ÁLTALÁNOS RELATIVITÁSELMÉLET

1. Nemelfajult szimmetrikus bilineáris formák terei

Ebben a pontban **M** *végesdimenziós valós vektorteret és* I *egydimenziós valós vektorteret jelöl.*

Definíció - Legyen $N:=\dim\mathbf{M}$ és $n\in\mathbb{N}$. Ekkor $B_n(\mathbf{M},I)$ jelöli azon

$$\mathbf{g} : \mathbf{M}\times\mathbf{M} \to I\otimes I$$

bilineáris formák halmazát, melyekhez van olyan $\mathbf{d}\in I$, $\mathbf{d}\neq 0$ és olyan $(\mathbf{e}_k)_{1\leq k\leq N}$ bázis **M**-ben, hogy minden $1\leq j,k\leq N$ indexre:

$$\mathbf{g}(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k) = \begin{cases} -\mathbf{d}\otimes\mathbf{d} & ;\ \text{ha } j=k \text{ és } j\leq n \\ 0 & ;\ \text{ha } j\neq k \\ +\mathbf{d}\otimes\mathbf{d} & ;\ \text{ha } j=k \text{ és } j>n \end{cases} \qquad (*)$$

teljesül. (Az ilyen **M**-beli bázisokat **d**-*ortonormáltnak* nevezzük.) A $B_1(\mathbf{M},I)$ halmazt $\mathrm{Lor}(\mathbf{M},I)$ jelöli és ennek elemeit *Lorentz-formáknak* nevezzük. A $B_0(\mathbf{M},I)$ halmaz elemeit *euklidészi formáknak* nevezzük. Az összes $\mathbf{M}\times\mathbf{M}\to I\otimes I$ bilineáris formák vektorterét $B(\mathbf{M};I)$ jelöli.

Megjegyezzük, hogy a definíció nyilvánvaló következménye az, hogy a $B_n(\mathbf{M},I)$ minden eleme *nemelfajult* és *szimmetrikus* bilineáris forma. Ha $n>\dim\mathbf{M}$, akkor $B_n(\mathbf{M},I)=\emptyset$, tehát ha $\dim\mathbf{M}=0$, akkor $\mathrm{Lor}(\mathbf{M},I)=\emptyset$.

A bilineáris formák elemi algebrai elméletét ismertnek tekintjük (Alg. Ch. IX.). A következő lemmát csak azért fogalmazzuk mert hivatkozunk rá.

1.Lemma - Legyen $\mathbf{g}:\mathbf{M}\times\mathbf{M}\to I\otimes I$ szimmetrikus bilineáris forma és $\mathbf{M}'\subseteq\mathbf{M}$ olyan lineáris altér, hogy $\mathbf{g}|_{\mathbf{M}'\times\mathbf{M}'}\in B_{n'}(\mathbf{M}',I)$, ahol $n'\in\mathbb{N}$. Jelölje $\mathbf{M}''$ az $\mathbf{M}'$ altér **g**-ortogonális komplementerét. Tegyük fel, hogy $\mathbf{M}'\oplus\mathbf{M}''=\mathbf{M}$ és $n\in\mathbb{N}$, $n'\leq n\leq\dim\mathbf{M}$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

a) $g\big|_{M''\times M''} \in B_{n-n'}(M'',I)$;

b) $g\in B_n(M,I)$.

Bizonyítás - Az a)⇒b) triviális, ami azonnal látható, ha veszünk ortonormált bázisokat a $g\big|_{M'\times M'}$ és $g\big|_{M''\times M''}$ bilineáris formákhoz, majd a két bázist megfelelően "összefűzzük". A b)⇒a) pedig azért nyilvánvaló, mert nemelfajult szimmetrikus bilineáris formára nézve ortonormált rendszert ki lehet egészíteni ortonormált bázissá és mert a bilineáris forma szignatúrája egyértelműen meghatározott ("inerciatétel").∎

1.Állítás - Legyen $N:=\dim M$ és $n\in\mathbb{N}$. Legyen M' valós vektortér és $L:M\to M'$ *lineáris izomorfizmus*. Ekkor minden $B_n(M,I)\ni g$-re $L\cdot g:=g\circ(L^{-1}\times L^{-1})\in B_n(M',I)$ és a

$$B_n(M,I)\to B_{n'}(M',I) \quad ; \quad g\mapsto L\cdot g$$

leképezés bijekció. Továbbá:

$$GL(M)\times B_n(M,I)\ni(L,g)\mapsto L\cdot g\in B_n(M,I)$$

olyan leképezés, hogy a $(GL(M),B_n(M,I),\cdot)$ hármas *tranzitív* transzformációcsoport. Minden $B_n(M,I)\ni g$-re a g pont stabilitáscsoportja ebben a transzformációcsoportban megegyezik az

$$O(g) := \{\, L\in GL(M) \mid g\circ(L\times L)=g \,\}$$

g-ortogonális csoporttal.

Bizonyítás - Ha $L:M\to M'$ lineáris izomorfizmus, $g\in B_n(M,I)$ és $d\in I$ olyan nem nulla elem és $(e_k)_{1\le k\le N}$ olyan bázis M-ben, hogy (*) teljesül, akkor az $L\cdot g::M'\times M'\to I\otimes I$ bilineáris operátorhoz az $(Le_k)_{1\le k\le N}$ M'-beli bázis olyan, hogy minden $1\le j,k\le N$ indexre $(L\cdot g)(Le_j,Le_k)=g(e_j,e_k)$, tehát $L\cdot g\in B_n(M',I)$. Továbbá, könnyen látható, hogy a

$$B_n(M,I)\to B_{n'}(M',I) \quad ; \quad g\mapsto L\cdot g$$

$$B_{n'}(M',I)\to B_n(M,I) \quad ; \quad g'\mapsto L^{-1}\cdot g'$$

leképezések egymás inverzei.

Triviális az, hogy a $(GL(M),B_n(M,I),\cdot)$ hármas transzformációcsoport. Legyenek $\mathbf{g},\mathbf{g}'\in B_n(\mathbf{M},I)$ tetszőlegesek; olyan $L\in GL(\mathbf{M})$ operátort keresünk, amelyre $\mathbf{g}'=L\cdot\mathbf{g}$ teljesül. A definíció szerint a $\mathbf{g}$-hez (ill. $\mathbf{g}'$-höz) létezik olyan $\mathbf{d}\in I$, $\mathbf{d}\neq 0$ (ill. $\mathbf{d}'\in I$, $\mathbf{d}'\neq 0$) és olyan $(\mathbf{e}_k)_{1\le k\le N}$ (ill. $(\mathbf{e}'_k)_{1\le k\le N}$) bázis $\mathbf{M}$-ben, hogy $\mathbf{g}$-re (*) teljesül (ill. $\mathbf{g}'$-re (*) teljesül, ha $\mathbf{g}$ helyére $\mathbf{g}'$-t, $\mathbf{d}$ helyére $\mathbf{d}'$-t és $(\mathbf{e}_k)_{1\le k\le N}$ helyére $(\mathbf{e}'_k)_{1\le k\le N}$-t írunk). Létezik egyetlen olyan $L_0\in GL(\mathbf{M})$, hogy minden $1\le k\le N$ indexre $L_0\mathbf{e}_k=\mathbf{e}'_k$. Ekkor egyszerű számolással kapjuk, hogy az $L:=(\mathbf{d}/\mathbf{d}')L_0\in GL(\mathbf{M})$ operátorra $(L\cdot\mathbf{g})(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k)=\mathbf{g}'(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k)$ teljesül minden $j,k\in\{1,\dots,N\}$ indexre, tehát $L\cdot\mathbf{g}=\mathbf{g}'$; ezért a $(GL(\mathbf{M}),B_n(\mathbf{M},I),\cdot)$ transzformációcsoport tranzitív.∎

A továbbiakban $n\in\mathbb{N}$ esetén a $B_n(\mathbf{M},I)$ halmazon a fenti állításban bevezetett $GL(\mathbf{M})\times B_n(\mathbf{M},I)\to B_n(\mathbf{M},I)$ leképezés által meghatározott transzformációcsoport-struktúrát tekintjük adottnak.

<u>Definíció</u> - Legyenek $n\in\mathbb{N}$. A $B_n(\mathbf{M},I)$ halmaz *természetes topológiájának* nevezzük a $B_n(\mathbf{M},I)$ feletti $GL(\mathbf{M})$-topológiát. (Ez tehát az az egyetlen topológia $B_n(\mathbf{M},I)$ felett, amelyre teljesül az, hogy minden $B_n(\mathbf{M},I)\ni\mathbf{g}$-re a $\mathbf{g}$-hez tartozó $GL(\mathbf{M})\to B_n(\mathbf{M},I)$; $L\mapsto L\cdot\mathbf{g}$ orbitális függvény kanonikus faktorizáltja *homeomorfizmus* a $GL(\mathbf{M})/O(\mathbf{g})$ topologikus faktortér és az ezzel a topológiával ellátott $B_n(\mathbf{M},I)$ topologikus tér között). A továbbiakban $B_n(\mathbf{M},I)$-t a természetes topológiájával ellátva topologikus térnek tekintjük.

Tehát a $(GL(\mathbf{M}),B_n(\mathbf{M},I),\cdot)$ hármas tranzitív topologikus transzformációcsoport.

<u>2.Állítás</u> - Ha $n\in\mathbb{N}$, akkor a $B_n(\mathbf{M},I)$ topologikus tér megszámlálható bázisú lokálisan kompakt tér; speciálisan σ-kompakt is és teljesen metrizálható.

<u>Bizonyítás</u> - Elég azt megmutatni, hogy rögzített $\mathbf{g}\in B_n(\mathbf{M},I)$ esetén a $GL(\mathbf{M})/O(\mathbf{g})$ topologikus faktortér ilyen. Mivel $O(\mathbf{g})$ zárt részcsoport a $GL(\mathbf{M})$ topologikus csoportban és mert a $GL(\mathbf{M})$ topologikus csoport lokálisan kompakt és megszámlálható bázisú, ezért elég azt igazolni, hogy *minden* G megszámlálható bázisú lokálisan kompakt csoportra és *minden* $H\subseteq G$ zárt részcsoportra a

G/H topologikus homogén tér megszámlálható bázisú és lokálisan kompakt. Mivel egy topogikus csoport részcsoportja által meghatározott (baloldali) elvivalenciareláció *nyílt*, ezért elég volna azt tudni, hogy *minden* X megszámlálható bázisú lokálisan kompakt térre és *minden* olyan X-beli R nyílt ekvivalenciarelációra, amelyre a X/R topologikus faktortér szeparált teljesül az, hogy az X/R faktortér megszámlálható bázisú és lokálisan kompakt. Ez viszont triviálisan igaz. (Ha X topologikus tér és R nyílt ekvivalenciareláció X-ben és $\pi:X\to X/R$ a kanonikus szürjekció, akkor az X minden $\mathfrak{B}$ topologikus bázisára a $\{\pi<B>|B\in\mathfrak{B}\}$ halmaz topologikus bázisa az X/R topologikus faktortérnek.)∎

<u>3.Állítás</u> - Legyenek $n\in\mathbb{N}$. Minden $B_n(\mathbf{M},I)\ni\mathbf{g}$-hez létezik olyan $B_n(\mathbf{M},I)\to GL(\mathbf{M})$ *Borel-függvény*, amely a $GL(\mathbf{M})\to B_n(\mathbf{M},I)$; $L\mapsto L\cdot\mathbf{g}$ orbitális függvénynek jobbinverze.

<u>Bizonyítás</u> - Elég arra a (lényegesen nemtriviális) tényre hivatkozni, hogy ha X σ-kompakt lengyel-tér és Y metrizálható topologikus tér, akkor minden $X\to Y$ folytonos szürjekciónak létezik olyan jobbinverze, amely Borel-függvény.

Legyen ugyanis $f:X\to Y$ tetszőleges folytonos szürjekció és jelölje R az f által meghatározott ekvivalenciarelációt X-ben. Mivel Y T_1-tér és f folytonos, ezért az R szerinti ekvivalenciaosztályok (vagyis az $f^{-1}\{y\}$ alakú halmazok, ahol $y\in Y$) zártak. Ha $F\subseteq X$ zárt halmaz, akkor az F halmaz R szerinti telítése (vagyis $f^{-1}<f<F>>$) Borel-halmaz. Valóban, legyen $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az X kompakt részhalmazainak olyan sorozata, hogy $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n=X$. Ekkor $f^{-1}<f<F>>=$ $=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}<f<F\cap K_n>>$ és minden $\mathbb{N}\ni n$-re $f<F\cap K_n>\subseteq Y$ kompakt, tehát zárt halmaz, tehát $R(F)=f^{-1}<f<F>>$ előáll megszámlálható sok zárt halmaz uniójaként, tehát Borel-halmaz (de nem feltétlenül zárt). Ezért a Top.Gén. Ch. IX, §6, n°8, 4.Tétel szerint létezik R-nek Borel-szelektora, vagyis olyan $E\subseteq X$ Borel halmaz, amely minden R szerinti ekvivalenciaosztályt éppen egy pontban metsz. Legyen $s:Y\to X$ az a függvény, amely minden $Y\ni y$-hoz hozzárendeli az $E\cap f^{-1}\{y\}$ halmaz egyetlen elemét. Ekkor s jobbinverze f-nek és az s Borel-függvény, hiszen ha $B\subseteq X$ Borel-halmaz, akkor $B\cap E=B\cap\mathrm{Im}\,s$

Borel-halmaz X-ben és $s^{-1}\langle B\rangle = f\langle B\cap E\rangle$ és f a $B\cap E$ halmazon *injektív*, tehát a Top.Gén. Ch. IX, §6, n°7, 3.Tétel és annak Következménye szerint a $B\cap E$ halmaz f által létesített képe Borel-halmaz Y-ban.■

Azonban *folytonos* jobbinverz létezése erősen kétséges. Nyilvánvaló, hogy a következő állítás is igaz: ha X lengyel-tér és Y metrizálható topologikus tér, akkor minden olyan $f:X\to Y$ folytonos szürjekciónak van Borel-féle jobbinverze, amelyre teljesül az, hogy minden $F\subseteq X$ zárt halmazra $f^{-1}\langle f\langle F\rangle\rangle$ Borel-halmaz X-ben. A fenti bizonyítás szerint ez a feltétel *minden* $X\to Y$ folytonos szürjekcióra teljesül, ha X σ-kompakt.

2. A Lorentz-formák tere

Ebben a pontban $(\mathbf{E},\mathbf{I},[\cdot|\cdot])$ *legalább egydimenziós valós euklidészi teret jelöl. A* $[\cdot|\cdot]:\mathbf{E}\times\mathbf{E}\to\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}$ *bilineáris forma természetes módon generálja a*

$$(\cdot|\cdot]:\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\times\mathbf{E}\to\mathbf{I} \quad ; \quad [\cdot|\cdot):\mathbf{E}\times\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\to\mathbf{I} \quad ; \quad (\cdot|\cdot):\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\times\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\to\mathbb{R}$$

bilineáris formákat. Minden $\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\ni\mathbf{v}$*-re a* $|\mathbf{v}|:=\sqrt{(\mathbf{v}|\mathbf{v})}$ *jelölést használjuk. Ha* $\mathbf{H}\subseteq\mathbf{E}$ *lineáris altér, akkor* $[\cdot|\cdot]_{\mathbf{H}}$ *jelöli a* $[\cdot|\cdot]$ *bilineáris forma* $\mathbf{H}\times\mathbf{H}$*-ra vett leszűkítését és* $\mathbf{H}^{\perp}$ *jelöli a* $\mathbf{H}$ *ortogonális komplementerért a* $[\cdot|\cdot]$*-ra vonatkozóan és* $\mathbf{P}_{\mathbf{H}}$ *a* $\mathbf{H}$*-ra vetítő* $[\cdot|\cdot]$*-ortogonális projektor. Ha* $L\in\mathrm{End}(\mathbf{E})$*, akkor* L^{*} *jelöli az* L *adjungáltját a* $[\cdot|\cdot]$*-ra vonatkozóan.*

Minden $\mathbf{v},\mathbf{w}\in\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}$ *vektorra a* $\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}$ *(absztrakt) tenzorszorzatot azonosítjuk (vagy realizáljuk) az* $\mathbf{E}\to\mathbf{E};\ \mathbf{q}\mapsto\mathbf{v}\otimes(\mathbf{w}|\mathbf{q}]$ *lineáris operátorral. Ez a realizáció lényegesen függ a* $[\cdot|\cdot]$ *euklidészi formától.*

Minden $L\in\mathrm{End}(\mathbf{I}\times\mathbf{E})$ *operátort azonosítunk azzal a*

$$\begin{pmatrix} \tau & \mathbf{w} \\ \mathbf{v} & R \end{pmatrix}$$

mátrixszal, amelyre

$$(\tau, \mathbf{v}, \mathbf{w}, R) \in \mathbb{R} \times \left(\frac{\mathbf{E}}{\mathrm{I}}\right) \times \left(\frac{\mathbf{E}}{\mathrm{I}}\right) \times \mathrm{End}(\mathbf{E})$$

és minden $\mathrm{I}\times\mathbf{E}\ni(\mathbf{t},\mathbf{q})$*-ra:*

$$L(\mathbf{t},\mathbf{q}) = (\tau\mathbf{t}+(\mathbf{w}|\mathbf{q}], \mathbf{v}\otimes\mathbf{t}+R\mathbf{q})$$

teljesül. Ezt a kapcsolatot az L *operátor és az adott mátrix között az*

$$L \equiv \begin{pmatrix} \tau & \mathbf{w} \\ \mathbf{v} & R \end{pmatrix}$$

szimbólummal jelöljük. Ez az azonosítás is lényegesen függ a $[\cdot|\cdot]$ *euklidészi formától.*

Könnyen belátható, hogy ha $L, L' \in \mathrm{End}(\mathrm{I}\times\mathbf{E})$ *és*

$$L \equiv \begin{pmatrix} \tau & \mathbf{w} \\ \mathbf{v} & R \end{pmatrix} \quad , \quad L' \equiv \begin{pmatrix} \tau' & \mathbf{w}' \\ \mathbf{v}' & R' \end{pmatrix}$$

akkor

$$L\circ L' \equiv \begin{pmatrix} \tau\tau'+(\mathbf{w}|\mathbf{v}') & \tau\mathbf{w}'+R'^{*}_{\mathrm{I}}\mathbf{w} \\ \tau'\mathbf{v}+R_{\mathrm{I}}\mathbf{v}' & R\circ R'+\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}' \end{pmatrix}.$$

A $[\cdot|\cdot]$*-ra nézve szimmetrikus* $\mathbf{E}\to\mathbf{E}$ *lineáris operátorok vektorterét* $\mathrm{Sym}(\mathbf{E},[\cdot|\cdot])$ *jelöli.*

Az $\mathrm{I}\times\mathbf{E}$ alakú szorzattér feletti legáltalánosabb alakú Lorentz-formákat keressük, tehát a $\mathrm{Lor}(\mathrm{I}\times\mathbf{E},\mathrm{I})$ halmazt akarjuk jellemezni. Ehhez szükségünk lesz a $\mathrm{GL}(\mathrm{I}\times\mathbf{E})$ halmaz jellemzésére.

<u>2.Lemma</u> - Legyen $L \equiv \begin{pmatrix} \tau & \mathbf{w} \\ \mathbf{v} & R \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\mathrm{I}\times\mathbf{E})$. Ekkor $L\in\mathrm{GL}(\mathrm{I}\times\mathbf{E})$ ekvivalens azzal, hogy $\tau\neq0$ és $\tau R-\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}\in\mathrm{GL}(\mathbf{E})$, *vagy* $\tau=0$ és $\mathbf{v}\neq0$ és $\mathbf{w}\neq0$ és a $(\mathbf{P}_{\mathbf{v}^\perp}\circ R)\big|_{\mathbf{w}^\perp}:\mathbf{w}^\perp\to\mathbf{v}^\perp$ operátor bijekció.

<u>Bizonyítás</u> - Tegyük fel először, hogy L szürjektív.

1) Legyen $\tau\neq0$. Ekkor $\mathbf{q}'\in\mathbf{E}$, $\mathbf{t}'=0$ esetén van olyan $(\mathbf{t},\mathbf{q})\in\mathrm{I}\times\mathbf{E}$ elem, hogy

$$0 = \tau\mathbf{t} + (\mathbf{w}|\mathbf{q}],$$

$$q' = \mathbf{v}\otimes\mathbf{t} + Rq.$$

Ekkor $\mathbf{t}=-\tau^{-1}(\mathbf{w}|\mathbf{q}]$ és $\mathbf{q}'=\tau^{-1}(\tau R-\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})\mathbf{q}$, ami azt jelenti, hogy a $\tau R-\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}:\mathbf{E}\to\mathbf{E}$ operátor szürjektív, tehát $\tau R-\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}\in GL(\mathbf{E})$.

2) Legyen $\tau=0$. Ekkor természetesen $\mathbf{v}\neq 0$ és $\mathbf{w}\neq 0$, különben L nem volna injektív. Ha $\mathbf{q}'\in\mathbf{v}^{\perp}$, akkor a $(0,\mathbf{q}')$ párhoz van olyan $(\mathbf{t},\mathbf{q})\in$ $\in\mathbf{I}\times\mathbf{E}$, hogy

$$0 = (\mathbf{w}|\mathbf{q}],$$
$$\mathbf{q}' = \mathbf{v}\otimes\mathbf{t} + R\mathbf{q}.$$

Ekkor a második egyenlet és $\mathrm{Ker}P_{\mathbf{v}^{\perp}}=\mathbf{v}\otimes\mathbf{I}$ miatt $\mathbf{q}'=P_{\mathbf{v}^{\perp}}\mathbf{q}'=P_{\mathbf{v}^{\perp}}R\mathbf{q}$ és az első egyenlet szerint $\mathbf{q}\in\mathbf{w}^{\perp}$, tehát az $S:=(P_{\mathbf{v}^{\perp}}\circ R)\big|_{\mathbf{w}^{\perp}}:\mathbf{w}^{\perp}\to\mathbf{v}^{\perp}$ operátor szürjektív, tehát bijekció a $\mathbf{w}^{\perp}$ és $\mathbf{v}^{\perp}$ hipersíkok között.

Ezzel megmutattuk, hogy a megfogalmazott feltétel szükséges ahhoz, hogy L szürjektív (tehát bijektív) legyen.

Megfordítva; tegyük fel, hogy a $(\tau,\mathbf{v},\mathbf{w},R)$ négyesre teljesül a feltétel. Azt kell igazolnunk, hogy minden $\mathbf{I}\times\mathbf{E}\ni(\mathbf{t}',\mathbf{q}')$-höz létezik olyan $(\mathbf{t},\mathbf{q})\in\mathbf{I}\times\mathbf{E}$, hogy

$$\mathbf{t}' = \tau\mathbf{t} + (\mathbf{w}|\mathbf{q}],$$
$$\mathbf{q}' = \mathbf{v}\otimes\mathbf{t} + R\mathbf{q}.$$

Legyenek $(\mathbf{t}',\mathbf{q}'),(\mathbf{t},\mathbf{q})\in\mathbf{I}\times\mathbf{E}$ olyanok, hogy teljesül rájuk ez az egyenletrendszer.

