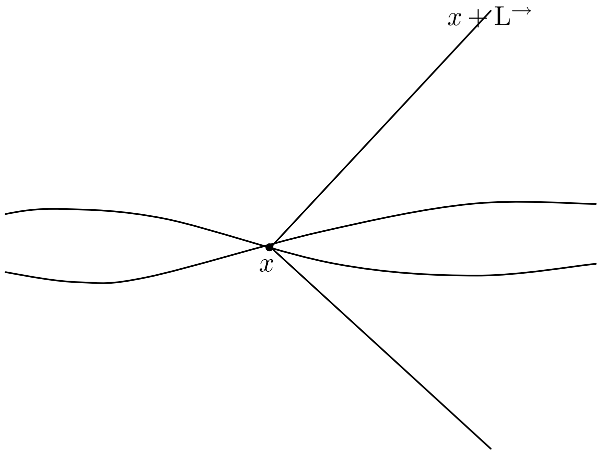
Haladjon a $\boldsymbol{w} \in \mathtt{V}^{\to}$ és $\boldsymbol{w}' \in \mathtt{V}^{\to}$ irányvektorú fényjel az $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelő terében azonos irányban; minthogy $\boldsymbol{w}'$ helyett vehető tetszőleges pozitív számszorosa is, az alkalmas számszoros választásával ez azt jelenti, hogy $\boldsymbol{\sigma_u} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{\sigma_u} \cdot \boldsymbol{w}'$, azaz van olyan α pozitív valós szám, amellyel $\boldsymbol{w}' = \boldsymbol{w} + \alpha \boldsymbol{u}$. Vegyük mindkét oldal Lorenzt-négyzetét; minthogy $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}' \cdot \boldsymbol{w}' = 0$, $0 = 2\alpha(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}) - \alpha^2$ adódik. A két oldalnak $\boldsymbol{u}$-val vett Lorentz-szorzatából pedig ezt kapjuk: $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}') = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} - \alpha$. Ez utóbbinak a négyzetét összehasonlítva az előzővel arra jutunk, hogy $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}' = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$, ami végül arra vezet, hogy $\alpha = 0$, azaz $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}'$.

A 10.5 ábrán két világvonal látható, amelyek egy-egy – egymáshoz képest mozgó – lámpát jelképeznek. A lámpák a találkozásukkor felvillannak: a kibocsátott két fényjel együtt halad a téridőben.

10.5.3. A fény kétutas gyorsasága

A fényjelekre vonatkozó igen fontos további tapasztalati tény (amely szintén a relativisztikus téridőmodell felépítésének alapjául szolgált):

5) *tehetetlenségi megfigyelő terében a fény kétutas terjedése homogén és izotróp*



10.5. ábra. Abszolút fényterjedés

Ez pontosan a következőt jelenti. Tetszőleges tehetetlenségi megfigyelő egy térpontjából (forrásból) elindul egy fényjel, egy másik térpontban (tükrön) visszafordul, majd visszaér a forráshoz; a tükör és a forrás távolságát osztva a forrásnál az indulás és az érkezés közötti időtartam felével megkapjuk a forrás és a tükör közötti kétutas fénysebességet. A tapasztalat szerint ez a kétutas sebesség független attól, hol van a forrás és a tükör.

Megmutatjuk, hogy ez teljesül a téridőmodellben. Vegyünk egy $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelőt. A megfigyelő egy térpontjából – fényforrásból – indított fényjel érjen el egy másik térpontot – tükröt –, és onnan visszaverődve érkezzen vissza a forráshoz. Legyen $\boldsymbol{a}$, illetve $\boldsymbol{a}'$ a fényjel fény-jövőszerű vektora a forrástól a tükörig, illetve a tükörtől a forrásig (lásd a 9.1 ábrát).

Ha $2\boldsymbol{t}$ a fényforrásnál a fény indulása és visszaérkezése között eltelt időtartam, akkor $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}' = 2\boldsymbol{t}\boldsymbol{u}$, tehát $2\boldsymbol{t} = -\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}')$.

A fényforrás és a tükör közötti távolság (10.33) szerint $\boldsymbol{d} := |\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{a}'|$. Mivel $|\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{a}|^2 = |\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{u}|^2 = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a})^2$ és hasonló igaz $\boldsymbol{a}'$-re is, $2\boldsymbol{d} = -\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}') = \boldsymbol{t}$, vagyis a fény kétutas gyorsasága $2\frac{\boldsymbol{d}}{2\boldsymbol{t}} = 1$.

Az eredmény független a megfigyelőtől és annak a forrást és a tükröt megadó térpontjaitól.

10.5.4. Fényjelek haladása

Tekintsünk két tehetetlenségi megfigyelőt, $\boldsymbol{u}$-t és $\boldsymbol{u}'$-t, és egy $\boldsymbol{w}$ fényirányú fényjelet. Az $\boldsymbol{u}$ terében az $\boldsymbol{u}'$, illetve a fényjel mozgásirányát a $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u}'$, illetve a $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{w}$ vetkor adja meg; érdemes áttérni ezen vektorok alkalmas többszöröseire, a $\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} := \frac{\boldsymbol{u}'}{-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}'} - \boldsymbol{u}$ és $\mathbf{v}_{\boldsymbol{w}\boldsymbol{u}} := \frac{\boldsymbol{w}}{-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}} - \boldsymbol{u}$ vektorokra (ezek a standard relatív sebességek, később látjuk). Egyszerűen adódik, hogy $|\mathbf{v}_{\boldsymbol{w}\boldsymbol{u}}| = 1$. Értelemszerűen hasonló formulák adják meg az $\boldsymbol{u}'$ terében a mozgásirányokat.

A következő igaz:

Ha a fényjel az $\mathbf{u}$ *terében az* $\mathbf{u}'$*-vel azonos irányban halad, akkor ugyanez a fényjel az* $\mathbf{u}'$ *terében az* $\mathbf{u}$*-vel ellentétes irányában halad, azaz*

– *ha* $\mathbf{v}_{\mathbf{w}\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{u}'\mathbf{u}}}{|\mathbf{v}_{\mathbf{u}'\mathbf{u}}|}$, *akkor* $\mathbf{v}_{\mathbf{w}\mathbf{u}'} = -\frac{\mathbf{v}_{\mathbf{u}\mathbf{u}'}}{|\mathbf{v}_{\mathbf{u}\mathbf{u}'}|}$.

Ezt így láthatjuk be: a $v := |\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}| = |\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'}|$ jelöléssel

$$\frac{\boldsymbol{w}}{-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}} - \boldsymbol{u} = \frac{1}{v}(\sqrt{1-v^2}\,\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u}),$$

átrendezve

$$\frac{\boldsymbol{w}}{-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}} = \frac{\sqrt{1-v}}{v}(\sqrt{1+v}\,\boldsymbol{u}' - \sqrt{1-v}\,\boldsymbol{u}), \tag{10.38}$$

amiből $\boldsymbol{w}$-vel beszorozva arra jutunk, hogy

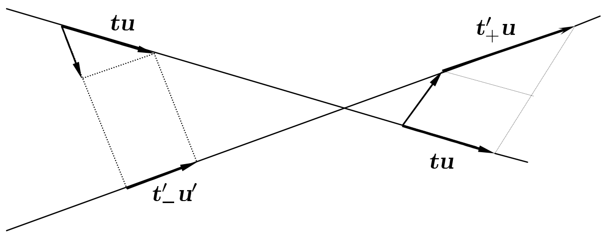
$$-\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{w}\sqrt{1+v} = -\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}\sqrt{1-v}.$$

Ebből $\frac{\boldsymbol{w}}{-\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{w}} = \frac{\sqrt{1+v}\,\boldsymbol{w}}{-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}\sqrt{1-v}}$ és már csak egy lépés, hogy megkapjuk,

$$\frac{\boldsymbol{w}}{-\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{w}} - \boldsymbol{u}' = -\frac{1}{v}(\sqrt{1-v^2}\,\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}').$$

10.5.5. Fényjelek késése

Az $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelő egymás után két fényjelet küld egy térpontjából az $\boldsymbol{u}'$ felé, vagyis abba az irányba, amerre az $\boldsymbol{u}$ mozog az $\boldsymbol{u}'$-höz képest; más szóval $\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}$-val párhuzamosan. Legyen a fényjelek indulása közötti időtartam $\boldsymbol{t}$. A fényjelek $\boldsymbol{t}'_+$, illetve $\boldsymbol{t}'_-$ időkülönbséggel csapódnak be az $\boldsymbol{u}'$ megfigyelő egy térpontjába attól függően, hogy a fényjelek $\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}$-val azonos, illetve ellnekező irányban haladnak.



10.6. ábra. Fényjelek késése

Ekkor, amint a 10.6 ábra mutatja, a fényirányokat $\boldsymbol{t}'_+\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{tu}$, illetve $\boldsymbol{tu} - \boldsymbol{t}'_-\boldsymbol{u}'$ adja meg. Vehetjük persze úgy a $\boldsymbol{w}_\pm$ fényirányokat, hogy $\frac{\boldsymbol{w}_+}{-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}_+} = \boldsymbol{t}'_+\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{tu}$, illetve $\frac{\boldsymbol{w}_-}{-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}_-} = \boldsymbol{tu} - \boldsymbol{t}'_-\boldsymbol{u}'$ teljesüljön.

A (10.38) egyenlőségből azonnal adódik, hogy

$$\boldsymbol{t}'_+ = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}\;\boldsymbol{t}, \qquad \boldsymbol{t}'_- = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}\;\boldsymbol{t}.$$

10.5.6. Az áthúzások fizikai értelmezése

A tehetetlenségi megfigyelő közötti áthúzásokat „matematikailag természetes" módon határoztuk meg (10.4.3). Most egy fizikai eljárást vázolunk, amellyel egy megfigyelő azonosíthatja egy vektorát egy másik megfigyelő vektorával. Ehhez fényjeleket használunk.

Intuitív képet alkothatunk az áthúzásról, ha két (elég nagy) űrhajót képzelünk el, mint két tehetetlenségi megfigyelőt. Én ülök az egyikben ($\boldsymbol{u}$), te a másikban

($\boldsymbol{u}'$). Én azt tapasztalom, hogy te távolodsz tőlem (vagy közeledsz hozzám), és te hasonlót tapasztalsz velem kapcsolatban.

Ha küldök egy fényjelet feléd, abba az irányba (vagy azzal ellentétesen) amerre mozogsz hozzám képest, akkor a fényjel elér téged, méghozzá azzal ellentétes (vagy megegyező) irányból, amerre mozgok hozzád képest (lásd 10.5.4).

Az én terem tetszőleges vektorának hozzád való áthúzását fényjelek küldésével a vektornak a mozgásod irányával párhuzamos és arra merőleges komponenseivel valósítom meg.

Veszek egy síkot a teremben, amely merőleges a mozgásod irányára. Veszek egy vektort ebben a síkban. Küldök feléd egy zöld fényjelet a vektor talppontjából és egy piros fényjelet a vektor csúcspontjából. A fényjelek becsapódnak a te teredben az én mozgásom irányára merőleges síkban. Az így keletkezett zöld és piros pontok meghatározzák egy vektorodat, ez lesz a vektorom áthúzottja.

Veszek most egy vektort, amely a mozgásod irányába mutat. Indítok egyszerre két sárga fényjelet a vektorom csúcspontjából: az egyiket feléd, a másikat ellentétes irányban. Ez a másik fényjel tükröződjön a vektor talppontjában, és úgy haladjon feléd. A két fényjel a te terednek ugyanabban a pontjában csapódik be, bizonyos időkülönbséggel, amiből kiszámíthatod a vektorom hosszát. Ekkor az a vektorod, amely ilyen hosszúságú és ellentétes a mozgásod irányával, lesz a vektorom áthúzottja. Konkrétan: legyen az én vektorom $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}$-val egyező irányú és $\boldsymbol{t}$ hosszúságú; ekkor a talppont felé küldött fényjelem a vektor csúcspontját a kibocsátás után $2\boldsymbol{t}$ időtartam után éri el. Ha tehát a fényjelek becsapódása között $2\boldsymbol{t}'_+$ időkülönbséget mérsz, akkor a megfelelő vektorod ellentétes irányú $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'}$-vel és a hossza $\boldsymbol{t}'_+\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}$.

Kék fénnyel végrehajtott hasonló eljárással lehet áthúzni olyan vektorodat, amely ellentétes a mozgásod irányával.

Már csak az marad kérdés, hogyan mérhető v. Erre később visszatérünk (lásd 10.6.5).

10.6. Standard tehetetlenségi rendszerek

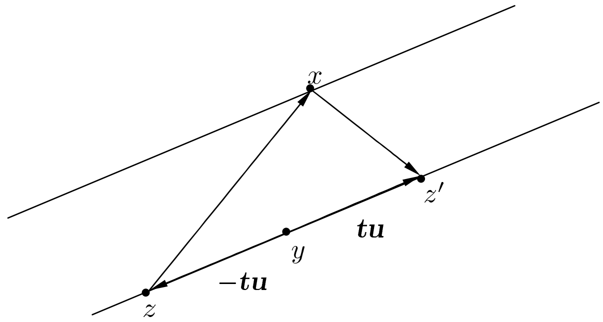
10.6.1. Standard szinkronizációk

A mindennapos gyakorlatban szinkronizációt fényjelekkel (rádiójelekkel) hozunk létre azon meggyőződés alapján, hogy a fény tehetetlenségi megfigyelő terében homogén, izotróp módon terjed $c := 2,99793... \cdot 10^8$m/s gyorsasággal.

Tehát egy „központtól” d távolságra levő helyre a fényjel d/c idő alatt ér oda, így a központból a t pillanatban indított fényjel megérkezésekor az adott helyen az időpillanatnak $t + d/c$ értéket adják. Konkrét példával: Budapestről déli tizenkettőkor indítják a pontos idő rádiójelét, és amikor megérkezik a Budapesttől 240 km-re levő Debrecenbe, ott az óra mutatóit 12 óra után $0,0008$ másodpercre állítják.

A téridőmodellben ezt úgy fogalmazhatjuk meg, hogy egy tehetetlenségi megfigyelő olyan szinkronizációt hoz létre – ha létrehozhat –, hogy hozzá képest a fény egyutas sebessége megegyezzen a kétutas sebességgel. Ezt a kétutas sebességnél mondott eljárással kapcsolatban úgy tudjuk megfogalmazni, hogy a fény visszaverődésének villanata legyen egyidejű a fényforrás azon villanatával, amely éppen felezi a fényjel indulása és visszaérkezése közötti időtartamot.

Az előző jelölésekkel a $\boldsymbol{q} := \boldsymbol{a} - \boldsymbol{tu} = \boldsymbol{tu} - \boldsymbol{a}'$ vektor a tükör és a fényforrás egyidejű villanata közötti vektor. Tehát mind $\boldsymbol{q} + \boldsymbol{tu}$, mind $\boldsymbol{tu} - \boldsymbol{q}$ jövőfényszerű vektor, így a Lorentz-négyzetük nulla, azaz $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q}\pm 2t\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{q}-\boldsymbol{t}^2=0$, ami csak úgy lehetséges, ha $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{q}=0$, vagyis $\boldsymbol{q}\in\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$.



10.7. ábra. Standard szinkronizáció

Eredményünkből azonnal látható, hogy ez a szinkronizáció független a fényforrástól („szinkronizációs „központtól”). Azt mondhatjuk tehát, hogy az $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelő szerinti ilyen szinkronizációban az x és y világpont egyidejű, ha $y-x\in\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$. Más szóval, az x-szel az $\boldsymbol{u}$ szerint ily módon egyidejű világpontok összessége $x+\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$. Ezt a szinkronizációt a megfigyelő **standard szinkronizációjának** hívunk.

Felhívjuk a figyelmet, hogy – mivel $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{u}'$ esetén $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}\neq\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}$ – **különböző tehetetlenségi megfigyelők standard szinkronizációi különbözők.**

Megismételjük, amit már korábban is mondtunk: egy szinkronizáció nem fizikai valóság, hanem mesterséges, emberi konstrukció. Alapvető fizikai tényeket szinkronizáció nélkül kell megfogalmazni.

Semmi sem kötelez minket arra, hogy a standard szinkronizációt használjuk. Beállíthatnánk az órákat úgy is, hogy a fény Budapesttől Debrecenig gyorsabban haladjon, mint Debrecenből Budapestig. A standard szinkronizációt a szépsége és egyszerűsége – amelyek nem fizikai fogalmak – tünteti ki.

Az 3.2 alfejezet szerint egyenletes szinkronizáció és tehetetlenségi megfigyelő együttese alkot egy tehetetlenségi rendszert; az $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelő és a standard szinkronizációja alkotja az **$\boldsymbol{u}$-standard tehetetlenségi rendszert**.

10.6.2. Standard időpontok

Az $\boldsymbol{u}$-standard szinkronizációs pillanatok tehát az $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ vezette hipersíkok, az **$\boldsymbol{u}$-standard idő** ezeknek az összessége, $\mathtt{I}_{\boldsymbol{u}}:=\mathtt{M}/\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$. A nemrelativisztikus esettel való összevetés érdekében bevezetjük a

$$\tau_{\boldsymbol{u}}:\mathtt{M}\to\mathtt{I}_{\boldsymbol{u}},\qquad x\mapsto x+\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$$

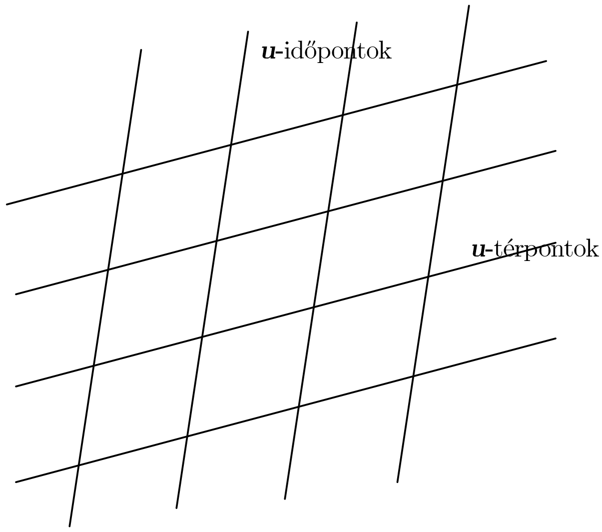
$\boldsymbol{u}$-időkiértékelést.

Két $\boldsymbol{u}$-időpont, t és s különbségét a megfigyelő tetszőleges térpontjában eltelt időtartamként értelmezzük:

$$t-s:=|y-x|,\qquad (y\in t, x\in s,\ (y-x)\parallel\boldsymbol{u}).\tag{10.39}$$

Ha $y\in t$ és $x\in s$ tetszőleges, akkor van olyan $x'\in s$, hogy $y-x'$ párhuzamos $\boldsymbol{u}$-val, és természetesen $x-x'\in\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$. Ezért

$$t-s=-\boldsymbol{u}\cdot(y-x),\qquad (y\in t, x\in s).\tag{10.40}$$



10.8. ábra. $\boldsymbol{u}$-időpontok

Másképpen ugyanez:

$$(y+\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}) - (x+\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}) = \tau_{\boldsymbol{u}}(y) - \tau_{\boldsymbol{u}}(x) := -\boldsymbol{u}\cdot(y-x); \tag{10.41}$$

ezzel a kivonással $\mathtt{I}_{\boldsymbol{u}}$ egydimenziós affin tér $\mathbb{I}$ fölött, és $\tau_{\boldsymbol{u}}$ affin leképezés a $-\boldsymbol{u}\cdot$ lineáris leképezés fölött.

10.6.3. Standard relatív sebességek

Emlékeztetünk, hogy nemrelativisztikusan abszolút (azaz egyetlen) szinkronizáció létezik, „nem kell vele törődnünk", vonatkoztatási rendszer helyett mondhatunk csak megfigyelőt, és például relatív sebességről beszélhetünk anélkül, hogy szóba hoznánk, milyen szinkronizációra vonatkozik. Vigyázzunk, hogy ezt a megszokást ne vigyük át a relativitáselméletbe, hogy ne essünk mások sokszor elkövetett hibájába, amikor összekeverik (szét sem választják) a megfigyelő és a vonatkoztatási rendszer fogalmát, valamint relatív sebességről beszélnek szinkronizáció nélkül, és így téves következtetésekre jutnak.

Vegyünk egy $\boldsymbol{u}$-standard tehetetlenségi rendszert és egy $\boldsymbol{u}'$ vezette egyenest, amely egy tehetetlen tömegpont világvonala. Ha $\boldsymbol{u}' \neq \boldsymbol{u}$, a megfigyelő úgy észleli, a tömegpont mozog hozzá képest. A tömegpontnak a vonatkoztatási rendszerhez viszonyított sebességét következőképp határozhatjuk meg.

Legyen x_o a tömegpont világvonalának egy pontja; a tömegpont $\boldsymbol{t}$ sajátidőtartamának elteltével a világvonal pontja $r(\boldsymbol{t}) := x_o + \boldsymbol{t}\boldsymbol{u}'$. Ennek a világpontnak megfelelő $\boldsymbol{u}$-időpont $t := \tau_{\boldsymbol{u}}(r(\boldsymbol{t}))$, az $\boldsymbol{u}$-térpont pedig $\sigma_{\boldsymbol{u}}(r(\boldsymbol{t}))$. Felhasználva a (10.33) és (10.41) képleteket, értelmezése szerint a relatív sebesség a t $\boldsymbol{u}$-pillanatban

$$\lim_{s\to t}\frac{\sigma_{\boldsymbol{u}}(r(\boldsymbol{s})) - \sigma_{\boldsymbol{u}}(r(\boldsymbol{t}))}{\tau_{\boldsymbol{u}}(r(\boldsymbol{s})) - \tau_{\boldsymbol{u}}(r(\boldsymbol{t}))} = \lim_{s\to t}\frac{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}\cdot(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{t})\boldsymbol{u}')}{-\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{t})\boldsymbol{u}'} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{u}'}{-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}'} = \frac{\boldsymbol{u}'}{-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}'} - \boldsymbol{u}.$$

Az eredmény független az időtől: egy tehetetlen tömegpont állandó sebességgel mozog egy standard tehetetlenségi rendszerhez képest. Az $\boldsymbol{u}'$ abszolút sebességnek az $\boldsymbol{u}$-ra vonatkozó **standard relatív sebessége** a

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} := \frac{\boldsymbol{u}'}{-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}'} - \boldsymbol{u} \in \frac{\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}}{\mathbb{I}}$$

mennyiség; ez, ellentétben a nemrelativisztikus esettel, nem egyszerűen a két abszolút sebesség különbsége.

Az $\boldsymbol{u}$-relatív sebességek háromdimenziós euklideszi vektorteret alkotnak, tehát ellentétben az abszolút sebességgel,

– van nulla $\boldsymbol{u}$-relatív sebesség,

– értelmes az $\boldsymbol{u}$-relatív sebesség nagysága,

– értelmes két $\boldsymbol{u}$-relatív sebesség bezárta szög.

Különböző abszolút sebességekre vonatkozó relatív sebességek szöge viszont nem feltétlenül értelmes.

A két abszolút sebesség szerepét felcserélve:

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'} = \frac{\boldsymbol{u}}{-\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u}'.$$

A Lorentz-formára igaz fordított Cauchy-egyenlőtlenség szerint, ha $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{u}'$ különböző abszolút sebességek, akkor $-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}' > 1$. Ebből azonnal adódik, hogy

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'} \neq -\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \quad \text{ha} \quad \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{u}'.$$

A szokásos tárgyalásokban meg nem kérdőjelezett tényként fogadják el, hogy az egymásra vonatkoztatott relatív sebességek egymás ellentettjei. Pedig, ellentétben a nemrelativisztikus esettel, ez nem igaz!

Az viszont igaz, hogy a relatív sebességek áthúzottjai egymás ellentettjei. Idézzük fel a megfelelő formulákat:

– $\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'}$ és $\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}$ különböző háromdimenziós vektorterekben vannak: az egyik $\frac{\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}}{\mathbb{I}}$-ben, a másik $\frac{\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}}{\mathbb{I}}$-ben,

– mind $\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}$, mind $\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'}$ merőleges $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \cap \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}$-re:

– $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}\cdot\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} = -\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'}$,

– $|\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'}|^2 = |\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}|^2 = 1 - \frac{1}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}')^2} < 1$, azaz

$$-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}' = \frac{1}{\sqrt{1-|\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}|^2}}.$$

Végül érdemes újra felhívni a figyelmet arra, hogy a relatív sebesség itt a standard szinkronizációra vonatkozik. Más szinkronizációval más relatív sebességet kapunk (lásd 15.3).

Az előzőekhez hasonlóan egy $\boldsymbol{w}$ irányú akadálytalan fényjel ($\boldsymbol{w}$ vezette egyenes fényvonal) relatív sebessége az $\boldsymbol{u}$ standard rendszerre

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{w}\boldsymbol{u}} := \frac{\boldsymbol{w}}{-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}} - \boldsymbol{u};$$

erre $|\mathbf{v}_{\boldsymbol{w}\boldsymbol{u}}| = 1$ igaz, vagyis a fény egyutas gyorsasága minden standard rendszerben minden irányban ugyanakkora – amint annak lennie is kell.

10.6.4. Relatív sebességek összeadása

Igen fontos, hogy ellentétben a nemrelativisztikus esettel, nem igaz a standard relatív sebességek összeadódása, azaz (a triviális $\boldsymbol{u}'' = \boldsymbol{u}'$ és $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}$ esetet kivéve)

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}''\boldsymbol{u}} \neq \mathbf{v}_{\boldsymbol{u}''\boldsymbol{u}'} + \mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}.$$

Megjegyezzük, nem is várható egyenlőség, hiszen $\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}''\boldsymbol{u}'}$ más háromdimenziós vektortérben van ($\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}/\mathbb{I}$-ben), mint a másik két relatív sebesség ($\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}/\mathbb{I}$-ben).

Levezetés nélkül közöljük, hogy a következő összefüggés áll fönn: az

$$\alpha := -\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{1 - |\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}|^2}}, \qquad \beta := -\boldsymbol{u}'' \cdot \boldsymbol{u}' = \frac{1}{\sqrt{1 - |\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}''\boldsymbol{u}}|^2}},$$

$$\gamma := -\boldsymbol{u}'' \cdot \boldsymbol{u} = \alpha\beta(1 + \mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \cdot \mathbf{v}_{\boldsymbol{u}''\boldsymbol{u}})$$

jelölésekkel

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}''\boldsymbol{u}} = \frac{\beta}{\gamma}\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'} \cdot \mathbf{v}_{\boldsymbol{u}''\boldsymbol{u}'} + \frac{\alpha(\beta+\gamma)}{\gamma(1+\alpha)}\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}. \tag{10.42}$$

Ide kívánkozik még egy összefüggés megemlítése. Tudjuk, hogy az $\boldsymbol{u}''$-ről az $\boldsymbol{u}'$-be való áthúzás után az $\boldsymbol{u}'$-ről az $\boldsymbol{u}$-ba való áthúzás akkor és csak akkor egyenlő az $\boldsymbol{u}''$-ről az $\boldsymbol{u}$-ba való áthúzással, ha (lásd (10.37))

– $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}'$ és $\boldsymbol{u}''$ egy síkban vannak.

Egyszerűen megmutatható, ez a feltétel egyenértékű azzal, hogy

– $\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}''\boldsymbol{u}}$ párhuzamos $\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}$-vel és $\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}''\boldsymbol{u}'}$ párhuzamos $\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'}$-vel.

10.6.5. Standard relatív sebesség mérése

A gyakorlatban szokásos eljárásokkal (például radar-készülékkel) a relatív sebesség nagyságát arra alapozva mérik, hogy a fény egyutas gyorsasága minden irányban ugyanaz. Az $\boldsymbol{u}$ megfigyelő egy térpontjából (radarkészülékből) a t pillanatban elindított fényjel (rádiójel) az $\boldsymbol{u}'$ abszolút sebességű tömegponton (a közeledő járművön) visszaverődve $2\boldsymbol{t}_1$ időtartam múlva érkezik vissza. Az első jel után $\boldsymbol{s}$ idővel indított második jel pedig $2\boldsymbol{t}_2$ időtartam múlva érkezik vissza. Ezen adatok szerint a $t + \boldsymbol{t}_1$ ($\boldsymbol{u}$ szerinti standard) időpillanatban (most a hétköznapi megfogalmazásnak megfelelően kiírjuk a c fénygyorsaságot, amely persze a mi kereteink között 1) a jármű $c\boldsymbol{t}_1$ távolságra volt, a $t + \boldsymbol{s} + \boldsymbol{t}_2$ időpillanatban $c\boldsymbol{t}_2$ távolságra. Sebességének nagysága tehát

$$v := \left| \frac{c\boldsymbol{t}_2 - c\boldsymbol{t}_1}{(t + \boldsymbol{s} + \boldsymbol{t}_2) - (t + \boldsymbol{t}_1)} \right| = \frac{\boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_2}{\boldsymbol{s} - (\boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_2)}c.$$

10.7. Standard vektori széthasítások és transzformációs szabályok

10.7.1. Széthasítások

Minthogy $\mathbb{I}\boldsymbol{u}$ és $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ kiegészítő alterek, bármely téridő-vektor egyértelműen megadható ezen alterekben levő vektorok összegeként. Az $\boldsymbol{x}$ vektor esetén a (10.32) jelöléssel $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{x}$ ez a szóban forgó összeg. Más szóval azt mondjuk, hogy az $\boldsymbol{x}$ téridő-vektort az $\boldsymbol{u}$ **széthasítja** a $-\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x}$ **$\boldsymbol{u}$-időszerű komponensre** és a $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{x}$ **$\boldsymbol{u}$-térszerű komponensre**. Maga a

$$\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}} := \mathbf{M} \to \mathbb{I} \times \mathbf{E}, \qquad \boldsymbol{x} \mapsto (-\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{x}) \tag{10.43}$$

lineáris bijekció a **téridő-vektorok széthasítása** $\boldsymbol{u}$ szerint.

A nemrelativisztikus esettel való jobb párhuzamba-állítás végett vezessük be a

$$\boldsymbol{\tau_u} : \mathbf{M} \to \mathbb{I}, \qquad \boldsymbol{x} \mapsto -\boldsymbol{u} \cdot \mathbf{x}$$

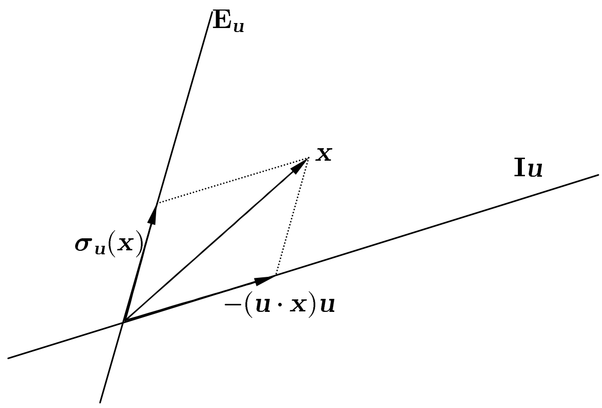
jelölést; ezzel $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ a $\boldsymbol{\tau_u}$ lineáris leképezés magja, és a széthasítást

$$\boldsymbol{h_u} = (\boldsymbol{\tau_u}, \boldsymbol{\sigma_u})$$

alakba is írhatjuk.

Jegyezzük meg, hogy

$$\boldsymbol{h_u}^{-1}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{t}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{q}.$$



10.9. ábra. Vektorok széthasítása

Természetesen $\mathbf{M}$-nek egydimenziós vektortérrel való tenzorszorzatai és tenzorhányadosai, például $\frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}}$, $\frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}}$ is a fenti formulának megfelelően hasítódnak szét, alkalmazva azt a szabályunkat, hogy a mértékegyenesek elemeivel való szorzást és osztást kiemelhetjük lineáris leképezések elé. Például az $\boldsymbol{u}'$ abszolút sebesség $\boldsymbol{u}$-időszerű komponense $-\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}' \geq 1$, $\boldsymbol{u}$-térszerű komponense

$$\boldsymbol{\sigma_u} \cdot \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}' + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}')\boldsymbol{u} = (-\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}') \left(\frac{\boldsymbol{u}'}{-\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}'} - \boldsymbol{u} \right). \tag{10.44}$$

A 10.1.3 elnevezései szerint tehát $\boldsymbol{u}'$-nek

– az $\boldsymbol{u}$-időszerű komponense az $\boldsymbol{u}'$ és $\boldsymbol{u}$ közötti relativisztikus faktor,

– az $\boldsymbol{u}$-térszerű komponense az $\boldsymbol{u}'$-nek az $\boldsymbol{u}$-ra vonatkozó standard relatív sebessége megszorozva a relativisztikus faktorral.

Összefoglalva:

$$\boldsymbol{h_u} \cdot \boldsymbol{u}' = \frac{1}{\sqrt{1 - |\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}|^2}} (1, \mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}).$$

A vektorok széthasítása meghatározza a kovektorok széthasítását is az

$$\boldsymbol{r_u} := \left(\boldsymbol{h_u}^{-1}\right)^* : \mathbf{M}^* \to \mathbb{I}^* \times \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}^*$$

formulával.