Ha $\tau\neq 0$, akkor az első egyenletet $\mathbf{v}$-vel tenzorszorozva és a második egyenletet τ-val szorozva és a második egyenletből kivonva az elsőt kapjuk, hogy $\tau\mathbf{q}'-\mathbf{v}\otimes\mathbf{t}' = (\tau R-\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})\mathbf{q}$, tehát

$$\mathbf{q} = (\tau R-\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})^{-1}(\tau\mathbf{q}'-\mathbf{v}\otimes\mathbf{t}').$$

Az első egyenletből $\mathbf{t}$-t kifejezve és oda $\mathbf{q}$-t behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\mathbf{t} = \tau^{-1}(1+(\mathbf{w}|(\tau R-\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})_{\mathbf{I}}^{-1}\mathbf{v}))\mathbf{t}'-(\mathbf{w}|(\tau R-\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})^{-1}\mathbf{q}'].$$

Ebből látható, hogy $\tau\neq 0$ és $\tau R-\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}\in GL(\mathbf{E})$ esetén $L\in GL(\mathbf{I}\times\mathbf{E})$ és

$$L^{-1} \equiv \begin{pmatrix} \tau^{-1}(1+(\mathbf{w}|(\tau R-\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})_{\mathbf{I}}^{-1}\mathbf{v})) & -(\tau R^{*}-\mathbf{w}\otimes\mathbf{v})_{\mathbf{I}}^{-1}\mathbf{w} \\ -(\tau R-\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})_{\mathbf{I}}^{-1}\mathbf{v} & \tau(\tau R-\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})^{-1} \end{pmatrix}$$

ahol R^* az R operátor $[\cdot|\cdot]$ szerinti adjungál~~ást~~tja jelenti. *

Ha $\tau=0$, akkor a második egyenletet v-vel skalárisan szorozva és abból t-t kifejezve kapjuk, hogy

$$\mathbf{t} = |\mathbf{v}|^{-2}(\mathbf{v}|\mathbf{q}'-R\mathbf{q}]. \qquad (1)$$

Ezt visszahelyettesítve a második egyenletbe majd átrendezve:

$$P_{\mathbf{v}^\perp}\mathbf{q}' := \mathbf{q}'-|\mathbf{v}|^{-2}\mathbf{v}\otimes(\mathbf{v}|\mathbf{q}'] = R\mathbf{q}-|\mathbf{v}|^{-2}\mathbf{v}\otimes(\mathbf{v}|R\mathbf{q}] =: P_{\mathbf{v}^\perp}R\mathbf{q}$$

adódik. Ide behelyettesítjük a q-nak w-vel párhuzamos és arra merőleges vetületének az összegét és az első egyenlet alapján a $(\mathbf{w}|\mathbf{q}]$ helyére $\mathbf{t}'$-t írva és átrendezve:

$$P_{\mathbf{v}^\perp}\mathbf{q}'-|\mathbf{w}|^{-2}(P_{\mathbf{v}^\perp}\circ R)_I(\mathbf{w})\otimes\mathbf{t}' = (P_{\mathbf{v}^\perp}\circ R)(P_{\mathbf{w}^\perp}\mathbf{q})$$

adódik. Itt a bal oldalon $\mathbf{v}^\perp$ egyik eleme áll és a b) feltevés szerint az $S:=(P_{\mathbf{v}^\perp}\circ R)\big|_{\mathbf{w}^\perp}:\mathbf{w}^\perp\to\mathbf{v}^\perp$ operátor bijekció, tehát

$$S^{-1}(P_{\mathbf{v}^\perp}\mathbf{q}'-|\mathbf{w}|^{-2}(P_{\mathbf{v}^\perp}\circ R)_I(\mathbf{w})\otimes\mathbf{t}') = P_{\mathbf{w}^\perp}\mathbf{q}.$$

Ismét felhasználva azt, hogy $(\mathbf{w}|\mathbf{q}]=\mathbf{t}'$, ebből kapjuk, hogy:

$$\mathbf{q} = |\mathbf{w}|^{-2}\mathbf{w}\otimes\mathbf{t}' + S^{-1}(P_{\mathbf{v}^\perp}\mathbf{q}'-|\mathbf{w}|^{-2}(P_{\mathbf{v}^\perp}\circ R)_I(\mathbf{w})\otimes\mathbf{t}').$$

Ebből és az (1)-ből látszik, hogy a $(\mathbf{t},\mathbf{q})$ pár egyértelműen kifejezhető az adott egyenletrendszerből. Végül; adott $(\mathbf{t}',\mathbf{q}')$ esetén a $(\mathbf{t},\mathbf{q})$ párt a fenti formulák szerint *értelmezve*; egyszerű számolás mutatja, hogy az egyenletrendszer valóban teljesül. Ez azt jelenti, hogy L szürjektív, tehát $L\in GL(I\times\mathbf{E})$ és

$$L^{-1}=\begin{pmatrix} -|\mathbf{v}|^{-2}|\mathbf{w}|^{-2}(R_I^*\mathbf{v}|\mathbf{w}-(S^{-1}\circ P_{\mathbf{v}^\perp}\circ R)_I\mathbf{w}) & |\mathbf{v}|^{-2}(\mathbf{v}-(R\circ S^{-1}\circ P_{\mathbf{v}^\perp})_I^*\mathbf{v}) \\ |\mathbf{w}|^{-2}(\mathbf{w}-(S^{-1}\circ P_{\mathbf{v}^\perp}\circ R)_I(\mathbf{w})) & S^{-1}\circ P_{\mathbf{v}^\perp} \end{pmatrix}$$

ahol $S:=(P_{\mathbf{v}^\perp}\circ R)\big|_{\mathbf{w}^\perp}$. ∎

A következő állítás teljes jellemzést ad a $Lor(I\times\mathbf{E},I)$ elemeire.

<u>4.Állítás</u>- Egy $\mathbf{g}:(I\times\mathbf{E})\times(I\times\mathbf{E})\to I\otimes I$ bilineáris forma pontosan akkor Lorentz-forma, ha egyértelműen létezik olyan

$$(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathrm{I}}\right)\times\mathrm{End}(\mathbf{E})$$

hármas, hogy minden $\mathrm{I}\times\mathbf{E}\ni(\mathbf{t},\mathbf{q}),(\mathbf{t}',\mathbf{q}')$-re:

$$\mathbf{g}((\mathbf{t},\mathbf{q}),(\mathbf{t}',\mathbf{q}')) = -\alpha\cdot(\mathbf{t}\otimes\mathbf{t}')+\mathbf{t}\otimes(\beta|\mathbf{q}']+\mathbf{t}'\otimes(\beta|\mathbf{q}]+[\gamma(\mathbf{q})|\mathbf{q}']$$

teljesül és van olyan $(\tau,\mathbf{v},\mathbf{w},R)\in\mathbb{R}\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathrm{I}}\right)\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathrm{I}}\right)\times\mathrm{End}(\mathbf{E})$ négyes, hogy

$$\alpha = \tau^2-|\mathbf{v}|^2 \in \mathbb{R} ;$$

$$\beta = \tau\mathbf{w}-R^*_{\mathrm{I}}(\mathbf{v}) \in \frac{\mathbf{E}}{\mathrm{I}} ;$$

$$\gamma = R^*R-\mathbf{w}\otimes\mathbf{w} \in \mathrm{End}(\mathbf{E})$$

és $L \equiv \begin{pmatrix}\tau & \mathbf{w}\\ \mathbf{v} & R\end{pmatrix} \in GL(\mathrm{I}\times\mathbf{E})$, azaz

a) $\tau\neq0$ esetén $\tau R-\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}\in GL(\mathbf{E})$;

b) $\tau=0$ esetén $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ és $\mathbf{w}\neq\mathbf{0}$ és a $(P_{\mathbf{v}^\perp}\circ R)\big|_{\mathbf{w}^\perp}:\mathbf{w}^\perp\to\mathbf{v}^\perp$ operátor injektív.

<u>Bizonyítás</u> - Legyen $\mathbf{g}_{[\cdot|\cdot]}:(\mathrm{I}\times\mathbf{E})\times(\mathrm{I}\times\mathbf{E})\to\mathrm{I}\otimes\mathrm{I}$ az a bilineáris forma, amelyre $(\mathbf{t},\mathbf{q}),(\mathbf{t}',\mathbf{q}')\in\mathrm{I}\times\mathbf{E}$ esetén

$$\mathbf{g}_{[\cdot|\cdot]}((\mathbf{t},\mathbf{q}),(\mathbf{t}',\mathbf{q}')) := -\mathbf{t}\otimes\mathbf{t}'+[\mathbf{q}|\mathbf{q}'].$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{g}_{[\cdot|\cdot]}\in\mathrm{Lor}(\mathrm{I}\times\mathbf{E},\mathrm{I})$. Ezért a $\mathbf{g}:(\mathrm{I}\times\mathbf{E})\times(\mathrm{I}\times\mathbf{E})\to\mathrm{I}\otimes\mathrm{I}$ bilineáris forma pontosan akkor Lorentz-forma, ha létezik olyan $L\in GL(\mathrm{I}\times\mathbf{E})$, hogy $L\cdot\mathbf{g}=\mathbf{g}_{[\cdot|\cdot]}$, vagyis ha $\mathbf{g}_{[\cdot|\cdot]}\circ(L\times L)=\mathbf{g}$. Ez ekvivalens olyan $(\tau,\mathbf{v},\mathbf{w},R)\in\mathbb{R}\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathrm{I}}\right)\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathrm{I}}\right)\times\mathrm{End}(\mathbf{E})$ négyes létezésével, hogy

$$L \equiv \begin{pmatrix}\tau & \mathbf{w}\\ \mathbf{v} & R\end{pmatrix}$$

és $L\in GL(\mathrm{I}\times\mathbf{E})$, vagyis a 2.Lemma szerint a) és b) teljesül.

Ha a $(\tau,\mathbf{v},\mathbf{w},R)\in\mathbb{R}\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathrm{I}}\right)\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathrm{I}}\right)\times\mathrm{End}(\mathbf{E})$ négyes ilyen, akkor minden $(\mathbf{t},\mathbf{q}),(\mathbf{t}',\mathbf{q}')\in\mathrm{I}\times\mathbf{E}$ elemre:

$$g((t,q),(t',q')) = g_{[\cdot|\cdot]}\left(\begin{pmatrix}\tau & w\\ v & R\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ q\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\tau & w\\ v & R\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t'\\ q'\end{pmatrix}\right) =$$

$$= g_{[\cdot|\cdot]}\left(\begin{pmatrix}\tau t+(w|q]\\ v\otimes t+Rq\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\tau t'+(w|q']\\ v\otimes t'+Rq'\end{pmatrix}\right) =$$

$$= -(\tau t+(w|q])\otimes(\tau t'+(w|q'])+[v\otimes t+Rq|v\otimes t'+Rq'] =$$

$$= -\alpha\cdot(t\otimes t')+t\otimes(\beta|q']+t'\otimes(\beta|q]+[\gamma(q)|q']$$

ahol az $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}\times\left(\frac{E}{I}\right)\times\mathrm{End}(E)$ hármas éppen az, amire az állításban felírt egyenlőség teljesül.

Azt kellene még belátni, hogy ez az $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}\times\left(\frac{E}{I}\right)\times\mathrm{End}(E)$ hármas csak g-től függ (és nem közvetlenül a $(\tau,v,w,R)\in\mathbb{R}\times\left(\frac{E}{I}\right)\times\left(\frac{E}{I}\right)\times\mathrm{End}(E)$ négyestől). Ez viszont nyilvánvalóvá válik, ha felírjuk g értékeit speciális -alkalmasan megválasztott- $(t,q),(t',q')\in I\times E$ elemekre.

- Ha $t\in I$ és $t\neq 0$, akkor $\alpha=-\dfrac{g((t,0),(t,0))}{t\otimes t}$.
- Ha $t'\in I$, $t'\neq 0$ és akkor minden $E\ni q$-ra $(\beta|q]=\dfrac{g((0,q),(t',0))}{t'}$.
- Minden $E\ni q,q'$-re $[\gamma(q)|q']=g((0,q),(0,q'))$.

Ezért az $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}\times\left(\frac{E}{I}\right)\times\mathrm{End}(E)$ hármast egyértelműen meghatározza a g bilineáris forma.∎

A 4. Állítás alapján célszerű bevezetni a következő definíciót.

<u>Definíció</u> - Legyen $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}\times\left(\frac{E}{I}\right)\times\mathrm{End}(E)$ *tetszőleges*. Ekkor $g_{\alpha,\beta,\gamma}:(I\times E)\times(I\times E)\to I\otimes I$ jelöli azt a bilineáris formát, amelyre $(t,q),(t',q')\in I\times E$ esetén

$$g_{\alpha,\beta,\gamma}((t,q),(t',q')):=-\alpha\cdot(t\otimes t')+t\otimes(\beta|q']+t'\otimes(\beta|q]+[\gamma(q)|q'].$$

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy $g_{[\cdot|\cdot]}=g_{1,0,\mathrm{id}_E}$.

A $g_{\alpha,\beta,\gamma}$ alakú bilineáris formák "transzformációs szabályát" írja le a következő állítás:

<u>5.Állítás</u> - Legyenek

$$(\alpha',\beta',\gamma')\in\mathbb{R}\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\right)\times\mathrm{End}(\mathbf{E}) \quad ; \quad (\tau,\mathbf{v},\mathbf{w},R)\in\mathbb{R}\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\right)\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\right)\times\mathrm{End}(\mathbf{E})$$

tetszőlegesek és $L \equiv \begin{pmatrix}\tau & \mathbf{w}\\ \mathbf{v} & R\end{pmatrix}\in\mathrm{End}(\mathbf{E})$. Ekkor:

$$g_{\alpha',\beta',\gamma'}\circ(L\times L) = g_{\alpha,\beta,\gamma}$$

ahol $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\right)\times\mathrm{End}(\mathbf{E})$ a következő hármas:

$$\alpha=\tau^2\alpha'-2\tau(\beta'\,|\,\mathbf{v})-(\gamma'_{\mathbf{I}}(\mathbf{v})\,|\,\mathbf{v})$$
$$\beta=\tau R^*_{\mathbf{I}}(\beta')+(-\tau\alpha'+(\beta'\,|\,\mathbf{v}))\mathbf{w}+(\gamma'\circ R)^*_{\mathbf{I}}(\mathbf{v})$$
$$\gamma=R^*\circ\gamma'\circ R-\alpha'(\mathbf{w}\otimes\mathbf{w})+\mathbf{w}\otimes R^*_{\mathbf{I}}(\beta').$$

<u>Bizonyítás</u> - ∎

A 4. Állítás szerint a két alábbi diszjunkt $\mathbb{R}\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\right)\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\right)\times\mathrm{End}(\mathbf{E})$-beli részhalmaz uniója *ráképezhető* $\mathrm{Lor}(\mathbf{I}\times\mathbf{E},\mathbf{I})$-re:

$$\{(\tau,\mathbf{v},\mathbf{w},R)\in\mathbb{R}\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\right)\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\right)\times\mathrm{End}(\mathbf{E})\,|\,(\tau\neq0)\&(\tau R-\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}\in GL(\mathbf{E}))\}$$

$$\{(0,\mathbf{v},\mathbf{w},R)\in\mathbb{R}\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\right)\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\right)\times\mathrm{End}(\mathbf{E})\,|\,(\mathbf{v}\neq\mathbf{0})\&(\mathbf{w}\neq\mathbf{0})\&((\mathbf{P}_{\mathbf{v}^\perp}\circ R)\big|_{\mathbf{w}^\perp}\ \text{bijekció})\}.$$

Ez a szürjekció *nem injektív*. A $(\tau,\mathbf{v},\mathbf{w},R)$ és $(\tau',\mathbf{v}',\mathbf{w}',R')$ négyesek pontosan akkor határozzák meg ugyanazt a Lorentz-formát, ha létezik olyan $L\in O(g_{[\cdot|\cdot]})$ $g_{[\cdot|\cdot]}$-ortogonális transzformáció, hogy:

$$L\circ\begin{pmatrix}\tau & \mathbf{w}\\ \mathbf{v} & R\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\tau' & \mathbf{w}'\\ \mathbf{v}' & R'\end{pmatrix}$$

teljesül. Viszonylag hosszú számolás után megkaphatjuk a legáltalánosabb formájú $g_{[\cdot|\cdot]}$-ortogonális transzformációt. Az eredmény az, hogy egy $L\in GL(\mathbf{I}\times\mathbf{E})$ leképezés pontosan akkor $g_{[\cdot|\cdot]}$-ortogonális, ha van olyan $\mathbf{u}\in\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}$ és $L\in O([\cdot|\cdot])$ és $\varepsilon\in\{-1,1\}$, hogy

$$L \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon\sqrt{1+|\mathbf{u}|^2} & \varepsilon L_{\mathbf{I}}^{-1}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u} & L+\dfrac{\mathbf{u}\otimes L_{\mathbf{I}}^{-1}(\mathbf{u})}{1+\sqrt{1+|\mathbf{u}|^2}} \end{pmatrix}.$$

Ebből következik, hogy a $(\tau,\mathbf{v},\mathbf{w},R)$ és $(\tau',\mathbf{v}',\mathbf{w}',R')$ négyesek pontosan akkor határozzák meg ugyanazt a Lorentz-formát, ha

$$\tau' = \varepsilon\tau\sqrt{1+|\mathbf{u}|^2}+\varepsilon(\mathbf{w}|L_{\mathbf{I}}(\mathbf{v})) \;;$$

$$\mathbf{w}' = \varepsilon\mathbf{w}\sqrt{1+|\mathbf{u}|^2}+\varepsilon(L\circ R)_{\mathbf{I}}^{*}(\mathbf{u}) \;;$$

$$\mathbf{v}' = \tau\mathbf{u}+L_{\mathbf{I}}(\mathbf{v})+\frac{(\mathbf{u}|L_{\mathbf{I}}(\mathbf{v}))}{1+\sqrt{1+|\mathbf{u}|^2}}\,\mathbf{u} \;;$$

$$R' = L\circ R+\frac{\mathbf{u}\otimes(L\circ R)_{\mathbf{I}}^{*}(\mathbf{u})}{1+\sqrt{1+|\mathbf{u}|^2}}+\mathbf{u}\otimes\mathbf{w} \;.$$

Az 4. Állítás szerint $\mathrm{Lor}(\mathbf{I}\times\mathbf{E},\mathbf{I})$ *azonosítható* az $\mathbb{R}\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\right)\times\mathrm{End}(\mathbf{E})$ valós vektortér egy részhalmazával. Az azonosítás az $\mathbf{E}$-n választott $[\cdot|\cdot]$ euklidészi formától lényegesen függ. Ezt azért fontos hangsúlyozni, mert sem $\mathrm{Lor}(\mathbf{I}\times\mathbf{E},\mathbf{I})$, sem $\mathbb{R}\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\right)\times\mathrm{End}(\mathbf{E})$ nem függ semmiféle $\mathbf{E}$-n vagy $\mathbf{I}$-n adott egyéb (tehát nem vektortér) struktúrától.

Nyilvánvaló, hogy *tetszőleges* $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\right)\times\mathrm{End}(\mathbf{E})$ hármasra a $\mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma}:(\mathbf{I}\times\mathbf{E})\times(\mathbf{I}\times\mathbf{E})\to\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}$ bilineáris operátor lehet *elfajult* is és *nem szimmetrikus* is.

<u>3.Lemma</u> - Legyen $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\right)\times\mathrm{End}(\mathbf{E})$.

a) $\mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma}$ pontosan akkor nemelfajult, ha $L\equiv\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \gamma\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}(\mathbf{I}\times\mathbf{E})$.

b) $\mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma}$ pontosan akkor szimmetrikus, ha a $\gamma\in\mathrm{End}(\mathbf{E})$ operátor szimmetrikus a $[\cdot|\cdot]$-ra nézve.

Bizonyítás - Azt kell észrevenni, hogy $\mathbf{g}_{[\cdot|\cdot]}\circ(L\times id_{\mathbf{I}\times\mathbf{E}}) = \mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma}$ és $\mathbf{g}_{[\cdot|\cdot]}$ nemelfajult és szimmetrikus.■

Ebből és a 2.Lemmából kapjuk, hogy ha $\mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma}$ Lorentz-forma, akkor:

- a γ operátor szimmetrikus a $[\cdot|\cdot]$-ra nézve;
- $\alpha\neq 0$ esetén $\alpha\gamma+\beta\otimes\beta\in GL(\mathbf{E})$;
- $\alpha=0$ esetén $\beta\neq 0$ és $(\mathbf{P}_{\beta^{\perp}}\circ\gamma)\big|_{\beta^{\perp}}\in GL(\beta^{\perp})$.

Természetesen vetődik fel az a kérdés, hogy milyen kapcsolatok vannak egy $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\right)\times End(\mathbf{E})$ hármas komponensei között, ha $\mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma}\in Lor(\mathbf{I}\times\mathbf{E},\mathbf{I})$ teljesül? Ilyen természetű jellemzést ad a következő tétel, amely egyben a Lorentz-formák egyfajta osztályozását is szolgáltatja.

1.Tétel - Egy $\mathbf{g}:(\mathbf{I}\times\mathbf{E})\times(\mathbf{I}\times\mathbf{E})\to\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}$ bilineáris forma pontosan akkor Lorentz-forma, ha egyértelműen létezik olyan

$$(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\right)\times Sym(\mathbf{E},[\cdot|\cdot])$$

hármas, hogy $\mathbf{g}=\mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma}$ és

(I) Ha $\alpha>0$, akkor az $\alpha\gamma+\beta\otimes\beta\in End(\mathbf{E})$ operátor *pozitív definit* a $[\cdot|\cdot]$-ra nézve.

(II) Ha $\alpha=0$, akkor $\beta\neq 0$ és a $(\mathbf{P}_{\beta^{\perp}}\circ\gamma)\big|_{\beta^{\perp}}\in End(\beta^{\perp})$ operátor *pozitív definit* a $[\cdot|\cdot]_{\beta^{\perp}}$-ra nézve.

(III) Ha $\alpha<0$ és $\beta=0$, akkor $[\cdot|\cdot]\circ(\gamma\times id_{\mathbf{E}})\in Lor(\mathbf{E},\mathbf{I})$.

(IV) Ha $\alpha<0$ és $\beta\neq 0$, akkor $\mathbf{g}_{\alpha',\beta',\gamma'}\in Lor(\mathbf{I}\times\beta^{\perp},\mathbf{I})$, ahol

$$\alpha' := \frac{|\beta|^2}{|\alpha|} - \frac{(\gamma_{\mathbf{I}}(\beta)|\beta)}{|\beta|^2} \in \mathbb{R},$$

$$\beta' := (\mathbf{P}_{\beta^{\perp}} \circ \gamma)_{\mathbf{I}}(\beta/|\beta|) \in \frac{\beta^{\perp}}{\mathbf{I}},$$

$$\gamma' := (\mathbf{P}_{\beta^{\perp}} \circ \gamma)\Big|_{\beta^{\perp}} \in \mathrm{End}(\beta^{\perp}).$$

<u>Bizonyítás</u> - Az előzőek alapján elég azt igazolni, hogy ha $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\right)\times\mathrm{Sym}(\mathbf{E},[\cdot|\cdot])$, akkor $\mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma}\in\mathrm{Lor}(\mathbf{I}\times\mathbf{E},\mathbf{I})$ ekvivalens azzal, hogy erre a hármasra az (I)-(IV) alternatív lehetőségek egyike teljesül.

1) Tegyük fel, hogy $\alpha>0$.

Ha $\mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma}\in\mathrm{Lor}(\mathbf{I}\times\mathbf{E},\mathbf{I})$, akkor van olyan

$$(\tau,\mathbf{v},\mathbf{w},R)\in\mathbb{R}\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\right)\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\right)\times\mathrm{End}(\mathbf{E})$$

négyes, hogy

$$\alpha = \tau^2-|\mathbf{v}|^2 \in \mathbb{R}\ ;$$
$$\beta = \tau\mathbf{w}-R^{*}_{\mathbf{I}}(\mathbf{v}) \in \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\ ; \tag{1}$$
$$\gamma = R^{*}R-\mathbf{w}\otimes\mathbf{w} \in \mathrm{Sym}(\mathbf{E},[\cdot|\cdot])$$

és $\begin{pmatrix}\tau & \mathbf{w}\\ \mathbf{v} & R\end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(\mathbf{I}\times\mathbf{E})$. Mivel $\alpha>0$, ezért $\tau\neq0$, tehát $S:=\tau R-\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}\in$ $\in\mathrm{GL}(\mathbf{E})$. Egyszerűen számolással kapjuk, hogy

$$\alpha\gamma+\beta\otimes\beta = \tau^{-2}S^{*}\circ(\alpha\,\mathrm{id}_{\mathbf{E}}+\mathbf{v}\otimes\mathbf{v})\circ S$$

és mivel az $\alpha\,\mathrm{id}_{\mathbf{E}}+\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}:\mathbf{E}\to\mathbf{E}$ operátor pozitív definit a $[\cdot|\cdot]$-ra nézve és S invertálható, ezért $\alpha\gamma+\beta\otimes\beta$ is pozitív definit, vagyis (I) teljesül.

Megfordítva, ha (I) teljesül, akkor van olyan $R\in\mathrm{GL}(\mathbf{E})$, hogy $\gamma+\frac{\beta\otimes\beta}{\alpha}=R^{*}R$. Legyen $\tau:=\sqrt{\alpha}$, $\mathbf{v}:=0$ és $\mathbf{w}:=-\beta/\sqrt{\alpha}$. Ekkor a

$$(\tau,\mathbf{v},\mathbf{w},R)\in\mathbb{R}\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\right)\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\right)\times\mathrm{End}(\mathbf{E})$$

négyes olyan, hogy $L\equiv\begin{pmatrix}\tau & \mathbf{w}\\ \mathbf{v} & R\end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(\mathbf{I}\times\mathbf{E})$, hiszen $\det L=\sqrt{\alpha}\cdot\det R$ és $\mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma} = \mathbf{g}_{[\cdot|\cdot]}\circ(L\times L)$, vagy ami ugyanaz, az (1) egyenletrendszer teljesül. Egyidejűleg az is látható, hogyan lehet adott $\mathbf{d}\in\mathbf{I}$, $\mathbf{d}\neq 0$ elemhez $\mathbf{d}$-ortonormált bázist előállítani $\mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma}$-ra nézve; ugyanis, ha $(\mathbf{q}_k)_{1\le k\le N}$ $(N:=\dim\mathbf{E})$ $\mathbf{d}$-ortonormált bázis a $[\cdot|\cdot]$-ra nézve és minden $1\le k\le N$ indexre $\mathbf{e}_k:=((R_{\mathbf{I}}^{*-1}\beta|\mathbf{q}_k]/\alpha, R^{-1}\mathbf{q}_k)$ és $\mathbf{e}_0:=(\mathbf{d}/\sqrt{\alpha},0)$ akkor $(\mathbf{e}_k)_{0\le k\le N}$ a $\mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma}$-re nézve $\mathbf{d}$-ortonormált bázis (ahol $R\in GL(\mathbf{E})$ olyan, hogy $\gamma+\frac{\beta\otimes\beta}{\alpha}=R^*R$).

Ezzel beláttuk, hogy $\alpha>0$ esetén $\mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma}\in Lor(\mathbf{I}\times\mathbf{E},\mathbf{I})$ és (I) ekvivalensek.

2) Tegyük fel, hogy $\alpha=0$.

Ha $\mathbf{g}_{0,\beta,\gamma}\in Lor(\mathbf{I}\times\mathbf{E},\mathbf{I})$, akkor a 3.Lemma szerint $\beta\neq 0$ és létezik olyan

$$(\tau,\mathbf{v},\mathbf{w},R)\in\mathbb{R}\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\right)\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\right)\times End(\mathbf{E})$$

négyes, hogy arra teljesül az (1) egyenletrendszer és $\begin{pmatrix}\tau & \mathbf{w}\\ \mathbf{v} & R\end{pmatrix}\in$ $\in GL(\mathbf{I}\times\mathbf{E})$. Ekkor $\alpha=0$ miatt $|\tau|=|\mathbf{v}|$, tehát $\tau\neq 0$ és $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$. Ha $\mathbf{q}\in\beta^{\perp}$, akkor az $S:=(P_{\beta^{\perp}}\circ\gamma)\big|_{\beta^{\perp}}:\beta^{\perp}\to\beta^{\perp}$ operátorra $\mathbf{w}=(R_{\mathbf{I}}^{*}\mathbf{v}\overset{+}{-}\beta)/\tau$ és $\tau^2=|\mathbf{v}|^2$ miatt:

$$[S\mathbf{q}|\mathbf{q}] = [\gamma(\mathbf{q})|\mathbf{q}] = |R\mathbf{q}|^2-(\mathbf{w}|\mathbf{q}]\otimes(\mathbf{w}|\mathbf{q}] = |R\mathbf{q}|^2-\frac{(\mathbf{v}|R\mathbf{q}]\otimes(\mathbf{v}|R\mathbf{q}]}{|\mathbf{v}|^2}$$

teljesül, tehát a Cauchy-egyenlőtlenség szerint $[S\mathbf{q}|\mathbf{q}]\ge 0$, vagyis S pozitív operátor a $[\cdot|\cdot]_{\beta^{\perp}}$-ra nézve. Mivel a 3.Lemma szerint $S\in GL(\beta^{\perp})$, ezért (II) teljesül.

Megfordítva, tegyük fel, hogy (II) teljesül. Ekkor két (valóban lehetséges) alternatíva létezik: a) $\gamma\in GL(\mathbf{E})$ ill. b) $\gamma\notin GL(\mathbf{E})$.

a) Legyen γ invertálható operátor. Ekkor van (egyetlen) olyan $\beta_0\in\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}$, hogy $\gamma_{\mathbf{I}}(\beta_0)=\beta$. Ha $(\beta|\beta_0)=0$ volna, akkor $\beta\otimes\mathbf{I}\subseteq\gamma\langle\beta^{\perp}\rangle$, ezért $\mathrm{Im}\gamma$ egyenlő lenne $\gamma\langle\beta^{\perp}\rangle$-mal, tehát γ nem volna szürjektív; ezért $(\beta|\beta_0)\neq 0$. Rögzítsünk egy $\mathbf{d}\in\mathbf{I}$, $\mathbf{d}\neq 0$ elemet.

- Ha $(\beta|\beta_0)>0$, akkor legyen

$$e_0:=\frac{1}{\sqrt{(\beta|\beta_0)}}\begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ -\beta_0\otimes\mathbf{d}\end{pmatrix}, \qquad e_1:=\frac{1}{\sqrt{(\beta|\beta_0)}}\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \beta_0\otimes\mathbf{d}\end{pmatrix}.$$

- Ha $(\beta|\beta_0)<0$, akkor legyen

$$e_0:=\frac{1}{\sqrt{-(\beta|\beta_0)}}\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \beta_0\otimes\mathbf{d}\end{pmatrix}, \qquad e_1:=\frac{1}{\sqrt{-(\beta|\beta_0)}}\begin{pmatrix} -\mathbf{d} \\ \beta_0\otimes\mathbf{d}\end{pmatrix}.$$

A (II) szerint vehetünk olyan $(\mathbf{q}_k)_{2\le k\le N}$ $(N:=\dim\mathbf{E})$ bázist $\beta^{\perp}$-ban, hogy minden $2\le j,k\le N$ indexre az $S:=(\mathbf{P}_{\beta^\perp}\circ\gamma)|_{\beta^\perp}$ operátorra

$$[S\mathbf{q}_j|\mathbf{q}_k]=\delta_{jk}\mathbf{d}\otimes\mathbf{d}.$$

Legyen minden $2\le k\le N$ indexre $\mathbf{e}_k:=(\mathbf{0},\mathbf{q}_k)$. Mivel az $\mathrm{I}\times(\beta_0\otimes\mathrm{I})$ halmaz $\mathbf{g}_{0,\beta,\gamma}$ szerinti ortogonális komplementere tartalmazza $\{0\}\times\beta^{\perp}$-t, ezért egyszerűen ellenőrizhető, hogy $(\mathbf{e}_k)_{0\le k\le N}$ olyan algebrai bázis $\mathrm{I}\times\mathbf{E}$-ben, amely ortogonális a $\mathbf{g}_{0,\beta,\gamma}$ bilineáris formára nézve és

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_{0,\beta,\gamma}(\mathbf{e}_0,\mathbf{e}_0)&=-\mathbf{d}\otimes\mathbf{d},\\ \mathbf{g}_{0,\beta,\gamma}(\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_k)&=+\mathbf{d}\otimes\mathbf{d}\end{aligned} \tag{2}$$

ha $1\le k\le\dim\mathbf{E}$, tehát $\mathbf{g}_{0,\beta,\gamma}\in B_1(\mathrm{I}\times\mathbf{E},\mathrm{I})=:\mathrm{Lor}(\mathrm{I}\times\mathbf{E},\mathrm{I})$.

b) Tegyük fel, hogy γ nem invertálható operátor. Ekkor $\mathrm{Ker}\gamma$ egydimenziós altér $\mathbf{E}$-ben, mert a (II) miatt γ injektív a $\beta^{\perp}$ altéren. Ezért van olyan $\beta_0\in\frac{\mathbf{E}}{\mathrm{I}}$ nem nulla vektor, hogy $\mathrm{Ker}\gamma=\beta_0\otimes\mathrm{I}$ és mivel γ injektív a $\beta^{\perp}$ altéren, ezért $(\beta|\beta_0)\ne0$. Legyen $\mathbf{d}\in\mathrm{I}$, $\mathbf{d}\ne\mathbf{0}$ rögzített és

$$e_0:=\begin{pmatrix} \mathbf{d}/2 \\ -\mathbf{d}/(\beta|\beta_0)\end{pmatrix}, \qquad e_1:=\begin{pmatrix} \mathbf{d}/2 \\ \mathbf{d}/(\beta|\beta_0)\end{pmatrix}.$$

Az $(\mathbf{e}_k)_{2\le k\le N}$ rendszert ugyanúgy értelmezve, mint az előbb, kapjuk, hogy $(\mathbf{e}_k)_{0\le k\le N}$ olyan algebrai bázis $\mathrm{I}\times\mathbf{E}$-ben, amelyre (2) teljesül, tehát $\mathbf{g}_{0,\beta,\gamma}\in\mathrm{Lor}(\mathrm{I}\times\mathbf{E},\mathrm{I})$.

Ezzel beláttuk, hogy $\mathbf{g}_{0,\beta,\gamma}\in\mathrm{Lor}(\mathrm{I}\times\mathbf{E},\mathrm{I})$ és (II) ekvivalensek.

3) Tegyük fel, hogy $\alpha<0$.

Ekkor a $\mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma}$ bilineáris forma $(\mathrm{I}\times\{0\})\times(\mathrm{I}\times\{0\})$-re vett leszűkítése $\alpha<0$ miatt $B_0(\mathrm{I}\times\{0\},\mathrm{I})$-nek eleme és az $\mathrm{I}\times\{0\}$ halmaz $\mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma}$ szerinti ortokomplementuma egyenlő a

$$\mathbf{M}_\beta := \{((\beta|\mathbf{q}]/\alpha,\mathbf{q})\in\mathrm{I}\times\mathbf{E} \mid \mathbf{q}\in\mathbf{E}\}$$

altérrel és $\mathrm{I}\times\mathbf{E}=(\mathrm{I}\times\{0\})\oplus\mathbf{M}_\beta$. Mivel a $\mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma}$ bilineáris forma szimmetrikus, ezért az 1.Lemma szerint $\mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma}\in\mathrm{Lor}(\mathrm{I}\times\mathbf{E},\mathrm{I}):=$ $=B_1(\mathrm{I}\times\mathbf{E},\mathrm{I})$ azzal ekvivalens, hogy a a $\mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma}$ leszűkítése az $\mathbf{M}_\beta\times\mathbf{M}_\beta$ altérre $B_1(\mathbf{M}_\beta,\mathrm{I})$-nek eleme, azaz Lorentz-forma. Ha $\beta\neq0$, akkor legyen:

$$L_\beta:\mathrm{I}\times\beta^\perp\to M_\beta \quad ; \quad (\mathbf{t},\mathbf{q})\mapsto\left(\frac{|\beta|}{\alpha}\mathbf{t},\mathbf{q}+\frac{\beta}{|\beta|}\otimes\mathbf{t}\right)$$

és ha $\beta=0$, akkor $L_0:\mathbf{E}\to\mathbf{M}_0$ $(\mathbf{M}_0=\{0\}\times\mathbf{E})$ a kanonikus bijekció. Mivel L_β lineáris bijekció, ezért a fentiek szerint $\mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma}\in\mathrm{Lor}(\mathrm{I}\times\mathbf{E},\mathrm{I})$ ekvivalens azzal, hogy ha $\beta\neq0$, akkor $\mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma}\circ(L_\beta\times L_\beta)\in\mathrm{Lor}(\mathrm{I}\times\beta^\perp,\mathrm{I})$ és ha $\beta=0$, akkor $\mathbf{g}_{\alpha,0,\gamma}\circ(L_0\times L_0)\in\mathrm{Lor}(\mathbf{E},\mathbf{I})$.

Mivel $\mathbf{g}_{\alpha,0,\gamma}\circ(L_0\times L_0)=[\cdot|\cdot]\circ(\gamma\times\mathrm{id}_\mathbf{E})$, ezért $\alpha<0$ és $\beta=0$ esetén $\mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma}\in\mathrm{Lor}(\mathrm{I}\times\mathbf{E},\mathrm{I})$ és (III) ekvivalensek.

Ha $\alpha<0$ és $\beta\neq0$, akkor $(\mathbf{t},\mathbf{q}),(\mathbf{t}',\mathbf{q}')\in\mathrm{I}\times\beta^\perp$ esetén

$$(\mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma}\circ(L_\beta\times L_\beta))((\mathbf{t},\mathbf{q}),(\mathbf{t}',\mathbf{q}'))=-\alpha'\mathbf{t}\otimes\mathbf{t}'+\mathbf{t}\otimes(\beta'|\mathbf{q}']+\mathbf{t}'\otimes(\beta'|\mathbf{q}]+[\gamma'(\mathbf{q})|\mathbf{q}']$$

ahol $(\alpha',\beta',\gamma')\in\mathbb{R}\times\left(\frac{\beta^\perp}{\mathrm{I}}\right)\times\mathrm{End}(\beta^\perp)$ az a hármas, amit (IV)-ben értelmeztünk. Ezért $\alpha<0$ és $\beta\neq0$ esetén $\mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma}\in\mathrm{Lor}(\mathrm{I}\times\mathbf{E},\mathrm{I})$ és (IV) ekvivalensek.■

A Tételhez a következő megjegyzéseket fűzzük:

- A fizikai alkalmazásokban leggyakrabban előforduló (I) eset, valamint a (II) eset teljesen problémamentes. Ekkor egészen egyszerű szükséges és elégséges feltételről van szó.

- A (III) feltétel tovább nem részletezhető, mert -az adott feltevések mellett- az **E** vektortérben a $\beta=0$ vektor nem jelöl ki újabb struktúrát.

- A (IV) feltétel rekurzív jellegű. Jól látható, hogy a $(\gamma_I(\beta)|\beta)$ valós szám értékei vezérlik a rekurziót. Pontosabban; ha $\beta\neq 0$ és $\alpha<0$, akkor $\mathbf{g}_{\alpha',\beta',\gamma'}\in\mathrm{Lor}(\mathbf{I}\times\beta^{\perp},\mathbf{I})$ egyenértékű azzal, hogy:

  a) Ha $(\gamma_I(\beta)|\beta)<|\beta|^4/|\alpha|$ (vagyis $\alpha'>0$), akkor az $\alpha'\gamma'+\beta'\otimes\beta'\in\mathrm{End}(\beta^{\perp})$ operátor *pozitív definit* a $[\cdot|\cdot]_{\beta^{\perp}}$-ra nézve és a rekurziónak vége.

  b) Ha $(\gamma_I(\beta)|\beta)=|\beta|^4/|\alpha|$ (vagyis $\alpha'=0$), akkor $\beta'\neq 0$ és a

  $$(\mathbf{P}_{\beta'^{\perp}}\circ\gamma')\big|_{\beta'^{\perp}}\in\mathrm{End}(\beta'^{\perp})$$

  operátor *pozitív definit* a $[\cdot|\cdot]_{\beta'^{\perp}}$-ra nézve és a rekurziónak vége.

  c) Ha $(\gamma_I(\beta)|\beta)>|\beta|^4/|\alpha|$ (vagyis $\alpha'<0$), akkor:

  1) $\beta'=0$ (vagyis $\gamma_I(\beta)\in\mathbb{R}\beta$) esetén $[\cdot|\cdot]\circ(\gamma'\times\mathrm{id}_{\beta^{\perp}})\in\mathrm{Lor}(\beta^{\perp},\mathbf{I})$ (ami tovább nem részletezhető, mert a $\beta'=0$ vektor nem jelöli ki a $\beta^{\perp}$-nak további felbontását és a rekurziónak vége);

  2) $\beta'\neq 0$ esetén a rekurzió újra indul a (IV) alternatívával, az (α,β,γ) hármas helyett az (α',β',γ') hármast véve.

A rekurzió biztosan véges, mert minden lépés dimenzió-csökkentő és **E** végesdimenziós. Sőt az is látható, hogy a leghosszabb rekurzió a fenti c)-1) eset teljesülésével fejeződik be (mert egydimenziós térben bármely két vektor párhuzamos). Az általános relativitáselméletben a $\dim\mathbf{E}=3$ eset különösen fontos; ekkor legfeljebb *egy* rekurzív lépés szükséges.

1.Következmény - Legyen

$$(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\right)\times\mathrm{Sym}(\mathbf{E},[\cdot|\cdot])$$

és tegyük fel, hogy $\alpha>0$, $\beta\neq 0$. Ekkor $\mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma}\in\mathrm{Lor}(\mathbf{I}\times\mathbf{E},\mathbf{I})$ ekvivalens azzal, hogy a

$$\gamma' := (\mathbf{P}_{\beta^\perp}\circ\gamma)\Big|_{\beta^\perp} \in \mathrm{End}(\beta^\perp)$$

operátor pozitív definit a $[\cdot|\cdot]_{\beta^\perp}$-ra nézve és a

$$\beta' := (\mathbf{P}_{\beta^\perp}\circ\gamma)_{\mathbf{I}}(\beta) \in \frac{\beta^\perp}{\mathbf{I}}$$

vektorra teljesül a $(\gamma_{\mathbf{I}}(\beta)|\beta)+|\beta|^4/\alpha > (\beta'|\gamma_{\mathbf{I}}'^{-1}(\beta'))$ egyenlőtlenség.

Bizonyítás - Az 1.Tétel alapján azt kell igazolni, hogy a két fenti feltétel együttes teljesülése egyenértékű azzal, hogy az $\alpha\gamma+\beta\otimes\beta\in\mathrm{End}(\mathbf{E})$ operátor pozitív definit a $[\cdot|\cdot]$-ra nézve.

Először tegyük fel, hogy $\alpha\gamma+\beta\otimes\beta$ pozitív definit a $[\cdot|\cdot]$-ra nézve. Ekkor $\mathbf{q}\in\beta^\perp$, $\mathbf{q}\neq 0$ esetén $0<[(\alpha\gamma+\beta\otimes\beta)(\mathbf{q})|\mathbf{q}]=\alpha[\gamma'(\mathbf{q})|\mathbf{q}]$, tehát $\alpha>0$ miatt a γ' operátor pozitív definit a $[\cdot|\cdot]_{\beta^\perp}$-ra nézve.

Legyen $\beta_0' := \gamma_{\mathbf{I}}'^{-1}(\beta')$, ami $\frac{\beta^\perp}{\mathbf{I}}$-nek eleme. Ekkor $\beta\neq 0$ miatt $\beta-\beta_0'\neq 0$ elem $\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}$-ben, tehát a $(\gamma+\frac{\beta\otimes\beta}{\alpha})_{\mathbf{I}}\in\mathrm{End}(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}})$ operátor $(\cdot|\cdot)$ szerinti pozitív definitiviása folytán:

$$0 < \left(\left(\gamma+\frac{\beta\otimes\beta}{\alpha}\right)_{\mathbf{I}}(\beta-\beta_0')\,\Big|\,\beta-\beta_0'\right) =$$

$$= (\gamma_{\mathbf{I}}(\beta)|\beta) + \frac{|\beta|^4}{\alpha} - (\gamma_{\mathbf{I}}(\beta)|\beta_0') - (\gamma_{\mathbf{I}}(\beta_0')|\beta) + (\gamma_{\mathbf{I}}(\beta_0')|\beta_0')$$

teljesül. Mivel $\beta_0'\in\frac{\beta^\perp}{\mathbf{I}}$, ezért

$$(\gamma_{\mathbf{I}}(\beta)|\beta_0')=((\mathbf{P}_{\beta^\perp})_{\mathbf{I}}(\gamma_{\mathbf{I}}(\beta))|\beta_0')=((\mathbf{P}_{\beta^\perp}\circ\gamma)_{\mathbf{I}}(\beta)|\beta_0')=:(\beta'|\beta_0')$$

és a β_0' definíciója szerint

$$(\gamma_{\mathbf{I}}(\beta_0')|\beta_0')=((\mathbf{P}_{\beta^\perp})_{\mathbf{I}}(\gamma_{\mathbf{I}}(\beta_0'))|\beta_0')=(\gamma_{\mathbf{I}}'(\beta_0')|\beta_0')=(\beta'|\beta_0')$$

ezért a fenti egyenlőtlenség azzal egyenértékű, hogy

$$(\gamma_I(\beta_0')|\beta) < (\gamma_I(\beta)|\beta)+\frac{|\beta|^4}{\alpha}.$$

Mivel pedig a γ szimmetrikussága és $\beta_0'\in\frac{\beta^\perp}{I}$ miatt

$$(\gamma_I(\beta_0')|\beta)=(\beta_0'|\gamma_I(\beta))=(\beta_0'|(P_{\beta^\perp}\circ\gamma)_I(\beta))=:(\beta_0'|\beta')=(\gamma_I'^{-1}(\beta')|\beta')$$

ezért az előző egyenlőtlenség azt jelenti, hogy

$$(\gamma_I'^{-1}(\beta')|\beta') < (\gamma_I(\beta)|\beta)+\frac{|\beta|^4}{\alpha}.$$

Megfordítva; tegyük fel, hogy a $\gamma'\in\mathrm{End}(\beta^\perp)$ operátor pozitív definit a $[\cdot|\cdot]_{\beta^\perp}$-ra nézve és teljesül a fenti egyenlőtlenség. Legyen $\mathbf{v}\in\frac{\mathbf{E}}{I}$ tetszőleges és ezt a vektort írjuk fel

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^\perp + \frac{(\mathbf{v}|\beta)}{|\beta|^2}\,\beta$$

alakban, ahol $\mathbf{v}^\perp:=(P_{\beta^\perp})_I(\mathbf{v})$. Ekkor a γ szimmetrikussága és a β' és γ' definíciója szerint:

$$((\gamma+\frac{\beta\otimes\beta}{\alpha})_I(\mathbf{v})|\mathbf{v})=\frac{(\mathbf{v}|\beta)^2}{|\beta|^4}\left((\gamma_I(\beta)|\beta)+\frac{|\beta|^4}{\alpha}\right)+2\frac{(\mathbf{v}|\beta)}{|\beta|^2}(\mathbf{v}^\perp|\beta')+(\gamma_I'(\mathbf{v}^\perp)|\mathbf{v}^\perp)$$

teljesül. Ha $(\mathbf{v}|\beta)=0$ és $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$, akkor $\mathbf{v}=\mathbf{v}^\perp\neq\mathbf{0}$, tehát a γ' pozitív definitivitása miatt:

$$((\gamma+\frac{\beta\otimes\beta}{\alpha})_I(\mathbf{v})|\mathbf{v})=(\gamma_I'(\mathbf{v}^\perp)|\mathbf{v}^\perp)>0.$$

Ha $(\mathbf{v}|\beta)\neq 0$, akkor a

$$(\gamma_I'^{-1}(\beta')|\beta') < (\gamma_I(\beta)|\beta)+\frac{|\beta|^4}{\alpha}$$

egyenlőtlenség miatt kapjuk, hogy

$$((\gamma+\frac{\beta\otimes\beta}{\alpha})_I(\mathbf{v})|\mathbf{v}) > \frac{(\mathbf{v}|\beta)^2}{|\beta|^4}(\gamma_I'^{-1}(\beta')|\beta')+2\frac{(\mathbf{v}|\beta)}{|\beta|^2}(\mathbf{v}^\perp|\beta')+(\gamma_I'(\mathbf{v}^\perp)|\mathbf{v}^\perp)=$$

$$=(\gamma_I'(\mathbf{v}^\perp+\frac{(\mathbf{v}|\beta)}{|\beta|^2}\beta_0')|\mathbf{v}^\perp+\frac{(\mathbf{v}|\beta)}{|\beta|^2}\beta_0')\geq 0,$$

ahol $\beta_0':=\gamma_I'^{-1}(\beta')$ ezért ismét

$$((\gamma+\frac{\beta\otimes\beta}{\alpha})_I(\mathbf{v})|\mathbf{v}) > 0$$

adódik, tehát a $\gamma+\frac{\beta\otimes\beta}{\alpha}$ operátor $\mathbf{E}$-n pozitív definit a $[\cdot|\cdot]$-ra nézve.∎

Az (α,β,γ) hármasra vonatkozó feltételek más csoportosításával természetesen másféle (szintén rekurzív) osztályozás is adható a $\mathrm{Lor}(\mathbf{I}\times\mathbf{E},\mathbf{I})$ elemeire. Erre példa a következő állítás:

2.Következmény - Egy $\mathbf{g}:(\mathbf{I}\times\mathbf{E})\times(\mathbf{I}\times\mathbf{E})\to\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}$ bilineáris forma pontosan akkor Lorentz-forma, ha egyértelműen létezik olyan $(\alpha,\beta,\gamma)\in$ $\in\mathbb{R}\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\right)\times\mathrm{Sym}(\mathbf{E},[\cdot|\cdot])$ hármas, hogy $\mathbf{g}=\mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma}$ és

(I') Ha $\beta\neq0$ és $\alpha>0$, akkor az $\alpha\gamma+\beta\otimes\beta\in\mathrm{End}(\mathbf{E})$ operátor *pozitív definit* a $[\cdot|\cdot]$-ra nézve.