Egy $\boldsymbol{k}$ kovektorra $\big(\boldsymbol{r_u}\cdot\boldsymbol{k}\big)\cdot(\boldsymbol{t},\boldsymbol{q})\big) = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{h_u}^{-1}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{q})\big) = (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{t}+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{q}$. A nem-relativisztikus mintára úgy önthetjük jól kezelhető formába ezt a széthasítást, hogy bevezetjük az $\boldsymbol{i_u} : \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \to \mathbf{M}$ beágyazó leképezést, azaz

$$\boldsymbol{i_u}\cdot\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q} \qquad (\boldsymbol{q}\in\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}},\ \boldsymbol{i_u}\cdot\boldsymbol{q}\in\mathbf{M})).$$

Ennek transzponáltja

$$\boldsymbol{i}^*_{\boldsymbol{u}} : \mathbf{M}^* \to \mathbf{E}^*_{\boldsymbol{u}}, \quad \boldsymbol{k}\mapsto\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i_u} = \boldsymbol{k}|_{\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}},$$

ahol $|_{\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}}$ az $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$-re való leszűkítést jelenti.

A szokásnak megfelelően megfordíthatjuk $\boldsymbol{k}$ és $\boldsymbol{u}$ szerepét a dualitásban, vagyis felfoghatjuk $\boldsymbol{u}$-t, mint a duálison ható lineáris leképezést; azonban a matematikai mellékletben szereplő formuláktól eltérően a szerepcserében $\boldsymbol{u}$ helyett $\boldsymbol{u}^*$-ot írunk a későbbiek jobb áttekinthetősége érdekében.

Így tehát a **téridő-kovektorok széthasítása** az $\boldsymbol{u}$ szerint a

$$\boldsymbol{k}\mapsto(\boldsymbol{u}^*\cdot\boldsymbol{k},\boldsymbol{i}^*_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{k}) = (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u},\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i_u})$$

lineáris bijekció. $\boldsymbol{u}^*\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{i}^*_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i_u}$ a $\boldsymbol{k}$ kovektor ***u*-időszerű komponense**, illetve ***u*-térszerű komponense**.

Tömör formában:

$$\boldsymbol{r_u} = (\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{i}^*_{\boldsymbol{u}}).$$

A széthasítás inverze $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{u}}^{-1} = \boldsymbol{h}^*_{\boldsymbol{u}} : \mathbb{I}^*\times\mathbf{E}^*_{\boldsymbol{u}}$, amelyet a

$$\Big(\boldsymbol{h}^*_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{e},\boldsymbol{p})\Big)\cdot\mathbf{x} = (\boldsymbol{e},\boldsymbol{p})\cdot(\boldsymbol{h_u}\cdot\mathbf{x}) = (\boldsymbol{e},\boldsymbol{p})\cdot\Big(\boldsymbol{\tau_u}\cdot\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma_u}\cdot\mathbf{x}\Big) = \\ = \boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{\tau_u}\cdot\mathbf{x}) + \boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{\sigma_u}\cdot\mathbf{x})$$

képlet alapján így foglalhatunk össze:

$$\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{u}}^{-1}(\boldsymbol{e},\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\tau_u} + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma_u} = \boldsymbol{\tau}^*_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{e} + \boldsymbol{\sigma}^*_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{p} \quad ((\boldsymbol{e},\boldsymbol{p})\in\mathbb{I}^*\times\mathbf{E}^*_{\boldsymbol{u}}).$$

Egy kovektort az $\mathbf{M}^*\equiv\frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}}$ azonosítás alapján vektornak is tekinthetünk. Míg a fentiekben $\boldsymbol{u}^*\cdot\boldsymbol{k}$ és $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}$ esetén a pontszorzás a dualitás bilineáris formáját jelöli, ha a kovektort vektornak tekintjük, akkor a pontszorzás a Lorentz-szorzást jelenti. Azonal látjuk, hogy ekkor a kovektori széthasítás időszerű komponense a vektori széthasítás időszerű komponensének a negatívja, és a Lorentz-szorzás szimmetrikussága miatt értelmetlenné válik az $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{u}^*$ megkülönböztetése.

Kérdés, hogyan viszonylik a kovektori térszerű komponens a vektori térszerű komponenshez. Vegyük észre, hogy a $\boldsymbol{k}$ kovektornak az $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$-ra való leszűkítése pontosan akkor nulla, ha $\boldsymbol{k}$ mint vektor párhuzamos $\boldsymbol{u}$-val, ezért a kovektorok és vektorok azonosításában $\boldsymbol{i}^*_{\boldsymbol{u}}$ nem más, mint az $\boldsymbol{u}$ mentén az $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$-ra való vetítés, azaz $\boldsymbol{i}^*_{\boldsymbol{u}}\equiv\boldsymbol{\sigma_u}$: a kovektori széthasítás térszerű komponense a vektori széthasítás térszerű kompnensével egyenlő.

Összefoglalva:

$$\boldsymbol{r_u} = (-\boldsymbol{\tau_u},\boldsymbol{\sigma_u}).$$

A vektorok és kovektorok széthasítása egyelőre csak mint matematikai formula jelent meg, azonban látni fogjuk, hogy fizikai tartalommal is bír: egy tehetetlenségi rendszer nem magukat a vektorokat, hanem azok komponenseit „észleli” fizikailag. Például $\boldsymbol{u}'$-nek az $\boldsymbol{u}$-térszerű komponense elosztva az $\boldsymbol{u}$-időszerű komponensével az $\boldsymbol{u}'$-nek az $\boldsymbol{u}$-ra vonatkozó standard relatív sebessége.

10.7.2. Transzformációs szabályok

A különböző standard tehetetlenségi rendszerek különbözőképpen hasítják szét a vektorokat. A vektorok különböző széthasításának összehasonlítása már nem olyan egyszerű, mint a nemrelativisztikus esetben, hiszen a különböző széthasítások különböző vektorterekbe érkeznek. Közelebbről, ugyanannak a vektornak az $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{u}'$ szerinti $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{q})$ illetve $(\boldsymbol{t}', \boldsymbol{q}')$ széthasítottja $\mathbb{I} \times \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$-ban illetve $\mathbb{I} \times \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}$-ben van. Más szóval, a széthasítások összehasonlítására $\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}'} \cdot \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}}^{-1} : \mathbb{I} \times \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \to \mathbb{I} \times \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}$ önmagában még nem alkalmas.

Itt vehetjük először hasznát az áthúzásnak, amellyel természetes kapcsolatot létesíthetünk $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}$ és $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ között. Ezért az $\boldsymbol{u}$-széthasításból az $\boldsymbol{u}'$-széthasításba átvivő **vektori transzformációs szabályt** így értelmezzük:

$$\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} := (1, \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'}) \left(\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}'} \cdot \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}}^{-1}\right), \tag{10.45}$$

ahol $(1, \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'})$ azt jelenti, hogy az első komponenst ($\mathbb{I}$ elemét) 1-gyel kell szorozni, a második komponensre ($\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}$ elemére) $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'}$-t kell alkalmazni.

Némi számolás után azt kapjuk, hogy – a $\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} := \frac{\boldsymbol{u}'}{-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}'} - \boldsymbol{u}$ standard relatív sebességgel, és a $v := |\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}|$, valamint a

$$\kappa(v) := \frac{1}{\sqrt{1-|v|^2}},$$

$$\boldsymbol{J}(\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}) := \frac{1}{\kappa(v)} \left(\mathrm{id}_{\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}} + \frac{\kappa(v)^2}{\kappa(v)+1} \mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \otimes \mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \right)$$

jelölésekkel a transzformációs szabály (mint $\mathbb{I} \times \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \to \mathbb{I} \times \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ lineáris leképezés) mátrixalakban

$$\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} = \kappa(v) \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \\ -\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} & \boldsymbol{J}(\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}) \end{pmatrix},$$

amelyet **Lorentz-féle transzformációs szabálynak** hívunk.

Ha tehát most $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{q})$ egy vektornak az $\boldsymbol{u}$ szerint széthasított alakja, és $(\boldsymbol{t}', \boldsymbol{q}')$ ugyanannak a vektornak az $\boldsymbol{u}'$ szerint széthasított alakja **áthúzva** az $\boldsymbol{u}$-hoz, akkor

$$\boldsymbol{t}' = \kappa(v)(\boldsymbol{t} - \mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{q}), \qquad \boldsymbol{q}' = \kappa(v)(\boldsymbol{J}(\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}) \cdot \boldsymbol{q} - \boldsymbol{t}\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}).$$

Egyszerűbb formulát kapunk, ha az $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ $\boldsymbol{q}$ elemét felbontjuk $\mathbf{v}$-vel párhuzamos $\boldsymbol{q}_{\parallel}$ és arra merőleges $\boldsymbol{q}_{\perp}$ komponensre, ami által a $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{t}, \boldsymbol{q}_{\parallel}) + (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{q}_{\perp})$ felbontásban

$$\boldsymbol{q}'_{\perp} = \boldsymbol{q}_{\perp},$$

és

$$\boldsymbol{t}' = \frac{1}{\sqrt{1-|v|^2}}(\boldsymbol{t} - \mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{q}_{\parallel}), \qquad \boldsymbol{q}'_{\parallel} = \frac{1}{\sqrt{1-|v|^2}}(\boldsymbol{q}_{\parallel} - \boldsymbol{t}\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}).$$

Ilyen a szokásosan tárgyalt Lorentz-féle transzformációs szabály, de nem ez, mert az koordinátákra vonatkozik, tehát $\mathbb{I}$ helyett $\mathbb{R}$, $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ helyett $\mathbb{R}^3$ szerepel, és ekkor a „két térbeli koordinátarendszer megfelelő tengelyei párhuzamosak”.

A különböző terekben levő egyenesek párhuzamosságát magyarázatra nem szorulónak, magától értetődőnek veszik; látjuk, hogy **a szokásos Lorentz-féle transzformációs szabályban elbújtatva ott van a különböző terek egymásba húzása**.

A kovektorok és vektorok Lorentz-azonosítása miatt a kovektorok széthasítása lényegében (egy előjeltől eltekintve) ugyanaz, mint a vektoroké, így a transzformációs szabály is hasonlóképp alakul. Közelebbről,

$$\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} := \left((\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}',\boldsymbol{u}})^{-1}\right)^* = \kappa(v)\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \\ \mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} & \boldsymbol{J}(\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}) \end{pmatrix}.$$

Ha tehát $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{p})$ egy kovektornak az $\boldsymbol{u}$ szerint széthasított alakja, és $(\boldsymbol{e}', \boldsymbol{p}')$ ugyanannak a vektornak az $\boldsymbol{u}'$ szerint széthasított alakja **áthúzva** az $\boldsymbol{u}$-hoz, akkor

$$\boldsymbol{p}'_\perp = \boldsymbol{p}_\perp,$$

és

$$\boldsymbol{e}' = \frac{1}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}|^2}}(\boldsymbol{e} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p}_\parallel), \qquad \boldsymbol{p}'_\parallel = \frac{1}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}|^2}}(\boldsymbol{p}_\parallel + \boldsymbol{e}\boldsymbol{v}).$$

10.8. Standard tenzori széthasítások és transzformációs szabályok

10.8.1. Széthasítások

Egyes fizikai elméletekben – mint például az elektromágnességben – nem csak vektorok és kovektorok, hanem különféle tenzorok is megjelennek. Ezeknek az alapos ismeretéhez a matematikai melléklet nyújt segítséget.

Az $\boldsymbol{u}$ abszolút sebesség szerint a különféle tenzorokat, azaz $\mathbf{M}\otimes\mathbf{M}$, $\mathbf{M}\otimes\mathbf{M}^*$, $\mathbf{M}^*\otimes\mathbf{M}$, és $\mathbf{M}^*\otimes\mathbf{M}^*$ elemeit is széthasíthatjuk. Emlékeztetünk, hogy ezek a tenzorok rendre $\mathbf{M}^* \to \mathbf{M}$, $\mathbf{M} \to \mathbf{M}$, $\mathbf{M}^* \to \mathbf{M}^*$ és $\mathbf{M} \to \mathbf{M}^*$ lineáris leképezéseknek tekinthetők.

A $\boldsymbol{G} \in \mathbf{M}\otimes\mathbf{M}$ azaz $\boldsymbol{G} : \mathbf{M}^* \to \mathbf{M}$ széthasítottja a

$$\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}}^* : (\mathbb{I}\times\mathbf{E})^* \to (\mathbb{I}\times\mathbf{E})$$

tenzor. Mivel $\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}})$ és $\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}}^* = (\boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}^*)$, és $(\mathbb{I}\times\mathbf{E})^* = \mathbb{I}^*\times\mathbf{E}^*$, a széthasított tenzort mátrixformába írva a

$$\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}}^* = = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}}^* & \boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}^* \\ \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}}^* & \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}^* \end{pmatrix},$$

eredményre jutunk, amelynek komponensei bővebben kifejtve

$$\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{G}\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}}^* = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{u},$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}^* = -\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{G} - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}}^* = -\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{u}),$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}^* = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{u}\otimes(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{G}) + (\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{u})\otimes\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{u}).$$

A kovektorok és vektorok közötti Lorentz-azonosítás miatt az egyéb tenzorok széthasított alakjai bizonyos előjelektől eltekintve ugyanilyenek.

Nevezetesen, az $\boldsymbol{L} \in \mathbf{M}\otimes\mathbf{M}^*$ $\boldsymbol{u}$-széthasított alakja

$$\begin{pmatrix} -\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{u} & -\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{L} - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{u}) & \boldsymbol{L} + \boldsymbol{u}\otimes(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{L}) + (\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{u})\otimes\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{u}) \end{pmatrix}.$$

Az $\boldsymbol{F} \in \mathbf{M}^*\otimes\mathbf{M}$ $\boldsymbol{u}$-széthasított alakja pedig

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{F} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}) & \boldsymbol{F} + \boldsymbol{u}\otimes(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{F}) + (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u})\otimes\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}) \end{pmatrix}.$$

Külön figyelmet érdemelnek az antiszimmetrikus tenzorok.

Ha $\boldsymbol{G}$ antiszimmetrikus tenzor, azaz $\boldsymbol{G} = -\boldsymbol{G}^*$, akkor $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{G} = -\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{u}$, ezért $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{u} = 0$, és így az $\boldsymbol{u}$-széthasítottja

$$\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{u} \\ -\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{u} & \boldsymbol{G} + (\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{u}) \wedge \boldsymbol{u} \end{pmatrix};$$

a széthasított alak „alsó” két komponense meghatározza a többit, ezért csak ezekre szoktunk hivatkozni

$$((-\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{u}, \boldsymbol{G} + (\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{u}) \wedge \boldsymbol{u})) \in (\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \otimes \mathbb{I}) \times (\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \wedge \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}})$$

alakban. Az elsőt a $\boldsymbol{G}$ **$\boldsymbol{u}$-időszerű komponensének**, a másodikat pedig az **$\boldsymbol{u}$-térszerű komponensének** nevezzük.

Hasonlóan, az $\boldsymbol{F}$ antiszimmetrikus kotenzor széthasított alakja

$$((\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}, \boldsymbol{F} + (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}) \wedge \boldsymbol{u})).$$

10.8.2. Transzformációs szabályok

A különböző tenzori széthasítások összehasonlításával kapjuk a tenzori transzformációs szabályokat. Most csak az antiszimmetrikus tenzorokra és kotenzorokra vonatkozó formulákkal foglalkozunk.

Ha $((\boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}))$ és $((\boldsymbol{D}', \boldsymbol{H}'))$ ugyanannak az antiszimmetrikus tenzornak az $\boldsymbol{u}$ szerinti széthasítottja, illetve az $\boldsymbol{u}'$ szerinti széthasítottja **áthúzva $\boldsymbol{u}$-ra**, akkor – az egyszerűség kedvéért a $\boldsymbol{v} := \mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}$ jelölést használva –

$$((\boldsymbol{D}', \boldsymbol{H}')) = \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \cdot ((\boldsymbol{D}, \boldsymbol{H})) \cdot \boldsymbol{h}^*_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} =$$
$$= \kappa(v)^2 \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{v} \\ -\mathbf{v} & \mathbf{J}(\mathbf{v}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{v} \\ -\mathbf{v} & \mathbf{J}(\mathbf{v}) \end{pmatrix}.$$

Itt is egyszerűbb formulát kapunk, ha a

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_\perp + \boldsymbol{D}_\parallel, \qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_\perp + \boldsymbol{H}_\parallel$$

felbontással élünk, ahol $\boldsymbol{D}_\perp$ és $\boldsymbol{D}_\parallel$ a $\mathbf{v}$-re merőleges, illetve azzal párhuzamos vektor, $\boldsymbol{H}_\perp$ és $\boldsymbol{H}_\parallel$ olyan antiszimmetrikus tenzor, amelynek a magja merőleges $\boldsymbol{v}$-re, illetve párhuzamos $\boldsymbol{v}$-vel. Ekkor

$$\boldsymbol{D}'_\parallel = \boldsymbol{D}_\parallel, \qquad \boldsymbol{H}'_\parallel = \boldsymbol{H}_\parallel,$$

$$\boldsymbol{D}'_\perp = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(\boldsymbol{D}_\perp + \boldsymbol{H}_\perp \cdot \mathbf{v}) \qquad \boldsymbol{H}_\perp = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{D}_\perp + \boldsymbol{H}_\perp).$$

Egy-egy előjeltől eltekintve ugyanilyen transzformációs szabály érvényes antiszimmetrikus kotenzorokra is. Közelebbről, ha $((\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}))$ és $((\boldsymbol{E}', \boldsymbol{B}'))$ ugyanannak az antiszimmetrikus kotenzornak az $\boldsymbol{u}$ szerinti széthasítottja, illetve az $\boldsymbol{u}'$ szerinti széthasítottja **áthúzva $\boldsymbol{u}$-ra**, akkor

$$\boldsymbol{E}'_\parallel = \boldsymbol{E}_\parallel, \qquad \boldsymbol{B}'_\parallel = \boldsymbol{B}_\parallel,$$

$$\boldsymbol{E}'_\perp = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(\boldsymbol{E}_\perp - \boldsymbol{B}_\perp \cdot \mathbf{v}) \qquad \boldsymbol{B}_\perp = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(-\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{E}_\perp + \boldsymbol{B}_\perp).$$

10.9. Standard téridő-széthasítások és transzformációs szabályok

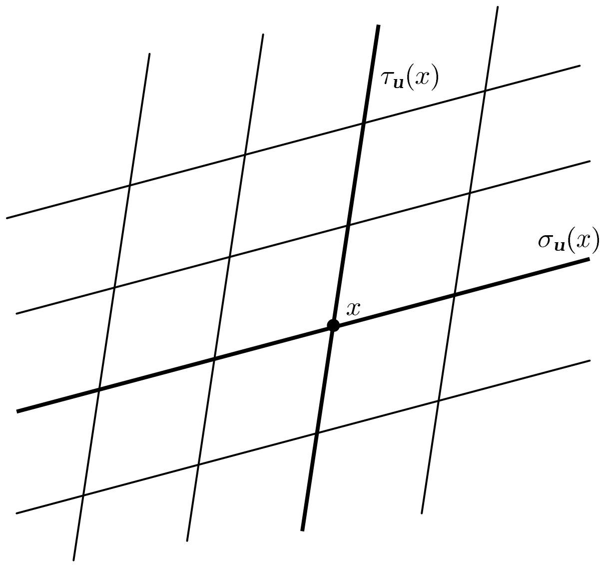
10.9.1. Széthasítások

Egy $\boldsymbol{u}$ standard tehetetlenségi rendszer a világpontokat azzal jellemzi, mikor és hol történnek (történtek), a korábbi elnevezésünk szerint **széthasítja** a téridőt időre és térre; közelebbről, egy x téridő-ponthoz hozzárendeli a $\tau_{\boldsymbol{u}}(x) =: x + \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ $\boldsymbol{u}$-időpontot és a $\sigma_{\boldsymbol{u}}(x) := x + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$ $\boldsymbol{u}$-térpontot:

$$h_{\boldsymbol{u}} : \mathtt{M} \to \mathtt{I}_{\boldsymbol{u}} \times \mathtt{E}_{\boldsymbol{u}}, \qquad x \mapsto \big(\tau_{\boldsymbol{u}}(x), \sigma_{\boldsymbol{u}}(x)\big).$$

Ez a (10.33), (10.41) és (10.43) képletek alapján affin bijekció a $\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}}$ vektori széthasítás fölött. E széthasítás inverze – amely megmondja, mely világpont felel meg egy időpontnak és egy $\boldsymbol{u}$-térpontnak –

$$h_{\boldsymbol{u}}^{-1} : \mathtt{I}_{\boldsymbol{u}} \times \mathtt{E}_{\boldsymbol{u}} \to \mathtt{M}, \qquad (t, q) \mapsto t \cap q.$$



10.10. ábra. A téridő széthasítása

Minthogy az affin terek helyett sokszor célszerűbb az alulfekvő vektorterekkel dolgozni, a standard tehetetlenségi rendszer – a mindennapi gyakorlatnak megfelelően, amikor az időpontokat valamely időponttól eltelt időtartammal, a térpontokat valamely origóból odahúzott vektorral jellemezzük – választva egy t_0 „$\boldsymbol{u}$-idő-kezdőpontot” és egy q_0 „$\boldsymbol{u}$-tér-kezdőpontot”, vektorizálja az idejét és a terét az

$$\mathtt{I}_{\boldsymbol{u}} \times \mathtt{E}_{\boldsymbol{u}} \to \mathbb{I} \times \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}, \qquad (t, q) \mapsto (t - t_0, q - q_0)$$

képlettel.

t_0 és q_0 választása egyenértékű egy o „kezdő-világpont” választásával: $o = t_0 \cap q_0$, $t_0 = \tau_{\boldsymbol{u}}(o) = o + \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$, $q_0 = \sigma_{\boldsymbol{u}}(o) = o + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$, és a mondottak alapján igen egyszerű tény, hogy a téridő széthasítása majd az $\boldsymbol{u}$-idő és $\boldsymbol{u}$-tér vektorizálása együtt a

$$h_{\boldsymbol{u},o} : \mathtt{M} \to \mathbb{I} \times \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}, \qquad x \mapsto \boldsymbol{h_u} \cdot (x-o) = \big(-\boldsymbol{u}\cdot(x-o), \boldsymbol{\sigma_u}\cdot(x-o)\big) \quad (10.46)$$

hozzárendelést adja, amelynek neve a téridőnek o és $\boldsymbol{u}$ szerinti **vektorizált széthasítása**. Ennek inverze

$$\mathbb{I} \times \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \to \mathtt{M}, \qquad (\boldsymbol{t}, \boldsymbol{q}) \mapsto o + \boldsymbol{t}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{q}.$$

10.9.2. Transzformációs szabályok

A téridő-széthasítások közötti transzformációs szabályt $h_{\boldsymbol{u}} \circ h'^{-1}_{\boldsymbol{u}} : \mathtt{I}_{\boldsymbol{u}} \times \mathtt{E}_{\boldsymbol{u}} \to \mathtt{I} \times \mathtt{E}'_{\boldsymbol{u}}$ adná meg. Ezzel is az a baj, hogy az indulási halmaza (értelmezési tartománya) és az érkezési halmaza (értékkészlete) két különböző halmaz, így nem kézzel fogható, mi a különbség az indulási és érkezési értékek között. Ezért célszerűen a vektorizált széthasításokat hasonlítjuk össze az előzőek szerint áthúzással kombinálva, hiszen akkor a transzformációs szabályra $\mathbb{I} \times \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \to \mathbb{I} \times \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ leképezést kapunk.

Legyen $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{q})$ és $(\boldsymbol{t}', \boldsymbol{q}')$ ugyanannak a téridőpontnak a vektorizált széthasított alakja az $(\boldsymbol{u}, o)$ illetve az $(\boldsymbol{u}', o')$ tehetetlenségi megfigyelő szerint, ez utóbbi áthúzva $\boldsymbol{u}$-ra. Ekkor

$$(\boldsymbol{t}', \boldsymbol{q}') = (1, \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'}) h_{\boldsymbol{u},o'}\big(h^{-1}_{\boldsymbol{u},o}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{q})\big).$$

Az előzőekből nyilvánvaló számolást mellőzve a $\boldsymbol{t}_0 := -\boldsymbol{u}' \cdot (o - o')$ és $\boldsymbol{q}_0 = \boldsymbol{\sigma}'_{\boldsymbol{u}} \cdot (o - o')$ jelölésekkel azt kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{t}' = \kappa(\mathbf{v})(\boldsymbol{t} - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{q}) + \boldsymbol{t}_0, \qquad \boldsymbol{q}' = \kappa(\mathbf{v})(\boldsymbol{J}(\mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{q} - \boldsymbol{t}\mathbf{v}) + \boldsymbol{q}_0,$$

ami a jól ismert úgynevezett **inhomogén Lorentz-transzformációs szabály**.

Ez átmegy a (vektori) Lorentz-transzformációs szabályba, ha a két megfigyelő ugyanazt a téridő-kezdőpontot választja ($o = o'$), ami megfelel annak, hogy a két megfigyelő úgy választ idő-kezdőpontot és origót, hogy azok együttesen egybeesnek: $t_0 \cap q_0 = t'_0 \cap q'_0$.

Jól jegyezzük meg:

– az inhomogén Lorentz-transzformációs szabály affin leképezés, és az affin téridő különféle széthasításainak összehasonlítására szolgál,

– a Lorentz-transzformációs szabály lineáris leképzés, és téridő-vektorok széthasításainak összehsonlítására szolgál.

10.10. Transzformációk és transzformációs szabályok

A nemrelativisztikus téridőmodellben az egyetlen térszerű altér minden Galilei-transzformációra invariáns; itt viszont nincs olyan háromdimenziós altér, amely invariáns volna minden Lorentz-transzformációra. Ezért a Lorentz-transzformációk széthasított alakja általában jóval bonyolultabb, mint a Galilei-transzformációké.

Az (10.45) meghatározásból könnyen származtathatjuk, hogy

$$\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'} = \boldsymbol{h_u} \cdot \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{h}^{-1}_{\boldsymbol{u}},$$

vagyis az $\boldsymbol{u}'$-ről az $\boldsymbol{u}$-ra vonatkozó vektori transzformációs szabály éppen az $\boldsymbol{u}$-ról az $\boldsymbol{u}'$-re való áthúzásnak az $\boldsymbol{u}$-széthasított alakja.

A téridő vektorizált széthasítása pedig a Poincaré-transzformációkat az inhomogén Lorentz-transzformációs szabályokba viszi át.

Noha a mondottak alapján bizonyos kapcsolat van a Poincaré-, illetve a Lorentz-transzformációk és az (inhomogén) Lorentz-transzformációs szabályok között, mind fogalmilag, mind matematikailag lényegesen különböznek egymástól. A téridőszimmetriák a téridő struktúráját tükröző $\mathtt{M} \to \mathtt{M}$, illetve $\mathbf{M} \to \mathbf{M}$ leképezések, míg a transzformációs szabályok a megfigyelők szerinti széthasításokat összehasonlító $\mathbb{I} \times \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \to \mathbb{I} \times \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ leképezések.

A szokásos koordinátás tárgyalásban a transzformációs szabályok és a téridőszimmetriák összemosódnak, mert mind az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ ugyanolyan transzformációi. Ez olykor fogalmi zavarhoz vezet, amint arra már a nemrelativisztikus esetben felhívtuk a figyelmet.

Az irodalomban található utalás arra, hogy két különböző dolog jelenik meg ugyanabban a formában, ezért szokás aktív és passzív transzformációkról beszélni, az előbbin a téridőszimmetriákat értve, az utóbbin a transzformációs szabályokat.

10.11. Standard koordinátázások

Az időtartamokat úgy jellemezzük számokkal, hogy egy választott $\mathrm{s} \in \mathbb{I}^+$ időegység (szekundum) számszorosaiként adjuk meg őket; formulában, az időtartamok koordinátázása

$$\mathbb{I} \to \mathbb{R}, \qquad \boldsymbol{t} \mapsto \frac{\boldsymbol{t}}{\mathrm{s}}.$$

Most a távolságokat is időtartamokkal mérjük (egy tehetetlenségi megfigyelő két térpontja közötti távolság a fény oda-vissza útja időtartamának a fele). Az $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelő a térvektorait úgy jellemzi számhármasokkal, hogy választ $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$-ban $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ egymásra merőleges, „jobb sodrású”, s hosszúságú vektorokat, azaz egy pozitívan irányított, s-re normált ortogonális bázist, és veszi a vektoroknak az erre vonatkozó koordinátáit:

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \to \mathbb{R}^3, \qquad \boldsymbol{q} \mapsto \left(\frac{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{q}}{\mathrm{s}^2}, \frac{\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{q}}{\mathrm{s}^2}, \frac{\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{q}}{\mathrm{s}^2}\right).$$

Az $\boldsymbol{u}$ standard tehetetlenségi rendszer úgy koordinátázza a téridővektorokat, hogy

– széthasítja $\mathbf{M}$-et a 10.7.1-ben mondottak szerint $\mathbb{I} \times \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$-ra,

– $\mathbb{I}$-t koordinátázza s-sel,

– $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$-et koordinátázza $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$-mal.

Más szóval, bevezetve az $\boldsymbol{e}_0 := \mathrm{s}\boldsymbol{u}$ jelölést, a téridővektorok koordinátázása az

$$\mathbf{M} \to \mathbb{R}^4, \qquad \mathbf{x} \mapsto \{\mathbf{x} \text{ koordinátái az } \boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \text{ bázisban }\},$$

lineáris bijekció.

Tehát ha $\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3$ az $\mathbf{x}$ vektor koordinátái, akkor $\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{3} \xi^i \boldsymbol{e}_i$, és könyen adódik, hogy

$$\xi^0 = -\frac{\boldsymbol{e}_0 \cdot \mathbf{x}}{\mathrm{s}^2}, \quad \xi^i = \frac{\boldsymbol{e}_i \cdot \mathbf{x}}{\mathrm{s}^2}, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Jegyezzük meg, hogy a szokásnak megfelelően, egy vektor koordinátáit felső indexszel jelöljük.

A téridő koordinátázásához a standard tehetetlenségi rendszer még választ egy o **kezdőpontot** is $\mathtt{M}$-ben, ennek segítségével vektorizálja a téridőt, majd alkalmazza az előbb leírt koordinátázást, ami végül ezt adja:

$$\mathtt{M} \to \mathbb{R}^4, \qquad x \mapsto \{x - o \text{ koordinátái az } \boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \text{ bázisban } \}.$$

A mondottaknak megfelelően egy **standard tehetetlenségi koordinátarendszer**

$$(s, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, o),$$

ahol s időegység, $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelő, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ az s-re normált pozitívan irányított ortogonális bázis $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$-ben és o világpont.

Visszalapozva a 10.3.2 alfejezethez, megállapíthatjuk, hogy a téridőnek a standard tehetetlenségi rendszer általi koordinátázása valójában az aritmetikai téridőmodellre való áttérést jelenti. Azt is láthatjuk, hogy mennyi esetleges és önkényes objektum van elrejtve az aritmetikai téridőmodellben: egy megfigyelő, a megfigyelő standard szinkronizációja, egy időegység, egy ortogonális térbázis és egy téridő-kezdőpont.

A koordinátarendszer nemcsak a téridővektorokat, hanem a kovektorokat és a különféle tenzorokat is megfelelően koordinátákkal jeleníti meg. Például a $\boldsymbol{k}$ kovektor kordinátái

$$(\chi_i := \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{e}_i \mid i = 0, 1, 2, 3).$$

A kovektorok is számnégyesként jelennek meg koordinátákban, és a szokásnak megfelelően, hogy a kovektorok számnégyeseit megkülönböztessük a vektorok számnégyeseitől, a kovektorok koordinátáit alsó indexszel jelöljük. Most azonban az $\mathbf{M}^* \equiv \frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}}$ Lorentz-azonosítás miatt a kovektorok koordinátáit lényegében ugyanúgy kapjuk, mint a vektorokét, egy előjeltől eltekintve a nulladik (az időszerű) koordinátában. Szokás beszélni egy $\boldsymbol{x}$ vektornak $(\xi^i : i = 0, 1, 2, 3)$ vektori koordinátáiról (ezek magának az $\mathbf{x}$-nek a a koordinátái) és $(\xi_i : i = 0, 1, 2, 3)$ kovektori koordinátáiról (ezek a kovektornak tekintett $\frac{\mathbf{x}}{\mathrm{s}^2}$ koordinátái); ekkor $\xi_0 = -\xi^0$, $\xi_k = \xi^k$ $(\alpha = 1, 2, 3)$.

Egy $\boldsymbol{G} \in \mathbf{M} \otimes \mathbf{M}$ tenzor koordinátái $(i, k = 1, 2, 3)$:

$$G^{00} := \frac{\boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{e}_0}{\mathrm{s}^2}, \quad G^{0k} = -\frac{\boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{e}_k}{\mathrm{s}^2}, \quad G^{k0} = -\frac{\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{e}_0}{\mathrm{s}^2},$$

$$G^{ik} = \frac{\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{e}_k}{\mathrm{s}^2}$$

Egy $\boldsymbol{F} \in \mathbf{M}^* \otimes \mathbf{M}^*$ kotenzor koordinátái $(i, k = 0, 1, 2, 3)$:

$$F_{ik} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_k.$$

10.12. Hosszúságok és időtartamok összehasonlítása

10.12.1. Lenyomatkészítés

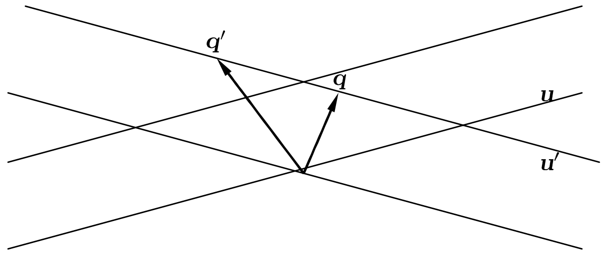
Noha már értelmeztük az áthúzást fényjelek segítségével, érdemes megvizsgálni, milyen eredményre vezet most a pillanatszerű lenyomat készítése, amely a nemrelativisztikus téridőmodellben az egymáshoz képest mozgó vektorok azonosítására szolgált. Ez az eljárás – különböző térpontok ugyanabban a pillanatban – szinkronizációt feltételez.

Tekintsünk egy $\boldsymbol{u}$ standard vonatkoztatási rendszert, amely pillanatszerű lenyomatot készít az $\boldsymbol{u}'$ tehetetlenségi megfigyelő megfigyelő térvektorairól. A $\boldsymbol{q}' \in \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}$ vektor lenyomata az a $\boldsymbol{q} \in \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$, amelyre $\boldsymbol{q}' - \boldsymbol{q}$ párhuzamos $\boldsymbol{u}'$-vel (lásd a 10.11 ábrát); ez azt jelenti, hogy $\boldsymbol{q}$ a $\boldsymbol{q}'$-nek az $\boldsymbol{u}'$ mentén az $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$-ra való vetülete. Egyszerűen látható, hogy a szóban forgó vetítés a

$$\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{u}' \otimes \boldsymbol{u}}{-\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{u}} \tag{10.47}$$

lineáris leképezés, ugyanis $\boldsymbol{u}'$-t a nullába viszi, $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ elemeit pedig saját magukba; tehát

$$\boldsymbol{q} = \left(\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{u}' \otimes \boldsymbol{u}}{-\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{u}}\right) \boldsymbol{q}'. \tag{10.48}$$



10.11. ábra. Pillanatszerű lenyomat

Mindjárt meglátjuk, hogy $\boldsymbol{q}$ és $\boldsymbol{q}'$ nem azonos hosszúságúak, ezért a pillanatszerű lenyomat készítése nem alkalmas a vektorok áthúzására.

10.12.2. Lorentz-kontrakció

Felhasználva, hogy $\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{q}' = 0$, a (10.48) átalakításával

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q} &= \boldsymbol{q}' + \boldsymbol{u}' \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{q}'}{-\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{u}} = \boldsymbol{q}' + \boldsymbol{u}' \left(\frac{\boldsymbol{u}}{-\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u}'\right) \cdot \boldsymbol{q}' = \\ &= \boldsymbol{q}' + \boldsymbol{u}'(\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'} \cdot \boldsymbol{q}'), \end{aligned}$$

ami szerint a lenyomat hossz-négyzete

$$|\boldsymbol{q}|^2 = |\boldsymbol{q}'|^2 - (\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'} \cdot \boldsymbol{q}')^2.$$

Ez a híres **Lorentz-kontrakció**: ha a vektor („rúd”) merőleges a relatív sebességre, akkor a lenyomat hossza megegyezik a vektor saját hosszával. Egyébként a lenyomat rövidebb; a legrövidebb akkor, ha a vektor párhuzamos a relatív sebességgel, amikor is a lenyomat hossza a sajáthossz $\sqrt{1 - |\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'}|^2}$-szerese.

A Lorentz-kontrakciót sokszor – helytelenül! – így fogalmazzák meg: a mozgó rúd a mozgás irányában megrövidül. Hangsúlyozzuk: **a Lorentz-kontrakció nem valóságos fizikai tény**, hanem a szinkronizáció sajátosságából eredő látszat; szorosan kapcsolódik a szinkronizációhoz, amely, mint már sokszor mondtuk, nem fizikai valóság, hanem emberi konstrukció. Más szinkronizációval más eredményre jutunk (lásd 15.5).

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a mondottak alapján **fizikai tényt nem lehet a Lorentz-kontrakcióval magyarázni**. A szokásos irodalomban található, Lorentz-kontrakcióval magyarázott összefüggéseket csak akkor fogadjuk el fizikai tényeknek, ha találunk rájuk szinkronzációtól mentes magyarázatot.

10.12.3. Alagút-paradoxon

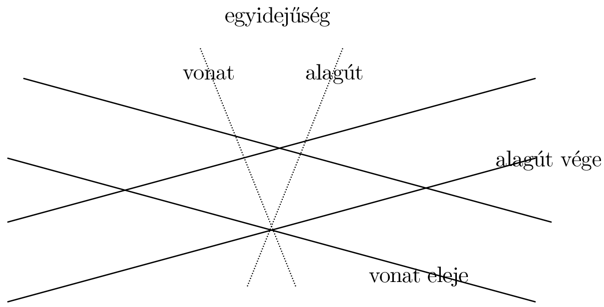
A Lorentz-kontrakcióval kapcsolatban merült fel az ismert alagút-paradoxon.

Ugyanis az előbbiekben $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{u}'$ szerepét felcserélhetjük: az $\boldsymbol{u}'$ is úgy „észleli", hogy az $\boldsymbol{u}$ vektorai megrövidülnek.

Tekintsünk egy egyenes pályán egyenletes sebességgel haladó vonatot, amely alagút felé közeledik. Az alagút sajáthossza egyezzen meg a vonat sajáthosszával.

Az alagúthoz képest mozog a vonat, ezért szerinte a vonat megrövidül, így az alagút azt állítja, hogy a vonat egy ideig teljes egészében az alagútban lesz.

A vonathoz képest az alagút mozog, ezért szerinte az alagút megrövidül, így a vonat azt állítja, hogy a vonat sohasem lesz teljes egészében az alagútban.



10.12. ábra. Vonat és alagút

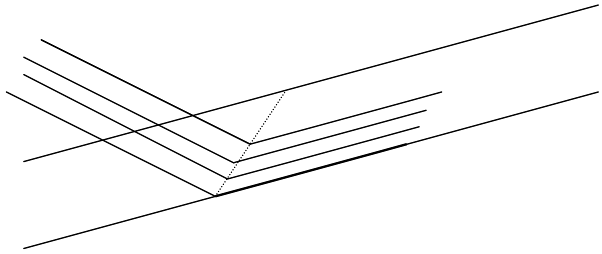
Úgy tudjuk feloldani az alagút és a vonat ellentmondását, hogy pontosan fogalmazunk. Tekintsük azt az eseményt, hogy a vonat eleje egybeesik az alagút végével. Az alagút szerinti standard szinkronizációnak ugyanebben a pillanatában a vonat vége már túlhaladt az alagút elején. A vonat szerinti standard szinkronizációnak ugyanebben a pillanatában a vonat vége még nem érte el az alagút elejét (lásd a 10.12 ábrát).

Tehát mind az alagút, mind a vonat állítása igaz, persze két különböző szinkronizációra vonatkoztatva.

Lehet, hogy valakit nem győz meg a fenti érvelés, és azt mondja: zárja be az alagút a vonatot, amikor az benn van, és akkor neki lesz igaza, nem a vonatnak. Eresszen le az alagút elején is, végén is egyszerre egy áttörhetetlen csapóajtót!

Természetesen így is be fog következni az az esemény, hogy a vonat eleje találkozik az alagút végével, és akkor nekiütődve hirtelen megáll. Következésképpen az egész vonat meg fog állni. Hogyan? Az alagút nem akarja, hogy a vonat összetörjön, ezért – fogadjuk el ezt az ideális lehetőséget – „hirtelen, egy pillanat alatt" megállítja (lefékezi) az egész vonatot. Amikor a vonat minden kocsija az alagút szinkronizációja szerint ugyanabban a pillanatban áll meg, azt a vonat úgy éli meg, hogy az ő szinkronizációja szerint amikor a mozdony megáll, az első kocsi még halad előre, aztán megáll az első kocsi, de ekkor a második kocsi még halad előre, és így tovább: a vonat összenyomódik (10.13 ábra)!

Valóban, a lefékezett vonat benn van az alagútban. A fékezéssel azonban megszűnt az alagút és a vonat szerepének a kölcsönössége, mert a vonat már nem tehetetlenségi, és az ilyen módon megvalósított fékezéssel valóban megrövidült.



10.13. ábra. Lefékezett vonat

10.12.4. Idődilatáció

Egy tehetetlenségi megfigyelő meg akarja mérni egy hozzá képest mozgó kronométer járását, azaz a kettyenéseinek gyakoriságát: megszámolja, mennyit kettyen a kronométer adott időtartam alatt.

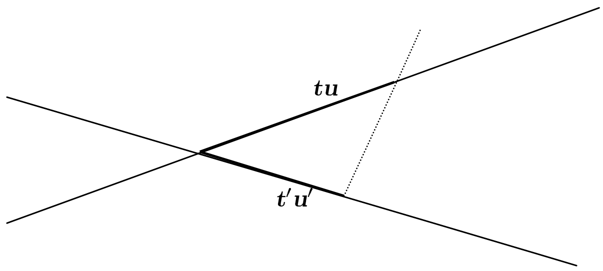
A kronométer mozog a megfigyelőhöz képest, ezért különböző kettyenései a megfigyelő különböző térpontjaiban következnek be. Adott időtartam a megfigyelő különböző térpontjai között: ez szinkronizációt feltételez.

Tekintsünk tehát egy $\boldsymbol{u}$ standard vonatkoztatási rendszert, amely méri az $\boldsymbol{u}'$ abszolút sebességű kronométer járását.

A kronométer $\boldsymbol{t}'$ sajátidő-tartamának megfelelő szinkronizációs időtartam a $\boldsymbol{t}'\boldsymbol{u}'$ vektornak az $\boldsymbol{u}$-időszerű komponense (10.14 ábra):

$$\boldsymbol{t} := \boldsymbol{t}'(-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}') = \frac{\boldsymbol{t}'}{\sqrt{1-|\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'}|^2}}.$$

Ez a híres **idődilatáció**: a mért időtartam hosszabb, mint a sajátidő-tartam.



10.14. ábra. Idődilatáció

Az idődilatációt sokszor – helytelenül! – így fogalmazzák meg: a mozgó óra (kronométer) járása lelassul. Hangsúlyozzuk: **az idődilatáció nem valóságos fizikai tény**, hanem a szinkronizáció sajátosságából eredő látszat; szorosan kapcsolódik a szinkronizációhoz, amely, mint már sokszor mondtuk, nem fizikai valóság, hanem emberi konstrukció. Más szinkronizációval más eredményre jutunk (lásd 15.6).

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a mondottak alapján **fizikai tényt nem lehet a idődilatációval magyarázni**. A szokásos irodalomban található, idődilatációval magyarázott összefüggéseket csak akkor fogadjuk el fizikai tényeknek, ha találunk rájuk szinkronzációtól mentes magyarázatot.

10.12.5. Ikerparadoxon

Az idődilatációval kapcsolatban merült fel az ismert ikerparadoxon.

Ugyanis az előbbiekben $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{u}'$ szerepét felcserélhetjük: az $\boldsymbol{u}'$ is úgy „észleli", hogy az $\boldsymbol{u}$ órái járnak lassabban.

Tekintsünk két ikret, Pétert és Pált, akik születésük pillanatában szétválnak, és két különböző tehetetlen űrhajóban folytatják életüket.

Péter szerint Pál mozog hozzá képest, és úgy találja, hogy amikor ő huszonöt éves, akkor Pál még csak húsz éves: Pál fiatalabb, mint Péter.

Pál szerint Péter mozog hozzá képest, és úgy találja, hogy amikor ő huszonöt éves, akkor Péter még csak húsz éves: Péter fiatalabb, mint Pál.

Az ellentmondás feloldása abban áll, hogy az „amikor ..., akkor ..." a két esetben két különböző szinkronizációra vonatkozik.

Lehet, hogy valakit nem győz meg ez az érvelés, és azt mondja: lássuk, melyikük lesz öregebb a két iker közül, ha találkoznak.

Azonban ha mindkettő marad tehetetlen, akkor sohasem találkoznak.

Ha úgy találkoznak, hogy Péter megy Pálhoz, azaz Pál marad tehetetlenségi, akkor Péter lesz fiatalabb, mert tudjuk, hogy két esemény között a tehetetlenségi idő a leghosszabb; ellenkező esetben Pál lesz a fiatalabb. De az is lehet, hogy egyik sem marad tehetetlenségi, és éppen úgy, hogy ugyanolyan idősek lesznek a találkozásukkor.

Felmerülhet valakiben a kérdés, hogyan értesülhet arról Péter (Pál), hogy amikor ő huszonöt éves, akkor Pál (Péter) még csak húsz éves, hiszen messze-messze vannak egymástól egy-egy űrhajóban. Nos, rádióüzenetekkel kapcsolatban állhatnak egymással. Péter (Pál), amikor ő tíz éves, rádión elküldi a kérdést: hány éves vagy? Amint Pál (Péter) megkapja az üzenetet, válaszol: húsz éves vagyok. Ez a válasz akkor érkezik vissza Péterhez (Pálhoz), amikor ő negyven éves. Ebből kiszámítja: a rádiójelek oda-vissza harminc évig haladtak, „nyilván" tizenötöt oda, tizenötöt vissza, tehát azzal egyidőben, amikor a testvérem válaszolt, akkor én huszonöt éves voltam.

Láthatjuk, hogy az egyidejűség ilyen kiszámítási módja pontosan a standard szinkronizációt eredményezi.

10.13. Deriváltak

Tekintsünk egy $f : M \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényt. Mint ismeretes (lásd a matematikai mellékletet), egy x pontban a deriváltja $\mathcal{D}f(x) : \mathbf{M} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, vagyis az $\mathbf{M}^*$ eleme. Ezt a kovektort az $\boldsymbol{u}$ standard tehetetlenségi rendszer széthasítja a

$$(\mathcal{D}f(x)) \cdot \boldsymbol{u} =: \mathcal{D}_{\mathbf{u}} f(x),$$

$\boldsymbol{u}$-időszerű komponensre és

$$(\mathcal{D}f(x))|_{\mathbf{E}_{\mathbf{u}}} =: \nabla_{\mathbf{u}} f(x)$$

$\boldsymbol{u}$-térszerű komponensre, amelyeknek közvetlen értelem is adható hasonlóképpen, mint a nemrelativisztikus esetben.

Szűkítsük le f-et az x-en áthaladó $\boldsymbol{u}$-vezette egyenesre, azaz tekintsük az $\mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{t} \mapsto f(x+\boldsymbol{t}\boldsymbol{u})$ függvényt. Ennek a deriváltja a kompozíciók deriválásának szabálya szerint $\mathcal{D}f(x) \cdot \boldsymbol{u}$.

Szűkítsük le f-et az x-en áthaladó $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$-vezette hipersíkra, azaz tekintsük az $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{q} \mapsto f(x+\boldsymbol{q})$ függvényt. Ennek a deriváltja a kompozíciók deriválásának szabálya szerint $(\mathcal{D}f(x))|_{\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}}$.

Ezeknek megfelelően $\mathcal{D}_{\boldsymbol{u}}f$-et az f **$\boldsymbol{u}$-időszerű deriváltjának** hívjuk, $\nabla_{\boldsymbol{u}}f$-et pedig az f **$\boldsymbol{u}$-térszerű deriváltjának**.

Ha a téridőt koordinátázzuk, $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3) \mapsto \hat{f}(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3) := f(o+\sum_{k=0}^{3} \xi^k \boldsymbol{e}_k)$ formában adjuk meg a függvényt, és ekkor $\partial_k \hat{f}(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3) = \mathcal{D}f(o+\sum_{k=0}^{3} \xi^k \boldsymbol{e}_k)\cdot \boldsymbol{e}_k$, vagyis a parciális deriváltak a $\mathcal{D}f$ koordinátái. A szokásnak megfelelően, az egyszerűség kedvéért egy kis pongyolasággal elhagyjuk a „kalapot” és azt írjuk, hogy

$$\mathcal{D}f \quad \text{koordinátái} \quad \partial_k f \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Világos, hogy a nulladik parciális derivált az $\boldsymbol{u}$-időszerű derivált koordinátázott alakja, a többi parciális derivált pedig az $\boldsymbol{u}$-térszerű derivált koordinátázott alakja.

A $\mathcal{D}$ differenciálás általában szimbolikus kovektorként fogható fel, amelynek széthasított alakja $(\mathcal{D}_{\boldsymbol{u}}, \nabla_{\boldsymbol{u}}) := (\boldsymbol{u}\cdot\mathcal{D}, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}\cdot\mathcal{D})$.

Például egy $\boldsymbol{J} : \mathtt{M} \to \mathbf{M}$ vektormező $\mathcal{D}\boldsymbol{J}$ deriváltjának az értékei az $\mathbf{M}\otimes\mathbf{M}^*$ elemei. A matematikai mellékletben mondottak szerint célszerűen a derivált helyett a transzponáltját fogjuk használni, amelyet $\mathcal{D}\otimes\boldsymbol{J}$ alakba írunk; ennek széthasított formája

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}_{\boldsymbol{u}}(-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{J}) & \mathcal{D}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{J}) \\ \nabla_{\boldsymbol{u}}(-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{J}) & \nabla_{\boldsymbol{u}}\otimes(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{J}) \end{pmatrix},$$

koordinátákban $\partial_i J^k$ $(i, k = 0, 1, 2, 3)$.

$(\mathcal{D}\otimes\boldsymbol{J})(x)$-nek vehetjük a nyomát (lásd a matematikai mellékletet), így értelmezzük a **$\boldsymbol{J}$ divergenciáját**:

$$(\mathcal{D}\cdot\boldsymbol{J})(x) := \mathrm{Tr}(\mathcal{D}\otimes\boldsymbol{J}(x)),$$

széthasítással

$$\mathcal{D}\cdot\boldsymbol{J} = \mathcal{D}_{\boldsymbol{u}}(-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{J}) + \nabla_{\boldsymbol{u}}\cdot(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{J}),$$

ami koordinátákban $\sum_{k=0}^{3} \partial_k J^k$.

A jobb áttekinthetőség kedvéért vezessük be a $\sim$ jelet a széthasított, illetve a koordinátázott alakban való megjelenítésre. A koordináta-indexek mindig a $0, 1, 2, 3$ értéken futnak végig, és egy formulában az azonos alsó-felső indexre összegezni kell 0-tól 3-ig. Tehát ha

$$\boldsymbol{J} \quad \sim \quad (\rho_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{j}_{\boldsymbol{u}}) \quad \sim \quad J^k,$$

akkor

$$\mathcal{D}\cdot\boldsymbol{J} \quad \sim \quad \mathcal{D}_{\boldsymbol{u}}\rho_{\boldsymbol{u}} + \nabla_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{j}_{\boldsymbol{u}} \quad \sim \quad \partial_k J^k.$$

Egy $\boldsymbol{K} : \mathtt{M} \to \mathbf{M}^*$ kovektormezőre $\mathcal{D}\otimes\boldsymbol{K}$ értékei az $\mathbf{M}^*\otimes\mathbf{M}^*$ elemei, széthasítva

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{K}) & \mathcal{D}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{K}) \\ \nabla_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{K}) & \nabla_{\boldsymbol{u}}\otimes(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{K}) \end{pmatrix},$$

koordinátákban $\partial_i K_k$ $(i, k = 0, 1, 2, 3)$.

$\mathcal{D} \otimes \boldsymbol{K}(x)$-nek vehetjük az antiszimmetrikus részét, így értelmezzük a K **külső deriváltját**:

$$\mathcal{D} \wedge \boldsymbol{K} := \mathcal{D} \otimes \boldsymbol{K} - (\mathcal{D} \otimes \boldsymbol{K})^*,$$

ami széthasítva

$$(\!(\nabla_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{K}) - \mathcal{D}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{K}), \nabla_{\boldsymbol{u}} \wedge (\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{K}))\!),$$

koordinátákban pedig $\partial_k K_i - \partial_i K_k$.

Az előbbi áttekintéssel: ha

$$\boldsymbol{K} \quad \sim \quad (-V_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{u}}) \quad \sim \quad K_k,$$

akkor

$$\mathcal{D} \wedge \boldsymbol{K} \quad \sim \quad (\!(-\nabla_{\boldsymbol{u}} V_{\boldsymbol{u}} - \mathcal{D}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{u}}, \nabla_{\boldsymbol{u}} \wedge \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{u}})\!) \quad \sim \quad \partial_k K_i - \partial_i K_k.$$

Jegyezzük meg jól: *noha eredetileg vektormezőnek nincs külső deriváltja, kovektormezőnek pedig nincs divergenciája, a vektorok és kovektorok Lorentz-azonosítása miatt beszélhetünk vektormező külső deriváltjáról és kovektormező divergenciájáról.*

Teljesen hasonlóan, egy $\boldsymbol{G} : \mathtt{M} \to \mathbf{M} \wedge \mathbf{M}$ antiszimmetrikus tenzormezőnek van divergenciája, amelynek az értékei $\mathbf{M}$-ben vannak; ha

$$\boldsymbol{G} \quad \sim \quad (\!(\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{u}})\!) \quad \sim \quad G^{ik},$$

akkor

$$\mathcal{D} \cdot \boldsymbol{G} \quad \sim \quad (\nabla_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{u}}, -\mathcal{D}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{u}} + \nabla_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{u}}) \quad \sim \quad \partial_i G^{ik}.$$

Egy $\boldsymbol{F} : \mathtt{M} \to \mathbf{M} \wedge \mathbf{M}$ antiszimmetrikus kotenzormezőnek van $\mathcal{D} \wedge \boldsymbol{F}$ külső deriváltja, amelynek az értékei $\mathbf{M}^* \wedge \mathbf{M}^* \wedge \mathbf{M}^*$-ban vannak; ha

$$\boldsymbol{F} \quad \sim \quad (\!(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}})\!) \quad \sim \quad F_{ik},$$

akkor

$$\mathcal{D} \wedge \boldsymbol{F} \quad \sim \quad (\!(\!(\nabla_{\boldsymbol{u}} \wedge \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}} + \mathcal{D}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}}, \nabla_{\boldsymbol{u}} \wedge \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}})\!)\!) \quad \sim \quad \partial_j F_{ik} + \partial_k F_{ji} + \partial_i F_{kj},$$

ahol a $(\!(\!(\ \ )\!)\!)$ zárójel azt jelenti, hogy a benne foglalt két mennyiség már meghatározza az egész harmadrendű antiszimmetrikus tenzort.

A tenzorok és kotenzorok Lorentz-azonosítása miatt antiszimmetrikus tenzornak is tekinthetjük a külső deriváltját és kotenzornak is tekinthetjük a divergenciáját.

11. A pontmechanika alapjai a téridőmodellben

A legegyszerűbb fizikai elmélet, a pontmechanika áttekintése egyrészt kitűnő lehetőséget ad, hogy jobban megértsük és elmélyítsük a téridőmodellről szerzett tudásunkat, másrészt igen jól mutatja a lényeges (fizikai tartalommal bíró) eltérést a nemrelativisztikus és a relativisztikus elmélet között.

11.1. Világvonal-függvények

Nemrelativisztikusan egy világvonalat természetes módon paraméterezhettünk az abszolút idővel. Itt erre nincs lehetőség, azonban mégis adhatunk természetes paraméterezést a sajátidővel.

Rögzítsük a $\mathtt{C}$ világvonal egy x_0 elemét; ekkor a $\mathtt{C}$ minden x pontjához hozzárendelve az x_0-tól x-ig eltelt $\boldsymbol{t}_{\mathtt{C}}(x_0, x)$ sajátidőt (lásd 10.1.5), kapjuk a $\mathtt{C}$ világvonal x_0-ból induló sajátidő-függvényét.

A $\mathtt{C} \to \mathbb{I}$, $x \mapsto \boldsymbol{t}_{\mathtt{C}}(x_0, x)$ *sajátidő-függvény injektív, az inverze, amelyet jelöljünk* r*-rel, az* $\mathbb{I}$*-ből az* $\mathtt{M}$*-be képező folytonosan differenciálható függvény, és bármely* p *előrehaladó paraméterezés esetén*

$$\dot{r}(r^{-1}(x)) = \frac{\dot{p}(p^{-1}(x))}{|\dot{p}(p^{-1}(x))|}, \tag{11.49}$$

ahol $|\ |$ a pszeudohosszat jelenti.

Legyen p a $\mathtt{C}$ előrehaladó paraméterezése, $p(0) = x_0$. Ekkor az

$$\mathbb{R} \to \mathbb{I}, \qquad a \mapsto X(a) := \int_0^a |\dot{p}(b)|)db$$

függvény bevezetésével $X \circ p^{-1}$ a szóban forgó sajátidő-függvény. Az integrálszámítás jól ismert eredménye szerint X folytonosan differenciálható, és $\dot{X}(a) = \boldsymbol{P}(\dot{p}(a)) > 0$ minden a-ra. Ez azt jelenti, hogy X szigorúan monoton nő (tehát injektív), az inverze szintén folytonosan differenciálható, és $(X^{-1})^{\cdot} = \frac{1}{\dot{X} \circ X^{-1}}$. Ezért a sajátidőfüggvény is injektív, és inverze $r := p \circ X^{-1}$ szintén injektív és folytonosan differenciálható, és a mondottakból következően igaz a fenti összefüggés.

Görbét persze nem csak valós számokkal, hanem mértékegyenesek elemeivel is paraméterezhetünk; azt mondhatjuk, hogy r a $\mathtt{C}$ (előrehaladó) paraméterezése, amelyet **sajátidő-paraméterezésnek** hívunk. $r(\boldsymbol{t})$ tehát az a pontja a világvonalnak, ameddig $\boldsymbol{t}$ idő telt el a világvonalon a kiindulásul választott x_0-tól számítva.

A (11.49) szerint $|\dot{r}(\boldsymbol{s})| = 1$, vagyis $\dot{r}$ értéke minden sajátidő-pillananatban abszolút sebesség.

Világvonal-függvénynek nevezünk minden olyan (elég sokszor differenciálható) $r : \mathbb{I} \to \mathtt{M}$ fügvényt, amely deriváltjának az értéke mindenütt a $\mathtt{V}(1)$ eleme.

Nyilvánvaló, hogy egy világvonal-függvény értékkészlete világvonal, és minden világvonal meghatároz több világvonal-függvényt, amelyek azonban csak a változó-értékeik eltolásában különböznek egymástól: ha r_1 és r_2 értékkészlete ugyanaz a világvonal, akkor van oilyan $\boldsymbol{s}_0 \in \mathbb{I}$, hogy $r_2(\boldsymbol{s}) = r_1(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}_0)$.

Minthogy egy r világvonal-függvényre $\dot{r}(\boldsymbol{s}) \cdot \dot{r}(\boldsymbol{s}) = -1$, azonnal adódik az $\ddot{r}(\boldsymbol{s})$ abszolút gyorsulásra, hogy

$$\dot{r}(\boldsymbol{s}) \cdot \ddot{r}(\boldsymbol{s}) = 0,$$

vagyis

$$\ddot{r}(\boldsymbol{s}) \in \frac{\mathbf{E}_{\dot{r}(\boldsymbol{s})}}{\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}};$$

az abszolút gyorsulás mindig térszerű, a pillanatnyi gyorsulásérték Lorentz-ortogonális az aktuális abszolút sebességértékre. Tehát **az $\boldsymbol{u}$ abszolút sebességhez tartozó abszolút gyorsulások** összessége

$$\frac{\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}}{\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}}$$

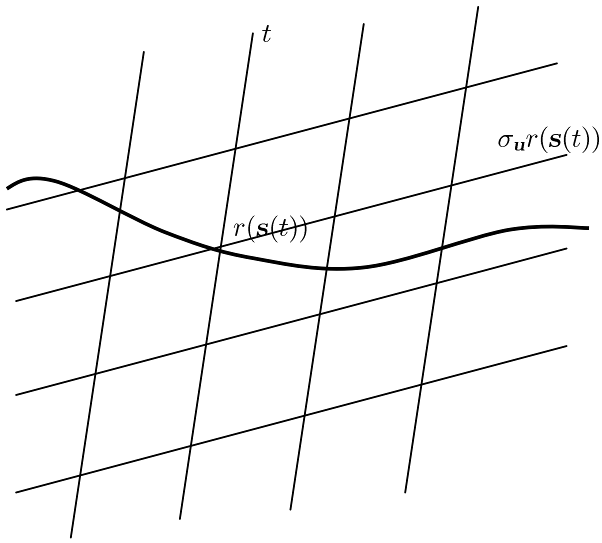
háromdimenziós euklideszi tér. Ellentétben tehát az abszolút sebességekkel, van nulla abszolút gyorsulás, értelmes az abszolút gyorsulás nagysága, értelmes azonos abszolút sebességhez tartozó két abszolút gyorsulás bezárta szög (viszont nem feltétlenül értelmes két különböző sebességhez tartozó gyorsulás esetén).

11.2. Mozgások

11.2.1. Standard relatív sebességek

Egy $\boldsymbol{u}$ standard tehetetlenségi rendszer egy anyagi pontot (egy világvonalat) megfigyelve „mozgást észlel", amelyet úgy ír le, hogy egy t $\boldsymbol{u}$-pillanathoz ($\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ vezette hipersíkhoz) azt az $\boldsymbol{u}$-térpontot ($\boldsymbol{u}$ vezette egyenest) rendeli, amelyik a t $\boldsymbol{u}$-pillanatban találkozik a világvonallal. Az r világvonal-függvénynek megfelelő standard $\boldsymbol{u}$-mozgás tehát

$$\mathtt{I}_{\boldsymbol{u}} \to \mathtt{E}_{\boldsymbol{u}}, \quad t \mapsto r_{\boldsymbol{u}}(t) := \sigma_{\boldsymbol{u}}(t \cap \mathrm{Ran} r)).$$



11.1. ábra. Mozgás leírása

Ahhoz, hogy ezt a függvényt jól tudjuk kezelni, meg kell adnunk a kapcsolatot a világvonal sajátideje – az r változója – és a rendszeridő – $r_{\boldsymbol{u}}$ változója – között.

Ezt a kapcsolatot az a függvény írja le, amely az $\boldsymbol{s}$ sajátidő-pillanathoz azt az $\boldsymbol{u}$-pillanatot ($\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$-vezette hipersíkot) rendeli, amely tartalmazza $r(\boldsymbol{s})$-et:

$$t(\boldsymbol{s}) := r(\boldsymbol{s}) + \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} = \tau_{\boldsymbol{u}}(r(\boldsymbol{s})).$$

Erre (10.41) alapján

$$\frac{\mathrm{d}t(\boldsymbol{s})}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}} \cdot \dot{r}(\boldsymbol{s}) = -\boldsymbol{u} \cdot \dot{r}(\boldsymbol{s}) \geq 1$$

teljesül, tehát szigorúan monoton növekszik (injektív); az $\boldsymbol{s}(t)$-vel jelölt inverzére

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{-\boldsymbol{u} \cdot \dot{r}(\boldsymbol{s}(t))} \tag{11.50}$$

áll fönn. Ezek szerint tehát

$$t \cap \mathrm{Ran} r = r(\boldsymbol{s}(t)).$$

Az anyagi pont standard relatív sebessége az $\boldsymbol{u}$-ra vonatkozóan

$$\frac{\mathrm{d}r_{\boldsymbol{u}}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{d\sigma_{\boldsymbol{u}}(r(\boldsymbol{s}(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \dot{r}(\boldsymbol{s}(t))}{-\boldsymbol{u} \cdot \dot{r}(\boldsymbol{s}(t))} =$$
$$= \left(\frac{\dot{r}}{-\boldsymbol{u} \cdot \dot{r}} - \boldsymbol{u} \right) (\boldsymbol{s}(t)).$$

Ez általánosságban is igazolja a tehetetlen mozgásokra a 10.6.3 pontban kapott eredményünket, amely szerint az $\boldsymbol{u}'$ abszolút sebességnek az $\boldsymbol{u}$-ra vonatkozó **relatív sebessége** a

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} := \frac{\boldsymbol{u}'}{-\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}'} - \boldsymbol{u} \in \frac{\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}}{\mathbb{I}}$$

mennyiség.