(II') Ha $\beta\neq0$ és $\alpha=0$, akkor a $(\mathbf{P}_{\beta^\perp}\circ\gamma)\big|_{\beta^\perp}\in\mathrm{End}(\beta^\perp)$ operátor *pozitív definit* $[\cdot|\cdot]_{\beta^\perp}$-ra nézve.

(III') Ha $\beta=0$ és $\alpha<0$, akkor $[\cdot|\cdot]\circ(\gamma\times\mathrm{id}_{\mathbf{E}})\in\mathrm{Lor}(\mathbf{E},\mathbf{I})$.

(IV') Ha $\beta\neq0$ és $\alpha<0$, akkor $\mathbf{g}_{\alpha',\beta',\gamma'}\in\mathrm{Lor}(\mathbf{I}\times\beta^\perp,\mathbf{I})$, ahol α',β',γ' ugyanazok, mint (IV)-ben.

(V') Ha $\beta=0$ és $\alpha>0$, akkor a $\gamma\in\mathrm{End}(\mathbf{E})$ operátor *pozitív definit* a $[\cdot|\cdot]$-ra nézve.∎

Az egyszerű Lorentz-sokaságok konstrukciója szempontjából alapvetően fontos lesz az alábbi állítás.

3.Következmény - Legyen $\mathbf{n}\in\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}$, $|\mathbf{n}|=1$. Ekkor egy

$$\mathbf{g}\ :\ (\mathbf{I}\times\mathbf{I}\times\frac{\mathbf{n}^\perp}{\mathbf{I}})\times(\mathbf{I}\times\mathbf{I}\times\frac{\mathbf{n}^\perp}{\mathbf{I}})\to\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}$$

szimmetrikus bilineáris forma pontosan akkor eleme $\mathrm{Lor}(\mathbf{I}\times\mathbf{I}\times\frac{\mathbf{n}^\perp}{\mathbf{I}},\mathbf{I})$-nek, ha egyértelműen létezik olyan

$$(\alpha,\beta_0,\gamma_0,\beta_1,\gamma_1,\gamma_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times(\mathbf{n}^\perp)\times(\mathbf{n}^\perp)\times(\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}\otimes\mathrm{Sym}(\frac{\mathbf{n}^\perp}{\mathbf{I}},(\cdot|\cdot)_{\frac{\mathbf{n}^\perp}{\mathbf{I}}}))$$

rendszer, hogy minden $\mathbf{I}\times\mathbf{I}\times\frac{\mathbf{n}^\perp}{\mathbf{I}}\ni(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{v}),(\mathbf{t}',\mathbf{r}',\mathbf{v}')$-re és $\mathbf{a}\in\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}$, $\mathbf{a}\neq0$

elemre:

$$\mathbf{g}((\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{v}),(\mathbf{t}',\mathbf{r}',\mathbf{v}'))=$$

$$=-\alpha(\mathbf{t}\otimes\mathbf{t}')+\beta_0(\mathbf{t}\otimes\mathbf{r}'+\mathbf{t}'\otimes\mathbf{r})+\gamma_0(\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}')+[\beta_1|\mathbf{t}\otimes\mathbf{v}'+\mathbf{t}'\otimes\mathbf{v}]+[\gamma_1|\mathbf{r}\otimes\mathbf{v}'+\mathbf{r}'\otimes\mathbf{v}]+$$
$$+(\frac{\gamma}{\mathbf{a}}2(\mathbf{v})|\mathbf{v}')\mathbf{a} \qquad (**)$$

teljesül és minden $\mathbf{d}\in\mathrm{I}$ nem nulla elemre az

$$\left(\alpha,\ \beta_0\mathbf{n}+\frac{\beta}{\mathbf{d}}1,\ \gamma_0(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})+\mathbf{n}\otimes\frac{\gamma}{\mathbf{d}}1+\left(\frac{\gamma_2}{\mathbf{d}\otimes\mathbf{d}}\otimes\mathrm{id}_{\mathrm{I}}\right)\circ\mathrm{P}_{\mathbf{n}^\perp}\right)\in\mathbb{R}\times\frac{\mathbf{E}}{\mathrm{I}}\times\mathrm{Sym}(\mathbf{E},[\cdot|\cdot])$$

hármasra az 1.Tétel (I)-(IV) alternatívái közül pontosan egy teljesül.

<u>Bizonyítás</u> - Minden $\mathbf{d}\in\mathrm{I}$, $\mathbf{d}\neq 0$ elemre és $\mathbf{n}\in\frac{\mathbf{E}}{\mathrm{I}}$, $|\mathbf{n}|=1$ vektorra tekintsük az

$$\mathrm{L}_{\mathbf{n},\mathbf{d}}:\ \mathrm{I}\times\mathrm{I}\times\frac{\mathbf{n}^\perp}{\mathrm{I}}\to\mathrm{I}\times\mathrm{E}\quad;\quad(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{v})\mapsto(\mathbf{t},\mathbf{r}\otimes\mathbf{n}+\mathbf{d}\otimes\mathbf{v})$$

lineáris bijekciót. Legyen $\mathbf{d}\in\mathrm{I}$, $\mathbf{d}\neq\mathbf{0}$ rögzített.
A $\mathbf{g}$ szimmetrikus bilineáris forma pontosan akkor Lorentz-forma, ha létezik egyértelműen olyan $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathrm{I}}\right)\times\mathrm{Sym}(\mathbf{E},[\cdot|\cdot])$ hármas, amelyre $\mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma}\in\mathrm{Lor}(\mathrm{I}\times\mathrm{E},\mathrm{I})$, vagyis az 1.Tétel (I)-(IV) alternatívái közül pontosan egy teljesül (α,β,γ)-ra és

$$\mathbf{g}=\mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma}\circ(\mathrm{L}_{\mathbf{n},\mathbf{d}}\times\mathrm{L}_{\mathbf{n},\mathbf{d}}).$$

Az adott $\mathbf{d}$-hez így kiválasztott (α,β,γ)-ra a (**) egyenlőség teljesül a

$$\beta_0:=(\beta|\mathbf{n})\in\mathbb{R},$$
$$\gamma_0:=(\gamma_{\mathrm{I}}(\mathbf{n})|\mathbf{n})\in\mathbb{R},$$
$$\beta_1:=\mathrm{P}_{\mathbf{n}^\perp}(\beta\otimes\mathbf{d})\in\mathbf{n}^\perp,$$
$$\gamma_1:=\mathrm{P}_{\mathbf{n}^\perp}(\gamma(\mathbf{n}\otimes\mathbf{d}))\in\mathbf{n}^\perp,$$
$$\gamma_2:=(\mathbf{d}\otimes\mathbf{d})\otimes\left((\mathrm{P}_{\mathbf{n}^\perp}\circ\gamma)\Big|_{\mathbf{n}^\perp}\right)_{\mathrm{I}}\in(\mathrm{I}\otimes\mathrm{I})\otimes\mathrm{Sym}\left(\frac{\mathbf{n}^\perp}{\mathrm{I}},(\cdot|\cdot)_{\frac{\mathbf{n}^\perp}{\mathrm{I}}}\right)$$

választással; ez egyszerű számolással belátható. Mivel pedig nyilvánvaló, hogy ebből az $(\alpha,\beta_0,\gamma_0,\beta_1,\gamma_1,\gamma_2)$ rendszerből az (α,β,γ) hármas úgy rekonstruálható, hogy

$$\beta = \beta_0 \mathbf{n} + \frac{\beta}{\mathbf{d}}1,$$

$$\gamma = \gamma_0(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}) + \mathbf{n}\otimes\frac{\gamma}{\mathbf{d}}1 + \left(\frac{\gamma_2}{\mathbf{d}\otimes\mathbf{d}}\otimes \mathrm{id}_{\mathrm{I}}\right)\circ P_{\mathbf{n}^{\perp}}$$

ezért az

$$\left(\alpha,\ \beta_0\mathbf{n}+\frac{\beta}{\mathbf{d}}1,\ \gamma_0(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})+\mathbf{n}\otimes\frac{\gamma}{\mathbf{d}}1+\left(\frac{\gamma_2}{\mathbf{d}\otimes\mathbf{d}}\otimes\mathrm{id}_{\mathrm{I}}\right)\circ P_{\mathbf{n}^{\perp}}\right) \in \mathbb{R}\times\frac{\mathbf{E}}{\mathrm{I}}\times\mathrm{Sym}(\mathbf{E},[\cdot|\cdot])$$

hármas eleget tesz az 1.Tétel (I)-(IV) alternatívái közül pontosan egynek. Ez mutatja a kívánt tulajdonságú $(\alpha,\beta_0,\gamma_0,\beta_1,\gamma_1,\gamma_2)$ rendszer *egzisztenciáját*.

Az *unicitás* viszont triviális, mert ha $(\alpha,\beta_0,\gamma_0,\beta_1,\gamma_1,\gamma_2)$ olyan rendszer, amelyre a (**) teljesül, akkor

- $\mathbf{t}\in\mathrm{I}$, $\mathbf{t}\neq 0$ esetén $\alpha=-\dfrac{\mathbf{g}((\mathbf{t},0,0),(\mathbf{t},0,0))}{\mathbf{t}\otimes\mathbf{t}}$;
- $\mathbf{t}\in\mathrm{I}$, $\mathbf{t}\neq 0$ esetén $\beta_0=\dfrac{\mathbf{g}((\mathbf{t},0,0),(0,\mathbf{t},0))}{\mathbf{t}\otimes\mathbf{t}}$;
- $\mathbf{t}\in\mathrm{I}$, $\mathbf{t}\neq 0$ esetén $\gamma_0=\dfrac{\mathbf{g}((0,\mathbf{t},0),(0,\mathbf{t},0))}{\mathbf{t}\otimes\mathbf{t}}$;
- $\mathbf{t}\in\mathrm{I}$, $\mathbf{t}\neq 0$ esetén minden $\mathbf{n}^{\perp}\ni\mathbf{q}$-ra $[\beta_1|\mathbf{q}]=\mathbf{g}((0,0,\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{t}}),(\mathbf{t},0,0))$;
- $\mathbf{r}\in\mathrm{I}$, $\mathbf{r}\neq 0$ esetén minden $\mathbf{n}^{\perp}\ni\mathbf{q}$-ra $[\gamma_1|\mathbf{q}]=\mathbf{g}((0,\mathbf{r},0),(0,0,\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{r}}))$;
- $\mathbf{v},\mathbf{v}'\in\frac{\mathbf{n}^{\perp}}{\mathrm{I}}$ és $\mathbf{a}\in\mathrm{I}\otimes\mathrm{I}$, $\mathbf{a}\neq 0$ esetén $(\frac{\gamma}{\mathbf{a}}2(\mathbf{v})|\mathbf{v}')=\dfrac{\mathbf{g}((0,0,\mathbf{v}),(0,0,\mathbf{v}'))}{\mathbf{a}}$,

tehát $\mathbf{g}$ egyértelműen meghatározza az $(\alpha,\beta_0,\gamma_0,\beta_1,\gamma_1,\gamma_2)$ rendszert.∎

A fenti állításban megfogalmazott algebrai feltétel nagyon bonyolult. Jelentősen egyszerűsödik a helyzet, ha a β_1 és γ_1 "nemdiagonális" tagok eltűnnek és $\gamma_2=f\otimes\mathrm{id}_{\frac{\mathbf{n}^{\perp}}{\mathrm{I}}}$ alakú, ahol $f\in\mathrm{I}\otimes\mathrm{I}$. (A legfontosabb gömbszimmetrikus egyszerű Lorentz-sokaságok előállításához még ezek a feltételek is túl általánosak.)

<u>Jelölés</u> - Legyen $\mathbf{n}\in\frac{\mathbf{E}}{\mathrm{I}}$, $|\mathbf{n}|=1$. Ha $a,b,c\in\mathbb{R}$ és $f\in\mathrm{I}\otimes\mathrm{I}$, akkor

$$\mathbf{g}_{a,b,c,f;\mathbf{n}} : (\mathrm{I}\times\mathrm{I}\times\frac{\mathbf{n}^{\perp}}{\mathrm{I}})\times(\mathrm{I}\times\mathrm{I}\times\frac{\mathbf{n}^{\perp}}{\mathrm{I}}) \to \mathrm{I}\otimes\mathrm{I}$$

jelöli azt a bilineáris formát, amelyre $(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{v}),(\mathbf{t}',\mathbf{r}',\mathbf{v}')\in$ $\in(\mathrm{I}\times\mathrm{I}\times\frac{\mathbf{n}^{\perp}}{\mathrm{I}})$ esetén:

$$\mathbf{g}_{a,b,c,f;\mathbf{n}}((\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{v}),(\mathbf{t}',\mathbf{r}',\mathbf{v}'))=-a(\mathbf{t}\otimes\mathbf{t}')+b(\mathbf{t}\otimes\mathbf{r}'+\mathbf{t}'\otimes\mathbf{r})+c(\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}')+(\mathbf{v}|\mathbf{v}')f.$$

Látni fogjuk, hogy a $\mathbf{g}_{a,b,c,f;\mathbf{n}}$ alakú bilineáris formákra egészen egyszerű feltétel adható arra, hogy ezek $\mathrm{Lor}(\mathrm{I}\times\mathrm{I}\times\frac{\mathbf{n}^{\perp}}{\mathrm{I}},\mathrm{I})$-ben legyenek. Ez a feltétel természetesen a fenti állításból is levezethető, de van egyszerűbb út is. Szükségünk lesz a következő lemmára.

<u>4.Lemma</u> - Tegyük fel, hogy $\mathbf{E}=\mathrm{I}$ és $[\cdot|\cdot]$ a kanonikus euklidészi forma I felett, azaz $\mathbf{r},\mathbf{r}'\in\mathrm{I}$ esetén $[\mathbf{r}|\mathbf{r}']:=\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}'$. Ekkor $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}\times\left(\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}}\right)\times\mathrm{End}(\mathrm{I})$ $(\equiv\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ esetén

a) $\mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma}\in\mathrm{Lor}(\mathrm{I}\times\mathrm{I},\mathrm{I})$ ekvivalens azzal, hogy $\alpha\gamma+\beta^2>0$.

b) $\mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma}\in B_0(\mathrm{I}\times\mathrm{I},\mathrm{I})$ ekvivalens azzal, hogy $\alpha<0$ és $\gamma>0$ és $\alpha\gamma+\beta^2<0$.

<u>Bizonyítás</u> - Az ~~előző állítás~~ 4. Állítás szerint $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}\times\left(\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}}\right)\times\mathrm{End}(\mathrm{I})$ esetén $\mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma}\in\mathrm{Lor}(\mathrm{I}\times\mathrm{I},\mathrm{I})$ ekvivalens olyan

$$(\tau,\mathbf{v},\mathbf{w},R)\in\mathbb{R}\times\left(\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}}\right)\times\mathrm{End}(\mathrm{I})$$

négyes létezésével, hogy

$$\alpha = \tau^2-|\mathbf{v}|^2 \ ;$$

$$\beta = \tau\mathbf{w}-R\mathbf{v} \ ;$$

$$\gamma = R^2-\mathbf{w}^2$$

és $L:=\begin{pmatrix}\tau & \mathbf{w}\\ \mathbf{v} & R\end{pmatrix}\in GL(\mathrm{I}\times\mathrm{I})$. Ha $(\tau,\mathbf{v},\mathbf{w},R)$ ilyen négyes, akkor egyszerű számolás mutatja, hogy $\alpha\gamma+\beta^2=(\det L)^2>0$. Megfordítva, tegyük fel, hogy $\alpha\gamma+\beta^2>0$. Legyen:

- $\gamma>0$ esetén

$$L := \begin{pmatrix}\sqrt{\alpha\gamma+\beta^2}/\sqrt{\gamma} & 0\\ \beta/\sqrt{\gamma} & \sqrt{\gamma}\end{pmatrix}$$

- $\gamma<0$ esetén

$$L := \begin{pmatrix} \beta/\sqrt{-\gamma} & -\sqrt{-\gamma} \\ \sqrt{\alpha\gamma+\beta^2}/\sqrt{-\gamma} & 0 \end{pmatrix}$$

- $\gamma=0$ és $\alpha>0$ esetén

$$L := \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & -\beta/\sqrt{\alpha} \\ 0 & \beta/\sqrt{\alpha} \end{pmatrix}$$

- $\gamma=0$ és $\alpha<0$ esetén

$$L := \begin{pmatrix} 0 & -\beta/\sqrt{-\alpha} \\ \sqrt{-\alpha} & \beta/\sqrt{-\alpha} \end{pmatrix}$$

- $\gamma=0$ és $\alpha=0$ esetén

$$L := \begin{pmatrix} 1 & -\beta/2 \\ 1 & \beta/2 \end{pmatrix}.$$

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy ekkor $L\in GL(I\times I)$ és teljesül a $\mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma} = \mathbf{g}_{[\cdot|\cdot]}\circ(L\times L)$ egyenlőség, ahol $\mathbf{g}_{[\cdot|\cdot]}:I\times I\to I$ a kanonikus Lorentz-forma $I\times I$ felett, azaz minden $I\times I\ni(\mathbf{t},\mathbf{r}),(\mathbf{t}',\mathbf{r}')$-re:

$$\mathbf{g}_{[\cdot|\cdot]}((\mathbf{t},\mathbf{r}),(\mathbf{t}',\mathbf{r}')) := -\mathbf{t}\otimes\mathbf{t}'+\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}'.$$

Ezért $\mathbf{g}_{\alpha,\beta,\gamma}\in Lor(I\times I,I)$.∎

Tehát a legáltalánosabb $\mathbf{g}\in Lor(I\times I,I)$ Lorentz-forma olyan, hogy egyértelműen léteznek hozzá $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ számok, amelyekre $\alpha\gamma+\beta^2>0$ és minden $I\times I\ni(\mathbf{t},\mathbf{r}),(\mathbf{t}',\mathbf{r}')$-re:

$$\mathbf{g}((\mathbf{t},\mathbf{r}),(\mathbf{t}',\mathbf{r}'))=-\alpha\cdot(\mathbf{t}\otimes\mathbf{t}')+\beta\cdot(\mathbf{t}\otimes\mathbf{r}'+\mathbf{t}'\otimes\mathbf{r})+\gamma\cdot(\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}')$$

teljesül.

<u>6.Állítás</u> - Legyen $\mathbf{n}\in\frac{E}{I}$, $|\mathbf{n}|=1$. Ha $a,b,c\in\mathbb{R}$ és $f\in I\otimes I$, akkor

$$\mathbf{g}_{a,b,c,f;\mathbf{n}} \in Lor(I\times I\times\frac{\mathbf{n}^\perp}{I},I)$$

pontosan akkor teljesül, ha

- $\dim E=1$ esetén $ac+b^2>0$;
- $\dim E=2$ esetén $f\neq0$ és

- ha $f>0$, akkor $ac+b^2>0$;

- ha $f<0$, akkor $a<0$ és $c>0$ és $ac+b^2<0$;

- $\dim \mathbf{E}\geq 3$ esetén $f>0$ és $ac+b^2>0$.

<u>Bizonyítás</u> - Ha $\dim \mathbf{E}=1$, akkor $\frac{\mathbf{n}^{\perp}}{\mathrm{I}}=\{0\}$, ami azt mutatja, hogy ekkor az állítás következik a 4.Lemmából.

Tegyük fel, hogy $\dim \mathbf{E}\geq 2$ és legyen

$$\mathbf{M}:=\mathrm{I}\times\mathrm{I}\times\frac{\mathbf{n}^{\perp}}{\mathrm{I}} \quad ; \quad \mathbf{M}'':=\mathrm{I}\times\mathrm{I}\times\{0\} \quad ; \quad \mathbf{M}':=\{0\}\times\{0\}\times\frac{\mathbf{n}^{\perp}}{\mathrm{I}}.$$

Bármilyenek is legyenek a,b,c és f; az $\mathbf{M}'\subseteq\mathbf{M}$ lineáris altér ortokomplementuma a $\mathbf{g}:=\mathbf{g}_{a,b,c,f;\mathbf{n}}:\mathbf{M}\times\mathbf{M}\to\mathrm{I}\otimes\mathrm{I}$ bilineáris forma szerint

egyenlő a $\{(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{v})\in\mathbf{M}\,|\,f\otimes\mathbf{v}=0\}$ altérrel. Ha ha $f=0$, akkor az $\mathbf{M}'$ altér minden eleme $\mathbf{g}$-ortogonális az $\mathbf{M}$-re és $\dim\mathbf{M}'\geq 1$; ezért $\mathbf{g}$ nemelfajultsága esetén $f\neq 0$. Ezért ha $\mathbf{g}$ nemelfajult, akkor $\mathbf{M}'$ $\mathbf{g}$-ortokomplementuma *egyenlő* $\mathbf{M}''$-vel és természetesen $\mathbf{M}'\oplus\mathbf{M}''=\mathbf{M}$. Továbbá; a $\mathbf{g}$ leszűkítése $\mathbf{M}'\times\mathbf{M}'$-re $f\neq 0$ esetén $\mathrm{B}_0(\mathbf{M}',\mathrm{I})$-nek vagy

$\mathrm{B}_m(\mathbf{M}',\mathrm{I})$-nek eleme, ahol $m:=\dim\frac{\mathbf{n}^{\perp}}{\mathrm{I}}=\dim\mathbf{E}-1$, a szerint, hogy $f>0$, vagy $f<0$.

Most tegyük fel, hogy $\dim\mathbf{E}=2$. Ekkor $\mathbf{g}\in\mathrm{Lor}(\mathbf{M},\mathrm{I}):=\mathrm{B}_1(\mathbf{M},\mathrm{I})$ esetén a fentiek szerint $f\neq 0$ és $\mathbf{g}$ leszűkítése $\mathbf{M}'\times\mathbf{M}'$-re $\mathrm{B}_0(\mathbf{M}',\mathrm{I})$-ben van, ha $f>0$ és $\mathrm{B}_1(\mathbf{M}',\mathrm{I})$-nek eleme, ha $f<0$. Ezért az 1.Lemma szerint $\mathbf{g}\in\mathrm{Lor}(\mathbf{M},\mathrm{I})$ esetén:

a) Ha $f>0$, akkor $\mathbf{g}$ leszűkítése $\mathbf{M}''\times\mathbf{M}''$-re $\mathrm{B}_1(\mathbf{M}'',\mathrm{I})$-nek eleme.

b) Ha $f<0$, akkor $\mathbf{g}$ leszűkítése $\mathbf{M}''\times\mathbf{M}''$-re $\mathrm{B}_0(\mathbf{M}'',\mathrm{I})$-nek eleme.

Az a) esetben a 4.Lemma szerint $ac+b^2>0$ és a b) esetben $a<0$ és $c>0$ és $ac+b^2<0$, amint állítottuk. Megfordítva; ha $f>0$ és $ac+b^2>0$, akkor a 4.Lemma szerint a $\mathbf{g}$ leszűkítése $\mathbf{M}''\times\mathbf{M}''$-re $\mathrm{B}_1(\mathbf{M}'',\mathrm{I})$-nek eleme és $\mathbf{M}''$ $\mathbf{g}$-ortokomplementuma egyenlő $\mathbf{M}'$-vel és (mivel $f>0$) a $\mathbf{g}$ leszűkítése $\mathbf{M}'\times\mathbf{M}'$-re $\mathrm{B}_0(\mathbf{M}',\mathrm{I})$-nek eleme. Ezért ekkor az 1.Lemma alapján $\mathbf{g}\in\mathrm{Lor}(\mathbf{M},\mathrm{I})$. Ha $f<0$ és $a<0$ és $c>0$ és $ac+b^2<0$, akkor a 4.Lemma alapján a $\mathbf{g}$ leszűkítése $\mathbf{M}''\times\mathbf{M}''$-re $\mathrm{B}_0(\mathbf{M}'',\mathrm{I})$-nek eleme és az $\mathbf{M}''$ $\mathbf{g}$-ortokomplementuma $\mathbf{M}'$-vel egyenlő és a $\mathbf{g}$ leszűkítése $\mathbf{M}'\times\mathbf{M}'$-re $\mathrm{B}_1(\mathbf{M}'',\mathrm{I})$-nek eleme, tehát ismét az 1.Lemma szerint $\mathbf{g}\in$ $\in\mathrm{Lor}(\mathbf{M},\mathrm{I})$.