11.2.2. Relatív gyorsulások

A továbbiakban gyakran találkozunk olyan függvényekkel, amelyek a rendszeridőtől a sajátidő közbevetésével függnek. Hogy ne kelljen terjedelmes formulákat írnunk, ezt egyszerűen egy $\bullet$ jellel jelöljük. Ha f a sajátidőtől függő akármilyen értékű függvény, akkor $f\bullet$ a rendszeridőtől függ: $(f\bullet)(t) = f(\boldsymbol{s}(t))$. A sajátidő szerinti deriváltat ponttal, a rendszeridő szerinti deriváltat vesszővel fogjuk jelölni. Tehát a (11.50) összefüggés alapján

$$(f\bullet)' = \left(\frac{\dot{f}}{-\boldsymbol{u} \cdot \dot{r}} \right) \bullet .$$

Megismételve korábbi eredményünket ezekkel a jelölésekkel, az r világvonalnak megfelelő $\boldsymbol{u}$-relatív sebesség

$$r'_{\boldsymbol{u}} = \left(\frac{\dot{r}}{-\boldsymbol{u} \cdot \dot{r}} - \boldsymbol{u} \right) \bullet = \mathbf{v}_{\dot{r}\boldsymbol{u}} \bullet .$$

Továbbá felidézzük az (10.30) összefüggést a megfelelő formában:

$$(-\boldsymbol{u} \cdot \dot{r}) = \frac{1}{\sqrt{1 - |\mathbf{v}_{\dot{r}\boldsymbol{u}|^2}}}. \tag{11.51}$$

Így az $\boldsymbol{u}$-relatív gyorsulás

$$r''_{\boldsymbol{u}} = \left(\left(\ddot{r} + \frac{\dot{r}(\boldsymbol{u} \cdot \ddot{r})}{-\boldsymbol{u} \cdot \dot{r}} \right) \frac{1}{(\boldsymbol{u} \cdot \dot{r})^2} \right) \bullet .$$

Adjunk a belső zárójelben $\ddot{r}$-hoz $(\boldsymbol{u} \cdot \ddot{r})\boldsymbol{u}$-t, a második tagból pedig vonjunk ki ugyanennyit; az $\dot{r} \cdot \ddot{r} = 0$ egyenlőség miatt $\boldsymbol{u} \cdot \ddot{r} = -\mathbf{v}_{\dot{r}\boldsymbol{u}} \cdot \ddot{r}$, ezért azt kapjuk, hogy

$$r''_{\boldsymbol{u}} = \left((1 - \mathbf{v}^2_{\dot{r}\boldsymbol{u}}) \left(\mathbf{1} - \mathbf{v}_{\dot{r}\boldsymbol{u}} \otimes \mathbf{v}_{\dot{r}\boldsymbol{u}} \right) \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \ddot{r} \right) \bullet ,$$

amiből viszont egyszerűen adódik, hogy

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \ddot{r}\bullet = \frac{1}{1-|r'_{\boldsymbol{u}}|^2}\left(\mathbf{1} + \frac{r'_{\boldsymbol{u}} \otimes r'_{\boldsymbol{u}}}{1-|r'_{\boldsymbol{u}}|^2}\right) r''_{\boldsymbol{u}}.$$

Látjuk, ellentétben a nemrelativisztikus esettel, a relatív gyorsulás messze nem azonos az abszolút gyorsulással! Ami nem is meglepő, ha figyelembe vesszük, hogy az $\boldsymbol{u}$-relatív gyorsulás minden $\boldsymbol{u}$-pillanatban az $\frac{\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}}{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}}$ altérben van, viszont az abszolút gyorsulás a $\boldsymbol{s}$ sajátidő-pillanatban az $\frac{\mathbf{E}_{\dot{r}(s)}}{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}}$ altérben.

11.3. Abszolút Newton-egyenlet

11.3.1. A tömeg mértékegyenese

Mint nemrelativisztikusan, a tömeg mértékegyeneséül választhatjuk $\frac{\mathbb{I}}{\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}}$-t; azonban itt a $\mathbb{D} = \mathbb{I}$ a $2,99\ldots 10^8\text{m} := \text{s}$ azonosítással, végül is a tömeg mértékegyeneseként $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{I}} = \mathbb{I}^*$ szerepel könyvünkben, amely szerint

$$\text{kg} = 8,47\ldots 10^{50}\,\frac{1}{\text{s}}.$$

Ez a választás a gyakorlatban szokatlan, de az elvi megfogalmazásokban nagyban egyszerűsíti a képleteket.

11.3.2. Abszolút erők

Az abszolút Newton-egyenletet „tömeg×abszolút gyorsulás = abszolút erő” formában fogadjuk el, ahol az abszolút erő a téridőpontoktól és az abszolút sebességektől függhet.

Minthogy a „tömeg×abszolút gyorsulás” értékei a $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{I}} \otimes \frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}} = \frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}}$ vektortérben vannak, az abszolút erőt

$$\boldsymbol{f} : \mathtt{M} \times \mathtt{V}(1) \to \frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}} \equiv \frac{\mathbf{M}^*}{\mathbb{I}}$$

alakú függvénnyel írhatjuk le.

Tehát az $\boldsymbol{f}$ abszolút erő hatása alatt létező m tömegű anyagi pont világvonalfüggvényét az

$$(x : \mathbb{I} \to \mathtt{M})? \qquad m\ddot{x} = \boldsymbol{f}(x, \dot{x}) \tag{11.52}$$

másodrendű differenciálegyenlet, az **abszolút Newton-egyenlet** határozza meg.

Nemrelativisztikusan az abszolút erő háromdimenziós $\mathbf{E}$ vektortérbe képez, értékei abszolút térszerűek. Itt viszont az abszolút erő négydimenziós vektortérbe, $\mathbf{M}$-be képez; értékei mégis „háromdimenziósak” és térszerűek. Ugyanis az abszolút gyorsulás Lorentz-ortogonális az abszolút sebességre, ezért az erő eleget kell, hogy tegyen az

$$\boldsymbol{f}(x, \dot{x}) \cdot \dot{x} = 0$$

egyenlőségnek, vagyis az $\dot{x}$ abszolút sebességnél az értékei $\dot{x}$-térszerűek, más szóval az $\frac{\mathbf{E}_{\dot{x}}}{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}}$-ben vannak.

A Newton-egyenlet másodrendű közönséges differenciálegyenlet; egyértelmű megoldásához kezdeti értékként – egymástól függetlenül – a tömegpont téridőhelyzetét és abszolút sebességét kell megadni. Ezért, ha tehát $t \mapsto r(t)$ a

Newton-egyenlet megoldása, akkor célszerű (a szokásnak megfelelően) a tömegpont **folyamatának** az $(r, \dot{r})$ párt tekinteni, hiszen ennek egyetlen időpontbeli értéke már meghatározza az egész függvényt.

A tömegpont **fejlődési tere** az a halmaz, amelyben a folyamatok az értékeiket felvehetik, tehát $\mathtt{M} \times \mathtt{V}(1)$.

A továbbiakban azt a célszerű (a szokásnak megfelelő) megállapodást követjük, hogy

– a fejlődési tér elemeit $(x, \dot{x})$ alakban írjuk, mert a Newton-egyenletben így szerepelnek (de mint függvény-változónak $\dot{x}$-nak eleve semmi köze x-hez, egy akármilyen abszolút sebességet jelöl!)

– egy akármilyen („absztrakt") folyamatot, tehát egy időfüggvényt is $(x, \dot{x})$ jelöl,

– egy konkrét folyamatot $(r, \dot{r}))$ jelöl.

Mint ismeretes, különleges szerepet játszanak a **potenciálos** erők. Egy **potenciál**

$$\boldsymbol{K} : \mathtt{M} \to \mathbf{M}^*$$

kétszer differenciálható függvény. A potenciálnak megfelelő **mezőerősség** a potenciál külső deriváltja,

$$\boldsymbol{F} := \mathcal{D} \wedge \boldsymbol{K},$$

és az ez által meghatározott erő

$$\boldsymbol{f}(x, \dot{x}) := \boldsymbol{F}(x) \cdot \dot{x}.$$

11.4. Impulzusok

Kérjük az olvasót, hogy a most következőknek a jó megértéséhez lapozzon vissza a 6.4 alfejezethez.

Tekintsünk egy m tömegű anyagi pontot, amelynek az abszolút sebessége $\dot{x}$.

Elfogadjuk az

„abszolút impulzus = tömeg×abszolút sebesség" $(m\dot{x})$

meghatározást. Mivel

„abszolút impulzus sajátidő-deriváltja = tömeg× abszolút gyorsulás"

$((m\dot{x})^{\cdot} = m\ddot{x})$,

az abszolút Newton-egyenlet kétféleképp is megfogalmazható:

„abszolút impulzus sajátidő-deriváltja = abszolút erő",

„tömeg×abszolút gyorsulás = abszolút erő".

Vegyünk egy $\boldsymbol{u}$ standard tehetetlenségi rendszert. Azt találjuk, hogy (az alábbiakban az egyszerűség kedvéért és a félreérthetőség veszélye nélkül elhagyva a $\bullet$ jelet)

„tömeg× $\boldsymbol{u}$-relatív sebesség" $(m\mathbf{v}_{\dot{x}\boldsymbol{u}})$

és

„abszolút impulzus $\boldsymbol{u}$-térszerű komponense" $\left(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot (m\dot{x}) = \frac{m\mathbf{v}_{\dot{x}\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-|\mathbf{v}_{\dot{x}\boldsymbol{u}}|^2}}\right)$, nem egyenlők egymással, ellentétben a nemrelativisztikus esettel. Kérdés tehát, melyiket fogadjuk el $\boldsymbol{u}$-relatív impulzusként. Az elmélet erre nem tud válaszolni. Tapasztalati tények támasztják alá, hogy a helyes döntés:

„$\boldsymbol{u}$-relatív impulzus := abszolút impulzus $\boldsymbol{u}$-térszerű komponense".

Továbbá

„tömeg× $\boldsymbol{u}$-relatív gyorsulás" $\left(m\left(\left(\ddot{x}+\frac{\dot{x}(\boldsymbol{u}\cdot\ddot{x})}{-\boldsymbol{u}\cdot\dot{x}}\right)\frac{1}{(\boldsymbol{u}\cdot\dot{x})^2}\right)\right)$

és

„$\boldsymbol{u}$-relatív impulzus $\boldsymbol{u}$-időderiváltja" $\left(\left(\boldsymbol{\sigma_u}\cdot(m\dot{x})\right)' = m\boldsymbol{\sigma_u}\cdot\ddot{x}\frac{1}{-\boldsymbol{u}\cdot\dot{x}}\right)$

nem egyenlők egymással, ellentétben a nemrelativisztikus esettel. Kérdés tehát, melyiket fogadjuk el a relatív Newton-egyenlet „bal oldalán" álló mennyiségnek. Az elmélet erre sem tud válaszolni. Tapasztalati tények támasztják alá, hogy a helyes döntés: az $\boldsymbol{u}$-relatív Newton egyenlet

„$\boldsymbol{u}$-relatív impulzus időderiváltja = $\boldsymbol{u}$-relatív erő".

alakú.

11.5. Relatív Newton-egyenlet

11.5.1. Értelmezés

Egy $\boldsymbol{u}$ standard tehetetlenségi rendszer az r világvonalú anyagi pont létezését mozgásnak észleli, a mozgást az $r_{\boldsymbol{u}} : \mathtt{I}_{\boldsymbol{u}} \to \mathtt{E}_{\boldsymbol{u}}$, $t \mapsto \sigma_{\boldsymbol{u}}(r(\boldsymbol{s}(t)))$ függvénnyel írja le, ahol $t \mapsto \boldsymbol{s}(t)$ az anyagi pont sajátideje a rendszeridő fügvényében (lásd 11.2.1). Ez a mozgás egy relatív Newton-egyenletnek tesz eleget, amelyet az előző alfejezetben mondottak alapján „relatív imulzus időderiváltja=relatív erő" formájúnak fogunk fel.

Az $\boldsymbol{u}$-relatív erő függhet az $\boldsymbol{u}$-időpontoktól, az $\boldsymbol{u}$-térpontoktól és az $\boldsymbol{u}$-relatív sebességektől; az $\boldsymbol{u}$-relatív impulzust megadhatjuk az $\boldsymbol{u}$-relatív sebességgel

$$m(\dot{x}+\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\dot{x})) = m(-\boldsymbol{u}\cdot\dot{x})\left(\frac{\dot{x}}{-\boldsymbol{u}\cdot\dot{x}}-\boldsymbol{u}\right) = \frac{m\mathbf{v}_{\dot{x}\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-|\mathbf{v}_{\dot{x}\boldsymbol{u}}|^2}}$$

szerint, tehát az **$\boldsymbol{u}$-relatív Newton egyenlet**

$$(q : \mathtt{I}_{\boldsymbol{u}} \to \mathtt{E}_{\boldsymbol{u}})? \qquad \left(\frac{mq'}{\sqrt{1-|q'|^2}}\right)' = \boldsymbol{f_u}(t,q,q')$$

alakú másodrendű differenciálegyenlet.

Elvégezve a differenciálást, a bal oldalt így írhatjuk:

$$\frac{m}{\sqrt{1-|q'|^2}}\left(\mathbf{1}+\frac{q'\otimes q'}{1-|q'|^2}\right)q''.$$

Ebből látszik az a fontos tény, hogy ellentétben a nemrelativisztikus esettel, a **relatív gyorsulás nem párhuzamos a relatív erővel**.

11.5.2. Relatív erők

Ellentétben a nemrelativisztikus esettel, a relatív erő nem csak abban tér el az abszolút erőtől, hogy az abszolút változókat a relatívokkal kell kifejezni.

Figyelembe véve a relatív impulzus

$$(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot (m\dot{x})\bullet)' = \left(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \ddot{x}\frac{1}{-\boldsymbol{u}\cdot\dot{x}}\right)\bullet$$

időderiváltját és az abszolút Newton-egyenletet, azt kapjuk, hogy az $\boldsymbol{u}$-relatív erő $\left(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{f}(x,\dot{x})\frac{1}{-\boldsymbol{u}\cdot\dot{x}}\right)\bullet$, természetesen az abszolút változókat is a relatívokkal kiejezve, vagyis

$$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{u}}(t,q,q') = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{f}\left(t \cap q, \frac{\boldsymbol{u}+q'}{\sqrt{1-|q'|^2}}\right)\sqrt{1-|q'|^2},$$

ahol $(t,q,q') \in I_{\boldsymbol{u}} \times \mathtt{E}_u \times \frac{\mathbf{E}_u}{\mathbb{I}}$.

Vizsgáljuk most meg, milyen az alakja az olyan relatív erőnek, amely potenciálos abszolút erőből származik.

Idézzük fel a 10.13 alfejezet formuláit a $\boldsymbol{K}$ potenciálra! Legyen a

$$\boldsymbol{K} \quad \boldsymbol{u}\text{-széthasított alakja} \quad (-V_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{u}}),$$

ekkor

$$\boldsymbol{F} := \mathcal{D}\wedge\boldsymbol{K} \quad \boldsymbol{u}\text{-széthasított alakja} \quad ((-\nabla_{\boldsymbol{u}}V_{\boldsymbol{u}} - \mathcal{D}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{u}}, \nabla_{\boldsymbol{u}}\wedge\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{u}})) =: ((\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}})).$$

Továbbá

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{F}(x)\cdot\dot{x}\frac{1}{-\boldsymbol{u}\cdot\dot{x}} = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{F}(x)\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{F}(x)\cdot\left(\frac{\dot{x}}{-\boldsymbol{u}\cdot\dot{x}} - \boldsymbol{u}\right);$$

az első tag épp a $\boldsymbol{F}$ $\boldsymbol{u}$-időszerű komponense, a második tagban $\boldsymbol{F}(x)$ mellett $\mathbf{v}_{\dot{x}\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \mathbf{v}_{\dot{x}\boldsymbol{u}}$ áll, így ott az $\boldsymbol{F}$ $\boldsymbol{u}$-térszerű komponense és az $\boldsymbol{u}$-relatív sebesség szerepel, tehát

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{F}(x)\cdot\dot{x}\frac{1}{-\boldsymbol{u}\cdot\dot{x}} \quad \boldsymbol{u}\text{-széthasított alakja} \quad \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}}\cdot\mathbf{v}_{\dot{x}\boldsymbol{u}}.$$

Felismerjük: elektromágneses esetben $V_{\boldsymbol{u}}$ a skalárpotenciál, $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{u}}$ a vektorpotenciál, $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}$ az elektromos erő, $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}}\cdot\mathbf{v}_{\dot{x}\boldsymbol{u}}$ a mágnességből származó Lorentz-erő. Persze nemcsak elektromágnességre alkalmazható a formulánk, hanem más potenciálos erőkre is; ellentétben a nemrelativisztikus esettel azonban, itt a lehetőségek köre jóval szűkebb, amint azt a következőkben látni fogjuk.

Végezetül megmutatjuk, hogyan lehet a relatív erő ismeretében meghatározni az abszolút erőt. Az egyszerűség kedvéért a következő levezetésben a változókat nem írjuk ki. Az $\boldsymbol{u}$-relatív erőt az abszolút erőből az

$$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{u}} = \frac{\mathbf{1}+\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}}{-\boldsymbol{u}\cdot\dot{x}}\cdot\boldsymbol{f}$$

formulával fejezhetjük ki. Mivel

$$\left(\mathbf{1}+\frac{\boldsymbol{u}\otimes\dot{x}}{-\boldsymbol{u}\cdot\dot{x}}\right)(\mathbf{1}+\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}) = \mathbf{1}+\frac{\boldsymbol{u}\otimes\dot{x}}{-\boldsymbol{u}\cdot\dot{x}},$$

és $\dot{x} \cdot \boldsymbol{f} = 0$, azt kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{f} = (-\boldsymbol{u} \cdot \dot{x}) \left(\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{u} \otimes \dot{x}}{-\boldsymbol{u} \cdot \dot{x}} \right) \boldsymbol{f_u} = (-\boldsymbol{u} \cdot \dot{x}) \boldsymbol{f_u} + \boldsymbol{u}(\dot{x} \cdot f_{\boldsymbol{u}}) = \tag{11.53}$$

$$= (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{f}) \cdot \dot{x}, \tag{11.54}$$

ahol, most már a változókat is kiírva, az elején $\boldsymbol{f}(x\dot{x})$ szerepel, a végén pedig: $\boldsymbol{f_u}(\tau_{\boldsymbol{u}}(x), \sigma_{\boldsymbol{u}}(x), \mathbf{v}_{\dot{x}\boldsymbol{u}})$.

11.5.3. A tömeg szerepe

Nemrelativisztikusan ugyanaz a mennyiség jelenik meg három különböző szerepben:

1) m az abszolút gyorsulás szorzójaként az abszolút Newton-egyenletben,
2) m a relatív sebesség szorzójaként a relatív impulzus előállításában,
3) m a relatív gyorsulás szorzójaként a relatív Newton-egyenletben.

Ezzal szemben relativisztikusan három különböző mennyiség jelenik meg három különböző szerepben:

1) m az abszolút gyorsulás szorzójaként az abszolút Newton-egyenletben,
2) $\frac{m}{\sqrt{1-|q'|^2}}$ a relatív sebesség szorzójaként a relatív impulzus előállításában,
3) $\frac{m}{\sqrt{1-|q'|^2}} \left(\mathbf{1} + \frac{q' \otimes q'}{1-|q'|^2} \right)$ a relatív gyorsulás „szorzójaként” a relatív Newton-egyenletben.

Az elsőre „nyugalmi tömegként” szokás hivatkozni, a másodikra „mozgási tömegként”, a harmadikra pedig a „longitudinális és transzverzális” tömeg megkülönböztetésével.

Sajnos az elnevezések eredetét általában nem fogalmazzák meg kristálytisztán, ezért fogalmi zavarokat okozhatnak.

Az a legjobb, ha csak az első szereplőt illetjük a tömeg szóval. A második szereplőnek van jobb (egyébként szintén szokásos) neve: relatív energia (lásd a 11.7 alfejezetet). A harmadik szereplőre meg nincs is igazán szükségünk, akár el se nevezzük.

11.6. Néhány konkrét abszolút erő

A nemrelativisztikus esetben igen jól tárgyalható és a gyakorlatban fontos abszolút erőknek legtöbb esetben nincs relativisztikus megfelelője. Az ok: az abszolút erőnek mindig Lorentz-ortogonálisnak kell lennie az aktuálius abszolút sebességre.

11.6.1. A legegyszerűbb speciális esetek

a) Nincs sebesség-független abszolút erő, speciálisan nincs csak időtől függő abszolút erő, nincs állandó abszolút erő.

Az persze előfordulhat, hogy egy $\boldsymbol{u}$ standard tehetetlenségi rendszer szerinti relatív erő a fenti tulajdonságok valamelyikével rendelkezik. Ekkor a (11.53) összefüggést használva állíthatjuk elő az abszolút erőt.

Például: ha az $\boldsymbol{u}$-relatív erő a $\boldsymbol{g} \in \frac{\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}^*}{\mathbb{I}}$ állandó, akkor az abszolút erő (11.53) alapján

$$\boldsymbol{f}(x, \dot{x}) = (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{g}) \cdot \dot{x}.$$

Ez az erő potenciálos, potenciálja

$$\boldsymbol{K}(x) = \boldsymbol{g} \cdot (x - o)\boldsymbol{u}$$

tetszőleges $o \in \mathtt{M}$ esetén. Figyelembe véve, hogy $-\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}}$ és itt $\boldsymbol{g} \cdot (x - o) = \boldsymbol{g} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}(x - o))$, egyezést találunk a nemrelativisztikus (6.21) képlettel.

b) Az $\boldsymbol{u}_c$-sztatikus abszolút erő a nemrelativisztikus esettel megegyezően értelmezhető:

$$\boldsymbol{f}(x, \dot{x}) = \boldsymbol{f}(x + \boldsymbol{t}\boldsymbol{u}_c, \dot{x})$$

teljesül minden $\boldsymbol{t} \in \mathbb{I}$ esetén. Ezzel egyenértékű: van olyan $\boldsymbol{h} : \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \times \mathtt{V}(1) \to \frac{\mathbf{M}^*}{\mathbb{I}}$ függvény és $o \in \mathtt{M}$, hogy

$$\boldsymbol{f}(x, \dot{x}) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}_c} \cdot (x - o), \dot{x}).$$

11.6.2. Centrális erők

Általában nincsenek centrális erők sem, mivel nincs egyértelműen az x téridőponttal egyidejű pontja a centrumnak.

Kivételt képeznek azok az esetek, amikor a centrum világvonala egyenes, $\boldsymbol{u}_c$ abszolút sebességgel. Ekkor azt fogadjuk el, hogy az $\boldsymbol{u}_c$-erő olyan formájú, mint a nemrelativisztikus: a centrum q_o (nyugvó) helyzetével az $\boldsymbol{u}_c$ megfigyelő terében

$$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{u}_c}(t, q, q') = a(|q - q_o|)(q - q_o).$$

Ekkor, ha o a q_o tetszőleges villanata, azaz $q_o = o + \mathbb{I}\boldsymbol{u}_c$, – lévén $(x + \mathbb{I}\boldsymbol{u}_c) - (o + \mathbb{I}\boldsymbol{u}_c) = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}_c} \cdot (x - o)$ és $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}_c} \cdot (x - o) \wedge \boldsymbol{u}_c = (x - o) \wedge \boldsymbol{u}_c$ – az abszolút erő

$$\boldsymbol{f}(x, \dot{x}) = a(|\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}_c} \cdot (x - o)|)\big(\boldsymbol{u}_c \wedge (x - o)\big)\dot{x}.$$

Ez az erő potenciálos, potenciálja

$$\boldsymbol{K}(x) = b(|\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}_c} \cdot (x - o)|)\boldsymbol{u}_c,$$

ahol $\frac{\mathrm{d}b(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = a(\xi)\xi$. Figyelembe véve, hogy $-\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u}_c}$, ez esetben is egyezést találunk a megfelelő nemrelativisztikus formulával (lásd (6.22)).

11.7. Mozgási energia és teljesítmény

Láttuk, a relatív impulzussal és a relatív Newton-egyenlettel kapcsolatban döntenünk kellett lehetőségek között. Most egy hasonló döntés az, hogy elfogadjuk – a nemrelativisztikus eset mintájára –, hogy a **relatív teljesítmény** a relatív erő és a relatív sebesség szorzata.

A rövidség kedvéért a következő formulában nem írjuk ki sem a relatív erő, sem az abszolút erő változóit. Tehát az $\boldsymbol{f}$ erőnek az $\boldsymbol{u}$-relatív teljesítménye

$$(\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{u}} \cdot \mathbf{v}_{\dot{x}\boldsymbol{u}})\bullet = \left(\frac{\boldsymbol{f} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{f})}{-\boldsymbol{u} \cdot \dot{x}} \cdot \left(\frac{\dot{x}}{-\boldsymbol{u} \cdot \dot{x}} - \boldsymbol{u}\right)\right)\bullet = \left(\frac{-\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{f}}{-\boldsymbol{u} \cdot \dot{x}}\right)\bullet, \qquad (11.55)$$

ami nem más, mint a kovektornak tekintett erő $\boldsymbol{u}$-időszerű komponensének a negatívja, a relativisztikus faktor reciprokával súlyozva. Kérjük az olvasót, vesse ezt egybe a 6.7 alfejezetben mondottakkal.

Tovább alakítva eredményünket

$$\left(\frac{-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{f}}{-\boldsymbol{u}\cdot\dot{x}}\right)\bullet = \left(\frac{-\boldsymbol{u}\cdot m\ddot{x}}{-\boldsymbol{u}\cdot\dot{x}}\right)\bullet = \big(m(-\boldsymbol{u}\cdot\dot{x})\bullet\big)' = \left(\frac{m}{\sqrt{1-|\mathbf{v}_{\dot{x}\boldsymbol{u}}|^2}}\bullet\right)'.$$

Szokás ennek alapján az utolsó előtti, illetve az utolsó egyenlőség zárójelében levő mennyiséget a relatív energiával azonosítani, hiszen az időderiváltja a relatív teljesítmény. Ez azonban nem helytálló, hiszen akármilyen konstanst hozzáadva is az időderivált ugyanaz. Továbbá pontosabban nem a relatív energia, hanem a relatív mozgási energia időderiváltja a relatív teljesítmény mint a relatív erő és relatív sebesség szorzata. Tehát olyan mennyiséget kell vennünk a zárójel alatt, amely eltűnik a zérus relatív sebesség mellett.

Ezért azt fogadhatjuk el jó szívvel, hogy

$$m(-\boldsymbol{u}\cdot\dot{x}) - m = \frac{m}{\sqrt{1-|\mathbf{v}_{\dot{x}\boldsymbol{u}}|^2}} - m$$

az ***u*-mozgási energia**. Annál inkább is, mert 1-nél (vagyis a fénygyorsaságnál) jóval kisebb relatív sebesség esetén – amint a gyökvonás sorfejtéséből látszik – ez közelítőleg $m|\mathbf{v}_{\dot{x}\boldsymbol{u}}|^2/2$, ami a nemrelativisztikus esetből jól ismert.

Mindazonáltal az

$$m(-\boldsymbol{u}\cdot\dot{x}) = \frac{m}{\sqrt{1-|\mathbf{v}_{\dot{x}\boldsymbol{u}}|^2}}$$

mennyiség felfogható ***u*-relatív energiának**, de az eddigiekből ez még nem következik; viszont részecskék bomlásának és egyesülésének, fényrészecskék (fotonok) kibocsátásának leírása egyértelműen indokolja, amit később néhány példával illusztrálunk.

11.8. Megmaradási tételek

11.8.1. Nincs hatás-ellenhatás

Két egymással nem érintkező anyagi pont kölcsönhatását, a nemrelativisztikus esettel ellentétben, nem tudjuk erőkkel leírni: nem lévén abszolút időpont, nincs értelme a pillanatszerűségnek; más szóval, nincsenek távolható erők.

A kölcsönhatás pillanatszerűsége helyett most azt képzeljük el, hogy az egyik anyagi pont „kilőtt pici részecskékkel bombázva" hat a másikra, és viszont. Vagyis a tömegpontok kölcsönhatása a tömegpontoknak és a „kölcsönhatást szállító részecskéknek" az ütközése révén valósul meg. Természetesen az is lehetséges, hogy maguk a tömegpontok ütköznek egymással.

11.8.2. Ütközések

Alapvető fizikai tényként fogadjuk el az abszolút impulzus megmaradását mindenféle ütközésben.

Tekintsük most azt az esetet, amikor a két tömegpont találkozik és egyesülnek (teljesen rugalmatlanul ütköznek). Legyen a tömegük m_1 és m_2, találkozási abszolút sebességük $\boldsymbol{u}_1$ és $\boldsymbol{u}_2$, és legyen az egyesülésükből keletkezett anyagi pont tömege m_3, abszolút sebessége $\boldsymbol{u}_3$. Alapfeltevésünk, az **össz abszolút impulzus megmaradása** szerint tehát

$$m_1\boldsymbol{u}_1 + m_2\boldsymbol{u}_2 = m_3\boldsymbol{u}_3.$$

Ennek bármely $\boldsymbol{u}$-térszerű komponense az **$\boldsymbol{u}$-relatív impulzus megmaradását** eredményezi:

$$m_1\big(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}_1)\big) + m_2\big(\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}_2)\big) = m_3\big(\boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}_3)\big),$$

ami a relatív sebességekkel kifejezve

$$\frac{m_1\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-|\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}}|^2}} + \frac{m_2\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-|\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}}|^2}} = \frac{m_3\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-|\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{u}}|^2}}.$$

Természetesen az $\boldsymbol{u}$-időszerű komponensek összessége is megmarad; megelőlegezve az elnevezés jogosságát, ez az **$\boldsymbol{u}$-relatív energia megmaradása**:

$$m_1(-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}_1) + m_2(-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}_2) = m_3(-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}_3),$$

ami a relatív sebességekkel kifejezve

$$\frac{m_1}{\sqrt{1-|\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}}|^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{1-|\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}}|^2}} = \frac{m_3}{\sqrt{1-|\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{u}}|^2}}.$$

Vegyük e legutóbbi formulában $\boldsymbol{u}_3$-at az $\boldsymbol{u}$ szerepére (tekintsük azt a standard tehetetlenségi rendszert, amelyhez képest a keletkezett részecske nyugszik). Ekkor

$$\frac{m_1}{\sqrt{1-|\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_3}|^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{1-|\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3}|^2}} = m_3;$$

a bal oldalon a tömegek melletti szorzó nagyobb 1-nél – ha $\boldsymbol{u}_1$ és $\boldsymbol{u}_2$ nem egyenlő $\boldsymbol{u}_3$-mal (és ez az igazi ütközés) –, tehát

$$m_1 + m_2 < m_3.$$

A tömeg nem marad meg, megnő az egyesüléses ütközésben.

Ahhoz a megfigyelőhöz viszonyítva, amelyhez képest a keletkezett részecske nyugszik, a tömegpontok mozgási energiája az ütközés előtt

$$\frac{m_1}{\sqrt{1-|\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_3}|^2}} - m_1 + \frac{m_2}{\sqrt{1-|\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3}|^2}} - m_2,$$

az ütközés után 0. Ugyanúgy, mint nemrelativisztikusan, az $\boldsymbol{u}_3$-mozgási energia az ütközésben eltűnt.

Nemrelativisztikusan, tapasztalataink alapján, bevezettük a belső energia fogalmát, amivel az összenergia megmaradását értelmeztük: az ütközésben a keletkezett részecske belső energiája megnőtt, a növekmény éppen bármely $\boldsymbol{u}$-mozgási energia ütközés előtti és ütközés utáni értékének a különbsége.

Most tetszőleges $\boldsymbol{u}$-mozgási energia ütközés előtti értékének és ütközés utáni értékének a különbsége – célszerűen az abszolút sebességeket használva a relatívok helyett –

$$\big(m_1(-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}_1)-m_1\big)+\big(m_2(-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}_2)-m_2\big)-\big(m_3(-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}_1)-m_3\big) = m_3-(m_1+m_2).$$

Az $\boldsymbol{u}$-mozgási energiák különbsége a tömegnövekedés. Nemrelativisztikus analógia alapján azt mondhatjuk, hogy a belső energia szerepét itt átveszi a tömeg, ezért elfogadjuk:

„$\boldsymbol{u}$-relatív energia:= $\boldsymbol{u}$-mozgási energia + tömeg =
= abszolút impulzus $\boldsymbol{u}$-időszerű komponense.”

11.8.3. Párkeltés

Még meggyőzőbb lesz a fenti megállapításunk, ha fényelnyelést és -kibocsátást is figyelembe veszünk. Tapasztalati tény, hogy a fényt elnyelő test melegszik, a fényt kisugárzó test hűl, nemrelativisztikus szemlélettel nő, illetve csökken a belső energiája. Ugyancsak ismert a testre ható fénynyomás.

Relativisztikusan a fény elnyelését-kibocsátását, visszaverését jól tudjuk tárgyalni anyagi pontok és fotonok ütközésével. Egy fotont olyan „pici" objektumnak fogunk fel, amely fény-jövőszerű abszolút impulzussal rendelkezik.

Itt jegyezzük meg, hogy egy tömegpont abszolút impulzusa jövőszerű vektor; az m tömegű anyagi pont $\boldsymbol{p}$ impulzusára $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p} = -m^2$ teljesül.

Ha $\boldsymbol{k}$ egy foton impulzusa, akkor $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 0$, aminek alapján azt mondhatjuk, hogy a fotonnak nincs tömege.

Egy tömegpont elnyel egy fotont: ennek abszolút impulzus-mérlege

$$\mathrm{m}_1\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{k} = \mathrm{m}_2\boldsymbol{u}_2,$$

amelyet $-\boldsymbol{u}_2$-vel beszorozva

$$m_1(-\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_1) - \boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{k} = m_2$$

adódik. Minthogy $-\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_1 > 1$ és $-\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{k} > 0$, látjuk, hogy $m_2 > m_1$. Ismét arra jutunk: fényelnyelés nemrelativisztikus szemszögből belsőenergia-növekedéssel jár, relativisztikusan ezt tömegnövekedés írja le. A tömegnövekedés értéke

$$m_2 - m_1 = \big(m_1(-\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_1) - m_1\big) - \boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{k}.$$

Az $\boldsymbol{u}_2$-mozgási energia az elnyelés előtt $m_1(-\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_1)-m_1$, az elnyelés után 0. Nemrelativisztikus gondolattal azt mondanánk, hogy az elnyelés előtti mozgási energia plusz a foton energiája átalakult belső energiává. A fenti egyenlőségre tekintve a jobb oldalon az elnyelés előtti energiákat látjuk, a bal oldalon a tömegnövekedést; ez ismét arra utal, hogy relativisztikusan a belső energia szerepét a tömeg veszi át.