Most tegyük fel, hogy $\dim\mathbf{E}\geq 3$ és legyen $\mathbf{g}\in\mathrm{Lor}(\mathbf{M},\mathrm{I})$. Ekkor a $\mathbf{g}$

nemelfajultsága miatt $f\neq 0$ és ha $f<0$ volna, akkor a $\mathbf{g}$ leszűkítése $\mathbf{M}'\times\mathbf{M}'$-re $B_m(\mathbf{M}',\mathrm{I})$-nek eleme volna, ahol $m:=\dim\frac{\mathbf{n}^{\perp}}{\mathrm{I}}=\dim\mathrm{E}-1\geq 2$. Ez a az 1.Lemma szerint lehetetlen, ezért szükségképpen $f>0$. Ekkor viszont a $\mathbf{g}$ leszűkítése $\mathbf{M}'\times\mathbf{M}'$-re eleme $B_0(\mathbf{M}',\mathrm{I})$-nek és mivel a feltevés szerint a $\mathbf{g}\in B_1(\mathbf{M},\mathrm{I})$, ezért az 1.Lemma alapján a $\mathbf{g}$ leszűkítése $\mathbf{M}''\times\mathbf{M}''$-re $B_1(\mathbf{M}'',\mathrm{I})$-ben van. Ez viszont a 4.Lemma szerint azt jelenti, hogy $ac+b^2>0$. Megfordítva; tegyük fel, hogy $\dim\mathrm{E}\geq 3$ és $f>0$ és $ac+b^2>0$. Ekkor a $\mathbf{g}$ leszűkítése $\mathbf{M}'\times\mathbf{M}'$-re eleme $B_0(\mathbf{M}',\mathrm{I})$-nek és a $\mathbf{g}$ leszűkítése $\mathbf{M}''\times\mathbf{M}''$-re a 4.Lemma és a feltevés alapján $B_1(\mathbf{M}'',\mathrm{I})$-ben van, tehát ismét az 1.Lemmára hivatkozva kapjuk, hogy $\mathbf{g}\in B_1(\mathbf{M},\mathrm{I})=:\mathrm{Lor}(\mathbf{M},\mathrm{I})$.∎

A következő állítás a $\mathbf{g}_{a,b,c,f;\mathbf{n}}$ alakú bilineáris formák "transzformációs szabályát" írja le.

<u>7.Állítás</u> - Legyen $\mathbf{n}\in\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{I}}$, $|\mathbf{n}|=1$ és $a',b',c'\in\mathbb{R}$ és $f'\in\mathrm{I}\otimes\mathrm{I}$. Legyen $s\equiv\begin{pmatrix} s_{00} & s_{01}\\ s_{10} & s_{11}\end{pmatrix}\in\mathrm{End}(\mathrm{I}\times\mathrm{I})\equiv M_2(\mathbb{R})$, $R\in O(\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{I}},(\cdot|\cdot))$ és jelölje L azt az $\mathrm{I}\times\mathrm{I}\times\frac{\mathbf{n}^{\perp}}{\mathrm{I}}\to\mathrm{I}\times\mathrm{I}\times\frac{(R\mathbf{n})^{\perp}}{\mathrm{I}}$ lineáris operátort, amelyre $(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{v})\in\mathrm{I}\times\mathrm{I}\times\frac{\mathbf{n}^{\perp}}{\mathrm{I}}$ esetén:

$$L(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{v})=(s_{00}\mathbf{t}+s_{01}\mathbf{r},\,s_{10}\mathbf{t}+s_{11}\mathbf{r},\,R\mathbf{v}).$$

(Ezt a kapcsolatot így jelöljük: $L\equiv\begin{pmatrix} s & 0\\ 0 & R\end{pmatrix}$.) Ekkor

$$\mathbf{g}_{a',b',c',f';R\mathbf{n}}\circ(L\times L)=\mathbf{g}_{a,b,c,f;\mathbf{n}}\ ,$$

ahol:

$$\begin{aligned} a &= a's_{00}^2-2b's_{00}s_{10}-c's_{10}^2\\ b &= b'(s_{00}s_{11}+s_{01}s_{10})-a's_{00}s_{01}+c's_{10}s_{11}\\ c &= c's_{11}^2+2b's_{01}s_{11}-a's_{01}^2\\ f &= f'. \end{aligned}$$

<u>Bizonyítás</u> - Egészen egyszerű számolás mutatja, hogy ha $(\mathbf{t}',\mathbf{v}',\mathbf{r}')$ és $(\mathbf{t}'',\mathbf{r}'',\mathbf{v}'')$ eleme $\mathrm{I}\times\mathrm{I}\times\frac{\mathbf{n}^{\perp}}{\mathrm{I}}$-nek, akkor

$$\left(\mathbf{g}_{a',b',c',f';R\mathbf{n}}\circ(L\times L)\right)((\mathbf{t}',\mathbf{v}',\mathbf{r}'),(\mathbf{t}'',\mathbf{r}'',\mathbf{v}'')) =$$

$$= \mathbf{g}_{a',b',c',f';R\mathbf{n}}\left(\begin{pmatrix} s_{00}\mathbf{t}'+s_{01}\mathbf{r}' \\ s_{10}\mathbf{t}'+s_{11}\mathbf{r}' \\ R\mathbf{v}' \end{pmatrix},\begin{pmatrix} s_{00}\mathbf{t}''+s_{01}\mathbf{r}'' \\ s_{10}\mathbf{t}''+s_{11}\mathbf{r}'' \\ R\mathbf{v}'' \end{pmatrix}\right) :=$$

$$:= -a'(s_{00}\mathbf{t}'+s_{01}\mathbf{r}')\otimes(s_{00}\mathbf{t}''+s_{01}\mathbf{r}'') +$$

$$+b'((s_{00}\mathbf{t}'+s_{01}\mathbf{r}')\otimes(s_{10}\mathbf{t}''+s_{11}\mathbf{r}'')+(s_{00}\mathbf{t}''+s_{01}\mathbf{r}'')\otimes(s_{00}\mathbf{t}'+s_{01}\mathbf{r}'))+$$

$$+c'(s_{10}\mathbf{t}'+s_{11}\mathbf{r}')\otimes(s_{10}\mathbf{t}''+s_{11}\mathbf{r}'') + f''(R\mathbf{v}'|R\mathbf{v}'') =$$

$$= \mathbf{g}_{a,b,c,f;\mathbf{n}}((\mathbf{t}',\mathbf{v}',\mathbf{r}'),(\mathbf{t}'',\mathbf{r}'',\mathbf{v}'')),$$

ahol $a,b,c\in\mathbb{R}$ és $f\in I\otimes I$ éppen azok az objektumok, amiket az állításban felírtunk.∎

pn3. Egyszerű Lorentz-sokaságok

Ebben a pontban I *rögzített egydimenziós valós vektorteret jelöl.*

A "sokaság" szó a "tiszta, valós, végesdimenziós, C^{∞}*-osztályú, Hausdorff-sokaság" kifejezés rövidítése lesz.*

Ha M *sokaság, és* **M** *olyan valós vektortér, hogy* $\dim M = \dim \mathbf{M}$, *akkor* $\mathrm{Ch}(M;\mathbf{M})$ *jelöli az* M *sokaság* **M**-*be vezető térképeinek halmazát (ha* **M** *nem ilyen objektum, akkor* $\mathrm{Ch}(M;\mathbf{M}):=\emptyset$*). Az* M *sokaság* $a\in M$ *pontbeli érintőterét* $\mathbf{T}_a(M)$ *jelöli.*

Ha M *sokaság és* $\varphi\in\mathrm{Ch}(M;\mathbf{M})$, *akkor* $a\in\mathcal{D}_{\varphi}$ *esetén* $\theta_{\varphi,a}$ *jelöli a* φ *térkép által meghatározott* $\mathbf{M}\to\mathbf{T}_a(M)$ *lineáris bijekciót.*

Ha M *és* M′ *sokaságok és* $\Psi:M\to M'$ C^{∞}*-osztályú leképezés, akkor minden* $a\in M$ *pontra* $\mathrm{T}_a(\Psi):\mathbf{T}_a(M)\to\mathbf{T}_{\Psi(a)}(M')$ *a* Ψ *érintő-operátora (vagy deriváltja) az* a-*ban.*

Ha $\mathbb{M}$ *végesdimenziós valós affin tér a* **M** *vektortér felett, akkor* $\mathbb{M}$-*t a természetes sokaság-struktúrával ellátva sokaságnak tekintjük; továbbá az* $\mathbb{M}$ *minden nyílt részhalmazát a természetes részsokaság struktúrával ellátottnak gondoljuk. Ekkor minden* $M\subseteq\mathbb{M}$ *nyílt halmazra és* $M\ni a$-*ra* $\mathbf{T}_a(M)$ *kitüntetett módon azonosul* **M**-*mel, tehát az* M *feletti* C^{∞}*-osztályú vektormezők (ill. kovektormezők) azonosulnak a* $C^{\infty}(M;\mathbf{M})$ *(ill.* $C^{\infty}(M;\mathbf{M}^*)$*) függvényterekkel, amik modulusok a* $C^{\infty}(M;\mathbb{R})$ *függvényalgebra felett.*

Definíció - Az (M,g) párt *Lorentz-sokaságnak* nevezzük (I *felett*), ha

- M legalább kétdimenziós sokaság;
- $g\in\prod_{a\in M}\mathrm{Lor}(\mathbf{T}_a(M),\mathrm{I})$ olyan rendszer, hogy ha ξ,ξ' C^{∞}-osztályú vektormezők M felett, akkor az $M\to\mathrm{I}\otimes\mathrm{I};\ a\mapsto g_a(\xi(a),\xi'(a))$ leképezés C^{∞}-osztályú.

Az (M,g) párt *egyszerű Lorentz-sokaságnak* nevezzük (I *felett*), ha az (M,g) pár olyan Lorentz-sokaság, amelynek létezik globális térképe (vagy ami ugyanaz; létezik egy elemű atlasza).

Minden egyszerű Lorentz-sokaság parallelizálható. A Lorentz-sokaságok definíciójában szereplő, g-re vonatkozó simasági feltétel ekvivalens azzal, hogy minden ξ C^∞-osztályú M feletti vektormezőre az $M\to I\otimes I$; $a\mapsto g_a(\xi(a),\xi(a))$ függvény C^∞-osztályú; ez a polarizációs formula következménye.

<u>Definíció</u> - Legyenek M' és M sokaságok, $g'\in\prod_{a'\in M'}\mathrm{Lor}(T_{a'}(M'),I)$ és $\Psi:M\to M'$ C^∞-osztályú függvény. Ekkor a

$$\Psi^*g'\in\prod_{a\in M}\mathrm{Lor}(T_a(M),I)\ ;\ a\mapsto g'_{\Psi(a)}\circ(T_a(\Psi)\times T_a(\Psi))$$

rendszert a g' Ψ-*által létesített inverz képének* nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy ha M, M' és M'' sokaságok és

$$g''\in\prod_{a''\in M''}\mathrm{Lor}(T_{a''}(M''),I)$$

gok és $\Psi:M\to M'$, $\Psi':M'\to M''$ C^∞-osztályú függvények, akkor

$$\Psi^*(\Psi'^*g'')=(\Psi'\circ\Psi)^*g''$$

teljesül. Ez az inverz kép definíciójából és a közvetett függvény differenciálási szabályából következik.

<u>Definíció</u> - Az (M,g) Lorentz-sokaság *Lorentz-részsokaságának* nevezünk minden olyan (M',g') Lorentz-sokaságot, amelyre $M'\subseteq M$ nyílt halmaz és $\iota^*g=g'$, ahol $\iota:M'\to M$ a kanonikus injekció. Az (M',g') Lorentz-részsokaság *valódi*, ha $M'\neq M$.

<u>Definíció</u> - Az (M,g) és (M',g') Lorentz-sokaságokat *izomorfaknak* nevezzük, ha létezik olyan $\Psi:M\to M'$ C^∞-diffeomorfizmus, hogy $\Psi^*g'=g$ teljesül. Az (M,g) és (M',g') Lorentz-sokaságok izomorfikusságát az $(M,g)\cong(M',g')$ jellel jelöljük. Az (M,g) Lorentz-sokaság *automorfizmusának* nevezünk minden olyan $\Psi:M\to M$ C^∞-diffeomorfizmust, amelyre $\Psi^*g=g$ teljesül. Az (M,g) Lorentz-sokaság automorfizmusainak halmazát $\mathrm{Aut}(M,g)$ jelöli.

Az izomorfia-reláció ekvivalenciareláció a Lorentz-sokaságok között. Ez a definíciót megelőző egyenlőségből és az inverz függvény differenciálási szabályából következik. Ha (M,g) Lorentz-sokaság, akkor $\mathrm{Aut}(M,g)$ a kompozícióval ellátva csoport; ez az adott Lorentz-sokaság *automorfizmus-csoportja*.

(<u>Meta</u>)<u>Definíció</u> - Ha **x** betű, akkor $\mathfrak{Lor}(\mathbf{x})$ a következő kijelen~~e~~tés rövidítése

$$(\exists \mathbf{y})(\exists \mathbf{z})(\mathbf{x}=(\mathbf{y},\mathbf{z})\&\text{"}(\mathbf{y},\mathbf{z})\text{ Lorentz-sokaság"})$$

ahol **y** és **z** tetszőleges egymástól és **x**-től különböző betűk. Azt mondjuk, hogy az A kijelentés az **x** változójában *Lorentz-sokaságokra vonatkozó abszolút kijelentés* (vagy *tulajdonság*), ha

- $\mathbf{A}\Rightarrow\mathfrak{Lor}(\mathbf{x})$ tétel és

- $(\forall \mathbf{y})(\forall \mathbf{z})\big((\mathfrak{Lor}(\mathbf{y})\&\mathfrak{Lor}(\mathbf{z})\&(\mathbf{y}\cong\mathbf{z}))\Rightarrow((\mathbf{y}|\mathbf{x})\mathbf{A}\Leftrightarrow(\mathbf{z}|\mathbf{x})\mathbf{A})\big)$ tétel, ha az az **y** és **z** betűk egymástól különböznek és **A**-ban nem szerepelnek.

Az általános relativitáselmélet alapfeladata a négydimenziós Lorentz-sokaságokra vonatkozó abszolút kijelentések ekvivalenciaosztályainak előállítása (*volna*). Fizikai szempontból az abszolút kijelentések tekinthetők a "fizikailag értelmes" kijelentéseknek (ez valójában a "fizikailag értelmes" fogalom *definíciója* és *nem* "*elv*"; ez azért hangsúlyozandó, mert a fizika könyvekben ezt a definíciót nevezik az *általános relativitás elvének*.) Ez természetesen nem azt jelenti, hogy a nem abszolút kijelentések vagy tulajdonságok értéktelenek volnának, hiszen a tipikus esetben éppen nem abszolút kijelentések sorozata vezet el abszolút kijelentésekhez.

Azonban könnyen megadható fontos abszolút fogalom közvetlenül is, amint az a következő definícióból látható.

<u>Definíció</u> - Ha G csoport, akkor az (M,g) Lorentz-sokaságot G-*szimmetrikusnak* nevezzük, ha az Aut(M,g) automorfizmus-csoportnak létezik G-vel (csoport-)izomorf részcsoportja. Az (M,g) Lorentz-sokaság (*térben*) *gömbszimmetrikus*, ha $SO(\dim M-1,\mathbb{R})$-szimmetrikus.

Például minden speciális relativisztikus téridő-modell gömbszimmetrikus egyszerű Lorentz-sokaság (sőt még ennél is sokkal "szimmetrikusabb"). Ezzel természetesen nem állítottuk, hogy a Poincaré-csoportnak volna olyan kitüntetett részcsoportja, amely izomorf a háromdimenziós forgáscsoporttal. Az $SO(3,\mathbb{R})$ sokféleképpen beinjektálható a Poincaré-csoportba csoport-morfikusan.

8.Állítás - Ha G csoport, akkor a Lorentz-sokaságok G-szimmetrikussága abszolút tulajdonság.■

Általánosabban; minden *homeomorfikusan* vagy *diffeomorfikusan* invariáns tulajdonság Lorentz-sokaságokra vonatkozóan abszolút. (Például egy Lorentz-sokaság *összefüggősége* vagy *kompaktsága* vagy éppenséggel az *egyszerűsége* abszolút tulajdonság; a két előbbi homeomorfikusan, az utolsó pedig diffeomorfikusan invariáns.)

9.Állítás - Legyen $\mathbb{M}$ végesdimenziós valós affin tér a $\mathbf{M}$ vektortér felett és $\dim\mathbb{M}\geq 2$. Legyen $M\subseteq\mathbb{M}$ nem üres nyílt halmaz és

$$g : M \to \mathrm{Lor}(\mathbf{M},\mathbf{I}) \;;\; a \mapsto g_a$$

olyan függvény, hogy minden $\xi\in C^{\infty}(M;\mathbf{M})$ függvényre az $M\to\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}$; $a\mapsto g_a(\xi(a),\xi(a))$ függvény C^{∞}-osztályú. Ekkor (M,g) egyszerű Lorentz-sokaság és minden egyszerű Lorentz-sokaság izomorf egy ilyen alakú egyszerű Lorentz-sokasággal.■

Elnevezés - Az (M,g) egyszerű Lorentz-sokaságot
- *aritmetikainak* nevezzük, ha van olyan $N\in\mathbb{N}$, $N\geq 2$, hogy az M sokaság egyenlő $\mathbb{R}^N$ valamelyik (nem feltétlenül nyílt) részsokaságával;
- *vektoriálisnak* nevezzük, ha van olyan végesdimenziós, legalább kétdimenziós $\mathbf{M}$ valós vektortér, hogy az M sokaság egyenlő az $\mathbf{M}$ valamelyik (nem feltétlenül nyílt) részsokaságával;
- *affinnak* nevezzük, ha van olyan végesdimenziós, legalább kétdimenziós $\mathbb{M}$ valós affin tér, hogy az M sokaság egyenlő az $\mathbb{M}$ valamelyik (nem feltétlenül nyílt) részsokaságával.

A fenti állítás szerint minden egyszerű Lorentz-sokaság izomorf (rengeteg) aritmetikai, vektoriális és affin Lorentz-sokasággal. Az elnevezés szerint minden aritmetikai egyszerű Lorentz-sokaság vektoriális és minden vektoriális egyszerű Lorentz-sokaság affin.

Azonban egyszerű Lorentz-sokaságnak *nem abszolút tulajdonsága* az, hogy az alatta fekvő sokaság egy affin térbeli nyílt részsokasággal *egyenlő* (az már abszolút tulajdonság, hogy egy ilyen nyílt részsokasággal *diffeomorf*). Ezért az affin térbeli nyílt részsokaság-bázisú Lorentz-sokaságok vizsgálata csak annyiban lehet előnyös, amennyiben ezekre könnyebb abszolút tulajdonságokat felfedezni, mint más (pl. aritmetikai-, vagy vektortér-bázisú) Lorentz-sokaságokra. (Lényegében minden utólagos tapasztalat azt mutatja, hogy egyáltalán nem könnyebb, sőt az affin terekkel kapcsolatos vitathatatlan "abszolút jelleg" félrevezető lehet; abszolútnak hihetünk nem abszolút tulajdonságokat is -pl. a Lorentz-sokaság *nem folytathatóságát*.)

<u>Definíció</u> - Legyen (M,g) Lorentz-sokaság és M' olyan sokaság, amelynek M ~~nyílt~~ részsokasága. Azt mondjuk, hogy (M,g) *folytatható M'-ben*, ha van olyan (M'',g'') Lorentz-sokaság, hogy $M''\subseteq M'$ ~~nyílt~~ részsokaság és $M\subseteq M''$, $M\neq M''$ és $\iota^{*}(g'')=g$, ahol $\iota:M\to M''$ a kanonikus injekció.

<u>Definíció</u> - Azt mondjuk, hogy az (M,g) Lorentz-sokaság *kiterjeszthető*, ha van olyan *összefüggő* Lorentz-sokaság, amelynek létezik (M,g)-vel izomorf valódi Lorentz-részsokasága. A nem kiterjeszthető Lorentz-sokaságokat *maximálisaknak* nevezzük.

A definícióban egészen lényeges az összefüggőségi feltétel, különben minden Lorentz-sokaság kiterjeszthető volna, vagyis nem létezne maximális Lorentz-sokaság. Valóban, ha (M,g) Lorentz-sokaság és (M',g') tetszőleges olyan Lorentz-sokaság, hogy az M és M' sokaságok dimenziói egyenlők (pl. $(M',g'):=(M,g)$), akkor az M és M' sokaságok diszjunkt unióját véve és arra természetes módon folytatva g-t és g'-t; olyan Lorentz-sokaságot kapunk, amelynek van (M,g)-vel izomorf Lorentz-részsokasága, azonban ez a diszjunkt unió *nem összefüggő*. Persze ez még nem bizonyítja maximális Lorentz-sokaság *létezését*. (A maximális Lorentz-sokaságok egzisztenciájának problémája látszik a Lorentz-sokaságok elméletében a legnehezebb problémának.)

Lorentz-sokaság folytathatósága vagy nem folytathatósága *nem abszolút tulajdonság* (ezt a Lemaitre-téridő konkrét példáján látjuk majd), ugyanakkor Lorentz-sokaság kiterjeszthetősége vagy maximalitása abszolút tulajdonság (ami a definíció szerint triviális).

<u>Jelölés</u> - Ha (M,g) és (M',g') Lorentz-sokaságok, akkor az

$$(M,g)\le(M',g')$$

szimbólum azt fogja jelenteni, hogy létezik (M',g')-nek olyan (nem feltétlenül valódi) Lorentz-részsokasága, amely izomorf az (M,g)-vel.

A Lorentz-sokaságok között imént bevezetett $\le$ kapcsolat nyilván reflexív és tranzitív, azonban triviálisan *nem antiszimmetrikus*, hiszen ha (M,g) és (M',g') izomorf, de *nem egyenlő* Lorentz-sokaságok, akkor $(M,g)\le(M',g')$ és $(M',g')\le(M,g)$ teljesül. A maximális Lorentz-sokaságok egzisztenciájának problémája ekvivalens a fent értelmezett $\le$ előrendezés szerint maximális elemek létezésével.

<u>4. Vektoriális és affin egyszerű Lorentz-sokaságok konstrukciója</u>

Ebben a pontban I *egydimenziós valós vektorteret jelöl, amelyre néhány állításban megköveteljük az orientáltságot. Továbbá* $\mathbb{M}$ *végesdimenziós, legalább kétdimenziós valós affin teret jelöl.*

<u>Definíció</u> - Az $\mathbf{M}$ végesdimenziós valós vektortér feletti *Lorentz-struktúrának* nevezünk minden olyan $(\mathbf{g},\mathbf{c})$ párt, ahol $\mathbf{g}\in\mathrm{Lor}(\mathbf{M},\mathrm{I})$ és $\mathbf{c}\in\frac{\mathbf{M}}{\mathrm{I}}$ olyan vektor, hogy ${}_{\mathrm{I}}\mathbf{g}_{\mathrm{I}}(\mathbf{c},\mathbf{c})=-1$.

<u>Jelölés</u> - Ha $(\mathbf{g},\mathbf{c})$ Lorentz-struktúra az $\mathbf{M}$ végesdimenziós valós vektortér felett, akkor

- $\mathbf{E}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}:=\{\mathbf{x}\in\mathbf{M}\mid {}_{\mathrm{I}}\mathbf{g}(\mathbf{c},\mathbf{x})=0\}$;
- $\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}:\mathbf{M}\to\mathbf{E}_{\mathbf{g},\mathbf{c}};\ \mathbf{x}\mapsto\mathbf{x}+\mathbf{c}\otimes{}_{\mathrm{I}}\mathbf{g}(\mathbf{c},\mathbf{x})$;
- $[\cdot|\cdot]_{\mathbf{g},\mathbf{c}}:=\mathbf{g}\big|_{\mathbf{E}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}\times\mathbf{E}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}}:\mathbf{E}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}\times\mathbf{E}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}\to\mathrm{I}\otimes\mathrm{I}$;

- $(\cdot|\cdot)_{g,c} := {}_I g_I \Big|_{\frac{E_{g,c}}{I}\times\frac{E_{g,c}}{I}} : \frac{E_{g,c}}{I}\times\frac{E_{g,c}}{I} \to \mathbb{R}$;

- $S_{g,c}: M\to I\times E_{g,c}$; $x\mapsto(-{}_I g(c,x), x+c\otimes_I g(c,x))$;

- ha I orientált, akkor

$$F_{g,c}: M\to I\times I \quad ; \quad x\mapsto(-{}_I g(c,x), |\pi_{g,c}(x)|);$$

- ha I orientált, akkor:

$$\omega_{g,c}: M\setminus c\otimes I\to\frac{E_{g,c}}{I} \quad ; \quad x\mapsto\frac{\pi_{g,c}(x)}{|\pi_{g,c}(x)|};$$

- $u,u'\in\frac{M}{I}$ esetén $u'\underset{g}{\odot}u: M\times M\to I\otimes I$ az a szimmetrikus bilineáris forma M felett, amelyre $x,x'\in M$ esetén:

$$(u'\underset{g}{\odot}u)(x',x) := \frac{1}{2}({}_I g(u',x')\otimes_I g(u,x)+{}_I g(u',x)\otimes_I g(u,x')).$$

Legyen **M** végesdimenziós valós vektortér és (g,c) Lorentz-struktúra **M** felett. Ekkor $[\cdot|\cdot]_{g,c}: E_{g,c}\times E_{g,c}\to I\otimes I$ euklidészi forma az $E_{g,c}$ végesdimenziós valós vektortér felett és $S_{g,c}$ lineáris izomorfizmus **M** és $I\times E_{g,c}$ között. Ezért a $\mathrm{Lor}(M,I)$ és a $\mathrm{Lor}(I\times E_{g,c},I)$ halmazok az $S_{g,c}$ által bijektív kapcsolatban állnak, azaz a

$$\mathrm{Lor}(I\times E_{g,c},I)\to\mathrm{Lor}(M,I) \quad ; \quad g'\mapsto g'\circ(S_{g,c}\times S_{g,c})$$

függvény bijekció.

Megfordítva, legyen **E** végesdimenziós valós vektortér és legyen $[\cdot|\cdot]: E\times E\to I\otimes I$ euklidészi forma **E** felett. Ekkor $M:=I\times E$ végesdimenziós valós vektortér és a

$$g: M\times M\to I\otimes I; \quad ((t,q),(t',q'))\mapsto -t\otimes t'+[q|q']$$

leképezésre és a $c:=(1,0)\in\frac{M}{I}(\equiv\mathbb{R}\times\frac{E}{I})$ vektorra teljesül az, hogy a (g,c) pár olyan Lorentz-struktúra **M** felett, hogy $E_{g,c}\equiv E$ és $[\cdot|\cdot]_{g,c}\equiv[\cdot|\cdot]$ és $S_{g,c}=\mathrm{id}_{I\times E}$.

Ez azt mutatja, hogy *teljesen egyenértékű* egy végesdimenziós valós vektorteret tekinteni, amelyen adott egy Lorentz-struktúra és egy $\mathbf{I}\times\mathbf{E}$ alakú vektorteret tekinteni, ahol $\mathbf{E}$ végesdimenziós valós vektortér és adott $\mathbf{E}$-n egy $\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}$ értékű euklidészi forma által meghatározott struktúra. Ezért:

Ebben a pontban $\mathbf{E}$ *legalább egydimenziós, végesdimenziós valós vektorteret jelöl, továbbá* $[\cdot|\cdot]:\mathbf{E}\times\mathbf{E}\to\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}$ *euklidészi forma* $\mathbf{E}$ *felett. Az* $\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}$ *vektortér* $(\cdot|\cdot)$ *szerinti egységgömb felületét*

$$\mathbb{S}(\tfrac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}},(\cdot|\cdot))$$

fogja jelölni; ezt a halmazt a természetes sokaság struktúrával ellátva sokaságnak tekintjük. Minden $\mathbf{n}\in\mathbb{S}(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}},(\cdot|\cdot))$ *pontban az* $\mathbb{S}(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}},(\cdot|\cdot))$ *sokaság érintőterét az* $\mathbf{n}$ *pontban azonosítjuk az* $\frac{\mathbf{n}^{\perp}}{\mathbf{I}}$ *hipersíkkal* $\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}$*-ben.*

Ha $\mathbf{I}$ *orientált, akkor* $\mathbf{I}^{+}$ *jelöli az* $\mathbf{I}$ *szigorúan pozitív elemeinek halmazát és* $\mathbf{q}\in\mathbf{E}$ *esetén a* $|\mathbf{q}|:=\sqrt{[\mathbf{q}|\mathbf{q}]}\in\mathbf{I}$.

<u>10.Állítás</u> - Legyen $M\subseteq\mathbf{I}\times\mathbf{E}$ nem üres nyílt halmaz és $g:M\to\mathrm{Lor}(\mathbf{I}\times\mathbf{E},\mathbf{I})$ függvény. Az (M,g) pár pontosan akkor (egyszerű) Lorentz-sokaság, ha egyértelműen létezik olyan

$$(\alpha,\beta,\gamma)\in C^{\infty}(M;\mathbb{R}\times\tfrac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\times\mathrm{Sym}(\mathbf{E},[\cdot|\cdot]))$$

függvény, hogy minden $M\ni a$-ra és $\mathbf{I}\times\mathbf{E}\ni(\mathbf{t},\mathbf{q}),(\mathbf{t}',\mathbf{q}')$-re

$$g_{a}((\mathbf{t},\mathbf{q}),(\mathbf{t}',\mathbf{q}'))=-\alpha(a)\mathbf{t}\otimes\mathbf{t}'+\mathbf{t}\otimes(\beta(a)|\mathbf{q}']+\mathbf{t}'\otimes(\beta(a)|\mathbf{q}]+[\gamma(a)\mathbf{q}|\mathbf{q}']$$

és minden $M\ni a$-ra az

$$(\alpha(a),\beta(a),\gamma(a))\in\mathbb{R}\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\right)\times\mathrm{Sym}(\mathbf{E},[\cdot|\cdot])$$

hármasra az 1.Tétel (I)-(IV) alternatívái közül pontosan egy teljesül.

<u>Bizonyítás</u> - Ez az 1.Tétel és a 9.Állítás nyilvánvaló következménye.∎

<u>Jelölés</u> - Legyen $M\subseteq\mathbf{I}\times\mathbf{E}$ nem üres nyílt halmaz és

$$(\alpha,\beta,\gamma) \in C^{\infty}(M;\mathbb{R}\times\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\times\mathrm{Sym}(\mathbf{E},[\cdot|\cdot]))$$

olyan függvény, hogy minden $M\ni a$-ra az

$$(\alpha(a),\beta(a),\gamma(a)) \in \mathbb{R}\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\right)\times\mathrm{Sym}(\mathbf{E},[\cdot|\cdot])$$

hármasra az 1.Tétel (I)-(IV) alternatívái közül pontosan egy teljesül. Ekkor $g_{\alpha,\beta,\gamma}$ jelöli az

$$M \to \mathrm{Lor}(\mathbf{I}\times\mathbf{E},\mathbf{I}) \quad ; \quad a \mapsto \mathbf{g}_{\alpha(a),\beta(a),\gamma(a)}$$

leképezést.

Következmény - Legyen $\mathbb{M}$ végesdimenziós valós affin tér a $\mathbf{M}$ vektortér felett, $\dim\mathbb{M}\geq 2$ és $(\mathbf{g},\mathbf{c})$ Lorentz-struktúra $\mathbf{M}$ felett. Ha $M\subseteq\mathbb{M}$ nem üres nyílt halmaz és $g:M\to\mathrm{Lor}(\mathbf{M},\mathbf{I})$ függvény, akkor az (M,g) pár pontosan akkor (egyszerű) Lorentz-sokaság, ha egyértelműen létezik olyan

$$(\alpha,\beta,\gamma) \in C^{\infty}(M;\mathbb{R}\times\frac{\mathbf{E}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}}{\mathbf{I}}\times\mathrm{Sym}(\mathbf{E}_{\mathbf{g},\mathbf{c}},[\cdot|\cdot]_{\mathbf{g},\mathbf{c}}))$$

függvény, hogy minden $M\ni a$-ra az

$$(\alpha(a),\beta(a),\gamma(a)) \in\mathbb{R}\times\frac{\mathbf{E}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}}{\mathbf{I}}\times\mathrm{Sym}(\mathbf{E}_{\mathbf{g},\mathbf{c}},[\cdot|\cdot]_{\mathbf{g},\mathbf{c}})$$

hármasra az 1.Tétel (I)-(IV) alternatívái közül pontosan egy teljesül és minden $M\ni a$-ra és $\mathbf{M}\ni\mathbf{x},\mathbf{x}'$-re:

$$g_a(\mathbf{x},\mathbf{x}')=-\alpha(a)_{\mathbf{I}}\mathbf{g}(\mathbf{c},\mathbf{x})\otimes_{\mathbf{I}}\mathbf{g}(\mathbf{c},\mathbf{x}')+_{\mathbf{I}}\mathbf{g}(\mathbf{c},\mathbf{x})\otimes(\beta(a)|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(\mathbf{x}')]+$$
$$+_{\mathbf{I}}\mathbf{g}(\mathbf{c},\mathbf{x}')\otimes(\beta(a)|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(\mathbf{x})]+[\gamma(a)\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(\mathbf{x})|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(\mathbf{x})].\blacksquare$$

11.Állítás - Ha $\mathbf{I}$ orientált, akkor az

$$S:\mathbf{E}\setminus\{0\}\to\mathbf{I}^{+}\times S(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}},(\cdot|\cdot)) \quad ; \quad \mathbf{q}\mapsto(|\mathbf{q}|,\frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|})$$

leképezés C^{∞}-diffeomorfizmus, amelynek deriváltja a $\mathbf{q}\in\mathbf{E}\setminus\{0\}$ pontban azonos(ítható) az

$$\mathbf{E} \to \mathbf{I}\times\frac{(\mathbf{q}/|\mathbf{q}|)^{\perp}}{\mathbf{I}} \quad ; \quad \mathbf{q}' \mapsto ((\frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}|\mathbf{q}'],\ \frac{\mathbf{q}'-\frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}\otimes(\frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}|\mathbf{q}']}{|\mathbf{q}|})$$

lineáris operátorral.$\blacksquare$

Ebből következik, hogy ha (M,g) olyan egyszerű Lorentz-sokaság, hogy $M\subseteq\mathbf{I}\times(\mathbf{E}\setminus\{0\})$ nyílt halmaz, akkor

$$M' := (id_I \times S)\langle M\rangle \subseteq I\times I^+\times S(\frac{E}{I}, (\cdot|\cdot))$$

nyílt halmaz és $g' := (id_I\times S)^{-1*}g \in \prod_{(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})\in M} Lor(I\times I\times \frac{\mathbf{n}^{\perp}}{I}, I)$ olyan rendszer, hogy (M',g') Lorentz-sokaság. Ekkor az (M,g) és (M',g') Lorenzt-sokaságok az $id_I\times S|_M : M\to M'$ diffeomorfizmus által izomorfak. Megfordítva; ha (M',g') tetszőleges olyan Lorentz-sokaság, hogy $M'\subseteq I\times I^+\times S(\frac{E}{I},(\cdot|\cdot))$ nyílt halmaz és $M:=(id_I\times S)^{-1}\langle M'\rangle$ és $g:=(id_I\times S)^*g'$, akkor (M,g) olyan (M',g')-vel izomorf egyszerű Lorentz-sokaság, hogy $M\subseteq I\times(\mathbf{E}\setminus\{0\})$ nyílt halmaz.

<u>12.Állítás</u> - Ha I orientált és $\mathbb{M}$ végesdimenziós valós affin tér a $\mathbf{M}$ vektortér felett és $(\mathbf{g},\mathbf{c})$ Lorentz-struktúra $\mathbf{M}$ felett és $\sigma\in\mathbb{M}$ rögzített, akkor a

$$\Phi_{\mathbf{g},\mathbf{c},\sigma} : \mathbb{M}\setminus(\sigma+\mathbf{c}\otimes I) \to I\times I^+\times S(\frac{\mathbf{E}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}}{I}, (\cdot|\cdot)_{\mathbf{g},\mathbf{c}});$$

$$a \mapsto \left(-_I\mathbf{g}(\mathbf{c},a-\sigma), |\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)|, \frac{\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)}{|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)|}\right)$$

leképezés C^{∞}-diffeomorfizmus, amelynek deriváltja az $a\in\mathbb{M}\setminus(\sigma+\mathbf{c}\otimes I)$ pontban azonos(ítható) az

$$\mathbf{M} \to I\times I\times\frac{(\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)/|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)|)^{\perp}}{I};$$

$$\mathbf{x}\mapsto\left(-_I\mathbf{g}(\mathbf{c},\mathbf{x}), \left[\frac{\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)}{|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)|}\middle|\mathbf{x}\right], \frac{\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(\mathbf{x})-\frac{\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)}{|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)|}\otimes\left[\frac{\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)}{|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)|}\middle|\mathbf{x}\right]}{|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)|}\right)$$

lineáris operátorral.∎

Ebből következik, hogy ha (M,g) olyan Lorentz-sokaság, hogy $M\subseteq\mathbb{M}\setminus(\sigma+\mathbf{c}\otimes I)$ nyílt halmaz, akkor

$$M' := \Phi_{\mathbf{g},\mathbf{c},\sigma}\langle M\rangle \subseteq I\times I^+\times S(\frac{\mathbf{E}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}}{I}, (\cdot|\cdot)_{\mathbf{g},\mathbf{c}})$$

nyílt halmaz és $g' := \Phi_{\mathbf{g},\mathbf{c},\sigma}^{-1*}g$ olyan rendszer, hogy (M',g') az (M,g)-vel izomorf Lorentz-sokaság. Megfordítva, ha (M',g') olyan

Lorentz-sokaság, hogy

$$M'\subseteq I\times I^{+}\times S\left(\frac{E_{g,c}}{I},(\cdot|\cdot)_{g,c}\right)$$

nyílt halmaz, akkor $M:=\Phi_{g,c,\sigma}^{-1}\langle M'\rangle\subseteq \mathbb{M}\setminus(\sigma+c\otimes I)$ olyan nyílt halmaz és $g:=\Phi_{g,c,\sigma}^{*}g'$ olyan rendszer, hogy (M,g) az (M',g')-vel izomorf Lorentz-sokaság.

A fentiek alapján az egyszerű Lorentz-sokaságok *konstrukciója* szempontjából döntő jelentőségű az $I\times I^{+}\times S(\frac{E}{I},(\cdot|\cdot))$ nem üres nyílt részhalmazain értelmezhető Lorentz-bilineáris forma mezők előállítása. Ehhez ismernünk kell minden $(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})\in I\times I^{+}\times S(\frac{E}{I},(\cdot|\cdot))$ pontra e szorzatsokaság $(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})$-beli érintőterén (vagyis az $I\times I\times\frac{\mathbf{n}}{I}^{\perp}$ vektortéren) megadható Lorentz-formákat; éppen ezeket írja le az 1.Tétel 3.Következménye.

Utólag kiderül, hogy a fenti feladatnál valamivel általánosabbat kell megoldanunk, ha a Lemaitre-téridőt is tárgyalni akarjuk; ti. az $I\times I\times S(\frac{E}{I},(\cdot|\cdot))$ szorzatsokaság nyílt részhalmazain értelmezhető Lorentz-forma mezőket is le kell írnunk. Ez semmivel sem nehezebb, mint az előbb megfogalmazott feladat, mert minden $(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})\in I\times I\times S(\frac{E}{I},(\cdot|\cdot))$ pontban az $I\times I\times S(\frac{E}{I},(\cdot|\cdot))$ szorzatsokaság érintőtere *ugyanaz* az $I\times I\times\frac{\mathbf{n}}{I}^{\perp}$ vektortér.

Látni fogjuk továbbá, hogy a legfontosabb általános relativisztikus téridők (pl. Minkowski, Schwarzschild, Lemaitre, Einstein, de Sitter, Friedmann téridők) előállításához *elégséges* olyan $M\subseteq I\times I\times S(\frac{E}{I},(\cdot|\cdot))$ nyílt részhalmazokat tekinteni téridő-bázisként, melyek $\mathfrak{M}\times S(\frac{E}{I},(\cdot|\cdot))$ alakúak, ahol $\mathfrak{M}\subseteq I\times I$ nem üres nyílt halmaz. Sőt az is világossá válik, hogy az ilyen speciális alakú nyílt halmazokon egészen speciális alakú, egyszerű Lorentz-forma mezőket elég lenne konstruálni ahhoz, hogy az előbb felsorolt téridők mindegyikét tárgyalni lehessen. Azonban a Kerr-téridő (és általánosabban; a hengerszimmetrikus Lorentz-sokaságok) előállíthatósága megköveteli az általánosság magasabb szintjét.

2.Tétel - Legyen (M,g) olyan Lorentz-sokaság, hogy

$$M \subseteq I \times I \times S\left(\frac{E}{I},(\cdot|\cdot)\right)$$

nem üres nyílt halmaz. Ekkor egyértelműen léteznek olyan

$$\alpha, \beta_0, \gamma_0 : M \to \mathbb{R};$$

$$\beta_1, \gamma_1 \in \prod_{(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n}) \in M} \mathbf{n}^{\perp};$$

$$\gamma_2 \in \prod_{(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n}) \in M} I \otimes I \otimes \mathrm{Sym}\left(\frac{\mathbf{n}^{\perp}}{I}, (\cdot|\cdot)_{\frac{\mathbf{n}}{I}^{\perp}}\right)$$

függvények, hogy:

1) Minden $(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n}) \in M$ pontra és $\mathbf{d} \in I$, $\mathbf{d} \neq 0$ elemre az

$$\left(\alpha(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n}),\ \beta_0(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})\mathbf{n} + \frac{\beta_1(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})}{\mathbf{d}},\ \gamma_0(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})\cdot(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}) + \mathbf{n}\otimes\frac{\gamma_1(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})}{\mathbf{d}} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\gamma_2(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})}{\mathbf{d}\otimes\mathbf{d}} \otimes \mathrm{id}_I\right) \circ P_{\mathbf{n}^{\perp}}\right) \in \mathbb{R} \times \frac{E}{I} \times \mathrm{Sym}(E,[\cdot|\cdot])$$

hármasra az 1.Tétel (I)-(IV) alternatívái közül az egyik teljesül;

2) $\alpha, \beta_0, \gamma_0$ C^{∞}-osztályú függvények és ha $\xi \in C^{\infty}(M;\frac{E}{I})$ tetszőleges olyan vektormező, hogy minden $(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n}) \in M$ pontra $(\mathbf{n}|\xi(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n}))=0$, akkor az

$$M \to I\ ;\ (\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n}) \mapsto (\xi(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})|\beta_1(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})]$$

$$M \to I\ ;\ (\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n}) \mapsto (\xi(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})|\gamma_1(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})]$$

függvények C^{∞}-osztályúak és minden $\mathbf{a} \in I \otimes I$, $\mathbf{a} \neq 0$ elemre az

$$M \to \mathbb{R}\ ;\ (\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n}) \mapsto \left(\frac{\gamma_2(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})}{\mathbf{a}}(\xi(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n}))|\xi(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})\right)\mathbf{a}$$

függvény C^{∞}-osztályú;

3) minden $(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n}) \in M$ pontra és bármely két

$$(\mathbf{t}',\mathbf{r}',\mathbf{v}'),(\mathbf{t}'',\mathbf{r}'',\mathbf{v}'') \in I \times I \times \frac{\mathbf{n}^{\perp}}{I} \equiv T_{(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})}(M)$$

$(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})$-beli érintővektorra és $\mathbf{a} \in I \otimes I$, $\mathbf{a} \neq 0$ elemre:

$$g(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})((\mathbf{t}',\mathbf{r}',\mathbf{v}'),(\mathbf{t}'',\mathbf{r}'',\mathbf{v}''))=$$

$$=-\alpha(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{v})\cdot(\mathbf{t}'\otimes\mathbf{t}'')+\beta_0(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{v})\cdot(\mathbf{t}'\otimes\mathbf{r}''+\mathbf{t}''\otimes\mathbf{r})+\gamma_0(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{v})\cdot(\mathbf{r}'\otimes\mathbf{r}'')+$$
$$+[\beta_1(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{v})|\mathbf{t}'\otimes\mathbf{v}''+\mathbf{t}''\otimes\mathbf{v}']+[\gamma_1(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{v})|\mathbf{r}'\otimes\mathbf{v}''+\mathbf{r}''\otimes\mathbf{v}']+(\frac{\gamma_2(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})}{\mathbf{a}}(\mathbf{v}')|\mathbf{v}'')\mathbf{a}$$

teljesül.

Megfordítva; ha $M\subseteq I\times I\times S(\frac{E}{I},(\cdot|\cdot))$ nem üres nyílt halmaz és

$$\alpha,\beta_0,\gamma_0:M\to\mathbb{R};$$

$$\beta_1,\gamma_1\in\prod_{(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})\in M}\mathbf{n}^{\perp};$$

$$\gamma_2\in\prod_{(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})\in M} I\otimes I\otimes\mathrm{Sym}(\frac{\mathbf{n}^{\perp}}{I},(\cdot|\cdot)_{\frac{\mathbf{n}^{\perp}}{I}})$$

olyan függvények, amelyekre az 1) algebrai és a 2) símasági feltétel teljesül, akkor az az M-en értelmezett g függvény, amit a 3)-ban szereplő formulával *értelmezünk* olyan Lorentz-forma mező, M felett, hogy (M,g) (egyszerű) Lorentz-sokaság.

Bizonyítás - Ez a 9.Állításnak és az 1.Tétel 3.Következményének nyilvánvaló következménye.∎

Természetesen a tétel feltételei (szükségképpen) bonyolultak, különösen az 1) algebrai feltétel; itt ez az ára az általánosságnak. Jóval egyszerűbb állítást nyerhetünk akkor, ha az M nyílt halmaz alakját speciálisabbnak vesszük (ti. $\mathfrak{M}\times S(\frac{E}{I},(\cdot|\cdot))$ alakúnak, ahol $\mathfrak{M}\subseteq I\times I$ nyílt halmaz) és csak olyan Lorentz-forma mezőket tekintünk M felett, amelyekben a β_1,γ_1 "nemdiagonális vektoriális" tagok eltűnnek és a γ_2 függvény annyiban speciális, hogy létezik hozzá olyan $f:M\to I\otimes I$ (skalár)függvény, hogy minden $(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})\in M$ pontra $\gamma_2(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})=f(\mathbf{t},\mathbf{r})\otimes\mathrm{id}_{\frac{\mathbf{n}^{\perp}}{I}}$.