Még érdekesebb az úgynevezett párkeltés: egy tömegpont elbomlik, miközben kisugároz két fotont. Ennek abszolút impulzus-mérlege

$$m\boldsymbol{u} = \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2,$$

amiből

$$m = -\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{k}_2.$$

A tömegpont megsemmisül, eltűnik a tömeg, keletkeznek fotonok, amelyek viszont egy másik testen elnyelődve növelik annak a tömegét (nemrelativisztikus gondolattal a belső energiáját).

11.8.4. Tömeg és energia ekvivalenciája?

Szokás a tömeg és energia ekvivalenciájáról beszélni, mint Einstein híres eredményéről.

Járjuk körül ezt a kérdést. Összegezve eredményeinket azt találjuk, hogy

nemrelativisztikusan

– relatív energia= mozgási energia + belső energia,

– mozgási energia $\to$ belső energia növekedése,
– relatív impulzus= tömeg $\times$ relatív sebesség

áll fönn, relativisztikusan pedig
– relatív energia= mozgási energia + tömeg,
– mozgási energia $\to$ tömegnövekedés,
– relatív impulzus= relatív energia $\times$ relatív sebesség.

Az első két viszonylatban a belső energia szerepét a tömeg veszi át, a harmadik viszonylatban a tömeg szerepét a relatív energia veszi át. Ha a szerepek felcserélődését ekvivalenciának neveznénk is, bajban lennénk, mert sem az nem volna igaz, hogy a tömeg a belső energiával ekvivalens, sem azt, hogy a tömeg a relatív energiával; arról nem is beszélve, hogy nincs szerepcsere az abszolút Newton-egyenletben, ahol a tömeg jelenik meg mindkét esetben.

Mivel a tömeg mind nemrelativisztikusan, mind relativisztikusan vonatkoztatási rendszertől független mennyiség, és nemrelativisztikusan a belső energia is ilyen, talán akkor fejezzük ki leghűebben a viszonyokat, ha azt mondjuk, hogy relativisztikusan a tömeg egyesíti magában a nemrelativisztikus tömeg és belső energia fogalmát (de ez sem fedi pontosan a valóságot).

11.9. A rakétaegyenlet

A relativisztikus rakétaegyenlet alapja ugyanaz, mint a nemrelativisztikusé: az abszolút impulzus megmaradása. Adva kell legyen most is a rakéta tömege, mint a sajátidejének a függvénye, $m : \mathbb{I} \to \mathbb{I}^*$, valamint a kiáramló anyagnak a rakétához viszonyított sebessége, mint a sajátidő függvénye, $\boldsymbol{v} : \mathbb{I} \to \frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}}$; ez relatív sebesség, tehát ha r a rakéta világvonal-függvénye, akkor $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{s})$ az $\frac{\mathbf{E}_{\dot r(s)}}{\mathbb{I}}$ eleme, azaz $\dot r(\boldsymbol{s}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{s}) = 0$.

Örjuk fel az erőmentes rakétára az abszolút impulzus megmaradását az $\boldsymbol{s}$ saját-pillanat és az azt követő $\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h}$ saját-pillanatra vonatkozóan; ellentétben a nem-relativisztikus esettel, minthogy a tömeg nem megmaradó mennyiség, nem állíthatjuk, hogy a két pillanat között kiáramló anyag mennyisége $m(\boldsymbol{s}) - m(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h})$; egyelőre semmi biztosat nem tudunk mondani róla azon kívül, hogy $\mu(\boldsymbol{s})\boldsymbol{h} + \mathrm{ordo}(\boldsymbol{h})$ alakú, az abszolút sebessége pedig $\frac{\dot r(\boldsymbol{s})+\boldsymbol{v}(\boldsymbol{s})}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{s})|^2}} + \mathrm{ordo}(\boldsymbol{h})$. Így tehát

$$m(\boldsymbol{s})\dot r(\boldsymbol{s}) = m(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h})\dot r(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h}) + \big(\mu(\boldsymbol{s})\boldsymbol{h} + \mathrm{ordo}(\boldsymbol{h})\big)\left(\frac{\dot r(\boldsymbol{s})+\boldsymbol{v}(\boldsymbol{s})}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{s})|^2}} + \mathrm{ordo}(\boldsymbol{h})\right).$$

A jobb oldalhoz hozzáadva és levonva $m(\boldsymbol{s})\dot r(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h})$-t, átrendezve, elosztva $\boldsymbol{h}$-val és aztán tartva vele a nullához, kapjuk:

$$m(\boldsymbol{s})\ddot r(\boldsymbol{s}) + \dot m(\boldsymbol{s})\dot r(\boldsymbol{s}) + \mu(\boldsymbol{s})\frac{\dot r(\boldsymbol{s})+\boldsymbol{v}(\boldsymbol{s})}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{s})|^2}} = 0.$$

Beszorozva $\dot r(\boldsymbol{s})$-sel a

$$\mu = -\dot m\sqrt{1-|\boldsymbol{v}|^2}$$

eredményre jutunk. Ezért végül is – most már az erőhatást is figyelembe véve – a **rakétaegyenlet** formailag ugyanolyan lesz, mint a nemrelativisztikus:

$$(x : \mathbb{I} \mapsto \mathtt{M})? \qquad m\ddot x - \dot m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}(x, \dot x).$$

Ezzel az egyenlettel azonban baj van: ugyanis ez a rakéta világvonalának meghatározására szolgálna, viszont a $\boldsymbol{v}$ függvényt csak akkor tudjuk megadni, ha ismerjük a rakéta r világvonal-függvényét, hiszen $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{s})$ Lorentz-ortogonális kell legyen $\dot{r}(\boldsymbol{s})$-re. Ezt a nehézséget úgy lehet áthidalni, hogy a rakétát az indítási (kezdeti feltételnek megfelelő) $\boldsymbol{u}$ tehetetlenségi megfigyelő terében képzeljük el, ebben adjuk meg a kiáramló anyag sebességét, a $\hat{\mathbf{v}} : \mathbb{I} \to \frac{\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}}{\mathbb{I}}$ függvényt, amit aztán Lorentz-húzással átviszünk a rakéta pillanatnyi terébe, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{s}) := \boldsymbol{B}_{\dot{r}(\boldsymbol{s}),\boldsymbol{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{s})$. Az így kapott

$$(x : \mathbb{I} \mapsto \mathtt{M})? \qquad m\ddot{x} - \dot{m}\boldsymbol{B}_{\dot{x},\boldsymbol{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}} = \boldsymbol{f}(x, \dot{x})$$

egyenlet már jól értelmezett.

12. Az elektromágnesség alapjai a téridőmodellben

Az elektromágnesség egyenleteinek – a Maxwell-egyenleteknek – alapvető szerepe volt a relativitáselmélet kialakulásában. A fény elektromágneses jelenség. A relativisztikus téridőmodellt a fényterjedés tulajdonságaira építettük. Ebben a fejezetben meglátjuk, hogyan küszöböli ki a relativisztikus téridőmodell az elektromágnesség nemrelativisztikus elméletének alapvető hiányosságát.

12.1. Maxwell-egyenletek

A Maxwell-egyenletek megfigyelőre vonatkoztatott szokásos (7.24) stb. alakja „nem tud arról", hogy nemrelativisztikus vagy relativisztikus elméletben van-e felírva.

Persze, ha most úgy nézünk rájuk, hogy a relativisztikus téridőben egy $\boldsymbol{u}$ standard tehetetlenségi rendszer szerinti széthasított mennyiségekről van szó, akkor 10.8.1 és 10.13 formulái alapján azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \nabla_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{u}} &= \rho_{\boldsymbol{u}}, \\ -\mathcal{D}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{u}} + \nabla_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{u}} &= \boldsymbol{j}_{\boldsymbol{u}}, \\ \nabla_{\boldsymbol{u}} \wedge \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}} + \mathcal{D}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}} &= 0, \\ \nabla_{\boldsymbol{u}} \wedge \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}} &= 0, \end{aligned}$$

ahol

$$\rho_{\boldsymbol{u}} := -\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{J}, \qquad \boldsymbol{j}_{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{J},$$

$$-\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{u}} := -\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{u}} := \boldsymbol{G} - \boldsymbol{u} \wedge (\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{u}),$$

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}} := \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}} := \boldsymbol{F} - \boldsymbol{u} \wedge (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}),$$

ahol $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{G}$ és $\boldsymbol{F}$ fizikai jelentése ugyanaz, mint nemrelativisztikusan, és az abszolút Maxwell-egyenletek is ugyanolyan alakúak:

$$\mathcal{D} \cdot \boldsymbol{G} = \boldsymbol{J}, \qquad \mathcal{D} \wedge \boldsymbol{F} = 0. \tag{12.56}$$

12.2. A vákuum-konstitúciós reláció

Természetesen, ugyanúgy, mint nemrelativisztikusan, általában meg kell adnunk az elektromágneses mennyiségek között egy **konstitúciós relációt** (állagegyenletet),

$$\boldsymbol{G} = \Gamma(\boldsymbol{F})$$

amely azt a fizikai tényt kívánja tükrözni, hogy a téridőben létező anyag miként befolyásolja az elektromágneses jelenségeket.

Valódi anyag jelenlétéből adódó konstitúciós relációról formailag mindent ugyanúgy elmondhatunk, mint a nemrelativisztikus esetben. Lényeges a különbség azonban, ha a vákuumról van szó: most akkor is megfelelő konstitúciós relációt lehet felírni: **eltűnik az éter értelmezésének kényszerűsége**.

Nevezetesen, vegyük figyelembe, hogy most $\mathbb{D} = \mathbb{I}$, tehát a $\boldsymbol{G}$ elektromágneses gerjesztés értékei $\frac{\mathbf{M}\wedge\mathbf{M}}{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}}$-ben vannak. Viszont az $\frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}} \equiv \mathbf{M}^*$ azonosítás miatt $\frac{\mathbf{M}\wedge\mathbf{M}}{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}} \equiv \mathbf{M}^* \wedge \mathbf{M}^*$, tehát a $\boldsymbol{G}$ elektromágneses gerjesztést (amely tenzormező) tekinthetjük ugyanolyan jellegű mennyiségnek, mint az $\boldsymbol{F}$ elektromágneses mezőt (amely kotenzormező).

Ezért az elektromágneses mennyiségek közötti vákuumbeli konstitúciós relációt vehetjük úgy, hogy

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{F},$$

és így a vákuumra vonatkozó konstitúciós abszolút Maxwell-egyenletek a

$$\mathcal{D} \cdot \boldsymbol{F} = \boldsymbol{J}, \qquad \mathcal{D} \wedge \boldsymbol{F} = 0$$

alakba írhatók.

13. Nemtehetetlenségi megfigyelők

13.1. Közelítőleg standard lokális szinkronizációk

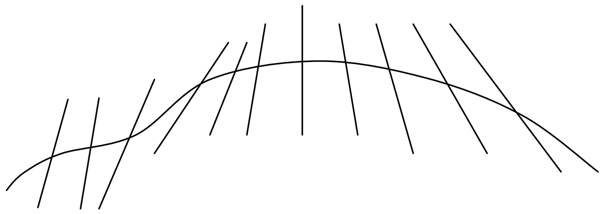
Nemtehetetlenségi megfigyelőhöz nincs standard szinkronizáció. Természetesen most is meg lehet tenni, hogy a megfigyelő egy „központjából” fényjeleket indítunk és tükröztetjük valahol és fogadjuk a visszavert jelet, és ezekkel a korábban elmondott módon határozzuk meg az egyidejűséget. Így létre lehet hozni szinkronizációt, de az nem fog rendelkezni az ismert jó tulajdonságokkal, például előfordulhat, hogy

– a szinkronizáció szerint egyidejű villanatok között különböző térpontokban különböző időtartamok múlnak el,

– külünböző központokból létrehozott szinkronizációk különbözők.

A Föld nemtehetetlenségi megfigyelő, mégis mikor a standard szinkronizációt szemléltettük, akkor Budapestről Debrecenbe irányított fényjelekről beszéltünk, és arra a kérdésre, vajon a Budapestről vezérelt és a Debrecenből vezérelt szinkronizáció megegyezik-e, burkoltan igenlő választ adtunk, a Földet hallgatólagosan tehetetlenséginek tekintve. Most már bevallhatjuk, hogy ez nem helytálló. Természetesen a két városból vezérelt szinkronizáció eltérése elenyésző, legalábbis a városoktól nem túl távol, mint ahogy elenyésző a fényjelekkel létesített szinkronizáció és a csillagok állásából származó szinkronizáció különbsége.

Nem tehetetlenségi megfigyelő fényjelekkel olyan szinkronizációt tud létesíteni bármely térpontjának egy környezetében, hogy a fény egyutas sebessége az adott térpontban minden irányban ugyanaz (a fény izotróp terjedése az adott térpontban); ezt az adott térponthoz tartozó **közelítőleg standard lokális szinkronizációnak** nevezzük. Ezzel a szinkronizációval más térpontban már nem biztos, hogy izotróp a fényterjedés, és más térponthoz más lehet a közelítőleg standard lokális szinkronizáció.



13.1. ábra. Nem-tehetetlenségi szinkronizáció

A modellben az $\boldsymbol{U}$ megfigyelő q térpontjában a közelítőleg standard lokális szinkronizáció pillanatait következőképpen állítjuk elő: q pontjának (világvonalnak) x villanatával (világponttal) egyidejű világpontok legyenek az $x + \mathbf{E}_{\boldsymbol{U}(x)}$ hipersíknak az x-hez „elég közeli" pontjai. Mint az 13.1 ábra is mutatja, a különböző ilyen hipersíkok találkozhatnak, ezért a meghatározás csak a q-nak egy környezetében jó. Meg lehet mutatni, hogy van olyan környezet, amelyben valóban jó.

13.2. Egyenletes forgás, forgó megfigyelők

Most a forgó megfigyelőkről ejtünk néhány szót. Teljesen hasonlóan, mint nemrelativisztikusan (lásd a 8 fejezetet), az $\boldsymbol{u}$ standard rendszerben egy egyenletesen forgó mozgás

$$r_{\boldsymbol{u}}(t) = q_c + e^{(t-t_0)\Omega} \cdot \boldsymbol{q}_0 \qquad (t \in \mathtt{I}_{\boldsymbol{u}})$$

alakú, ahol most $\Omega : \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \to \frac{\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}}{\mathbb{I}}$ antiszimmetrikus leképezés, t_0 egy tetszőleges $\boldsymbol{u}$-pillanat („kezdőpillanat"), q_c a kör középpontja és $\boldsymbol{q}_0 \in \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ a középpontból a kezdőpillanatbeli helyzethez húzott vektor. A t $\boldsymbol{u}$-pillanatban a relatív sebesség

$$r'_{\boldsymbol{u}}(t) = \Omega \cdot e^{(t-t_0)\Omega} \cdot \boldsymbol{q}_0 = \Omega \cdot (r_{\boldsymbol{u}}(t) - q_c),$$

amelynek nagysága $|\Omega \cdot \boldsymbol{q}_0|$ állandó.

A (11.50)) és (11.51) képlet szerint a mozgást megadó Világvonal-függvény $\boldsymbol{s}$ sajátideje és a t $\boldsymbol{u}$-idő között most a

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}(t)}{\mathrm{d}t} = \sqrt{1 - |\Omega \cdot \boldsymbol{q}_0|^2}$$

összefüggés áll fenn, tehát

$$\boldsymbol{s}(t) = \sqrt{1 - |\Omega \cdot \boldsymbol{q}_0|^2}(t - t_0),$$

ami mutatja, hogy adott szögsebességgel nem jöhet létre körmozgás akármilyen nagy sugarú körpályán, mert a gyökjel alatt pozitív mennyiségnek kell szerepelnie.

A $\boldsymbol{t} := t - t_o$ jelöléssel és a fenti összefüggés

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{s}) = \frac{\boldsymbol{s}}{\sqrt{1 - |\Omega \cdot \boldsymbol{q}_0|^2}}$$

megfordításával nem túl nehezen kikövetkeztethetjük, hogy a szóban forgó mozgást az

$$r(\boldsymbol{s}) = o + \boldsymbol{t}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{u} + e^{\boldsymbol{t}(s)\Omega} \cdot \boldsymbol{q}_0$$

világvonal-függvény eredményezi, ahol o a q_c $\boldsymbol{u}$-térpont és a t_o $\boldsymbol{u}$-pillanat által meghatározott világpont (egyenes világvonal és hipersík metszéspontja; $q_c = o + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$), tehát az is igaz, hogy $q_c = o + \mathbb{I}\boldsymbol{u} = \sigma_{\boldsymbol{u}}(o)$ és $t_0 = o + \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} = \tau_{\boldsymbol{u}}(o)$. Nevezzük ezt az $o + \mathbb{I}\boldsymbol{u}$ **középpont körül** Ω **szögsebességgel egyenletesen forgó világvonal-függvénynek**. Ennek abszolút sebessége az $\boldsymbol{s}$ sajátidő-pillanatban

$$\dot{r}(\boldsymbol{s}) = \frac{\boldsymbol{u} + \Omega \cdot e^{\boldsymbol{t}(s)\Omega} \cdot \boldsymbol{q}_0}{\sqrt{1 - |\Omega \cdot \boldsymbol{q}_0|^2}} = \frac{\boldsymbol{u} + \Omega \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot (r(\boldsymbol{s}) - o)}{\sqrt{1 - |\Omega \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot (r(\boldsymbol{s}) - o)|^2}}.$$

A nemrelativisztikus formulák mintájára ezek alapján a **tehetetlen középpontú, egyenletesen forgó megfigyelőt** az `M` egy o pontjával (a középpont egy villanatával), egy $\boldsymbol{u}$ abszolút sebességgel (a középpont sebességével) és egy $\Omega : \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \to \frac{\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}}{\mathbb{I}}$ leképezéssel (a forgás szögsebességével) adhatjuk meg

$$\boldsymbol{U}(x) := \frac{\boldsymbol{u} + \Omega \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot (x - o)}{\sqrt{1 - |\Omega \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \cdot (x - o)|^2}} \tag{13.57}$$

alakban, ahol x csak olyan világpont lehet, amelyre a nevezőben a gyökjel alatti mennyiség pozitív.

Megmutatható, hogy ez a megfigyelő (megfelelő értelmezéssel) merev.

Bár ez adódott a nemrelativisztikus egyenletesen forgó megfigyelő közvetlen analogonjaként, merev is, de van egy kellemetlen és egy furcsa tulajdonsága. Kellemetlen: nem globális, azaz nincs mindenhol értelmezve. Furcsa: az $\boldsymbol{u}$ standard rendszer szerint bármely pontjának forgási periódusa $\frac{2\pi}{\omega}$, ahol $\omega := |\Omega|$, viszont a forgástengelytől $d < \frac{1}{\omega}$ távolságra levő pontjának a sajátideje szerinti periódusa $\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{1 - \omega^2 d^2}$. Tehát minél távolabb van egy pont a forgástengelytől, annál rövidebb időtartamúnak „érez” egy fordulatot; a sajátperiódus a nullához tart a távolság növekedésével.

Megjegyezzük, nem ez az egyetlen lehetőség egyenletesen forgó megfigyelő értelmezésére[5].

13.3. Egyenletesen forgó megfigyelő szinkronizációi

Meg lehet mutatni[6], hogy ha az előzőekben definiált forgó megfigyelő az $\boldsymbol{u}$-szinkronizációt használja – nevezzük ezt **középponti szinkronizációnak** –, akkor a megfigyelő középpontjától d távolságra levő térpontjában az „érintő irányú” fény c_+ és c_- egyutas gyorsasága a forgás irányában, illetve azzal ellentétesen,

$$c_+ = \frac{1}{1 + \omega d}, \qquad c_- = \frac{1}{1 - \omega d}. \tag{13.58}$$

Ugynakkor a forgó megfigyelőnek **minden térpontjához** meg lehet adni a **közelítőleg standard lokális szinkronizációt**, amely csak a szóban forgó térpont egy környezetében értelmezhető, és abban a pontban – de csak abban! – minden irányban a fény egyutas gyorsasága 1.

[5] T. Matolcsi, *Spacetime without Reference Frames* (Budapest, 1993, Akadémiai Kiadó

[6] T. Matolcsi (1998) *Foundataions of Physics* **27** 1865

Emlékezzünk, hogy a Földön kétféle szinkronizációt emlegettünk: az egyik a csillagok állásával, a másik fényjelekkel van meghatározva. Az állócsillagok testesítik meg azt a tehetetlenségi megfigyelőt, amelyben a forgó Föld középpontja nyugszik. A csillagok állásával megvalósított szinkronizáció tehát a középponti szinkronizáció. A fényjelekkel meghatározott szinkronizáció arra épül, hogy a kibocsátás helyén a fénygyorsaság minden irányban ugyanaz. Ez tehát a közelítőleg standard lokális szinkronizáció. A kettő elvileg lényegesen különbözik egymástól, gyakorlatilag azonban alig. Ugyanis a csillagok állásával meghatározott szinkronizációban az egyenlítőn a kelet felé, illetve a nyugat felé haladó fény gyorsasága

$$c_+ = \frac{1}{1-1,6\cdot 10^{-6}}, \qquad c_- = \frac{1}{1+1,6\cdot 10^{-6}}.$$

14. Két újabbkori paradoxon

14.1. Sebességösszeadási paradoxon

Szemléletesen fogalmazva a következő eredményt származtatják a szokásos keretek között.

Tekintsünk három standard tehetetlenségi rendszert, Annát, Bélát és Cilit. Mozogjon Béla Annához képest $\boldsymbol{v}_{BA}$ sebességgel, és mozogjon Cili Bélához képest $\boldsymbol{v}_{CB}$ sebességgel. Ekkor Cilinek Annához viszonyított $\boldsymbol{v}_{CA}$ sebességére

$$\boldsymbol{v}_{CA} = \frac{\beta}{\gamma}\boldsymbol{v}_{CB} + \frac{\alpha(\beta+\gamma)}{\gamma(1+\alpha)}\boldsymbol{v}_{BA} =: \boldsymbol{v}_{CB} \oplus \boldsymbol{v}_{BA}, \tag{14.59}$$

teljesül, ahol

$$\alpha := \frac{1}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}_{BA}|^2}}, \qquad \beta := \frac{1}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}_{CB}|^2}}, \qquad \gamma := \alpha\beta(1+\boldsymbol{v}_{CB}\cdot\boldsymbol{v}_{BA}). \tag{14.60}$$

A paradoxon[7] úgy adódik, hogy „nyilvánvaló": Béla $\boldsymbol{v}_{BC} = -\boldsymbol{v}_{CB}$ sebességgel mozog Cilihez képest, Anna $\boldsymbol{v}_{AB} = -\boldsymbol{v}_{BA}$ sebességgel Bélához képest; Annának Cilihez viszonyított sebessége pedig $\boldsymbol{v}_{AC} = -\boldsymbol{v}_{CA} = -(\boldsymbol{v}_{CB}\oplus\boldsymbol{v}_{BA})$. Viszont a fenti képletet megfelelően alkalmazva $\boldsymbol{v}_{AC} = \boldsymbol{v}_{AB}\oplus\boldsymbol{v}_{BC} = (-\boldsymbol{v}_{BA})\oplus(-\boldsymbol{v}_{CB})$. Azonban egyszerűen látható, hogy általában $-(\boldsymbol{v}_{CB}\oplus\boldsymbol{v}_{BA}) \neq (-\boldsymbol{v}_{BA})\oplus(-\boldsymbol{v}_{CB})$, vagy ami ugyanaz,

$$\boldsymbol{v}_{CB}\oplus\boldsymbol{v}_{BA} \neq \boldsymbol{v}_{BA}\oplus\boldsymbol{v}_{CB}. \tag{14.61}$$

Térjünk át a szokásos jelöléseinkre. Vegyük az $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}'$ és $\boldsymbol{u}''$ standard vonatkoztatási rendszereket.

Ekkor $\boldsymbol{v}_{BA}$ szerepét átveszi $\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}$, $\boldsymbol{v}_{CB}$ szerepét $\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}''\boldsymbol{u}'}$ és $\boldsymbol{v}_{CA}$ szerepét $\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}''\boldsymbol{u}}$.

Azonnal látjuk, hogy nincs rendben a 14.59 képlet: $\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \in \frac{\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}}{\mathbb{I}}$ és $\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}''\boldsymbol{u}'} \in \frac{\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}}{\mathbb{I}}$ lineáris kombinációja általában nincs benne az $\frac{\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}}{\mathbb{I}}$ altérben, amelynek eleme $\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}''\boldsymbol{u}}$.

Megmutatható, hogy a fenti összeadási képlet úgy helyes, hogy a második sebességet áthúzzuk az első sebesség terébe, azaz

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}''\boldsymbol{u}} = \mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} \oplus \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'}\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}''\boldsymbol{u}'}.$$

[7] Mocanu C.I. (1992), *Foundations of Physics Letters* **5** 443-456

Teljesen hasonlóan,

$$\mathbf{v}_{\mathbf{u}\mathbf{u}''} = \mathbf{v}_{\mathbf{u}'\mathbf{u}''} \oplus \boldsymbol{B}_{\mathbf{u}''\mathbf{u}'}\mathbf{v}_{\mathbf{u}\mathbf{u}'}.$$

A fenti két egyenlőség bal oldalára $\mathbf{v}_{\mathbf{u}''\mathbf{u}} = -\boldsymbol{B}_{\mathbf{u}\mathbf{u}''}\mathbf{v}_{\mathbf{u}\mathbf{u}''}$ áll fenn, azaz

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{\mathbf{u}'\mathbf{u}} \oplus \boldsymbol{B}_{\mathbf{u}\mathbf{u}'}\mathbf{v}_{\mathbf{u}''\mathbf{u}'} &= -\boldsymbol{B}_{\mathbf{u}\mathbf{u}''}\big(\mathbf{v}_{\mathbf{u}'\mathbf{u}''} \oplus \boldsymbol{B}_{\mathbf{u}''\mathbf{u}'}\mathbf{v}_{\mathbf{u}\mathbf{u}'}\big) = \\ &= -\Big(\big(\boldsymbol{B}_{\mathbf{u}\mathbf{u}''}\mathbf{v}_{\mathbf{u}'\mathbf{u}''}\big) \oplus \big(\boldsymbol{B}_{\mathbf{u}\mathbf{u}''}\boldsymbol{B}_{\mathbf{u}''\mathbf{u}'}\mathbf{v}_{\mathbf{u}\mathbf{u}'}\big)\Big);\end{aligned}$$

az utolsó egyenlőségnél kihasználtuk, hogy $\oplus$ a szóban forgó sebességekben lineáris művelet.

A paradoxon „nyilvánvaló” állítása azt jelentené, hogy $\boldsymbol{B}_{\mathbf{u}\mathbf{u}''}\mathbf{v}_{\mathbf{u}'\mathbf{u}''}$ egyenlő volna $-\boldsymbol{B}_{\mathbf{u}\mathbf{u}'}\mathbf{v}_{\mathbf{u}''\mathbf{u}'}$-vel és $\boldsymbol{B}_{\mathbf{u}\mathbf{u}''}\boldsymbol{B}_{\mathbf{u}''\mathbf{u}'}\mathbf{v}_{\mathbf{u}\mathbf{u}'}$ egyenlő volna $-\mathbf{v}_{\mathbf{u}'\mathbf{u}}$-vel. Ez azonban nem igaz, mert a Lorentz-húzások nem tranzitívak:

$$\boldsymbol{B}_{\mathbf{u}\mathbf{u}''}\mathbf{v}_{\mathbf{u}'\mathbf{u}''} = -\boldsymbol{B}_{\mathbf{u}\mathbf{u}''}\boldsymbol{B}_{\mathbf{u}''\mathbf{u}'}\mathbf{v}_{\mathbf{u}''\mathbf{u}'} \neq -\boldsymbol{B}_{\mathbf{u}\mathbf{u}'}\mathbf{v}_{\mathbf{u}''\mathbf{u}'}, \tag{14.62}$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathbf{u}\mathbf{u}''}\boldsymbol{B}_{\mathbf{u}''\mathbf{u}'}\mathbf{v}_{\mathbf{u}\mathbf{u}'} = -\boldsymbol{B}_{\mathbf{u}\mathbf{u}''}\boldsymbol{B}_{\mathbf{u}''\mathbf{u}'}\boldsymbol{B}_{\mathbf{u}'\mathbf{u}}\mathbf{v}_{\mathbf{u}'\mathbf{u}} \neq -\mathbf{v}_{\mathbf{u}'\mathbf{u}}. \tag{14.63}$$

A paradoxon abból ered, hogy a szokásos koordinátás tárgyalásban bármely megfigyelő terét $\mathbb{R}^3$-mal reprezentálják, ezáltal elsikkad az, hogy a különböző megfigyelők tere különbözik, elsikkadnak a Lorentz-húzások is.

Érdemes még egy más oldalról is rávilágítani a paradoxon eredetére. A $\mathbf{v}_{\mathbf{u}'\mathbf{u}''}$ relatív sebesség, áthúzva az $\boldsymbol{u}''$ terébe ellentettje a $\mathbf{v}_{\mathbf{u}''\mathbf{u}'}$ relatív sebességnek, és $\mathbf{v}_{\mathbf{u}''\mathbf{u}'}$ áthúzva az $\boldsymbol{u}'$ terébe ellentettje $\mathbf{v}_{\mathbf{u}'\mathbf{u}''}$-nek. Ezzel szemben, ezek a relatív sebességek áthúzva az $\boldsymbol{u}$ terébe nem egymás ellentettjei: $\boldsymbol{B}_{\mathbf{u}\mathbf{u}'}\mathbf{v}_{\mathbf{u}''\mathbf{u}'} \neq -\boldsymbol{B}_{\mathbf{u}\mathbf{u}''}\mathbf{v}_{\mathbf{u}'\mathbf{u}''}$ (kivéve, ha a három abszolút sebesség egy síkban van).

14.2. Fényterjedési paradoxon

Egy forgó korong kerületén levő fényforrásból indított fényjelet tükrökkel körbevezetünk előre (a forgás irányába) és hátra (a forgás irányával ellentétesen). Ki lehet mérni a fényforrásnak azt a sajátidőtartamát, mialatt a fényjel körbefutás után visszatér. Ismerve a megtett út hosszát (a kör kerületét), megállapítható a fény gyorsasága előre is, hátra is. A 13.58 képlet alapján ki is számítható a középponttól d távolságra levő fényforrás esetén a fény **körutas** c_+ előre gyorsasága és a c_- hátra gyorsasága:

$$c_+ = \frac{1}{1+\omega d}, \qquad c_- = \frac{1}{1-\omega d}. \tag{14.64}$$

A paradoxon a következőképpen merült fel[8]. Noha kétes módon, de a fenti helyes eredményre jutva kiszámolták a fény körutas gyorsaságait. Ezek után azt állították, hogy $\frac{1-\omega d}{1+\omega d}$ „nem csak az ellentétes irányú körutas fénygyorsaságok aránya, hanem a helyi sebességeké is: a tér izotrópiája biztosítja, hogy a fény sebessége a korong kerületének minden pontjában ugyanaz, ezért az átlagérték megegyezik a helyi értékekkel.”

Majd így folytatják: „Tekintsünk egyenletesen forgó megfigyelőket, amelyek ω szögsebessége egyre kisebb, és vegyük azoknak olyan kis részeit, amelyeknek

[8] Selleri F. (1997), *Foundations of Physics Letters* **10** 73-83

a központtól mért d távolsága egyre nagyobb, úgy hogy $\beta := \omega d$ állandó. Ekkor az ellentétes irányú fénysebességek aránya ugyanaz a $\frac{1-\beta}{1+\beta} \neq 1$ érték minden ilyen kis részben, amelyek egyre inkább hasonlítanak egy a középponthoz β sebességgel mozgó tehetetlenségi megfigyelő részéhez. Következésképpen a szóban fogó arány különbözik 1-től a határesetben nyert tehetetlenségi megfigyelő számára, ellentmondva a speciális relativitás elméletének, amely azt állítja, hogy tehetetlenségi megfigyelőnek a fénysebesség minden irányban ugyanaz."

A paradoxon megfogalmazásában szinkronizáció megadása nélkül beszélnek a fény egyutas gyorsaságáról, és a fény körutas gyorsaságából – amely szinkronizáció nélkül is értelmes – vonnak le következtetést az egyutas gyorsaságára. Hangsúlyozzuk: **a fény körutas gyorsasága semmit sem mond az egyutas gyorsaságáról**.

Az előre és hátra haladó egyutas gyorsaság akkor egyezik meg a korong kerületén a megfelelő körutas gyorsasággal, ha a központ standard szinkronizációját választjuk (13.58 és 14.64). A határesetben kapott tehetetlenségi megfigyelő β sebességgel mozog a középponthoz képest, és a saját szinkronizációja helyett a központ szinkronizációját használja, tehát tökéletesen rendben van, hogy a fény egyutas gyorsasága különbözik a különböző irányokban.

Akkor adódik a határesetben nyert tehetetlenségi megfigyelő standard szinkronizációja, ha a korong kerületének pontjaiban a közelítőleg standard szinkronizációt alkalmazzuk.