Jelölés - Legyen $M\subseteq I\times I\times S(\frac{E}{I},(\cdot|\cdot))$ nyílt halmaz és

$$\alpha,\beta_0,\gamma_0:M\to\mathbb{R};$$

$$\beta_1,\gamma_1\in\prod_{(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})\in M}\mathbf{n}^{\perp};$$

$$\gamma_2 \in \prod_{(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})\in M} I\otimes I\otimes \mathrm{Sym}\left(\frac{\mathbf{n}^\perp}{I}, (\cdot|\cdot)_{\frac{\mathbf{n}^\perp}{I}}\right)$$

tetszőleges függvények. Ekkor $g_{(\alpha,\beta_0,\gamma_0,\beta_1,\gamma_1,\gamma_2)}$ jelöli azt az elemet $\prod_{(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})\in M} B(I\times I\times\frac{\mathbf{n}^\perp}{I}, I)$-ben, amelyre $(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})\in M$ esetén minden

$$(\mathbf{t}',\mathbf{r}',\mathbf{v}'),(\mathbf{t}'',\mathbf{r}'',\mathbf{v}'') \in I\times I\times\frac{\mathbf{n}^\perp}{I} \equiv T_{(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})}(M)$$

$(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})$-beli érintővektorra és $\mathbf{a}\in I\otimes I$, $\mathbf{a}\neq 0$ elemre:

$$g_{(\alpha,\beta_0,\gamma_0,\beta_1,\gamma_1,\gamma_2)}(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})((\mathbf{t}',\mathbf{r}',\mathbf{v}'),(\mathbf{t}'',\mathbf{r}'',\mathbf{v}'')):=$$
$$=-\alpha(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{v})\cdot(\mathbf{t}'\otimes\mathbf{t}'')+\beta_0(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{v})\cdot(\mathbf{t}'\otimes\mathbf{r}''+\mathbf{t}''\otimes\mathbf{r})+\gamma_0(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{v})\cdot(\mathbf{r}'\otimes\mathbf{r}'')+$$
$$+[\beta_1(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{v})|\mathbf{t}'\otimes\mathbf{v}''+\mathbf{t}''\otimes\mathbf{v}']+[\gamma_1(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{v})|\mathbf{r}'\otimes\mathbf{v}''+\mathbf{r}''\otimes\mathbf{v}']+\left(\frac{\gamma_2(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})}{\mathbf{a}}(\mathbf{v}')|\mathbf{v}''\right)\mathbf{a}.$$

Ha $\mathfrak{M}\subseteq I\times I$ nyílt halmaz és $a,b,c:\mathfrak{M}\to\mathbb{R}$ és $f:\mathfrak{M}\to I\otimes I$ függvények, akkor $g_{a,b,c,f}$ jelöli azt az elemet $\prod_{(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})\in M} B(I\times I\times\frac{\mathbf{n}^\perp}{I}, I)$-ben (ahol $M:=\mathfrak{M}\times S(\frac{E}{I},(\cdot|\cdot)))$, amelyre:

$$g_{a,b,c,f} := g_{(a(\cdot),b(\cdot),c(\cdot),0,0,f(\cdot)\otimes \mathrm{id}_{\frac{\mathbf{n}^\perp}{I}})}$$

vagyis minden $(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})\in\mathfrak{M}\times S(\frac{E}{I},(\cdot|\cdot))$ pontra és

$$(\mathbf{t}',\mathbf{r}',\mathbf{v}'),(\mathbf{t}'',\mathbf{r}'',\mathbf{v}'') \in I\times I\times\frac{\mathbf{n}^\perp}{I} \equiv T_{(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})}(M)$$

$(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})$-beli érintővektorra:

$$g_{a,b,c,f}(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})((\mathbf{t}',\mathbf{r}',\mathbf{v}'),(\mathbf{t}'',\mathbf{r}'',\mathbf{v}'')):=$$
$$=-a(\mathbf{t},\mathbf{r})(\mathbf{t}'\otimes\mathbf{t}'')+b(\mathbf{t},\mathbf{r})(\mathbf{t}'\otimes\mathbf{r}''+\mathbf{t}''\otimes\mathbf{r}')+c(\mathbf{t},\mathbf{r})(\mathbf{r}'\otimes\mathbf{r}'')+(\mathbf{v}'|\mathbf{v}'')f(\mathbf{t},\mathbf{r}).$$

Természetesen $(\mathfrak{M}\times S(\frac{E}{I},(\cdot|\cdot)),g_{a,b,c,f})$ "alakú" Lorentz-sokaságokra a 2.Tétel feltételei jelentősen egyszerűsödnek:

<u>13.Állítás</u> - Legyen $\mathfrak{M}\subseteq I\times I$ nem üres nyílt halmaz és legyenek a,b, $c:\mathfrak{M}\to\mathbb{R}$, $f:\mathfrak{M}\to I\otimes I$ függvények. Az $(\mathfrak{M}\times S(\frac{E}{I},(\cdot|\cdot)),g_{a,b,c,f})$ pár ponto-

san akkor (egyszerű) Lorentz-sokaság, ha az a,b,c és f függvények mind C^∞-osztályúak és

a) dimE=1 esetén $ac+b^2>0$ az $\mathfrak{M}$ minden pontjában.

b) dimE=2 esetén $f\neq 0$ az $\mathfrak{M}$ minden pontjában és minden $(\mathbf{t},\mathbf{r})\in\mathfrak{M}$ pontra:

- ha $f(\mathbf{t},\mathbf{r})>0$, akkor $(ac+b^2)(\mathbf{t},\mathbf{r})>0$;
- ha $f(\mathbf{t},\mathbf{r})<0$, akkor $a(\mathbf{t},\mathbf{r})<0$ és $c(\mathbf{t},\mathbf{r})>0$ és $(ac+b^2)(\mathbf{t},\mathbf{r})<0$.

c) dimE≥3 esetén $f>0$ és $ac+b^2>0$ az $\mathfrak{M}$ minden pontjában.

<u>Bizonyítás</u> - Ha $(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})\in\mathfrak{M}\times\mathbb{S}(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}},(\cdot|\cdot))$, akkor a definíció szerint

$$g_{a,b,c,f}(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n}):=\mathbf{g}_{a(\mathbf{t},\mathbf{r}),b(\mathbf{t},\mathbf{r}),c(\mathbf{t},\mathbf{r}),f(\mathbf{t},\mathbf{r});\mathbf{n}}$$

(ld. az 1.Tétel 3.Következménye után álló definíciót), ezért a 6.Állítás szerint a

$$(\forall(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})\in\mathfrak{M}\times\mathbb{S}(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}},(\cdot|\cdot))):\ g_{a,b,c,f}(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})\in\mathrm{Lor}(\mathbf{I}\times\mathbf{I}\times\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{I}}^{\perp},\mathbf{I})$$

kijelentés ekvivalens az a), b) és c) állítások diszjunkciójával. A $g_{a,b,c,f}$ bilineáris forma-mező nyilvánvalóan pontosan akkor C^∞-osztályú, ha az a,b,c és f függvények ugyanilyen símaságúak.∎

Természetesen a dimE=3 eset a legérdekesebb.

<u>14.Állítás</u> - Legyenek $\mathfrak{M},\mathfrak{M}'\subset\mathbf{I}\times\mathbf{I}$ nem üres nyílt halmazok és legyen $R\in\mathrm{O}(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}},(\cdot|\cdot))$ tetszőleges. Ha $\Psi=(\Psi_0,\Psi_1):\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}'$ C^∞-osztályú függvény és $a',b',c'\in C^\infty(\mathfrak{M}';\mathbb{R})$ és $f'\in C^\infty(\mathfrak{M}';\mathbf{I}\otimes\mathbf{I})$, akkor

$$(\Psi\times\bar{R})^* g_{a',b',c',f'}=g_{a,b,c,f}$$

ahol $a,b,c:\mathfrak{M}\to\mathbb{R}$ és $f:\mathfrak{M}\to\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}$ a következő függvények:

$$a=(\partial_0\Psi_0)^2(a'\circ\Psi)-2(\partial_0\Psi_0)(\partial_0\Psi_1)(b'\circ\Psi)-(\partial_0\Psi_1)^2(c'\circ\Psi)$$

$$b=((\partial_0\Psi_0)(\partial_1\Psi_1)+(\partial_1\Psi_0)(\partial_0\Psi_1))(b'\circ\Psi)-(\partial_0\Psi_0)(\partial_1\Psi_0)(a'\circ\Psi)$$
$$+(\partial_0\Psi_1)(\partial_1\Psi_1)(c'\circ\Psi)$$

$$c=(\partial_1\Psi_1)^2(c'\circ\Psi)+2(\partial_1\Psi_0)(\partial_1\Psi_1)(b'\circ\Psi)-(\partial_1\Psi_0)^2(a'\circ\Psi)$$

$$f=f'\circ\Psi.$$

Bizonyítás - A 7.Állítás nyilvánvaló következménye.■

Következmény - Legyen $\mathbb{M}\subseteq I\times I$ nem üres nyílt halmaz és $a,b,c\in C^{\infty}(\mathbb{M};\mathbb{R})$, $f\in C^{\infty}(\mathbb{M};I\otimes I)$ olyan függvények, melyekre az 13 .Állítás a), b) vagy c) feltételei teljesülnek. Ekkor minden $R\in O(\frac{E}{I},(\cdot|\cdot))$ transzformációra $id_{\mathbb{M}}\times R\in Aut(\mathbb{M}\times S(\frac{E}{I},(\cdot|\cdot)),g_{a,b,c,f})$ és az

$$O(\frac{E}{I},(\cdot|\cdot))\to Aut(\mathbb{M}\times S(\frac{E}{I},(\cdot|\cdot)),g_{a,b,c,f}) \quad ; \quad R\mapsto id_{\mathbb{M}}\times R$$

függvény injektív csoport-morfizmus. Ezért az

$$(\mathbb{M}\times S(\frac{E}{I},(\cdot|\cdot)),g_{a,b,c,f})$$

Lorentz-sokaság gömbszimmetrikus.■

Az alábbi példák mindegyikében feltesszük, hogy az I vektortér orientált.

Példák - (*Vektoriális gömbszimmetrikus egyszerű Lorentz-sokaságokra*)

a) **Vektoriális Minkowski-sokaság**

Legyenek $a,b,c:I\times I^{+}\to\mathbb{R}$ és $f:I\times I^{+}\to I\otimes I$ azok a függvények, amelyekre $(\mathbf{t},\mathbf{r})\in I\times I^{+}$ esetén:

$$a(\mathbf{t},\mathbf{r}):=1 \quad ; \quad b(\mathbf{t},\mathbf{r}):=0 \quad ; \quad c(\mathbf{t},\mathbf{r}):=1 \quad ; \quad f(\mathbf{t},\mathbf{r}):=\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}.$$

Ekkor az $(I\times I^{+}\times S(\frac{E}{I},(\cdot|\cdot)),g_{a,b,c,f})$ párt (vektoriális) *Minkowski--sokaságnak* nevezzük.

b) **Vektoriális Schwarzschild-sokaság**

Legyen $\mathbf{r}_g\in I^{+}$ rögzített és legyenek $a,b,c:I\times(I^{+}\setminus\{\mathbf{r}_g\})\to\mathbb{R}$ és $f:I\times(I^{+}\setminus\{\mathbf{r}_g\})\to(I\otimes I)^{+}$ azok a függvények, melyekre $(\mathbf{t},\mathbf{r})\in I\times(I^{+}\setminus\{\mathbf{r}_g\})$ esetén:

$$a(\mathbf{t},\mathbf{r}):=1-(\mathbf{r}_g/\mathbf{r}) \quad ; \quad b(\mathbf{t},\mathbf{r}):=0 \quad ; \quad c(\mathbf{t},\mathbf{r}):=\frac{1}{1-(\mathbf{r}_g/\mathbf{r})} \quad ; \quad f(\mathbf{t},\mathbf{r}):=\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}.$$

Ekkor az $(I\times(I^{+}\setminus\{\mathbf{r}_g\})\times S(\frac{E}{I},(\cdot|\cdot)),g_{a,b,c,f})$ párt (vektoriális) *Schwarzschild-sokaságnak* nevezzük.

c) **Vektoriális Lemaitre-sokaság**

Legyen $\mathbb{M}_L:=\{(\mathbf{t},\mathbf{r})\in I\times I \mid \mathbf{t}<\mathbf{r}\}$, $\mathbf{r}_g\in I^{+}$ rögzített és legyenek

$a, b, c : \mathbb{M}_L \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{M}_L \to (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^+$ azok a függvények, melyekre $(\mathbf{t}, \mathbf{r}) \in \mathbb{M}_L$ esetén:

$$a(\mathbf{t},\mathbf{r}) := 1 \ ; \quad b(\mathbf{t},\mathbf{r}) := 0 \ ; \quad c(\mathbf{t},\mathbf{r}) := \frac{1}{\left[\frac{3}{2}\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{t}}{\mathbf{r}_g}\right)\right]^{2/3}} \ ;$$

$$f(\mathbf{t},\mathbf{r}) := \left[\frac{3}{2}\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{t}}{\mathbf{r}_g}\right)\right]^{4/3} (\mathbf{r}_g \otimes \mathbf{r}_g).$$

Ekkor az $(\mathbb{M}_L \times S(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}, (\cdot|\cdot)), g_{a,b,c,f})$ párt (vektoriális) *Lemaitre-sokaságnak* nevezzük. (A későbbiekben megmutatjuk majd, hogy mi az oka annak, hogy itt a különös $\left[\frac{3}{2}\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{t}}{\mathbf{r}_g}\right)\right]^{2/3}$ kifejezés szerepel és megvizsgáljuk a Schwarzschild- és Lemaitre-sokaságok kapcsolatát.)

d) **Vektoriális Einstein-sokaság**

Legyen $\mathbf{r}_g \in \mathbf{I}^+$ rögzített és legyenek $a, b, c : \mathbf{I} \times]0, \mathbf{r}_g[\to \mathbb{R}$ és $f : \mathbf{I} \times]0, \mathbf{r}_g[\to (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^+$ azok a függvények, melyekre minden $(\mathbf{t}, \mathbf{r}) \in \mathbf{I} \times]0, \mathbf{r}_g[$ esetén:

$$a(\mathbf{t},\mathbf{r}) := 1 \ ; \quad b(\mathbf{t},\mathbf{r}) := 0 \ ; \quad c(\mathbf{t},\mathbf{r}) := \frac{1}{1-(\mathbf{r}/\mathbf{r}_g)^2} ; \quad f(\mathbf{t},\mathbf{r}) := \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}.$$

$]-\mathbf{r}_g, \mathbf{r}_g[$ lehet!

Ekkor az $(\mathbf{I} \times]0, \mathbf{r}_g[\times S(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}, (\cdot|\cdot)), g_{a,b,c,f})$ párt (vektoriális) *Einstein-sokaságnak* nevezzük.

e) **Vektoriális de Sitter-sokaság**

Legyen $\mathbf{r}_g \in \mathbf{I}^+$ rögzített és legyenek $a, b, c : \mathbf{I} \times (\mathbf{I}^+ \setminus \{\mathbf{r}_g\}) \to \mathbb{R}$ és $f : \mathbf{I} \times (\mathbf{I}^+ \setminus \{\mathbf{r}_g\}) \to (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^+$ azok a függvények, melyekre minden $(\mathbf{t}, \mathbf{r}) \in \mathbf{I} \times (\mathbf{I}^+ \setminus \{\mathbf{r}_g\})$ esetén:

$$a(\mathbf{t},\mathbf{r}) := 1-(\mathbf{r}/\mathbf{r}_g)^2 \ ; \quad b(\mathbf{t},\mathbf{r}) := 0 \ ; \quad c(\mathbf{t},\mathbf{r}) := \frac{1}{1-(\mathbf{r}/\mathbf{r}_g)^2} ; \quad f(\mathbf{t},\mathbf{r}) := \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}.$$

$\mathbf{I} \setminus \{\pm \mathbf{r}_g\}$ lehet

Ekkor az $(\mathbf{I} \times (\overbrace{\mathbf{I}^+ \setminus \{\mathbf{r}_g\}}) \times S(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}, (\cdot|\cdot)), g_{a,b,c,f})$ párt (vektoriális) *de Sitter-sokaságnak* nevezzük.

f) **Vektoriális Friedmann-sokaság**

Legyen $\mathbf{r}_g \in I^+$ rögzített és $f_0 \in C^\infty(I;\mathbb{R}^+)$ tetszőleges függvény. Legyenek $a,b,c:I\times]0,\mathbf{r}_g[\to\mathbb{R}$ és $f:I\times]0,\mathbf{r}_g[\to(I\otimes I)^+$ azok a függvények, melyekre minden $(\mathbf{t},\mathbf{r})\in I\times]0,\mathbf{r}_g[$ esetén:

$$a(\mathbf{t},\mathbf{r}):=1\ ;\ b(\mathbf{t},\mathbf{r}):=0\ ;\ c(\mathbf{t},\mathbf{r}):=\frac{f_0(\mathbf{t})}{1-(\mathbf{r}/\mathbf{r}_g)^2};\ f(\mathbf{t},\mathbf{r}):=f_0(\mathbf{t})\cdot(\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}).$$

Ekkor az $(I\times]0,\mathbf{r}_g[\times\mathbb{S}(\frac{\mathbf{E}}{I},(\cdot|\cdot)),g_{a,b,c,f})$ párt (vektoriális) *Friedmann-sokaságnak* nevezzük. (A fenti egyszerű Lorentz-sokaságokkal szemben ez egy Lorentz-sokaság típus, amelynek $-\mathbf{r}_g$-n kívül- az f_0 függvény is paramétere.) Láthatóan az Einstein-sokaság az a speciális Friedmann-sokaság, amelyre $f_0\equiv1$.

Figyeljük meg, hogy az összes fenti példában $b\equiv0$, tehát valójában a g-ben *minden* nemdiagonális elem eltűnik (ezek ennyire speciális egyszerű Lorentz-sokaságok).

Az affin gömbszimmetrikus egyszerű Lorentz-sokaságok előállítása szempontjából alapvető a következő állítás (a trivialitása ellenére).

<u>15.Állítás</u> - Legyen I orientált, $\mathbb{M}$ végesdimenziós valós affin tér $\mathbf{M}$ felett, amelyre $\dim\mathbb{M}\geq2$, $(\mathbf{g},\mathbf{c})$ Lorentz-struktúra $\mathbf{M}$ felett és $\sigma\in\mathbb{M}$ rögzített. Ha $\mathfrak{M}\subseteq I\times I^+$ nem üres nyílt halmaz és $a,b,c\in C^\infty(\mathfrak{M};\mathbb{R})$, $f\in C^\infty(\mathfrak{M};I\otimes I)$ olyan függvények, melyekre az 12.Állítás a), b) vagy c) feltételei teljesülnek, akkor legyen (M,g) az a pár, amelyre:

$$M := \Phi^{-1}_{\mathbf{g},\mathbf{c},\sigma}\langle\mathfrak{M}\times\mathbb{S}(\frac{\mathbf{E}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}}{I}(\cdot|\cdot))\rangle;$$

$$g := (\Phi_{\mathbf{g},\mathbf{c},\sigma})^* g_{a,b,c,f}\ ,$$

ahol (mint korábban is)

$$\Phi_{\mathbf{g},\mathbf{c},\sigma}\ :\ \mathbb{M}\setminus(\sigma+\mathbf{c}\otimes I)\to I\times I^+\times\mathbb{S}(\frac{\mathbf{E}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}}{I},(\cdot|\cdot)_{\mathbf{g},\mathbf{c}});$$

$$a \mapsto \left(-_{\mathrm{I}}\mathbf{g}(\mathbf{c},a-\sigma),\ |\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)|,\ \frac{\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)}{|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)|}\right)$$

a természetes diffeomorfizmus. Ekkor (M,g) olyan egyszerű Lorentz-sokaság, amely izomorf az $(\mathfrak{M}\times S(\frac{\mathbf{E}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}}{\mathrm{I}}(\cdot|\cdot)),g_{a,b,c,f})$ "vektoriális" egyszerű Lorentz-sokasággal. Továbbá:

$$M = \{\ a\in\mathrm{M}\setminus(\sigma+\mathbf{c}\otimes\mathrm{I})\,|\,(-_{\mathrm{I}}\mathbf{g}(\mathbf{c},a-\sigma),|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)|)\in\mathfrak{M}\ \}$$

és minden $M\ni a$-ra:

$$g(a) = -a(\mathbf{F}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma))\cdot(\mathbf{c}\underset{\mathbf{g}}{\otimes}\mathbf{c}) - 2b(\mathbf{F}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma))\cdot(\mathbf{c}\underset{\mathbf{g}}{\otimes}\omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)) +$$
$$+\left(c(\mathbf{F}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma))-\frac{f(\mathbf{F}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma))}{|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)|^2}\right)\cdot(\omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)\underset{\mathbf{g}}{\otimes}\omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)) +$$
$$+\ \frac{f(\mathbf{F}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma))}{|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)|^2}\cdot[\cdot|\cdot]_{\mathbf{g},\mathbf{c}}\circ(\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}\times\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}),$$

ahol (mint korábban is)

$$\mathbf{F}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}:\mathrm{M}\to\mathrm{I}\times\mathrm{I} \quad ; \quad \mathbf{x}\mapsto(-_{\mathrm{I}}\mathbf{g}(\mathbf{c},\mathbf{x}),|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(\mathbf{x})|)$$

$$\omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}}:\mathrm{M}\setminus\mathbf{c}\otimes\mathrm{I}\to\frac{\mathbf{E}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}}{\mathrm{I}} \quad ; \quad \mathbf{x}\mapsto\frac{\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(\mathbf{x})}{|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(\mathbf{x})|}.$$

<u>Bizonyítás</u> - Triviális.■

<u>Megjegyzések</u> - 1) Mivel nyilvánvalóan

$$\mathbf{g} = -\mathbf{c}\underset{\mathbf{g}}{\otimes}\mathbf{c} + [\cdot|\cdot]_{\mathbf{g},\mathbf{c}}\circ(\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}\times\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}),$$

ezért az állításban felírt g a következőképpen alakítható át; minden $M\ni a$-ra:

$$g(a) = \frac{f(\mathbf{F}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma))}{|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)|^2}\cdot\mathbf{g}\ -$$
$$-\left(a(\mathbf{F}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma))-\frac{f(\mathbf{F}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma))}{|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)|^2}\right)\cdot(\mathbf{c}\underset{\mathbf{g}}{\otimes}\mathbf{c})\ +$$

$$+ \left(c(\mathbf{F}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)) - \frac{f(\mathbf{F}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma))}{|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)|^2} \right) \cdot (\omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma) \underset{\mathbf{g}}{\otimes} \omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)) +$$

$$- 2b(\mathbf{F}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)) \cdot (\mathbf{c} \underset{\mathbf{g}}{\otimes} \omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)).$$

Ez az alak különösen alkalmas a g és az azonosan $\mathbf{g}$ függvény *összehasonlítására* (pl. a *gyenge* gravitációs terek vagy az *aszimptotikusan lapos* gravitációs terek vizsgálatára).

2) Mivel $\mathfrak{M} \subseteq \mathbf{I} \times \mathbf{I}^+$, ezért az $f : \mathfrak{M} \to \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$ függvény mindig felírható $f(\mathbf{t},\mathbf{r}) = \bar{f}(\mathbf{t},\mathbf{r})(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})$ alakban $((\mathbf{t},\mathbf{r}) \in \mathfrak{M})$, ahol $\bar{f} : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ egyértelműen meghatározott függvény. Ekkor g-re a következő (viszonylag egyszerűbb) alakot kapjuk; minden $\mathrm{M} \ni a$-ra

$$\mathrm{g}(a) = \bar{f}(\mathbf{F}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)) \cdot \mathbf{g} +$$

$$-(a-\bar{f})(\mathbf{F}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)) \cdot (\mathbf{c} \underset{\mathbf{g}}{\otimes} \mathbf{c}) + (c-\bar{f})(\mathbf{F}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)) \cdot (\omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma) \underset{\mathbf{g}}{\otimes} \omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)) -$$

$$-2b(\mathbf{F}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)) \cdot (\mathbf{c} \underset{\mathbf{g}}{\otimes} \omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)).$$

Figyeljük meg, hogy az 15.Állításban $\mathfrak{M} \subseteq \mathbf{I} \times \mathbf{I}^+$ és nem $\mathfrak{M} \subseteq \mathbf{I} \times \mathbf{I}$ tetszőleges, különben $\Phi_{\mathbf{g},\mathbf{c},\sigma}$ leszűkítése nem lenne diffeomorfizmus a megfelelő nyílt részsokaságok között! Ezért a vektoriális Lemaitre-sokaságból a fenti állítás alkalmazásával *nem állítható elő affin Lemaitre-sokaság*. Ez nem jelenti azt, hogy ilyen nem létezik; csak arról van szó, hogy azt nem (egészen) így kell létrehozni (csak majdnem így; ld. az 5.pontot).

Azonban a fentiekben felsorolt vektoriális Lorentz-sokaságok mindegyikéből (kivéve a Lemaitre-t) az 15.Állítás alkalmazásával kaphatunk egyszerű affin Lorentz-sokaságokat.

Az alábbi példákban feltesszük, hogy $\mathbf{I}$ orientált és $\mathbb{M}$ végesdimenziós, legalább kétdimenziós valós affin tér a $\mathbf{M}$ vektortér felett és $(\mathbf{g},\mathbf{c})$ Lorentz-struktúra $\mathbf{M}$ felett és $\sigma \in \mathbb{M}$ rögzített pont.