15. Nemstandard formulák

15.1. Szinkronizációk

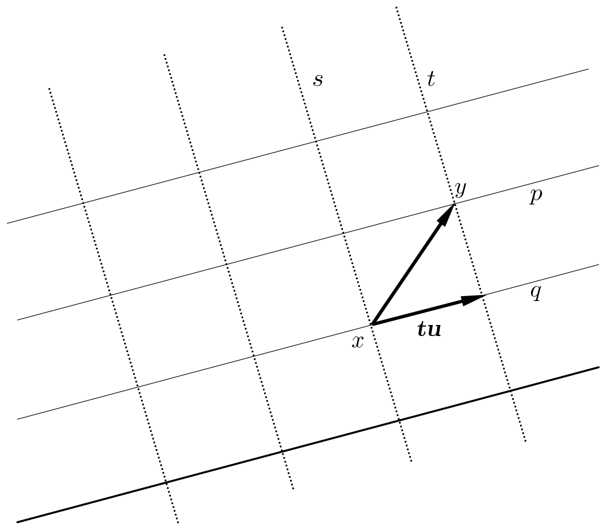
A relativitáselmélet szokásos tárgyalásaiban a koordináták mindig – sokszor kimondatlanul – a standard szinkronizációra vonatkoznak, ezért elsikkad a szinkronizációk jelentősége, főként a relatív sebességekkel kapcsolatban. Az egyik legújabb paradoxon azon alapszik, hogy nem tesz különbséget a kétutas fénygyorsaság és az egyutas fénygyorsaság között, nem veszi figyelembe, hogy az egyutas gyorsaság csak szinkronizáció mellett értelmes, és egy nemstandard szinkronizációra vonatkozó fénygyorsaságra bukkanva megállapítja, hogy a fény (egyutas) terjedése nem izotróp, ellentétben a relativitáselmélet szokásos kiindulási alapeszméjével (lásd 14.2).

Ezért is érdemes közelebbről megvizsgálni a nemstandard szinkronizációkat, igen tanulságos eredményeket fogunk kapni.

Egyenletes szinkronizációt egy minden abszolút sebességre transzverzális háromdimenziós $\mathbf{E}_s$ altérrel adhatunk meg, amelyről feltesszük, hogy térszerű (azaz nem tartalmaz fényszerű vektort). Ez azt jelenti, hogy van egy $\boldsymbol{u}_s$ abszolút sebesség, amellyel $\mathbf{E}_s = \{\mathbf{x} \in \mathbf{M} \mid \boldsymbol{u}_s \cdot \mathbf{x} = 0\}$.

A szinkronizációs időpontok tehát az $\mathbf{E}_s$-sel párhuzamos hipersíkok. Két ilyen szinkronizációs időpont között eltelt időtartamot a megfigyelő továbbra is a sajátidejével méri, azaz a t és s $\mathbf{E}_s$-pillanat között eltelt $\boldsymbol{t}$ időtartamot úgy határozhatjuk meg, hogy ha $y \in t$ és $x \in s$, akkor $(x - y - \boldsymbol{t}\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u}_s = 0$, amiből $\boldsymbol{t} = \frac{-\boldsymbol{u}_s \cdot (x-y)}{uu \cdot \boldsymbol{u}_s}$. Tehát a

$$\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u},s} := \frac{-\boldsymbol{u}_s}{-\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}_s}. \tag{15.65}$$



15.1. ábra. Nem-standard szinkronizáció

jelölés bevezetésével az időpontok közötti $-_{\rm s}$ szinkronizációs kivonás

$$(x+\mathbf{E}_{\rm s}) -_{\rm s} (y+\mathbf{E}_{\rm s}) := \boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u},s}\cdot(x-y). \tag{15.66}$$

Ha az $\boldsymbol{u}$ megfigyelő az $\mathbf{E}_{\rm s}$ szinkronizációt választja, akkor a terének vektorait az $\mathbf{E}_{\rm s}$ elemeivel reprezentálja, vagyis tehetetlenségi megfigyelő $E_{\boldsymbol{u}}$ terének q és p pontja közötti $\boldsymbol{q}_{\rm s}$ vektort úgy határozhatjuk meg, hogy ha $x\in q$ és $y\in p$, akkor $(x-y-\boldsymbol{q}_{\rm s})$ párhuzamos $\boldsymbol{u}$-val.

Egyszerű megmutatni, hogy a

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u},s} := \mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}_{\rm s}}{-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}_{\rm s}} \tag{15.67}$$

jelöléssel a fent meghatározottt vektor

$$\boldsymbol{q}_{\rm s} = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u},s}\cdot(x-y),$$

vagyis most a megfigyelő terében a $-_s$ szinkronizációs kivonás

$$(x+\mathbb{I}\boldsymbol{u}) -_{\rm s} (y+\mathbb{I}\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u},s}\cdot(x-y). \tag{15.68}$$

Természetesen a megfigyelő euklideszi szerkezete nem függ a szinkronizációtól, tehát a az $x+\mathbb{I}\boldsymbol{u}$ és $y+\mathbb{I}\boldsymbol{u}$ $\boldsymbol{u}$-térpontok távolsága $|\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}\cdot(x-y)|$. Egyszerű tény, hogy $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u},s} = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}$, tehát ha az $\boldsymbol{u}$-térpontok közötti vektort $\boldsymbol{q}_{\rm s} = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u},s}\cdot(x-y)\in\mathbf{E}_{\rm s}$ reprezentálja, akkor a térpontok távolság-négyzete

$$|\boldsymbol{q}_{\rm s}|^2_{\boldsymbol{u}} := |\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{q}_s|^2 = |\boldsymbol{q}_{\rm s}|^2 + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{q}_{\rm s})^2, \tag{15.69}$$

amit jó észben tartani, nehogy tévedjünk: $|\boldsymbol{q}_{\rm s}|_{\boldsymbol{u}} \neq |\boldsymbol{q}_{\rm s}|$ ha $\boldsymbol{u}_{\rm s}\neq\boldsymbol{u}$.

15.2. Széthasítások

Az $\boldsymbol{u}$ megfigyelőt az $\mathbf{E}_{\rm s}$ altérrel megvalósított szinkronizációval együtt $(\boldsymbol{u},\mathbf{E}_{\rm s})$ tehetetlenségi rendszernek hívjuk. Ez egyértelműen felbontja a téridővektorokat

$\boldsymbol{u}$-val párhuzamos és $\mathbf{E}_\mathrm{s}$-ben levő vektorok összegére. Egyszerűen látható, hogy az $\boldsymbol{x}$ vektor ilyen felbontása

$$\boldsymbol{x} = \frac{-\boldsymbol{u}_\mathrm{s}\cdot\boldsymbol{x}}{-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}_\mathrm{s}}\boldsymbol{u} + \left(\boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{u}_\mathrm{s}\cdot\boldsymbol{x}}{-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}_\mathrm{s}}\boldsymbol{u}\right) = (\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u},s}\cdot\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u},s}\cdot\boldsymbol{x}.$$

Az $\boldsymbol{u}$ irányú összetevőben csak az $\boldsymbol{u}$ együtthatója az érdekes, így értelmezzük a **térdidővektorok széthasítását** $(\boldsymbol{u}, \mathbf{E}_\mathrm{s})$ szerint:

$$\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{u},\mathrm{s}} := (\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u},s}, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u},s}) : \mathbf{M} \to \mathbb{I}\times\mathbf{E}_\mathrm{s}.$$

15.3. Relatív sebességek

Az $\boldsymbol{u}'$ abszolút sebességű tehetetlen anyagi pontnak az $(\boldsymbol{u}, \mathbf{E}_\mathrm{s})$ tehetetlenségi rendszerre vonatkozó relatív sebessége a fenti széthasítás alapján

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u},s} := \frac{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u},s}\cdot\boldsymbol{u}'}{\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u},s}\cdot\boldsymbol{u}'} = \frac{(-\boldsymbol{u}_\mathrm{s}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}'}{-\boldsymbol{u}_\mathrm{s}\cdot\boldsymbol{u}'} - \boldsymbol{u},$$

amelynek nagysága

$$|\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u},\mathrm{s}}|_{\boldsymbol{u}} = |\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}\cdot\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_\mathrm{s}}| = |\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}|\frac{(-\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{u})(-\boldsymbol{u}_\mathrm{s}\cdot\boldsymbol{u})}{-\boldsymbol{u}_\mathrm{s}\cdot\boldsymbol{u}'},$$

ahol $\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}$ az $\boldsymbol{u}'$ relatív sebessége az $\boldsymbol{u}$ standard rendszerre vonatkozóan.

Ugyanilyen formulák igazak fényjelekre, vagyis $\boldsymbol{u}'$ abszolút sebesség helyett $\boldsymbol{w}$ fényirányra. Hogy jobban lássuk, mit is mond fényjelekre a fenti formula, vegyük figyelembe, hogy azt írhatjuk,

$$\boldsymbol{u}_\mathrm{s} = \frac{\boldsymbol{u} + v_\mathrm{s}\boldsymbol{n}_\mathrm{s}}{\sqrt{1-v_\mathrm{s}^2}}, \qquad \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{w}},$$

ahol $\boldsymbol{n}_\mathrm{s}, \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{w}} \in \frac{\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}}{\mathbb{I}}$ egységvektorok. $\boldsymbol{n}_\mathrm{s}$ egy a szinkronizációra jellemző irány, közelebbről a $\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}_\mathrm{s},\boldsymbol{u}}$ standard relatív sebesség iránya az $\boldsymbol{u}$ terében: $v_s = |\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}_\mathrm{s},\boldsymbol{u}}|$, $\boldsymbol{n}_\mathrm{s} = \frac{\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}_\mathrm{s},\boldsymbol{u}}}{v_\mathrm{s}}$. $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{w}}$ pedig a $\boldsymbol{w}$ fényirányú fényjel iránya az $\boldsymbol{u}$ terében. Ekkor

$$|\mathbf{v}_{\boldsymbol{w}\boldsymbol{u},\mathrm{s}}|_{\boldsymbol{u}} = \frac{1 - v_\mathrm{s}\boldsymbol{n}_\mathrm{s}\cdot\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{w}}}{1-v_\mathrm{s}^2}.$$

A fénygyorsaság az $\boldsymbol{u}$ terében az iránytól függően más és más, kivéve persze a $v_\mathrm{s} = 0$ esetét, ami épp a standard szinkronizációnak felel meg. Legkisebb – $\frac{1}{1+v_\mathrm{s}}$ – akkor, amikor $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{n}_\mathrm{s}$, és legnagyobb – $\frac{1}{1-v_\mathrm{s}}$ – akkor, amikor $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{w}} = -\boldsymbol{n}_\mathrm{s}$.

15.4. Transzformációs szabályok

A téridővektoroknak az $(\boldsymbol{u}, \mathbf{E}_\mathrm{s})$ és az $(\boldsymbol{u}', \mathbf{E}_{\mathrm{s}'})$ tehetetlenségi rendszer szerinti széthasítását csak úgy tudjuk összehasonlítani, akárcsak a standard szinkronizációk esetén, hogy $\mathbf{E}_{\mathrm{s}'}$-t áthúzzuk $\mathbf{E}_\mathrm{s}$-re.

Általában igen bonyolult transzformációs szabályt kapunk.

Nézzük meg csak az $\boldsymbol{u}_\mathrm{s} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{s}'} = \boldsymbol{u}'$ speciális esetet (vagyis a „vesszős” tehetetlenségi rendszer standard, és a „vesszőtlen” tehetetlenségi rendszer a „vesszős” szinkronizációját alkalmazza). Ekkor mindkét rendszer szerinti széthasított komponensek $\mathbb{I}\times\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}$-ban vannak, nem kell Lorentz-húzást alkalmazni.

Legyen $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{q}) \in \mathbb{I}\times\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}$ egy vektornak az $(\boldsymbol{u}, \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'})$ szerinti széthasított alakja, és $(\boldsymbol{t}', \boldsymbol{q}') \in \mathbb{I}\times\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}$ ugyanennek a vektornak az $(\boldsymbol{u}', \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'})$ szerinti – tehát standard – széthasított alakja. Ekkor maga a vektor $\boldsymbol{ut}+\boldsymbol{q}$, és így

$$\boldsymbol{t}' = -\boldsymbol{u}'\cdot(\boldsymbol{ut}+\boldsymbol{q}) = (-\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{t}}{\sqrt{1-v^2}},$$

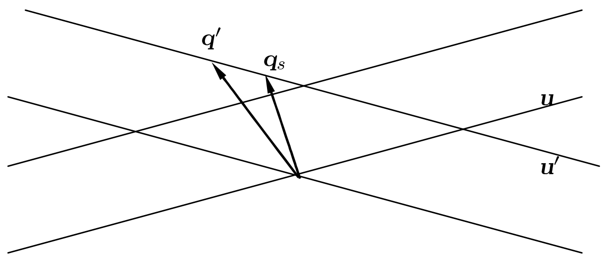
$$\boldsymbol{q}' = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}'}\cdot(\boldsymbol{ut}+\boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}')\boldsymbol{t}+\boldsymbol{q} = \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2}}\boldsymbol{t}+\boldsymbol{q},$$

ahol $\boldsymbol{v} := \frac{\boldsymbol{u}}{-\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u}'$ (az $\boldsymbol{u}$-nak az $\boldsymbol{u}'$-re vonatkozó standard relatív sebessége) és $v := |\boldsymbol{v}|$.

Ilyen és ehhez hasonló transzformációs szabályok találhatók az irodalomban a Lorentz-féle transzformációs szabály helyett[9], mintegy a relativitáselmélet tagadásaként. Természetesen ott minden koordinátákban van megfogalmazva, amiből szinte lehetetlen felismerni, hogy valójában a relativisztikus téridőről van szó csak nem a standard szinkronizáció szerinti koordinátázásokban. Ezek a transzformációs szabályok egyáltalán nem mondanak ellent a relativitáselméletnek, nagyon is beleférnek a kereteibe.

15.5. Hosszúságok összehasonlítása

Vegyük az $\boldsymbol{u}'$ tehetetlenségi megfigyelő térvektorainak pillanatszerű lenyomatát az $(\boldsymbol{u}, \mathbf{E}_\mathrm{s})$ tehetetlenségi rendszer terében.



15.2. ábra. Nemstandard lenyomat

A $\boldsymbol{q}' \in \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}'}$ vektor lenyomata az a $\boldsymbol{q}_\mathrm{s} \in \mathbf{E}_\mathrm{s}$ vektor lesz, amelyre $\boldsymbol{q}' - \boldsymbol{q}_\mathrm{s}$ párhuzamos $\boldsymbol{u}'$-vel; ez azt jelenti, hogy $\boldsymbol{q}_\mathrm{s}$ a $\boldsymbol{q}'$-nek az $\boldsymbol{u}'$ mentén az $\mathbf{E}_\mathrm{s}$-re való vetülete. A 10.47 értelemszerű alkalmazásával, a

$$\boldsymbol{q}_s = \left(\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{u}'\otimes\boldsymbol{u}_\mathrm{s}}{-\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{u}_\mathrm{s}}\right)\boldsymbol{q}',$$

és 15.69 alapján a lenyomat hossznégyzete

$$|\boldsymbol{q}_\mathrm{s}|^2_{\boldsymbol{u}} = \left|(\mathbf{1}+\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})\left(\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{u}'\otimes\boldsymbol{u}_\mathrm{s}}{-\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{u}_\mathrm{s}}\right)\boldsymbol{q}'\right|^2.$$

Általában meglehetősen bonyolult formula adódik a fenti hossznégyzet kifejtésére. Tekintsük azokat a speciális eseteket, amikor $\boldsymbol{u}'$-nek az $\boldsymbol{u}$-ra vonatkozó

[9] Marinov, (1980) *General Relativity and Gravitation* **12** 53; Selleri, F. (1996) *Foundations of Physics Letters* **9** 43

relatív sebessége párhuzamos a szinkronizáció jellemző $\boldsymbol{n}_{\mathrm{s}}$ irányával, $\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}} = v\boldsymbol{n}_{\mathrm{s}}$, másként ugyanez, $\boldsymbol{u}' = \frac{\boldsymbol{u}+v\boldsymbol{n}_{\mathrm{s}}}{\sqrt{1-v^2}}$ (tehát $v = |\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}| = |\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'}|$). Ekkor

$$(\mathbf{1} + \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) \left(\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{u}' \otimes \boldsymbol{u}_{\mathrm{s}}}{-\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{s}}} \right) = \mathbf{1} + \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} + \frac{v\boldsymbol{n}_s \otimes \boldsymbol{u}_{\mathrm{s}}}{1 - v_s v},$$

és $\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{q}' = 0$ miatt $\boldsymbol{n}_s \cdot \boldsymbol{q}' = \frac{-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{q}'}{v}$, tehát $\boldsymbol{u}_{\mathrm{s}} \cdot \boldsymbol{q}' = \left(1 - \frac{v_{\mathrm{s}}}{v}\right) \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{q}'$; továbbá $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{q}' = \frac{\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'}\cdot\boldsymbol{q}'}{\sqrt{1-v^2}}$, és így a lenyomat hossznégyzete

$$|\boldsymbol{q}'|^2 - (\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'} \cdot \boldsymbol{q}')^2 \frac{2\beta - 1 - \beta^2 v^2}{1 - v^2}$$

lesz, ahol

$$\beta := \frac{(1 - \frac{v_{\mathrm{s}}}{v})}{1 - v_{\mathrm{s}} v}.$$

Speciálisan, amikor $v_{\mathrm{s}} = 0$ (azaz $\boldsymbol{u}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{u}$), akkor $\beta = 1$, megkapjuk a standard szinkronizációra jól ismert Lorentz-kontrakciót.

Egy másik speciális eset, amikor $v_{\mathrm{s}} = v$ (azaz $\boldsymbol{u}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{u}'$), akkor $\beta = 0$, tehát

$$|\boldsymbol{q}'|^2 + \frac{(\mathbf{v}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'} \cdot \boldsymbol{q}')^2}{1 - v^2}$$

adódik; a lenyomat hosszabb, mint az eredeti vektor.

Végül a harmadik speciális eset, amikor $v_s = \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v}$, akkor $2\beta - 1 - \beta^2 v^2 = 0$, ezért a lenyomat hossza megegyezik az eredeti hosszal.

Ezek a konkrét formulák jól mutatják, hogy a sokat emlegetett Lorentz-kontrakció (azaz rövidülés) nem fizikai valóság: esetleges, művi dolog, illúzió egy konkrét szinkronizációban. Más szinkronizációban dilatáció (hosszabbodás) adódhat, vagy éppen semmi változás.

15.6. Időtartamok összehasonlítása

Legyen t és s két $\mathbf{E}_{\mathrm{s}}$-szinkronizációs pillanat. Az $\boldsymbol{u}$ megfigyelő szerint a két pillanat között eltelt időtartam

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{u},s} \cdot (x - y) = \frac{-\boldsymbol{u}_{\mathrm{s}} \cdot (x - y)}{-\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{s}}},$$

ahol $x \in s$, $y \in t$. Ugyanígy, az $\boldsymbol{u}'$ megfigyelő szerinti időtartam

$$\boldsymbol{t}' = \frac{-\boldsymbol{u}_{\mathrm{s}} \cdot (x - y)}{-\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{s}}},$$

amiből

$$\boldsymbol{t} = \frac{-\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{s}}}{-\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{s}}} \boldsymbol{t}'.$$

Vegyük megint az $\boldsymbol{u}' = \frac{\boldsymbol{u}+v\boldsymbol{n}_{\mathrm{s}}}{\sqrt{1-v^2}}$ esetet. Ekkor

$$\boldsymbol{t} = \frac{1 - v_{\mathrm{s}} v}{\sqrt{1 - v^2}} \boldsymbol{t}'.$$

Speciálisan, amikor $v_s = 0$, akkor megkapjuk a standard szinkronizációra jól ismert Lorentz-féle idődilatációt.

Egy másik speciális eset, amikor $v_s = v$, akkor

$$\boldsymbol{t} = \sqrt{1-v^2}\,\boldsymbol{t}',$$

vagyis a szinkronizációs időtartam rövidebb, mint a sajátidőtartam.

Végül a harmadik speciális eset, amikor $v_s = \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v}$, akkor a két időtartam megegyezik. Látjuk, hogy a sokat emlegetett Lorentz-féle idődilatáció nem fizikai valóság: esetleges, művi dolog, illúzió egy konkrét szinkronizációban. Más szinkronizációban időkontrakció adódik.

16. A szokásos tárgyalásokról

16.1. Néhány megjegyzés

A relativitáselmélet szokásos koordinátás tárgyalása többféle tévedés forrása lehet. Például elsikkad az a tény, hogy

– a különböző megfigyelők térvektorai különbözők (ellentétben a nemrelativisztikus esettel),

– a különböző megfigyelő-terekben levő vektorok egyenlősége (egyenesek párhuzamossága) nem magától értetődő fogalom; ebből ered a sebesség-összeadási paradoxon.

Továbbá a koordináták mindig standard szinkronizációra vonatkoznak, ezért

– úgy tűnik, mintha a standard szinkronizáció szükségszerűség volna, és így valóságos tényként tűnnek fel bizonyos megállapítások, amelyek nem azok, mint a Lorentz-kontrakció és az idődilatáció,

– nem domborodik ki a szinkronizáció jelentősége a relatív sebesség értelmezésében; ebből ered a fényterjedési paradoxon.

Szokás azt mondani, a speciális relativitás elmélete a tehetetlenségi vonatkoztatási rendszerek elmélete, az általános relativitáselmélet pedig a tetszőleges vonatkoztatási rendszerek elmélete. Ez nem így van, amint az már több, mint ötven éve is megjelent[10] (hiába), és nagyon jól látszik a mi tárgyalásunkból, amelyben a vonatkoztatási rendszer nem az elmélet építőkövéül szolgáló (intuitív) alapfogalom, hanem az elméletben jól definiált fogalom, és a speciális relativisztikus téridőmodellbe akármilyen vonatkoztatási rendszer is kitűnően belefér.

Az igaz, hogy a nemtehetetlenségi vonatkozatási rendszerek tárgyalása matematikailag pontosan annyival bonyolultabb a tehetetlenségi vonatkoztatási rendszerek tárgyalásánal, mint az általános relativisztikus téridőmodellek tárgyalása a speciális relativisztikus téridőmodell tárgyalásánál.

Az általános relativisztikus téridőmodellek valójában gravitációs hatások modelljei, a speciális relativisztikus téridőmodell a gravitáció hiányát modellezi.

16.2. Idézetek

A relativitáselmélet egyik jól ismert alapművéből fogunk idézni[11], amely a műfajában a legjobbak közé tartozik.

[10] Synge, J.L.: *Relativity: The special Theory* (1955) North Holland

[11] Moeller M.C. *The Theory of Relativity*, 1972. Oxford, Clarendon Oress

2. oldal : ...„the law of inertia, a material particle when left to itself will continue to move in a straight line with constant velocity" (... a tehetetlenség törvénye, egy magára hagyott anyagi pont egyenesvonalú egyenletes mozgást végez).

„All systems of reference for which the law of inertia is valid are called systems of inertia" (Minden vonatkoztatási rendszert, amelyben a tehetetlenség törvénye érvényes, tehetetlenségi rendszernek hívunk).

249. oldal: „According to the special principle of relativity, which is the base of the special theory of relativity, all systems of inertia, i.e. all rigid systems of reference moving with constant velocity to the fixed stars, are completely equivalent in respect of our description of nature" (A speciális relativitás elve szerint, amely a speciális relativitás elméletének az alapja, minden tehetetlenségi rendszer, azaz minden merev rendszer, amely állandó sebességgel mozog az állócsillagokhoz képest, tökéletesen egyenértékű a természet leírása szempontjából).

30. oldal: „Since the fundamental equations of electrodyamics – Maxwell equations – must hold in any system of inertia, it follows that the velocity of propagation of light in vacuo must be the same constant value $c = 3 \cdot 10^8 m/s$ in every system of inertia" (Minthogy az elektrodinamika alapegyenletei – a Maxwell-egyenletek – érvényesek kell legyenek minden tehetetlenségi rendszerben, a fény vákuumbeli terjedési sebessége ugyanaz a $c = 3 \cdot 10^8 m/s$ állandó érték kell legyen minden tehetetlenségi rendszerben).

16.3. Az idézetek kritikája

2. oldal: A „reference system" (vonatkoztatási rendszer), speciálisan a „system of inertia" (tehetetlenségi rendszer) nincs definiálva, csak beszél róla. Körülírásuk burkoltan magában foglalja, hogy értelmes a térbeli egyenes meg az egyenletes sebesség, tehát még burkoltabban valamely szinkronizáció is benne foglaltatik, eszerint tehát a tehetetlenségi rendszer a mi megfogalmazásunkban megfigyelő plusz szinkronizáció, azaz vonatkoztatási rendszer.

249. oldal: A „system of inertia (tehetetlenségi rendszer) – megint csak definiálatlan – „rigid system" (merev rendszer), amely az állócsillagokhoz képest egyenletes sebességgel mozog. Először is, ellentétben az előzőekkel szinkronizációról még burkoltan sincs szó, tehát a tehetetlenslégi rendszer itt a mi megfogalmazásunkban csupán megfigyelőt jelent. Másodszor, az állócsillagok lényegében megfigyelőt jelentenek; ahhoz, hogy értelmes legyen a hozzájuk képest állandó sebesség, mint tudjuk, szinkronizációt is meg kellene adni az állócsillagoknak, de erről nincs szó.

Látjuk tehát, hogy a „system of inertia"-ban két különböző fogalmat – a mi terminológiánk szerint megfigyelőt és vonatkoztatási rendszert – összemos.

Továbbá a „special principle of relativity" (a speciális relativitás elve) az idézett formában semmitmondó, nemcsak azért, mert a system of inertia fogalma nincs tisztázva, hanem mert az sincs megmondva, mit jelent az, hogy „equivalent in respect of our description of nature" (egyenértékű a természet leírása szempontjából).

30. oldal: Itt a system of inertia-ban ismét burkoltan szinkronizáció is benne van, hiszen a (szokásosan koordinátákban felírt) Maxwell-egyenleteknek csak azzal van értelme (idő-deriváltak!). Továbbá, ha igaz, amit mond, akkor a system of inertia standard szinkronizációval ellátott tehetetlenségi megfigyelőt kell

jelentsen, hiszen a Maxwell-egyenletek alakja csak a standard szinkronizáció esetén olyan, amilyennek megismertük, más szinkronizáció esetén más, és hogy a fény gyorsasága „the same constant value $c = 3 \cdot 10^8 m/s$ in every system of inertia," is csak a standard szinkronizációban teljesül.

Ám ha a system of inertia standard szinkronizációval ellátott tehetetlenségi megfigyelőt jelent, akkor meg a legelején, a 2. oldalon mondottak nem stimmelnek a system of inertia meghatározására, ugyanis a „law of inertia" nem standard de egyenletes szinkronizációval ellátott tehetetlenségi megfigyelőre is igaz.

A szinkronizáció mellőzése nyilván a nemrelativisztikus gondolkodás beidegződésének a következménye, amikor is nem kell ügyelni arra, milyen szinkronizációra érvényes, amit mondunk, hiszen csak egyetlen szinkronizáció van. Annál lényegesebb itt.

VI. Matematikai eszközök

Ismertnek tételezzük fel a halmazelmélet alapvető fogalmait és jelöléseit: részhalmaz, metszet, egyesítés, Descartes-szorzat, függvény stb.

Ugyancsak ismertnek tételezzük fel a vektorterek elméletének alapvető fogalmait: lineáris kombináció, bázis, dimenzió, lineáris altér, lineáris leképezés, stb.

Ebben a könyvben minden vektortér valós és véges dimenziós.

Véges dimenziós vektortéren bármely két norma ekvivalens, ami azt jelenti, hogy konkrét norma megadás nélkül értelmesek az analízis fogalmai, amelyek közül az alapvetőket ismertnek tételezzük fel: nyílt halmaz, zárt halmaz, sorozat konvergenciája, függvény folytonossága, stb.

A továbbiakban egyéb matematikai fogalmakat ismertetünk és a rájuk vonatkozó szükséges állításokat bizonyítás nélkül közöljük.

17. Vektorterek

17.1. Alapvető fogalmak

Amint mondtuk, ismertnek tételezzük fel a vektorterek elméletének alapvető fogalmait: lineáris kombináció, bázis, dimenzió, lineáris altér, lineáris leképezés, lineáris leképezés magja, stb.

Ebben a könyvben a vektorterek valósak és véges dimenziósak.

Lineáris leképezések hatását ponttal jelöljük: $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{v}$ vektornak az $\boldsymbol{L}$ lineáris leképezés általi képe. Hasonlóképpen két lineáris leképzés kompozícióját (egymásutánját, „szorzatát") ponttal jelöljük: $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{K}$ az $\boldsymbol{L}$ és $\boldsymbol{K}$ lineáris leképezés kompozíciója.

Gyakran használjuk a halmaz-műveleteket: ha $\boldsymbol{v}$ vektor, α valós szám, A és B vektorok halmaza, akkor

$$\boldsymbol{v}+\mathrm{A} := \{\boldsymbol{v}+\mathbf{x} \mid \mathbf{x}\in\mathrm{A}\}, \qquad \alpha\mathrm{A} := \{\alpha\mathbf{x} \mid \mathbf{x}\in\mathrm{A}\},$$

$$\mathrm{A}+\mathrm{B} := \{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}\in\mathrm{A}, \boldsymbol{y}\in\ \mathrm{B}\}.$$

17.2. Kiegészítő alterek

Vegyünk egy $\mathbf{V}$ vektorteret.

A $\mathbf{V}$-nek $\mathbf{E}$ és $\mathbf{F}$ lineáris altere **transzverzális**, ha $\mathbf{E}\cap\mathbf{F}=\mathbf{0}$.

Az $\mathbf{E}$ és $\mathbf{F}$ **kiegészítő alterek**, ha $\mathbf{E}\cap\mathbf{F}=\mathbf{0}$ és $\mathbf{E}+\mathbf{F}=\mathbf{V}$. Ekkor $\dim\mathbf{E}+\dim\mathbf{F}=\dim\mathbf{V}$.

Ha $\mathbf{E}$ és $\mathbf{F}$ kiegészítő alterek, akkor minden $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$ esetén létezik egyértelműen meghatározott $\boldsymbol{v}_{\mathbf{E}}$ az $\mathbf{E}$-ben és $\boldsymbol{v}_{\mathbf{F}}$ az $\mathbf{F}$-ben, úgy hogy $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\mathbf{E}} + \boldsymbol{v}_{\mathbf{F}}$.

Ekkor a $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{v}_{\mathbf{E}}$ hozzárendelés lineáris, amelyet **az F mentén az E-re való vetítésnek** hívunk.

17.3. Faktorterek

Legyen $\mathbf{E}$ a $\mathbf{V}$ vektortér lineáris altere.

A $\mathbf{V}$-nek egy részhalmazát **az E vezette affin altérnek** hívjuk, ha $\boldsymbol{v} + \mathbf{E}$ alakú valamely $\boldsymbol{v}$ vektorral. Vegyük észre, hogy $\boldsymbol{v} + \mathbf{E} = \boldsymbol{u} + \mathbf{E}$ akkor és csak akkor, ha $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \in \mathbf{E}$.

A $\mathbf{V}$ pontjai a nulla lineáris altér vezette affin alterek. Egydimenziós lineáris altér vezette affin alteret **egyenesnek** hívunk, és **hipersíknak** egy olyan affin alteret, amelyet $\dim \mathbf{V} - 1$ dimenziós altér vezet.

Azonos alterek vezette affin altereket **párhuzamosaknak** mondunk.

Az $\mathbf{E}$ vezette affin alterek összességét $\mathbf{V}/\mathbf{E}$ jelöli; elnevezése: $\mathbf{V}$-nek $\mathbf{E}$ szerinti faktortere.

$\mathbf{V}/\mathbf{E}$ vektortér lesz a következő jól definiált összadással és számmal szorzással:

$$(\boldsymbol{v} + \mathbf{E}) + (\boldsymbol{u} + \mathbf{E}) := (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}) + \mathbf{E}, \qquad \alpha(\boldsymbol{v} + \mathbf{E}) := (\alpha\boldsymbol{v}) + \mathbf{E}$$

$\mathbf{V}/\mathbf{E}$ dimenziója $\dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{E}$.

Ha $\mathbf{F}$ az $\mathbf{E}$ kiegészítő altere, akkor minden az $\mathbf{E}$ vezette affin altér az $\mathbf{F}$-nek pontosan egy elemét tartalmazza. Közelebbről, az $\mathbf{F} \to \mathbf{V}/\mathbf{E}$, $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{v} + \mathbf{E}$ leképezés lineáris bijekció. Ez által a lineáris bijekció által **reprezentálhatjuk** a $\mathbf{V}/\mathbf{E}$ elemeit az $\mathbf{F}$ elemeivel.

17.4. Irányítás

A $\mathbf{V}$ $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N)$ és $(\boldsymbol{v}'_1, \dots, \boldsymbol{v}'_N)$ rendezett bázisa **azonosan irányított**, ha a $\boldsymbol{v}_i \mapsto \boldsymbol{v}'_i$ $(i = 1, \dots, N)$ formulával meghatározott lineáris leképzés determinánsa pozitív.

Az azonosan irányított rendezett bázisok egy ekvivalencia-osztályát a $\mathbf{V}$ egy **irányításának** nevezzük. **V irányított**, ha adot a $\mathbf{V}$ egy irányítása; a választott ekvivalencia-osztályban levő bázist **pozitívan irányítottnak** mondjuk.

Irányított vektorterek közötti lineáris bijekció **irányítástartó**, ha pozitívan irányított bázist pozitívan irányítottba képez.

Legyen $\mathbb{A}$ egydimenziós vektortér.

Az $\mathbb{A}$ $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{a}'$ bázisa pontosan akkor azonosan irányított, ha $\boldsymbol{a}'$ az $\boldsymbol{a}$-nak pozitív számszorosa. Tehát az azonosan irányított bázisok összessége "félegyenest" alkot.

Az egydimenziós irányított vektortereket **mértékegyeneseknek** hívjuk.

Egy $\mathbb{A}$ mértékegyenes nem-nulla $\boldsymbol{a}$ elemét **pozitívnak** hívjuk, jelölésben $\mathbf{0} < \boldsymbol{a}$, ha mint bázis pozitívan irányított. **$\boldsymbol{a}$ nem-negatív**, jelölésben $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{a}$, ha $\mathbf{0} = \boldsymbol{a}$ vagy $\mathbf{0} < \boldsymbol{a}$.

Továbbá azt írjuk, hogy $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$, ha $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$. Ezzel teljes rendezést adtunk meg $\mathbb{A}$-n, amelyre

- ha $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{d}$, akkor $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{b} + \boldsymbol{d}$,
- ha $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$ és α pozitív valós szám, akkor $\alpha\boldsymbol{a} \leq \alpha\boldsymbol{b}$.

Bevezetjük az

$$\mathbb{A}^+ := \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{A} \mid \mathbf{0} < \boldsymbol{a}\}, \qquad \mathbb{A}^+_{\mathbf{0}} := \mathbb{A}^+ \cup \{\mathbf{0}\}$$

jelölést. Továbbá az $\boldsymbol{a} \in \mathbb{A}$ abszolút értéke

$$|\boldsymbol{a}| := \begin{cases} \boldsymbol{a} & \text{ha } \boldsymbol{a} \in \mathbb{A}^+_{\mathbf{0}} \\ -\boldsymbol{a} & \text{ha } \boldsymbol{a} \notin \mathbb{A}^+_{\mathbf{0}}. \end{cases}$$

17.5. Duális tér

Tekintsük a $\mathbf{V}$ vektorteret. A $\mathbf{V} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezések összességét a $\mathbf{V}$ **duálisának** hívjuk és $\mathbf{V}^*$-gal jelöljük. Ez a szokásos pontonként értelmezett műveletekkel vektortér, amelynek a dimenziója egyenlő a $\mathbf{V}$ dimenziójával.

A $\mathbf{V}^*$ duálisa azonosítható $\mathbf{V}$-vel, $\mathbf{V}^{**} \equiv \mathbf{V}$ úgy, hogy a $\boldsymbol{v}$ vektort a $\mathbf{V}^* \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{p} \mapsto \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v}$ leképezésnek fogjuk fel.

Ennek megfelelően írhatjuk, hogy $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v}$ bármely $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$ és $\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^*$ esetén.

17.6. Transzponáltak

Az $\boldsymbol{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ lineáris leképezés **transzponáltja** az

$$\boldsymbol{L}^* : \mathbf{U}^* \to \mathbf{V}^*, \qquad \boldsymbol{f} \mapsto \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{L}$$

formulával meghatározott lineáris leképezés, azaz

$$(\boldsymbol{L}^* \cdot \boldsymbol{f}) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{f} \cdot (\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{v}),$$

vagy a $\mathbf{V}^{**} \equiv \mathbf{V}$ azonosítással

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{L}^* \cdot \boldsymbol{f} = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{v} \qquad (\boldsymbol{f} \in \mathbf{U}^*,\ \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}).$$

Ha $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{K} : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ lineáris leképezések és α valós szám, akkor

$$(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{K})^* = \boldsymbol{L}^* + \boldsymbol{K}^*, \qquad (\alpha \boldsymbol{L})^* = \alpha \boldsymbol{L}^*.$$

Ha $\boldsymbol{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ és $\boldsymbol{K} : \mathbf{U} \to \mathbf{W}$ lineáris leképezések, akkor

$$(\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{L})^* = \boldsymbol{L}^* \cdot \boldsymbol{K}^*.$$

Az is fennáll a $\mathbf{V}^{**} \equiv \mathbf{V}$ és $\mathbf{U}^{**} \equiv \mathbf{U}$ azonosítás szerint, hogy

$$\boldsymbol{L}^{**} = \boldsymbol{L}.$$

Továbbá
– $\boldsymbol{L}$ akkor és csak akkor injektív, ha $\boldsymbol{L}^*$ szürjektív,
– $\boldsymbol{L}$ akkor és csak akkor szürjektív, ha $\boldsymbol{L}^*$ injektív.
Ha $\boldsymbol{L}$ bijekció, akkor

$$\left(\boldsymbol{L}^{-1}\right)^* = \left(\boldsymbol{L}^*\right)^{-1}.$$

17.7. Lineáris leképezések függvényei

Legyen $\boldsymbol{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezés.

Ekkor $\boldsymbol{L}^2 := \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{L}$, és értelemszerű továbblépéssel definiáljuk $\boldsymbol{L}^n$-et minden természetes számra; $\boldsymbol{L}^0$-n pedig a $\mathbf{V}$ identitását értjük.

Természetesen adódik ebből az $\boldsymbol{L}$ polinomjainak értelmezése: $p(\boldsymbol{L}) := \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \boldsymbol{L}^i$.

Továbbá az $\boldsymbol{L}$ olyan valós függvényeit is tudjuk értelmezni, amelyek mindenütt konvergens hatványsorral álíthatók elő. Például

$$\sin(\boldsymbol{L}) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \boldsymbol{L}^{2n+1}, \qquad \cos(\boldsymbol{L}) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \boldsymbol{L}^{2n},$$

$$e^{\boldsymbol{L}} := \exp(\boldsymbol{L}) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \boldsymbol{L}^n.$$

17.8. Vektorok, kovektorok

Rögzítsünk egy $\mathbf{V}$ vektorteret.

A $\mathbf{V}$ elemeit vektoroknak hívjuk, a duálisának, $\mathbf{V}^*$-nak az elemeit **kovektoroknak**. A $\mathbf{V}^{**} \equiv \mathbf{V}$ azonosítás szerint tehát a "ko-kovektorok" vektorok.

Egy $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$ lineáris leképezés transzponáltja $\boldsymbol{A}^* : \mathbf{V}^{**} \equiv \mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$ lineáris leképezés, értelmes tehát a következő meghatározás: $\boldsymbol{A}$ **szimmetrikus**, illetve **antiszimmetrikus**, ha $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}$, illetve $\boldsymbol{A}^* = -\boldsymbol{A}$.

Hasonlóképpen értelmezzük $\mathbf{V}^* \to \mathbf{V}$ lineáris leképezés szimmetrikus, illetve antiszimmetrikus voltát.

Jegyezzük meg azt a fontos tényt, hogy $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ és $\mathbf{V}^* \to \mathbf{V}^*$ lineáris leképezésekre **nem értelmes** a szimmetrikusság, antiszimmetrikusság foglma.

17.9. Kotenzorok, tenzorok

Egy $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ bilineáris leképezést **kotenzornak** hívunk. A kotenzorok összességét $\mathbf{V}^* \otimes \mathbf{V}^*$-gal jelöljük. $\mathbf{V}^* \otimes \mathbf{V}^*$ vektortér, amelynek a dimenziója a $\mathbf{V}$ dimenziójának négyzete.

Egy $\boldsymbol{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$ lineáris leképezést felfoghatunk kotenzornak úgy, hogy $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v}$; viszont, egy $\boldsymbol{A}$ kotenzort felfoghatunk $\mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$ lineáris leképezésnek a $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v} := \boldsymbol{A}(\cdot, \boldsymbol{v})$ hozzárendeléssel. Más szóval, a $\mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$ linráis leképezések azonosíthatók a $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ bilineáris leképezésekkel.

Egy kotenzor (bilineáris leképezés) pontosan akkor antiszimmetrikus, ha a megfelelő lineáris leképezés antiszimmetrikus az előző pont értelmében. Az antiszimmetrikus kotenzorok lineáris alteret alkotnak, amelyet $\mathbf{V}^* \wedge \mathbf{V}^*$ jelöl.

A $\boldsymbol{q}$ és $\boldsymbol{p}$ kovektorokkal definiáljuk a $\boldsymbol{q} \otimes \boldsymbol{p}$ kotenzort, amely az $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto (\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{u})(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v})$ bilineáris leképezés; ezt a $\boldsymbol{q}$ és $\boldsymbol{p}$ **tenzorszorzatának** hívjuk. Mint lineáris leképezés, $\boldsymbol{q} \otimes \boldsymbol{p}$ a következőképpen hat: $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{q}(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v})$.

A $\boldsymbol{q}$ és $\boldsymbol{p}$ **antiszimmetrikus tenzorszorzata** a $\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{p} := \boldsymbol{q} \otimes \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{q}$ antiszimmetrikus bilineáris leképezés.

Felcserélve $\mathbf{V}$ és $\mathbf{V}^*$ szerepét – a $\mathbf{V}^{**} = \mathbf{V}$ azonosítás szerint – kapjuk a **tenzorokat**, mint $\mathbf{V}^* \times \mathbf{V}^* \to \mathbb{R}$ bilineáris leképezéseket, amelyek összességét $\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}$ jelöli. Vektorok tenzorszorzatát, antiszimmetrikus tenzorszorzatát értelemszerűen az előzőek szerint értelmezzük.

Egy $\boldsymbol{T}$ tenzort felfoghatunk mint a $\mathbf{V}^* \to \mathbf{V}$, $\boldsymbol{p} \mapsto \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{p} := \boldsymbol{T}(\cdot, \boldsymbol{p})$ lineáris leképezést.

Vegyes tenzorokat mint $\mathbf{V} \times \mathbf{V}^* \to \mathbb{R}$ vagy $\mathbf{V}^* \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ bilineáris leképezéseket értelmezzük. Összességüket $\mathbf{V}^* \otimes \mathbf{V}$, illetve $\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}^*$ jelöli. Természetesen, nincsenek antiszimmetrikus vegyes tenzorok.

Általában, egy n természetes szám esetén az n-kotenzorokat mint n-lineáris $\mathbf{V}^n \to \mathbb{R}$ leképezéseket értelmezzük. Ebben a vonatkozásban a 0-kotenzoroknak a valós számokat értjük, az 1-kotenzorok a kovektorok.

Az n-tenzorokat és vegyes n-tenzorokat hasonlóképpen definiáljuk.

17.10. Koordináták

A $\mathbf{V}$ vektortér $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_N)$ rendezett bázisa létrehozza a $\mathbf{V}$ egy **koordinátázását**, ami azt jelenti, hogy a $\mathbf{V}$ elemeit valós szám-n-esekkel reprezentáljuk; a $\boldsymbol{v}$ vektort azokkal a $v^1, v^2, \dots, v^N$ számokkal, amelyekkel $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{N} v^i \boldsymbol{e}_i$.

Ekkor $\mathbf{V}^*$-nak is létrejön egy koordinátázása; a $\boldsymbol{p}$ kovektort $p_i := \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, \dots, N)$ számok reprezentálják.

Más részről ugyanez: a $\mathbf{V}$ vektortér $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_N)$ rendezett bázisa meghatározza a $(\boldsymbol{k}^1, \dots, \boldsymbol{k}^N)$ **duális bázisát** $\mathbf{V}^*$-ban úgy, hogy $(\boldsymbol{k}_i \mid \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$ (Kronecker-delta). Ezzel

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{k}^i \cdot \boldsymbol{v}) \boldsymbol{e}_i, \qquad \boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{e}_i) \boldsymbol{k}^i.$$

Figyelem: a szokásnak megfelelően a vektorok koordinátáit felső indexszel, a kovektorokét alsó indexszel jelöljük; a bázisok indexei viszont épp ellenkezőleg helyezkednek el.

Ekkor $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{N} p_i v^i$; a formulákat egyszerűbbé tehetjük az Einstein-féle összegzési szabállyal: a $\sum$ jelet elhagyjuk és automatikisan összegzünk az ellentétes pozícióban – lenn-fönn – levő indexekre: $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} = p_i v^i$.

A bázissal a lineáris leképezéseket mátrixokkal reprezentálhatjuk:

– az $\boldsymbol{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezést L^i_k reprezentálja úgy, hogy $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{v}$ koordinátái $L^i_k v^k$ (Einstein-összegzés!),

– az $\boldsymbol{F} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$ lineáris leképezést F_{ik} reprezentálja úgy, hogy $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$ koordinátái $F_{ik} v^k$ (Einstein-összegzés!).

A bilineáris leképezéseket is mátrixokkal reprezentáljuk. Speciálisan, az $\boldsymbol{F} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ kotenzor mátrixa $F_{ik} := \boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k)$.

A mátrixformák jól tükrözik, hogyan azonosítjuk a különféle bilineáris leképezéseket különféle lineáris leképezésekkel .

18. Tenzoriális műveletek

18.1. Tenzorszorzatok

Az előbbiek általánosításaképpen, véve a $\mathbf{V}$ és $\mathbf{U}$ vektorteret, az $\mathbf{U}^* \otimes \mathbf{V}^*$ jelölést fogadjuk el az $\mathbf{U} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ bilineáris leképezések vektorterére, amelyet azonosíthatunk a $\mathbf{V} \to \mathbf{U}^*$ lineáris leképezések vektorterével; a $\boldsymbol{B} : \mathbf{U} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ bilineáris leképezést a $\mathbf{V} \to \mathbf{U}^*$, $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{v} := \boldsymbol{B}(\cdot, \boldsymbol{v})$ lineáris leképezésnek fogjuk fel.

Az $\boldsymbol{f} \in \mathbf{U}^*$ és $\boldsymbol{p} \in \mathbf{V}^*$ $\boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{p}$ tenzorszorzata az

$$\mathbf{U} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}, \qquad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto (\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u})(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v})$$

bilineáris leképezés, vagy a

$$\mathbf{V} \to \mathbf{U}^*, \qquad \boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v})$$

lineáris leképezés.

Felcserélve a vektorok és kovektorok szerepét, $\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$ jelöli a $\mathbf{U}^* \times \mathbf{V}^* \to \mathbb{R}$ bilineáris leképezések vektorterét, amelyet azonosíthatunk a $\mathbf{V}^* \to \mathbf{U}$ lineáris leképezések vektorterével, és $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}$-t az előző formula mintájára értelmezzük.

Hasonlóképp érelmezzük az $\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}^*$ stb. jelöléseket.

Bármely típusú tenzorszorzat minden eleme a megfelelő szorzat alakú elemek összegeként állítható elő.

Ha $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}$-t $\mathbf{V}^* \to \mathbf{U}$ lineáris leképezésnek fogjuk fel, akkor a transzponáltja $\mathbf{U}^* \to \mathbf{V}^{**} = \mathbf{V}$ lineáris leképezés; egyszerűen adódik, hogy $(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})^* = \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}$.

Legyen $\mathbb{A}$ egydimenziós vektortér. $\mathbb{A} \otimes \mathbf{V}$ minden eleme szorzat alakú. Az $\mathbb{A}$ elemeivel való tenzorszorzással formailag úgy bánhatunk, mint valós számokkal való szorzással.

Ennek megfelelően az $\mathbb{A}$-val való tenzorszorzást kommutatívnak fogjuk fel, azaz, ha $\mathbb{A}$ egydimenziós, akkor

$$\mathbb{A} \otimes \mathbf{V} \equiv \mathbf{V} \otimes \mathbb{A}, \quad \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{v} \equiv \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{a};$$

mi több, ekkor elhagyjuk a tenzorszorzás jelét:

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{v} := \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{v}.$$

Azt mondjuk, hogy az $\mathbb{A} \otimes \mathbf{V}$ egy eleme **párhuzamos** a $\mathbf{V}$ egy $\boldsymbol{v}$ elemével, ha $\boldsymbol{a}\boldsymbol{v}$ alakú.

Ha $\mathbb{A}$ irányított – azaz mértékegyenes –, akkor $\mathbb{A} \otimes \mathbb{A}$ is természetszerűleg irányított az $\mathbb{A}$-beli pozitív elemek szorzata által, és ekkor

$$\mathbb{A}_{\mathbf{0}}^{+} \to (\mathbb{A} \otimes \mathbb{A})_{\mathbf{0}}^{+}, \qquad \boldsymbol{a} \mapsto \boldsymbol{a}^2 := \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{a}$$

bijekció, amelynek az inverze a gyökvönás: $\sqrt{\ } : (\mathbb{A} \otimes \mathbb{A})_{\mathbf{0}}^{+} \to \mathbb{A}_{\mathbf{0}}^{+}$.

18.2. Tenzorhányadosok

Legyen $\mathbb{A}$ egydimenziós vektortér.

Ha $\boldsymbol{a}$ az $\mathbb{A}$-nak nem-nulla eleme, akkor minden $\boldsymbol{b} \in \mathbb{A}$ esetén van egy egyértelműen meghatározott valós szám, amelyet $\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$-val jelölünk, úgy, hogy $\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

Ha $\boldsymbol{v}$ a $\mathbf{V}$ vektortér eleme és $\boldsymbol{a}$ az $\mathbb{A}$ nem-nulla eleme, akkor definiáljuk a

$$\frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{a}} : \mathbb{A} \to \mathbf{V}, \qquad \boldsymbol{b} \mapsto \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{v}$$

lineáris leképezést, amelyet a **$\boldsymbol{v}$ és $\boldsymbol{a}$ tenzorhányadosának** hívunk.

Minden $\mathbb{A} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezés ilyen alakú, ezért a $\frac{\mathbf{V}}{\mathbb{A}}$ jelölést alkalmazzuk az ilyen lineáris leképezések összességére.

Minthogy az $\mathbb{A} \to \mathbb{A}$ lineáris leképezések pontosan a valós számokkal való szorzások, $\frac{\mathbb{A}}{\mathbb{A}} = \mathbb{R}$ és $\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$ mint tenzorhányados egyenlő azzal a való számmal, amelyet az elfejezet elején bevezettünk.

Azt mondjuk, hogy a $\frac{\mathbf{V}}{\mathbb{A}}$ egy eleme **párhuzamos** a $\mathbf{V}$ egy $\boldsymbol{v}$ elemével, ha $\frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{a}}$ alakú.

18.3. Tenzoriális azonosítások

Tekintsük $\mathbf{U}\otimes\mathbf{V}$-t. Könnyű látni, hogy $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\mapsto\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}$ bilineáris leképezés $\mathbf{U}\times\mathbf{V}$-ről $\mathbf{U}\otimes\mathbf{V}$-be és

(i) $\mathbf{U}\otimes\mathbf{V}$ minden eleme $\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{u}_i\otimes\boldsymbol{v}_i$ alakú valamely n természetes számmal,

(ii) ha $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ lineárisan függetlenek és $\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{u}_i\otimes\boldsymbol{v}_i=0$, akkor $\boldsymbol{u}_i=0$ minden $i=1,\dots,n$ esetén.

Speciálisan, $\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}=0$ akkor és csak akkor, ha $\boldsymbol{u}=0$ vagy $\boldsymbol{v}=0$.

Az $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ tenzorszorzatát, ahogy definiáltuk, akár mint valamely bilineáris leképezések, akár mint valamely lineáris leképezések vektorterének tekinthetjük, vagyis a tenzorszorzat nem egyértelmű. Általában bevezetjük az $\mathbf{U}\otimes\mathbf{V}$ **absztrakt tenzorszorzatot** mint egy akármilyen vektorteret és hozzá adott $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\mapsto\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}$ bilineáris leképezést $\mathbf{U}\times\mathbf{V}$-ből, amely teljesíti a fenti (i) és (ii) tulajdonságokat.

Hasonlóan, azt találjuk, hogy a $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{a})\mapsto\frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{a}}$ leképezés $\mathbf{V}\times(\mathbb{A}\setminus\{\mathbf{0}\})$-ból $\frac{\mathbf{V}}{\mathbb{A}}$-ba lineáris-hányados, azaz lineáris a $\boldsymbol{v}$ változóban és $\frac{\boldsymbol{v}}{\alpha\boldsymbol{a}}=\frac{1}{\alpha}\frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{a}}$ minden nem-nulla α valós szám esetén. Továbbá

(i) a $\frac{\mathbf{V}}{\mathbb{A}}$ minden eleme $\frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{a}}$ alakú,

(ii) $\frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{a}}=\mathbf{0}$ akkor és csak akkor, ha $\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$.

Ezért bevezetjük a $\frac{\mathbf{V}}{\mathbb{A}}$ **absztrakt tenzorhányadost** mint egy akármilyen vektorteret és hozzá adott $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{a})\mapsto\frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{a}}$ lineáris-hányados leképezést $\mathbf{V}\times(\mathbb{A}\setminus\{\mathbf{0}\})$-ból, amely teljesíti a fenti (i) és (ii) tulajdonságokat.

A következő azonosításokat tehetjük a $\mathbf{V},\mathbf{U},\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ vektorterek különféle tenzorszorzataira és tenzorhányadosaira $\dim\mathbb{A}=\dim\mathbb{B}=1$ esetén:

$$\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{A}}\equiv\mathbb{A}^*,\qquad\frac{\alpha}{\boldsymbol{a}}\equiv\boldsymbol{b}\mapsto\alpha\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\quad(\boldsymbol{b}\in\mathbb{A});$$

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbb{A}}\equiv\mathbf{V}\otimes\mathbb{A}^*,\qquad\frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{a}}\equiv\boldsymbol{v}\otimes\frac{1}{\boldsymbol{a}};$$

$$\frac{\mathbf{V}^*}{\mathbb{A}^*}\equiv\left(\frac{\mathbf{V}}{\mathbb{A}}\right)^*,\qquad\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{h}}\equiv\frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{a}}\mapsto\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{ha}};$$

$$\frac{\left(\frac{\mathbf{V}}{\mathbb{A}}\right)}{\mathbb{B}}\equiv\frac{\mathbf{V}}{\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}},\qquad\frac{\left(\frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{a}}\right)}{\boldsymbol{b}}\equiv\frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{ab}};$$

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbb{A}}\otimes\frac{\mathbf{U}}{\mathbb{B}}\equiv\frac{\mathbf{V}\otimes\mathbf{U}}{\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}}\equiv\frac{\mathbf{V}}{\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}}\otimes\mathbf{U}\equiv\text{stb.}$$

$$\frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{a}}\otimes\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{b}}\equiv\frac{\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{ab}}\equiv\frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{ab}}\otimes\boldsymbol{u}\equiv\text{stb.}$$

Vegyük észre, hogy az utolsó két azonosításnak megfelelően a tenzoriális szorzás és osztás szabályai megegyeznak a valós számokra ismert műveleti szabályokkal.

Az előző azonosítások kombinációival azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}^*=\mathbb{A}^*\otimes\mathbb{A}\equiv\mathbb{R},\qquad\boldsymbol{ah}=\boldsymbol{ha}\equiv\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{a}.$$

Egy $\boldsymbol{L}:\mathbf{V}\to\mathbf{U}$ lineáris leképezés bármely egydimenziós $\mathbb{A}$ vektortér esetén tekinthető

– $\mathbb{A}\otimes\mathbf{V}\to\mathbb{A}\otimes\mathbf{U}$ lineáris leképezésnek úgy, hogy

$$\boldsymbol{L}\cdot(\boldsymbol{a}\boldsymbol{v}) := \boldsymbol{a}\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{v},$$

– $\frac{\mathbf{V}}{\mathbb{A}}\to\frac{\mathbf{U}}{\mathbb{A}}$ lineáris leképezésnek úgy, hogy

$$\boldsymbol{L}\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{a}} := \frac{\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{a}}.$$

18.4. Kontrakciók

Bármely $\mathbf{V}$ vektortér esetén létezik

$$\mathrm{Tr}:\mathbf{V}\otimes\mathbf{V}^*\to\mathbb{R}\qquad\text{és}\qquad\mathrm{Tr}:\mathbf{V}^*\otimes\mathbf{V}\to\mathbb{R},$$

lineáris leképezés, amelyet **nyomnak** hívunk, és amelyet

$$\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{p}\mapsto\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p},\quad\text{illetve}\quad\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{v}\mapsto\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}$$

határoz meg.

Tartsuk észben, hogy csak vegyes tenzoroknak van nyoma, koktenzoroknak és tenzoroknak nincs.

Általánosabban, ha $\mathbf{U}$ is vektortér, definiálhatjuk a nyomot mint az

$$\mathbf{U}\otimes\mathbf{V}\otimes\mathbf{V}^*\to\mathbf{U},\quad\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{p}\mapsto(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}$$

képlettel meghatározott lineáris leképezést.

Továbbá bármely $\mathbf{Z}$ vektortér esetén definiálhatjuk az

$$(\mathbf{U}\otimes\mathbf{V}^*)\times(\mathbf{V}\otimes\mathbf{Z})\to\mathbf{U}\otimes\mathbf{Z},$$

$$(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{p})\cdot(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{z}) := (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{z},$$

képlettel meghatározott lineáris leképezést, amelyet az adott tenzorok **kontrakciójának** nevezünk. Ez a pontszorzással jelölt kontrakció megfelel a a lineáris leképezésnek tekintett $\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{p}$ és $\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{z}$ kompozíciójának (egymásutánjának).

Hasonló formula érvényes tenzorhányadosokra is.

19. Euklideszi vektorterek

19.1. Általános tulajdonságok

Egy euklideszi vektortér egy $(\mathbf{E},\mathbb{D},\boldsymbol{b})$ hármas, ahol

– $\mathbf{E}$ véges dimenziós valós vektortér,

– $\mathbb{D}$ mértékegyenes (irányított egydimenziós vektortér),

– $\boldsymbol{b}:\mathbf{E}\times\mathbf{E}\to\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}$ szimmetrikus, pozitív definit bilineáris leképezés, amelyet **euklideszi formának** hívunk.

Minthogy $\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}$ is irányított, ezért teljesen rendezett, (lásd 17.4), így értelmes a pozitív definitség: $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})>0$ minden nem-nulla $\boldsymbol{x}$ esetén.

A $\boldsymbol{b}$ euklideszi forma segítségével az

$$\frac{\mathbf{E}}{\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}}\equiv\mathbf{E}^*,\quad\frac{\boldsymbol{y}}{\mathrm{m}^2}\equiv\mathbf{x}\mapsto\frac{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}{\mathrm{m}^2}\tag{$*$}$$

azonosítást tehetjük.

Ennek az azonosításnak és a korábban bevezetett pontszorzásnak az alapján (lásd 18.3), azt írjuk, hogy

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} := \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{D} \otimes \mathbb{D} \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{E}).$$

Mivel $\mathbb{D}$ irányított, vehetjük a $\mathbb{D} \otimes \mathbb{D}$ nem-negatív elemeinek négyzetgyökét, így definiáljuk a vektorok **hosszát**:

$$|\boldsymbol{x}| := \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}.$$

Ez a hossz a következő alapvető tulajdonságokkal rendelkezik:
– $|\boldsymbol{x}| = \mathbf{0}$ akkor és csak akkor, ha $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$,
– $|\alpha \boldsymbol{x}| = |\alpha||\boldsymbol{x}|$,
– $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \le |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$
minden $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ vektor és α valós szám esetén. Az utolsó összefüggést, amelyben egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ párhuzamos, **háromszög-egyenlőtlenségnek** hívjuk, és a következő **Cauchy–Schwartz-egyenlőtlenségből** származtatható:

$$|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \le |\boldsymbol{x}|\ |\boldsymbol{y}|,$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ párhuzamosak.

Ennek segítségével definiálhatjuk az $\boldsymbol{x} \neq 0$ és $\boldsymbol{y} \neq 0$ vektorok **szögét**:

$$\arg(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \arccos \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|\ |\boldsymbol{y}|}.$$

Azt mondjuk, hogy $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ **merőleges** vagy **ortogonális**, jelölésben $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$, ha $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$; nem-nulla vektorok esetén ez egyenértékű azzal, hogy a szögük $\pi/2$.

Fontos tudni, hogy mindig megadható bármely $\mathrm{m} \in \mathbb{D}^+$ esetén m**-re normált ortogonális bázis**, azaz olyan $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_N$ bázis, amelyre $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_i = \mathrm{m}^2$ és $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k = 0$, ahol $i, k = 1, \dots, N$ és $i \neq k$.

Tetszőleges $\mathbb{A}$ mértékegyenes esetén az euklideszi forma átvihető $\mathbb{A} \otimes \mathbf{E}$-re és $\frac{\mathbf{E}}{\mathbb{A}}$-ra a tenzoroknál bevezetett pontszorzással. Konkrétan,

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{b}\boldsymbol{y}) := \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}),$$

és

$$\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}}\right) \cdot \left(\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{b}}\right) := \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}}.$$

Ennek megfelelően

$$|\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{x}| \in \mathbb{A} \otimes \mathbb{D}, \quad \left|\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}}\right| = \frac{|\boldsymbol{x}|}{|\boldsymbol{a}|} \in \frac{\mathbb{D}}{\mathbb{A}}.$$

Speciálisan, az euklideszi forma $\frac{\mathbf{E}}{\mathbb{D}}$-n valós értékű, és az itteni vektorok hossza is valós szám. A $(*)$ azonosítás itt azt eredményezi, hogy

$$\frac{\mathbf{E}}{\mathbb{D}} \equiv \left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbb{D}}\right)^*.$$

19.2. Adjungáltak

Az $\boldsymbol{L} : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ lineáris leképezés ***b*-adjungáltja** az az $\boldsymbol{L}^\star : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ lineáris leképezés, amelyet az $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{L}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{L}^\star \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y}$ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{E})$ egyenlőség határoz meg.

$\boldsymbol{L}$ ***b*-szimmetrikus**, illetve ***b*-antiszimmetrikus**, ha $\boldsymbol{L}^\star = \boldsymbol{L}$, illetve $\boldsymbol{L}^\star = -\boldsymbol{L}$.

$\boldsymbol{L}$ ***b*-ortogonális**, ha $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{L}^\star$ az $\mathbf{E}$ identitása; ez egyenértékű azzal, hogy $\boldsymbol{L}^\star = \boldsymbol{L}^{-1}$, és azzal is, hogy $(\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{E}$ esetén, azaz megtartja az euklideszi formát.

Az egyszerűség kedvéért általában elhagyjuk az euklideszi formára való utalást, és csak adjungáltat, szimmetrikust, antiszimmetrikust és ortogonálist mondunk.

Bármely $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ mértékegyenes esetén a pontszorzás értelemszerű alkalmazásával ugyanígy definiáljuk az $\mathbb{A} \otimes \mathbf{E} \to \mathbb{B} \otimes \mathbf{E}$ és $\frac{\mathbf{E}}{\mathbb{A}} \to \frac{\mathbf{E}}{\mathbb{B}}$ lineáris leképezések adjungáltját, szimmetrikus és antiszimmetrikus tulajdonságát.

Az adjungált a transzponáltnak felel meg a vektorok és kovektorok azonosítása következtében. Jegyezzük meg, hogy itt – épp az említett azonosítás miatt – az általános esettel ellentétben, értelmes $\mathbf{E} \to \mathbf{E}$ lineáris leképezés szimmetrikussága, antiszimmetrikussága.

19.3. Axiálvektorok

A következőkben az $\mathbf{E}$ euklideszi vektortér háromdimenziós, és irányított.

Célszerűnek látjuk bevezetni az $\mathbf{N} := \frac{\mathbf{E}}{\mathbb{D}}$ jelölést. $\mathbf{N}$-en az előbb mondottak szerint az euklideszi forma valós értékű, és a vektorainak hossza is valós szám, továbbá $\mathbf{N}^* \equiv \mathbf{N}$. Ez utóbbi tulajdonság az, ami kitünteti $\mathbf{N}$-et: a kovektorok azonosak a vektorokkal, a kotenzorok a tenzorokkal, sőt akármely típusú vegyes tenzorok is azonosak a tenzorokkal.

A három dimenzió következménye, hogy $\mathbf{N} \wedge \mathbf{N}$, az antiszimemtrikus tenzorok vektortere is háromdimenziós, és $\mathbf{N} \wedge \mathbf{N} \wedge \mathbf{N}$, az antiszimetrikus 3-tenzorok vektortere egydimenziós.

Megmutatható, hogy bármely pozitívan irányított $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3$ ortonormált (azaz 1-re normált ortogonális) bázis esetén

$$\epsilon := \boldsymbol{n}_1 \wedge \boldsymbol{n}_2 \wedge \boldsymbol{n}_3$$

ugyanaz (nem függ a bázistól); neve: Levi–Civita-tenzor.

Ugyancsak megmutatható, hogy bármely pozitívan irányított $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3$ ortonormált bázis a

$$\boldsymbol{j} : \mathbf{N} \wedge \mathbf{N} \to \mathbf{N}, \quad \boldsymbol{n}_1 \wedge \boldsymbol{n}_2 \mapsto \boldsymbol{n}_3,\ \boldsymbol{n}_2 \wedge \boldsymbol{n}_3 \mapsto \boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_3 \wedge \boldsymbol{n}_1 \mapsto \boldsymbol{n}_2 \tag{19.1}$$

formulával ugyanazt a lineáris bijekciót határozza meg.

Ennek segítségével definiáljuk az

$$\mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}, \quad (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{n}) \mapsto \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{n} := \boldsymbol{j}(\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{n})$$

vektoriális szorzást.

Igen fontosak a következő formulák: ha $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbf{N} \wedge \mathbf{N}$ és $\boldsymbol{n} \in \mathbf{N}$, akkor az $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] := \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ jelöléssel

(i) $|\boldsymbol{j}(\boldsymbol{A})| = |\boldsymbol{A}| := \sqrt{-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^2)}$,

(ii) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{j}(\boldsymbol{A}) \times \boldsymbol{n}$,

(iii) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{j}([\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}])$,
(iv) $\boldsymbol{j}([\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]) = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{A}) \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{B})$,
(v) $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{A}) \wedge \boldsymbol{j}(\boldsymbol{B}) = [\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$,
(vi) $\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{n} = (\boldsymbol{j}(\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n})\epsilon$.

Természetesen bármely $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ mértékegyenes esetén értelmes a

$$\boldsymbol{j} : (\mathbb{A} \otimes \mathbf{N}) \wedge (\mathbb{B} \otimes \mathbf{N}) = (\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}) \otimes (\wedge\mathbf{N} \to \mathbf{N})O$$

lineáris bijeckció, és ezzel az

$$(\mathbb{A} \otimes \mathbf{N}) \times (\mathbb{B} \otimes \mathbf{N}) \to (\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}) \otimes \mathbf{N}$$

vektoriális szorzás; például

$$\mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbb{D} \otimes \mathbf{E}.$$

A fizikában szokás **axiálvektorokról** beszélni, mint olyan vektorokról, amelyek a tértükrözésre nem váltanak előjelet. Ezek valójában antiszimmetrikus tenzorok. Azt mondják: két vektor vektoriális szorzata axiálvektor. Ennek is úgy van pontos értelme, hogy a vektoriális szorzat helyett antiszimmetrikus tenzorszorzatot értünk. Mi ragaszkodunk a pontos matematikai értelemhez, tehát ahol a fizikában axiálvektorokról beszélnek, ott antiszimmetrikus tenzort értünk, és a fenti összefüggések szerint írjuk át a vektoriális szorzatokat.

Ha $\boldsymbol{R} : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ ortogonális leképezés amely nem az identitás, akkor van olyan nem-nulla $\boldsymbol{a}$ vektor, amelyre $\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$, és az $\boldsymbol{a}$ vektorra merőleges bármely $\boldsymbol{x}$ vektor esetén $\frac{\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}|^2}$ ugyanaz; ezért azt mondjuk, hogy $\boldsymbol{R}$ az $\boldsymbol{a}$ tengely körüli, $\arg(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{x})$ szögű forgatás.

Ha $\boldsymbol{A} \in \mathbf{N} \wedge \mathbf{N}$, azaz $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ antiszimmetrikus lineáris leképezés, akkor $e^{\boldsymbol{A}}$ az $\boldsymbol{A}$ magja körüli, $|\boldsymbol{A}|$ szögű forgatás, vagyis irányítástartó ortogonális leképezés, és $|\boldsymbol{x} \cdot e^{A} \cdot \boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}|^2 \cos|A|$ ha $\boldsymbol{x}$ merőleges (ortogonális) $\boldsymbol{A}$ magjára.

20. Minkowski-féle vektorterek

Egy Minkowski-féle vektorér egy $(\mathbf{M}, \mathbb{I}, \boldsymbol{g})$ hármas, ahol

– $\mathbf{M}$ véges, legalább kétdimenziós vektortér; itt a továbbiakban négy dimenziós,

– $\mathbb{I}$ mértékegyenes,

– $\boldsymbol{g} : \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$ Lorentz-forma, azaz szimmetrikus bilineáris leképezés, amelyre a következő teljesül: ha $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ olyan vektorok, hogy $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k) = 0$ $i \neq k$ esetén, akkor (megfelelő számozással) $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_0) < 0$ és $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i) > 0$ ha $i = 1, 2, 3$.

A Lorentz-forma nem-elfajuló, ami azt jelenti, hogy ha $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = 0$ minden $\boldsymbol{x} \in \mathbf{M}$ esetén, akkor $\boldsymbol{y} = 0$.

A Lorentz-forma segítségével az

$$\frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}} \equiv \mathbf{M}^*, \quad \frac{\boldsymbol{y}}{\mathrm{s}^2} \equiv \boldsymbol{x} \mapsto \frac{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}{\mathrm{s}^2} \tag{$*$}$$

azonosítást tehetjük.

Ennek az azonosításnak és a korábban bevezetett pontszorzásnak az alapján (lásd 18.3), azt írjuk, hogy

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} := \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{M}).$$

Mivel $\mathbb{I}$ irányított, vehetjük az $\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$ nem-negatív elemeinek négyzetgyökét, így definiáljuk a vektorok **pszeudohosszát**:

$$|\mathbf{x}| := \sqrt{|\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}|}.$$

A pszeudohosszra igaz:
- $|\mathbf{x}| = \mathbf{0}$ ha $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, de ha $|\boldsymbol{x}| = \mathbf{0}$, abból nem következik, hogy $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$,
- $|\alpha \mathbf{x}| = |\alpha||\mathbf{x}|$ minden $\alpha \in \mathbb{R}$ valós számra,
- nincs meghatározott összefüggés $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|$ és $|\mathbf{x}| + |\boldsymbol{y}|$ között.

Minthogy $\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$ is irányított, jól értelmezett a

$$\mathrm{T} := \{\mathbf{x} \in \mathbf{M} | \; \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} < \mathbf{0}\}$$

halmaz.

Azt mondjuk, hogy T $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ eleme **azonos nyilú** ha $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} < \mathbf{0}$.

Azonos nyilúnak lenni ekvivalencia-reláció, két ekvivalencia-osztály van, amelyek nyílt, nulla csúcsú konvex kúpok. Azonos nyilú vektorok egy ekvivalencia-osztályát a $\boldsymbol{g}$ egy **nyílirányításának** nevezzük. $\boldsymbol{g}$ **nyílirányított**, ha adot a $\boldsymbol{g}$ egy nyílirányítása; a válaszott ekvivalencia-osztályban levő vektorokat **pozitív nyilúaknak** mondjuk.

A pozitív nyilú vektorok halmazát $\mathtt{T}^{\rightarrow}$-lal jelöljük. Ez tehát nyílt halmaz, és nulla csúcsú konvex kúp, azaz ha $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathtt{T}^{\rightarrow}$, akkor $\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y} \in \mathtt{T}^{\rightarrow}$ minden α, β olyan nem-negatív valós számra, hogy $\alpha + \beta \neq 0$.

A **fordított Cauchy-egyenlőtlenség** így szól: ha $\mathbf{x}, \boldsymbol{y} \in \mathrm{T}$, akkor

$$|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \geq |\mathbf{x}||\boldsymbol{y}| > \mathbf{0}$$

és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{x}$ és $\boldsymbol{y}$ párhuzamos.

Ez eredményezi a **fordított háromszög-egyenlőtlenséget**: ha $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathrm{T}$, $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ azonos nyilú, akkor

$$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \geq |\mathbf{x}| + |\boldsymbol{y}|$$

és egyenlőség pontosan akkor áll, ha $\mathbf{x}$ és $\boldsymbol{y}$ párhuzamos.

Azt mondjuk, hogy $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ **$\boldsymbol{g}$-ortogonális**, ha $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$. Ellentétben az euklideszi esettel, van olyan nem-nulla $\mathbf{x}$, amely $\boldsymbol{g}$-ortogonális önmagára.

Fontos tudni, hogy mindig megadható bármely $\mathrm{s} \in \mathbb{I}^+$ esetén **s-re normált $\boldsymbol{g}$-ortogonális bázis**, azaz olyan $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ bázis, hogy $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k = 0$, ha $i \neq k$, és $\boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e}_0 = -\mathrm{s}^2$, $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_i = \mathrm{s}^2$ ha $i = 1, 2, 3$ (ilyen bázis szerepelt a Lorentz-forma meghatározásában).

Ha $\boldsymbol{y}$ a T eleme, akkor a rá $\boldsymbol{g}$-otogonális vektorok összesége, $\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{M} \mid \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$ három dimenziós lineáris altér, amelyre $\boldsymbol{g}$ leszűkítése euklideszi forma, ezért az ilyen vektorokon a pszeudohossz valódi hossz lesz.

Tetszőleges $\mathbb{A}$ mértékegyenes esetén a Lorentz-forma átvihető $\mathbb{A} \otimes \mathbf{M}$-re és $\frac{\mathbf{M}}{\mathbb{A}}$-ra a tenzoroknál bevezetett pontszorzással. Konkrétan,

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{b}\boldsymbol{y}) := \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}),$$

és

$$\left(\frac{\mathbf{x}}{\boldsymbol{a}}\right) \cdot \left(\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{b}}\right) := \frac{\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}}.$$

Ennek megfelelően

$$|\mathbf{ax}| = |\mathbf{a}||\mathbf{x}| \in \mathbb{A} \otimes \mathbb{I}, \quad \left|\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{a}}\right| = \frac{|\mathbf{x}|}{|\mathbf{a}|} \in \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{A}}.$$

Speciálisan, a Lorentz-forma $\frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}}$-n valós értékű, és az itteni vektorok hossza is valós szám. A $(*)$ azonosítás itt azt eredményezi, hogy

$$\frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}} \equiv \left(\frac{\mathbf{M}}{\mathbb{I}}\right)^*.$$

Szemléletes képet kapunk a Minkowski-térről, ha vesszük az $\mathbf{M} := \mathbb{R}^4$ vektorteret, az $\mathbb{I} := \mathbb{R}$ mértékegyenest, és a

$$(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3) \cdot (\eta^0, \eta^1, \eta^2, \eta^3) := -\xi^0\eta^0 + \sum_{i=1}^{3} \xi^i\eta^i$$

Lorentz-formát.

Az egyszerűbb írásmód kedvéért a szokáshoz híven bevezetjük a

$$\xi_0 := -\xi^0, \quad \xi_i := \xi^i \quad (i = 1, 2, 3)$$

jelölést, és ezzel

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta} = \sum_{i=0}^{3} \xi_i\eta^i.$$

Ennek megfelelően a vektorok és kovektorok azonosítását a

$$(\xi^i) \equiv (\xi_i) \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

formula fejezi ki. Jegyezzük meg tehát: mind a vektorok, mind a kovektorok számnégyesek, a vektorok szimbólumait felső indexszel, a kovektorok szimbólumait alsó indexszel jelöljük.

20.1. Adjungáltak

Az $\boldsymbol{L} : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ lineáris leképezés ***g*-adjugáltja** az az $\boldsymbol{L}^\star : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ lineáris leképezés, amelyet az $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{Ly} = (\boldsymbol{L}^\star\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y}$ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{M})$ egyenlőség határoz meg.

$\boldsymbol{L}$ ***g*-szimmetrikus**, illetve ***g*-antiszimmetrikus**, ha $\boldsymbol{L}^\star = \boldsymbol{L}$, illetve $\boldsymbol{L}^\star = -\boldsymbol{L}$.

$\boldsymbol{L}$ ***g*-ortogonális**, ha $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{L}^\star$ az $\mathbf{M}$ identitása; ez egyenértékű azzal, hogy $\boldsymbol{L}^\star = \boldsymbol{L}^{-1}$, és azzal is, hogy $(\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{M}$ esetén.

Az egyszerűség kedvéért általában elhagyjuk a Lorentz-formára való utalást, és csak adjungáltat, szimmetrikust, antiszimmetrikust és ortogonálisat mondunk.

Bármely $\mathbb{A}$ mértékegyenes estén a pontszorzás értelemszerű alkalmazásával ugyanígy definiáljuk az $\mathbf{E} \to \mathbb{A} \otimes \mathbf{E}$ és $\mathbf{E} \to \frac{\mathbf{E}}{\mathbb{A}}$ lineáris leképezések adjungáltját, szimmetrikus és antiszimmetrikus tulajdonságát.

Az adjungált a transzponáltnak felel meg a vektorok és kovektorok azonosítása következtében. Jegyezzük meg, hogy itt – épp az említett azonosítás miatt – az általános esettel ellentétben, értelmes $\mathbf{M} \to \mathbf{M}$ lineáris leképezés szimmetrikussága, antiszimmetrikussága.

21. Affin terek

21.1. Alapvető tulajdonságok

Egy **affin tér** egy $(\mathtt{V}, \mathbf{V}, -)$ hármas, ahol
– $\mathtt{V}$ nem üres halmaz,
– $\mathbf{V}$ vektortér,
– $-$ leképzés $\mathtt{V} \times \mathtt{V}$-ről $\mathbf{V}$-re, amelyet

$$(x, y) \mapsto x - y$$

formában írunk, és amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:
1) minden $o \in \mathtt{V}$ esetén az $O_o : \mathtt{V} \to \mathbf{V}$, $x \mapsto x - o$ hozzárendelés bijekció,
2) $(x - y) + (y - z) + (z - x) = \mathbf{0}$ minden $x, y, z \in \mathtt{V}$ esetén.

O_o szokásos neve: $\mathtt{V}$-nek o **kezdőpontú (origójú) vektorizációja**.

A szokásnak megfelelően az affin teret egyetlen betűvel jelöljük, és azt mondjuk, $\mathtt{V}$ affin tér $\mathbf{V}$ vektortér fölött, és a $-$ leképezést **kivonásnak** hívjuk.

Speciálisan egy vektortér, a vektori kivonással, affin tér önmaga fölött. Affin terek – amelyek viszont már általában nem vektorterek – egy vektortér affin alterei is (lásd 17.3) a vektori kivonással (ezért is nevezik őket így).

Az $\mathtt{V}$ affin tér **dimenziója** az alulfekvő $\mathbf{V}$ vektortér dimenziója. $\mathtt{V}$ **irányított** ha $\mathbf{V}$ irányított.

A fenti 1) és 2) tulajdonságból azonnal adódik, hogy minden $x, y \in \mathtt{V}$ esetén
– $x - y = \mathbf{0}$ akkor és csak akkor, ha $x = y$,
– $x - y = -(y - x)$;
továbbá bármely $n \geq 3$ egész számra és a $\mathtt{V}$-nek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elemére

$$(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \ldots. + (x_n - x_1) = \mathbf{0}.$$

Adott $o \in \mathtt{V}$ esetén, az O_o leképezés inverzét

$$\mathbf{V} \to \mathtt{V}, \qquad \mathbf{x} \mapsto o + \mathbf{x} \tag{*}$$

formában jelöljük.

Tehát, definíció szerint a $\mathtt{V}$ minden x, y elemére

$$y + (x - y) = x.$$

Jegyezzük jól meg:
– értelmes az összeg, a különbség és a számmal szorzás vektorok között, az eredmény vektor;
– értelmes a különbség két affin térbeli elem között, az eredmény vektor (nem értelmes az összeg és a számmal szorzás!),
– értelmes egy affin térbeli elem és egy vektor összege, az eredmény affin térbeli elem.

A jelölések úgy vannak meghatározva, hogy a szokásos műveleti szabályok érvényben maradjanak, amennyiben az elvégzett műveletnek van értelme.

Tehát például igaz, hogy $(x + \mathbf{x}) + \boldsymbol{y} = x + (\mathbf{x} + \boldsymbol{y})$ (az összeadás jele a bal oldalon kétszer a $(*)$ műveletet jelöli, a jobb oldalon egyszer ezt a műveletet, egyszer a vektorok összeadását).

Ugyancsak igaz, hogy $(x - y) + (u - v) = (x - v) - (y - u)$, ezzel szemben $(x - y) + (u - v) = (x + u) - (y + v)$ nem helytálló, ugyanis a jobb oldalnak – affin térbeli elemek összegének – nincs értelme.

21.2. Faktorterek

Legyen $\mathbf{E}$ a $\mathbf{V}$ vektortér lineáris altere.

A $\mathtt{V}$ affin tér egy részhalmazát **az $\mathbf{E}$ vezette affin altérnek** hívjuk, ha $x+\mathbf{E}$ alakú az affin tér valamely x elemével. Vegyük észre, hogy $x+\mathbf{E} = y+\mathbf{E}$ akkor és csak akkor, ha $y - x \in \mathbf{E}$.

A $\mathtt{V}$ pontjai a nulla lineáris altér vezette affin alterek. Egydimenziós lineáris altér vezette affin alteret **egyenesnek** hívunk, és **hipersíknak** egy olyan affin alteret, amelyet $\dim \mathbf{V} - 1$ dimenziós altér vezet.

Azonos alterek vezette affin altereket **párhuzamosaknak** mondunk.

Az $\mathbf{E}$ vezette affin alterek összességét $\mathtt{V}/\mathbf{E}$ jelöli; elnevezése: $\mathtt{V}$-nek $\mathbf{E}$ szerinti faktortere.

$\mathtt{V}/\mathbf{E}$ affin tér lesz $\mathbf{V}/\mathbf{E}$ fölött a következő jól definiált kivonással:

$$(y+\mathbf{E}) - (x+\mathbf{E}) := (y-x) + \mathbf{E}.$$

21.3. Affin leképezések

Legyen $\mathtt{U}$ és $\mathtt{V}$ affin tér az $\mathbf{U}$, illetve a $\mathbf{V}$ vektortér fölött. Egy $L : \mathtt{V} \to \mathtt{U}$ leképezést **affinnak** hívunk, ha létezik egy $\boldsymbol{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ lineáris leképezés úgy, hogy

$$L(y) - L(x) = \boldsymbol{L} \cdot (y - x) \qquad (x, y \in \mathtt{V}).$$

Az $\boldsymbol{L}$ lineáris leképezés egyértelmű. Azt mondjuk, hogy L affin leképezés $\boldsymbol{L}$ fölött. A fenti formula egyenértékű azzal, hogy

$$L(x + \mathbf{x}) = L(x) + \boldsymbol{L} \cdot \mathbf{x} \qquad (x \in \mathtt{V}, \mathbf{x} \in \mathbf{V}).$$

Nyilvánvaló, hogy lineáris leképezés – az affin tereknek teintett vektorterek között – affin leképezés önmaga fölött.

Az affin leképezés L pontosan akkor injektív vagy szürjektív, ha $\boldsymbol{L}$ olyan; ha L bijekció, akkor L^{-1} affin leképezés $\boldsymbol{L}^{-1}$ fölött. Ha L bijekció és $\mathtt{V}$ is, $\mathtt{U}$ is irányított, L **irányítástartó**, ha $\boldsymbol{L}$ olyan.

Affin altérnek affin leképezés általi képe affin altér; affin altérnek affin leképezés általi ősképe affin altér.

Speciálisan az L affin leképezés értékkészletében levő minden u esetén

$$\{x \in \mathtt{V} \mid L(x) = u\}$$

az $\boldsymbol{L}$ magja vezette affin altér.

22. Differenciálás

22.1. Differenciálás affin terekben

Ismertnek tételezzük fel az analízis alapvető fogalmait: nyílt halmaz, zárt halmaz, konvergencia, folytonosság stb.

Véges dimenziós vektortéren bármely két norma ekvivalens, vagyis ugyanazokat a nyílt halmazokat, zárt halmazokat, konvergens sorozatokat, folytonos függvényeket, stb. határozzák meg, ezért beszélhetünk ezekről norma konkrét megadása nélkül. Lineáris, bilineáris, multilineáris leképezések automatikusan folytonosak (véges dimenzió esetén!).

Ha $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ véges dimenziós vektortér, ordo : $\mathbf{V} \rightarrowtail \mathbf{U}$ olyan függvényt jelöl, amely

– definiálva van a $\mathbf{0} \in \mathbf{U}$ egy környezetében,

– $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{\mathrm{ordo}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{V}$-n adott valamely (tehát minden) $\|\cdot\|$ norma esetén.

Ha $\mathtt{V}$ affin tér a (véges dimenziós valós) $\mathbf{V}$ vektortér fölött, és $\|\ \|$ norma $\mathbf{V}$-n, akkor $\mathtt{V} \times \mathtt{V} \to \mathbb{R}$, $\quad (x, y) \mapsto \|x - y\|$ metrika $\mathtt{V}$-n. Ezzel a $\mathtt{V}$-n is beszélhetünk nyílt halmazokról, folytonosságról stb. Affin leképezések automatikusan folytonosak.

Legyen $\mathtt{V}$ és $\mathtt{U}$ affin tér. Egy $F : \mathtt{V} \to \mathtt{U}$ függvény **differenciálható** az értelmezési tartományának egy x belső pontjában, ha létezik egy $\mathcal{D}F(x) : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ lineáris leképezés – más szóval az $\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}^*$ eleme – úgy, hogy

$$F(y) - F(x) = \mathcal{D}F(x) \cdot (y - x) + \mathrm{ordo}(y - x).$$

$\mathcal{D}F(x)$ az F **deriváltja** x-ben.

F **differenciálható**, ha differenciálható az értelmezési tartományának minden pontjában.

F **folytonosan differenciálható**, ha differenciálható, és a $\mathtt{V} \to \mathrm{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{U})$, $x \mapsto \mathcal{D}F(x)$ függvény folytonos.

F **kétszer differenciálható**, ha differenciálható, és a $\mathtt{V} \to \mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$, $x \mapsto \mathcal{D}F(x)$ függvény differenciálható (aminek a fenti definíció szerint van értelme, hiszen a $\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$ véges dimenziós vektortér). Az F második deriváltja x-ben, amelyet $\mathcal{D}^2F(x)$-szel jelölünk, az $(\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}^*) \otimes \mathbf{V}^* = \mathbf{U} \otimes (\mathbf{V}^* \otimes \mathbf{V}^*)$ eleme.

Magasabb rendű diferenciálhatóság hasonlóan értelmezhető. Az F n-ik deriváltja x-ben, amelyet $\mathcal{D}^nF(x)$-szel jelölünk, az $\mathbf{U} \otimes (\mathbf{V}^*)^{\otimes n}$ eleme.

Simának mondunk egy akárhányszor ("végtelenszer") differenciálható függvényt.

Minthogy egy vektortér affin tér önmaga fölött, értelemszerűen $\mathtt{U}$ és/vagy $\mathtt{V}$ helyett $\mathbf{U}$ és/vagy $\mathbf{V}$ is vehető.

Affin leképezés differenciálható, a deriváltja minden pontban az alulfekvő lineáris leképezés. Ezért végtelenszer differenciálható, minden magasabb rendű deriváltja nulla.

22.2. Tenzormezők differenciálása

A $\mathtt{V}$-n értelmezett és $\mathbb{R}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}^*$, $\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}$, $\mathbf{V}^* \otimes \mathbf{V}^*$ stb. értékű függvények (skalármezők, vektormezők, kovektormezők, tenzormezők, kotenzormezők, stb) külön figyelmet érdemelnek.

Az $f : \mathtt{V} \to \mathbb{R}$ függvény deriváltja $\mathcal{D}f : \mathtt{V} \to \mathbf{V}^*$ függvény.

A $\boldsymbol{J} : \mathtt{V} \to \mathbf{V}$ vektormező deriváltja $\mathcal{D}\boldsymbol{J} : \mathtt{V} \to \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}^*$ függvény.

A $\boldsymbol{K} : \mathtt{V} \to \mathbf{V}^*$ kovektormező deriváltja $\mathcal{D}\boldsymbol{K} : \mathtt{V} \to \mathbf{V}^* \otimes \mathbf{V}^*$ függvény.

A $\boldsymbol{G} : \mathtt{V} \to \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}$ tenzormező deriváltja $\mathcal{D}\boldsymbol{G} : \mathtt{V} \to \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}^*$ függvény.

És így tovább: a $\mathcal{D}$ differenciálás formális kovektorként fogható fel, amellyel mintegy tenzoriálisan szorozzuk az eredeti függvényt. Sajnos a deriváltak megszokott jelölése nincs összhangban a tenzori jelölésekkel: a $\mathcal{D}$ szimbólumot a függvény jele elé írjuk, míg az eredmény hátulról való szorzásban jelentkezik. A vektormezőkkel és kovektormezőkkel kapcsolatban alkalmazhatunk egy "trükköt", hogy helyrebillenjenek a dolgok. Nevezetesen, vesszük a deriváltak transzponáltját:

$$\mathcal{D} \otimes \boldsymbol{J} := (\mathcal{D}\boldsymbol{J})^* : \mathtt{V} \to \mathbf{V}^* \otimes \mathbf{V},$$

$$\mathcal{D} \otimes \boldsymbol{K} := (\mathcal{D}\boldsymbol{K})^* : \mathtt{V} \to \mathbf{V}^* \otimes \mathbf{V}^*,$$

A $\boldsymbol{J}$ vektormező deriváltjának az értékei vegyes tenzormezők, ezért vehetjük az értékek nyomát, így kapjuk a vektormező **divergenciáját**:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{J} := \mathcal{D} \cdot \boldsymbol{J} := \mathrm{Tr}(\mathcal{D}\boldsymbol{J}).$$

A $\boldsymbol{K}$ kovektormező deriváltjnak pedig vehetjük az antiszimmetrizáltját, amelyet a **külső derváltjának** hívunk:

$$\mathcal{D} \wedge \boldsymbol{K} := \mathcal{D} \otimes \boldsymbol{K} - \mathcal{D}\boldsymbol{K}.$$

Értelemszerűen definiáljuk egy antiszimmetrikus kotenzormezőnek, egy $\boldsymbol{F} : \mathtt{V} \to \mathbf{V}^* \wedge \mathbf{V}^*$ függvénynek a $\mathcal{D} \wedge \boldsymbol{F}$ külső deriváltját.

22.3. Differenciálás háromdimenziós euklideszi térben

Háromdimenziós irányított euklideszi tér fölötti affin tér esetében szokás a differenciálás jeléül a ∇ szimbólumot használni.

Ekkor egy $\boldsymbol{D}$ vektormező deriváltja $\nabla\boldsymbol{D}$, a divergenciája $\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \nabla \cdot \boldsymbol{D}$.

Egy $\boldsymbol{E}$ kovektormező külső deriváltja $\nabla \wedge \boldsymbol{E}$, amelyre alkalmazva a (19.1) leképezést kapjuk a kovektormező **rotációját**: $\boldsymbol{j}(\nabla \wedge \boldsymbol{E}) = \nabla \times \boldsymbol{E} =: \mathrm{rot}\boldsymbol{E}$.

Egy $\boldsymbol{H}$ antiszimetrikus tenzormező deriváltja $\nabla\boldsymbol{H}$, divergenciája a $\nabla \cdot \boldsymbol{H}$ vektormező. A 19.3 alfejezetben a vektoriális szorzásra szereplő (ii) formula szerint $\nabla \cdot \boldsymbol{H} = -\nabla \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{H}) =: -\mathrm{rot}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{H})$.

Egy $\boldsymbol{B}$ antiszimmetrikus kotenzormező külső deriváltja $\nabla \wedge \boldsymbol{B}$ antiszimmetrikus 3-kotenzormező. A 19.3 alfejezetben szereplő (vi) formula szerint ez a Levi–Civita-tenzor $-\nabla \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{B}) =: -\mathrm{div}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{B})$-szerese.

22.4. Differenciálás egydimenziós affin téren

Tekintsünk egy $f : \mathtt{A} \to \mathtt{V}$ differenciálható függvényt, ahol $\mathtt{A}$ egydimenziós affin tér (az $\mathbb{A}$ vekortér fölött). Definíció szerint a deriváltja az a pontban, $\mathcal{D}f(a) : \mathbb{A} \to \mathbf{V}$ lineáris leképezés, amely tekinthető a $\frac{\mathbf{V}}{\mathbb{A}}$ elemének. Ekkor az $f'(a)$ vagy $\dot{f}(a)$ jelet használjuk $\mathcal{D}f(a)$ helyett, és megmutatható, hogy

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

23. Részsokaságok

23.1. Görbék

Legyen $\mathtt{V}$ affin tér, amelynek a dimenziója nagyobb 1-nél.

A $\mathtt{V}$ egy $\mathtt{C}$ részhalmaza **görbe** vagy **vonal**, ha létezik egy $p : \mathbb{R} \to \mathtt{V}$ függvény, amelyet a $\mathtt{C}$ **paraméterezésének** hívunk, úgy, hogy

– a p értelmezési tartománya nyílt intervallum, értékkészlete $\mathtt{C}$,

– p folytonosan differenciálható, és $\dot{p}(\xi) \neq 0$ az értelmezési tartományában levő minden ξ-re,

– p injektív és p^{-1} folytonos.

Legyen x a $\mathtt{C}$ görbe eleme. A $\dot{p}(p^{-1}(x))$ vektorral párhuzamos vektorokat (más szóval a $\dot{p}(p^{-1}(x))$ számszorosait) a görbe x-beli **érintővektorainak** nevezzük; összességük az x fölötti **érintőtér**.

Noha az érintővektorokat egy paraméterezéssel definiáltuk, függetlenek a paraméterezéstől: megmutatható, hogy ha p és q a $\mathtt{C}$ görbe paraméterezése, akkor $p^{-1} \circ q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, továbbá minden $x \in \mathtt{C}$ esetén $\dot{p}(p^{-1}(x))$ és $\dot{q}(q^{-1}(x))$ párhuzamos egymással.

A $\mathtt{C}$ görbe p és q paraméterezése **azonos irányítású**, ha $\dot{p}(p^{-1}(x))$ és $\dot{q}(q^{-1}(x))$ egymás pozitív számszorosai minden $x \in \mathtt{C}$ esetén. Az azonos irányítású paraméterezések egy ekvivalencia-osztályát a görbe egy **irányításának** nevezzük. $\mathtt{C}$ **irányított**, ha adott egy irányítása.

Speciális görbe egy $\mathtt{C}$ egyenes, azaz egydimenziós affin altér $\mathtt{V}$-ben. Ugyanis ez $x + \mathbf{C}$ alakú, ahol x a $\mathtt{C}$ tetszőleges pontja, és $\mathbf{C}$ egydimenziós lineáris altér $\mathbf{V}$-ben. Véve tetszőleges $\boldsymbol{c}$ elemet $\mathbf{C}$-ből, $\alpha \mapsto x + \alpha\boldsymbol{c}$ az előírt tulajdonságú paraméterezése $\mathtt{C}$-nek. Az egyenes minden pontjában az érintőtere $\mathbf{C}$. A $\mathtt{C}$ irányítása egyenértékű a $\mathbf{C}$ egy irányításával.

23.2. Több dimenziós részsokaságok

Legyen $\mathtt{V}$ affin tér, amelynek az N dimenziója nagyobb 2-nél, és legyen M természetes szám, $1 \le M \le N$.

A $\mathtt{V}$ egy H részhalmaza M**-dimenziós egyszerű részsokaság**, ha létezik egy $p : \mathbb{R}^M \to \mathtt{V}$ függvény, amelyet a H **paraméterezésének** hívunk, úgy hogy

– a p értelmezési tartománya nyílt és összefüggő, értékkészlete H,

– p folytonosan differenciálható, és $\mathcal{D}p(\xi) \neq 0$ az értelmezési tartományában levő minden ξ-re,

– p injektív és p^{-1} folytonos.

Az értelmezés szerint tehát a görbék egydimenziós egyszerű részsokaságok; az $N-1$ dimenziós egyszerű részsokaságot **hiperfelületnek** hívjuk.

A $\mathtt{V}$ egy H részhalmaza M**-dimenziós részsokaság**, ha minden x pontjának van olyan $G(x)$ környezete $\mathtt{V}$-ben, hogy $G(x) \cap \mathrm{H}$ M-dimenziós egyszerű részsokaság; egy ilyennek a paraméterezését a H **lokális paraméterezésének** hívjuk.

Egy lokális paraméterezés inverzét **lokális koordinátázásnak** nevezzük.

Legyen x a p lokális paraméterezés értékkészletében. Emlékezzünk, hogy $\mathcal{D}p(\xi) : \mathbb{R}^M \to \mathbf{V}$ lineáris leképezés. A $\mathcal{D}p(p^{-1}(x))$ értékkészletében levő elemeket a H x-beli **érintővektorainak** nevezzük; összességük az x fölötti **érintőtér**,

$$\mathrm{T}_x(\mathrm{H}) := \mathrm{Ran}\left(\mathcal{D}p(p^{-1}(x))\right).$$

Noha az érintővektorokat egy paraméterezéssel definiáltuk, függetlenek a paraméterezéstől: megmutatható, hogy ha p és q olyan lokális paraméterezés, hogy az értékkészletük metszete nem üres, akkor $p^{-1} \circ q : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$ folytonosan differenciálható, továbbá minden $x \in \mathrm{Ran}p \cap \mathrm{Ran}q$ esetén,

$$\mathrm{Ran}\left(\mathcal{D}p(p^{-1}(x))\right) = \mathrm{Ran}\left(\mathcal{D}q(q^{-1}(x))\right).$$

A részsokaság érintőterei a $\mathbf{V}$-nek M dimenziós lineáris alterei.

Legyen $\mathtt{U}$ affin tér, $\dim \mathtt{U} = N - M$, és $S : \mathtt{V} \to \mathtt{U}$ olyan folytonosan differenciálható függvény hogy $\mathcal{D}S(x)$ szürjektív minden x-re az S értelmezési tartományából. Ha $u \in \mathrm{Ran}S$, akkor

$$\mathtt{H} := \{x \in \mathtt{V} \mid S(x) = u\}$$

M dimenziós részsokaság $\mathtt{V}$-ben, amelyre

$$\mathrm{T}_x(\mathrm{H}) = \mathrm{Ker}\mathcal{D}S(x).$$

Szavakban: az S szintfelületei részsokaságok.

Fordítva, megmutatható, hogy egy részsokaság minden pontjának van olyan környezete, amelyben szintfelületként állítható elő.