<u>Példák</u> (*Affin gömbszimmetrikus egyszerű Lorentz-sokaságokra*)

a) **Affin Minkowski-sokaság**

Legyen $\mathrm{M} := \mathbb{M} \setminus (\sigma + \mathbf{c} \otimes \mathbf{I})$ és minden $\mathrm{M} \ni a$-ra $\mathrm{g}(a) := \mathbf{g}$. Ekkor (M,g) olyan affin egyszerű Lorentz-sokaság, amely izomorf a vektoriális Minkowski-sokasággal. Az (M,g) affin Minkowski-sokaság $\mathbb{M}$-*ben folytatható*; a természetes folytatása $\mathbb{M}$-ben azonos az $(\mathbb{M},\mathbf{I},\mathbf{g})$ speciális relativisztikus téridő-modellel (amit megfosztunk az idő-orientáltságot adó struktúrától).

b) **Affin Schwarzschild-sokaság**

Legyen $\mathbf{r}_g \in \mathbf{I}^+$ rögzített és $M := \{a \in \mathbb{M} \mid 0 < |\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-o)| \neq \mathbf{r}_g\}$ és legyen minden $M \ni a$-ra:

$$g(a) = -\left(1 - \frac{\mathbf{r}_g}{|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-o)|}\right)\cdot(\mathbf{c} \underset{\mathbf{g}}{\otimes} \mathbf{c}) + \left(\frac{1}{\dfrac{|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-o)|}{\mathbf{r}_g} - 1}\right)\cdot(\omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma) \underset{\mathbf{g}}{\otimes} \omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)) +$$

$$+ [\cdot|\cdot]_{\mathbf{g},\mathbf{c}} \circ (\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}} \times \pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}) =$$

$$= \mathbf{g} + \left(\frac{\mathbf{r}_g}{|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-o)|}\right)\cdot(\mathbf{c} \underset{\mathbf{g}}{\otimes} \mathbf{c}) + \left(\frac{1}{\dfrac{|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-o)|}{\mathbf{r}_g} - 1}\right)\cdot(\omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma) \underset{\mathbf{g}}{\otimes} \omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)).$$

Ekkor (M,g) olyan affin egyszerű Lorentz-sokaság, amely izomorf az $\mathbf{r}_g$-paraméterű vektoriális Schwarzschild-sokasággal. Ez az (M,g) affin Schwarzschild-sokaság $\mathbb{M}$-ben nem folytatható; ez triviális. A következő pontban megmutatjuk, hogy az affin Schwarzschild-sokaság *kiterjeszthető*; a "természetes kiterjesztése(i)" lesz(nek) az affin Lemaitre-sokaság(ok).

c) **Affin Lemaitre-sokaság**

Legyen $\mathfrak{M}_L := \{(\mathbf{t},\mathbf{r}) \in \mathbf{I}\times\mathbf{I} \mid \mathbf{t} < \mathbf{r}\}$, $\mathbf{r}_g \in \mathbf{I}^+$ rögzített és legyen

$$\Psi_L : \mathbf{I}\times\mathbf{I}^+ \rightarrowtail \mathfrak{M}_L$$

tetszőleges C^∞-*diffeomorfizmus* (ilyen még lineáris bijekció leszűkítéseként is rengeteg létezik). Legyen $(\mathfrak{M}_L \times S(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}},(\cdot|\cdot)), g_L)$ az $\mathbf{r}_g$-paraméterű vektoriális Lemaitre-sokaság és

$$M := \mathbb{M} \setminus (\sigma + \mathbf{c} \otimes \mathbf{I});$$

$$g := ((\Psi_L \times \mathrm{id}_{S(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}},(\cdot|\cdot))}) \circ \Phi_{\mathbf{g},\mathbf{c},\sigma})^* g_L.$$

$(\times \mathrm{id}_{S}$

Ekkor (M,g) olyan affin egyszerű Lorentz-sokaság, amely $\Psi_L \circ \Phi_{\mathbf{g},\mathbf{c},\sigma}$ által izomorf az $\mathbf{r}_g$-paraméterű $(\mathfrak{M}_L \times S(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}},(\cdot|\cdot)), g_L)$ vektoriális Lemaitre-sokasággal. Ez(eket) a Lorentz-sokaságokat nevezzük

$(\Psi_L, \mathbf{r}_g)$-paraméterű *affin Lemaitre-sokaság(ok)nak.* Az affin Lemaitre-sokaságok explicit alakjával, továbbá ezek affin Schwarzschild--sokaságokkal való kapcsolatával az 5. pontban foglalkozunk. (Például megmutatjuk, hogy minden affin Lemaitre-sokaság egy affin Schwarzschild-sokaság *kiterjesztése*; ez egyáltalán nem nyilvánvaló.)

d) **Affin Einstein-sokaság**

Legyen $\mathbf{r}_g \in \mathbb{I}^+$ rögzített;

$$M := \{ a \in \mathbb{M} \mid 0 < |\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-o)| < \mathbf{r}_g \}$$

és minden $M \ni a$-ra

$$g(a) := -(\mathbf{c} \underset{\mathbf{g}}{\otimes} \mathbf{c}) + \frac{1}{\left(\frac{\mathbf{r}_g}{|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-o)|}\right)^2 - 1} \cdot (\omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma) \underset{\mathbf{g}}{\otimes} \omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)) +$$

$$+ [\cdot|\cdot]_{\mathbf{g},\mathbf{c}} \circ (\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}} \times \pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}) =$$

$$= \mathbf{g} + \frac{1}{\left(\frac{\mathbf{r}_g}{|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-o)|}\right)^2 - 1} \cdot (\omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma) \underset{\mathbf{g}}{\otimes} \omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)).$$

Ekkor (M,g) olyan affin egyszerű Lorentz-sokaság, amely $\Phi_{\mathbf{g},\mathbf{c},\sigma}$ által izomorf az $\mathbf{r}_g$-paraméterű vektoriális Einstein-sokasággal.

e) **Affin de Sitter-sokaság**

Legyen $\mathbf{r}_g \in \mathbb{I}^+$ rögzített és $M := \{a \in \mathbb{M} \mid 0 < |\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-o)| \neq \mathbf{r}_g\}$ és minden $M \ni a$-ra

$$g(a) := -\left(1 - \left(\frac{|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)|}{\mathbf{r}_g}\right)^2\right) \cdot (\mathbf{c} \underset{\mathbf{g}}{\otimes} \mathbf{c}) + \frac{1}{\left(\frac{\mathbf{r}_g}{|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-o)|}\right)^2 - 1} \cdot (\omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma) \underset{\mathbf{g}}{\otimes} \omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)) +$$

$$+ [\cdot|\cdot]_{\mathbf{g},\mathbf{c}} \circ (\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}} \times \pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}) =$$

$$= \mathbf{g} + \left(\frac{|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)|}{\mathbf{r}_g}\right)^2 \cdot (\mathbf{c} \underset{\mathbf{g}}{\otimes} \mathbf{c}) + \frac{1}{\left(\frac{\mathbf{r}_g}{|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-o)|}\right)^2 - 1} \cdot (\omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma) \underset{\mathbf{g}}{\otimes} \omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)).$$

Ekkor (M,g) olyan affin egyszerű Lorentz-sokaság, amely $\Phi_{\mathbf{g},\mathbf{c},\sigma}$ által izomorf az $\mathbf{r}_g$-paraméterű vektoriális de Sitter-sokasággal.

f) **Affin Friedmann-sokaság**

Legyen $\mathbf{r}_g \in \mathbf{I}^+$ rögzített és $f_0 \in C^\infty(\mathbf{I};\mathbb{R})$ tetszőleges függvény. Legyen

$$M := \{ a \in \mathbb{M} \mid 0 < |\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-o)| < \mathbf{r}_g \}$$

és minden $M \ni a$-ra

$$g(a) := -(\mathbf{c} \underset{\mathbf{g}}{\otimes} \mathbf{c}) + \frac{f_0(-_{\mathbf{I}}\mathbf{g}(\mathbf{c}, a-o))}{\left(\frac{\mathbf{r}_g}{|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-o)|}\right)^2 - 1} \cdot (\omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-o) \underset{\mathbf{g}}{\otimes} \omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-o)) +$$

$$+ f_0(-_{\mathbf{I}}\mathbf{g}(\mathbf{c}, a-o)) \cdot [\cdot|\cdot]_{\mathbf{g},\mathbf{c}} \circ (\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}} \times \pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}) =$$

$$= \mathbf{g} + \frac{f_0(-_{\mathbf{I}}\mathbf{g}(\mathbf{c}, a-o))}{\left(\frac{\mathbf{r}_g}{|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-o)|}\right)^2 - 1} \cdot (\omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-o) \underset{\mathbf{g}}{\otimes} \omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-o)) +$$

$$+ (f_0(-_{\mathbf{I}}\mathbf{g}(\mathbf{c}, a-o)) - 1) \cdot [\cdot|\cdot]_{\mathbf{g},\mathbf{c}} \circ (\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}} \times \pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}).$$

Ekkor (M,g) olyan affin egyszerű Lorentz-sokaság, amely $\Phi_{\mathbf{g},\mathbf{c},o}$ által izomorf az $(\mathbf{r}_g, f_0)$-paraméterű vektoriális Friedmann-sokasággal.

5. A vektoriális Schwarzschild- és Lemaitre-sokaságok kapcsolata

Ebben a pontban I *orientált egydimenziós valós vektorteret,* $\mathbf{r}_g \in \mathrm{I}^+$ *rögzített elemet,* E *végesdimenziós, legalább kétdimenziós valós vektorteret és* $[\cdot|\cdot]:\mathrm{E}\times\mathrm{E}\to\mathrm{I}\otimes\mathrm{I}$ *euklidészi formát jelöl* E *felett. Az* $\mathbb{S}(\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{I}},(\cdot|\cdot))$ *gömbfelületet* $\mathbb{S}$*-sel jelöljük.*

Ebben a pontban megmutatjuk, hogy az $\mathbf{r}_g$-paraméterű vektoriális Lemaitre-sokaság az $\mathbf{r}_g$-paraméterű vektoriális Schwarzchild-sokaságnak *kiterjesztése*. Valójában ennél jóval többet teszünk; azt vizsgáljuk, hogy a vektoriális Schwarzschild-sokaság "egyszerű alakú" diffeomorfizmusok általi transzformáltjai miféle Lorentz-sokaságok lesznek? Így eljutunk majd a vektoriális Lemaitre-sokaságok egyfajta "természetes származtatásához".

<u>16.Állítás</u> - Legyenek $\mathfrak{M}_0,\mathfrak{M}_1\subseteq\mathrm{I}$ nem üres nyílt halmazok; $\mathfrak{M}:=\mathfrak{M}_0\times\mathfrak{M}_1$ és $\mathfrak{M}'\subseteq\mathrm{I}\times\mathrm{I}$ nyílt halmaz. Jelölje $(\Omega_\iota)_{\iota\in\mathrm{I}}$ az $\mathfrak{M}_1$ halmaz összefüggő komponenseinek injektív rendszerét.
Tegyük fel, hogy:

a) $\Psi\equiv(\Psi_0,\Psi_1):\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}'$ olyan C^∞-osztályú függvény, hogy létezik olyan $\Phi:\mathfrak{M}_1\to\mathrm{I}$ függvény, hogy minden $\mathfrak{M}\ni(\mathbf{t},\mathbf{r})$-re

$$\Psi_1(\mathbf{t},\mathbf{r}) = \Psi_0(\mathbf{t},\mathbf{r}) + \Phi(\mathbf{r})$$

teljesül.

b) $a',b',c'\in C^\infty(\mathfrak{M}';\mathbb{R})$ és $f'\in C^\infty(\mathfrak{M}';(\mathrm{I}\otimes\mathrm{I})^+)$ olyan függvények, hogy $a'c'+b'^2>0$ az $\mathfrak{M}'$ minden pontjában és az a',b',c',f' függvények csak a változókomponensek különbségétől függenek; tehát egyértelműen léteznek olyan $\bar{a},\bar{b},\bar{c}:\bar{\mathfrak{M}}\to\mathbb{R}$ és $\bar{f}:\bar{\mathfrak{M}}\to(\mathrm{I}\otimes\mathrm{I})^+$ függvények az $\bar{\mathfrak{M}}:=$ $:=(pr_1-pr_0)\langle\mathfrak{M}'\rangle\subseteq\mathrm{I}$ nyílt halmazon, hogy minden $\mathfrak{M}'\ni(\mathbf{t}',\mathbf{r}')$-re

$$a'(\mathbf{t}',\mathbf{r}')=\bar{a}(\mathbf{r}'-\mathbf{t}')$$

$$b'(\mathbf{t}',\mathbf{r}')=\bar{b}(\mathbf{r}'-\mathbf{t}')$$

$$c'(\mathbf{t}',\mathbf{r}')=\bar{c}(\mathbf{r}'-\mathbf{t}')$$

$$f'(\mathbf{t}',\mathbf{r}')=\bar{f}(\mathbf{r}'-\mathbf{t}')$$

teljesül.

c) $a,c\in C^\infty(\mathfrak{M};\mathbb{R})$ és $f\in C^\infty(\mathfrak{M};(\mathrm{I}\otimes\mathrm{I})^+)$ olyan függvények, hogy $ac>0$ az $\mathfrak{M}$ minden pontjában.

d) $(\Psi\times\mathrm{id}_{\mathbb{S}})^* g_{a',b',c',f'} = g_{a,0,c,f}$.

Ekkor:

- Ψ és Φ *lokális* C^∞*-diffeomorfizmus* (tehát $\mathcal{R}_\Phi\subseteq\overline{\mathfrak{M}}$ *nyílt* halmaz);
- $\bar{a}-2\bar{b}-\bar{c}\neq 0$ a Φ értékkészletének minden pontjában;
- a $(\bar{b}+\bar{c})/(\bar{a}-2\bar{b}-\bar{c}):\mathcal{R}_\Phi\to\mathbb{R}$ függvény minden $P\in C^\infty(\mathcal{R}_\Phi;\mathrm{I})$ primitív függvényéhez és minden $\mathrm{I}\ni\iota$-hoz létezik olyan $Q_\iota\in C^\infty(\mathfrak{M}_0;\mathrm{I})$ függvény, hogy minden $(\mathbf{t},\mathbf{r})\in\mathfrak{M}_0\times\Omega_\iota$ pontra
$$\Psi_0(\mathbf{t},\mathbf{r}) = Q_\iota(\mathbf{t}) + P(\Psi_1(\mathbf{t},\mathbf{r})-\Psi_0(\mathbf{t},\mathbf{r})) = Q_\iota(\mathbf{t}) + P(\Phi(\mathbf{r}))$$
teljesül;
- a c és f függvények függetlenek a nulladik változójuktól és ha $c_1:\mathfrak{M}_1\to\mathbb{R}$ az a függvény, amelyre $c=1\otimes c_1$ (ahol $1:\mathfrak{M}_0\to\mathbb{R}$ az azonosan 1 függvény), akkor Φ kielégíti a
$$(\mathrm{D}\Phi)^2 = c_1\cdot\left(\left(\frac{\bar{a}-2\bar{b}-\bar{c}}{\bar{a}\cdot\bar{c}+\bar{b}^2}\right)\circ\Phi\right)$$
differenciálegyenletet;
- ha a is független a nulladik változójától, akkor az
$$(\bar{b}+\bar{c})/(\bar{a}-2\bar{b}-\bar{c}):\mathcal{R}_\Phi\to\mathbb{R}$$
függvény minden $P\in C^\infty(\mathcal{R}_\Phi;\mathbb{R})$ primitív függvényére teljesül az, hogy egyértelműen létezik olyan $(\mathrm{B}_\iota)_{\iota\in\mathrm{I}}$ rendszer $\mathbb{R}$-ben és az az $\mathfrak{M}_0$ minden Ω összefüggő komponenséhez egyértelműen létezik olyan $(\mathbf{t}_{\Omega,\iota})_{\iota\in\mathrm{I}}$ rendszer I-ben, hogy minden $\Omega\times\Omega_\iota\ni(\mathbf{t},\mathbf{r})$-re
$$\Psi_0(\mathbf{t},\mathbf{r})=\mathbf{t}_{\Omega,\iota}+\mathrm{B}_\iota\mathbf{t}+P(\Phi(\mathbf{r}))$$
és ha $a_1:\mathfrak{M}_1\to\mathbb{R}$ az a függvény, amelyre $a=1\otimes a_1$, akkor az
$$a_1/(\bar{a}-2\bar{b}-\bar{c})\circ\Phi) :\mathfrak{M}_1\to\mathbb{R}$$
függvény lokálisan állandó.

<u>Bizonyítás</u> - Először tegyük fel, hogy $a,b,c\in C^\infty(\mathfrak{M};\mathbb{R})$, $a',b',c'\in C^\infty(\mathfrak{M}';\mathbb{R})$, $f\in C^\infty(\mathfrak{M};(\mathrm{I}\otimes\mathrm{I})^+)$ és $f'\in C^\infty(\mathfrak{M}';(\mathrm{I}\otimes\mathrm{I})^+)$ tetszőleges olyan függvények, hogy $ac+b^2>0$ az $\mathfrak{M}$ minden pontjában és $a'c'+b'^2>0$ az $\mathfrak{M}'$ minden pontjában és

$$(\Psi\times id_S)^* g_{a',b',c',f'} = g_{a,b,c,f}$$

ahol Ψ-re az a) feltételei teljesülnek. Mivel ekkor

$$\partial_0\Psi_1 = \partial_0\Psi_0$$

$$\partial_1\Psi_1 = \partial_1\Psi_0 + \mathbf{1}\otimes D\Phi$$

ahol $\mathbf{1}$ az $\mathfrak{M}_0\to\mathbb{R}$ azonosan 1 függvényt jelöli, ezért a 14. Állítás szerint:

$$a = (\partial_0\Psi_0)^2\cdot((a'-2b'-c')\circ\Psi)$$

$$b = -(\partial_1\Psi_0)(\partial_0\Psi_0)\cdot((a'-2b'-c')\circ\Psi) + (\partial_0\Psi_0)(\mathbf{1}\otimes D\Phi)\cdot((b'+c')\circ\Psi)$$

$$c = -(\partial_1\Psi_0)^2\cdot((a'-2b'-c')\circ\Psi) + 2(\partial_1\Psi_0)(\mathbf{1}\otimes D\Phi)\cdot((b'+c')\circ\Psi) + \\ +(\mathbf{1}\otimes(D\Phi)^2)\cdot(c'\circ\Psi)$$

$$f = f'\circ\Psi.$$

Most tegyük fel, hogy $b\equiv 0$. Ekkor $ac>0$ az $\mathfrak{M}$ minden pontjában, tehát az a függvény sehol sem nulla $\mathfrak{M}$-n, ezért $a'-2b'-c'$ sehol sem nulla $\Psi\langle\mathfrak{M}\rangle$-n és $\partial_0\Psi_0$ sehol sem nulla $\mathfrak{M}$-n. Ezért a fentiekből a következő egyenletekre jutunk

$$(\partial_0\Psi_0)^2 = \frac{a}{(a'-2b'-c')\circ\Psi}$$

$$\partial_1\Psi_0 = \frac{(b'+c')\circ\Psi}{(a'-2b'-c')\circ\Psi}\cdot(\mathbf{1}\otimes D\Phi)$$

$$c=-(\partial_1\Psi_0)^2\cdot((a'-2b'-c')\circ\Psi)+2(\partial_1\Psi_0)(\mathbf{1}\otimes D\Phi)\cdot((b'+c')\circ\Psi)+(\mathbf{1}\otimes(D\Phi)^2)\cdot(c'\circ\Psi)$$

$$f'\circ\Psi = f.$$

Innen a második egyenletből $\partial_1\Psi_0$-t beírjuk a harmadikba; ekkor rendezés után a harmadik egyenlet így néz ki

$$\mathbf{1}\otimes(D\Phi)^2 = \frac{(a'-2b'-c')\circ\Psi}{(a'c'+b'^2)\circ\Psi}\cdot c.$$

Ebből látszik, hogy $D\Phi$ sehol sem nulla $\mathfrak{M}_1$-n, ezért a

$$\det D\Psi = \begin{vmatrix} \partial_0\Psi_0 & \partial_1\Psi_0 \\ \partial_0\Psi_0 & \partial_1\Psi_0+\mathbf{1}\otimes D\Phi \end{vmatrix} = (\partial_0\Psi_0)\cdot(\mathbf{1}\otimes D\Phi)$$

függvény sehol sem nulla $\mathfrak{M}$-n, tehát Ψ *lokális* C^{∞}-*diffeomorfizmus* és $D\Phi$ szintén sehol sem nulla, ezért Φ is lokális C^{∞}-diffeomorfizmus.

Most tegyük fel olyan $\bar{a},\bar{b},\bar{c}:\bar{\mathfrak{M}}\to\mathbb{R}$ és $\bar{f}:\bar{\mathfrak{M}}\to(\mathrm{I}\otimes\mathrm{I})^{+}$ függvények létezését az $\bar{\mathfrak{M}}:=(pr_1-pr_0)\langle\mathfrak{M}'\rangle\subseteq\mathrm{I}$ nyílt halmazon, amelyekre a b) feltételei teljesülnek. Mivel ekkor

$$a'\circ\Psi=\mathbf{1}\otimes(\bar{a}\circ\Phi),\quad b'\circ\Psi=\mathbf{1}\otimes(\bar{b}\circ\Phi),\quad c'\circ\Psi=\mathbf{1}\otimes(\bar{c}\circ\Phi),\quad f'\circ\Psi=\mathbf{1}\otimes(\bar{f}\circ\Phi),$$

ezért a következő egyenlet-rendszert kapjuk

$$(\partial_0\Psi_0)^2 = a\cdot\mathbf{1}\otimes\left(\frac{1}{(\bar{a}-2\bar{b}-\bar{c})\circ\Phi}\right)$$

$$\partial_1\Psi_0 = \mathbf{1}\otimes\left(\left(\frac{\bar{b}+\bar{c}}{\bar{a}-2\bar{b}-\bar{c}}\right)\circ\Phi\right)\cdot D\Phi$$

$$\mathbf{1}\otimes(D\Phi)^2 = c\cdot\mathbf{1}\otimes\left(\left(\frac{\bar{a}-2\bar{b}-\bar{c}}{\bar{a}\cdot\bar{c}+\bar{b}^2}\right)\circ\Phi\right)$$

$$f = \mathbf{1}\otimes(\bar{f}\circ\Phi).$$

A második egyenletből látható, hogy ha $P:\mathcal{R}_{\Phi}\to\mathrm{I}$ primitív függvénye a $(\bar{b}+\bar{c})/(\bar{a}-2\bar{b}-\bar{c})$ függvénynek, akkor

$$\partial_1\Psi_0 = \mathbf{1}\otimes((DP)\circ\Phi)\cdot D\Phi) = \mathbf{1}\otimes D(P\circ\Phi) = \partial_1(\mathbf{1}\otimes(P\circ\Phi)),$$

tehát minden $\mathfrak{M}_0\ni\mathbf{t}$-re a $(\Psi_0-\mathbf{1}\otimes(P\circ\Phi))(\mathbf{t},\cdot)$ függvény lokálisan állandó $\mathfrak{M}_1$-n, tehát minden $\mathrm{I}\ni\iota$-hoz létezik olyan $Q_\iota:\mathfrak{M}_0\to\mathrm{I}$ függvény, hogy minden $(\mathbf{t},\mathbf{r})\in\mathfrak{M}_0\times\Omega_\iota$ pontra $\Psi_0(\mathbf{t},\mathbf{r})=Q_\iota(\mathbf{t})+P(\Phi(\mathbf{r}))=Q_\iota(\mathbf{t})+$ $+P(\Psi_1(\mathbf{t},\mathbf{r})-\Psi_0(\mathbf{t},\mathbf{r}))$ teljesül.

A negyedik egyenlet szerint f nem függ a nulladik változójától.

A harmadik egyenlet azt mutatja, hogy a c függvény nem függ a 0-ik változójától, tehát van olyan $c_1\in C^{\infty}(\mathfrak{M}_1;\mathbb{R})$, hogy $c=\mathbf{1}\otimes c_1$ és akkor a harmadik egyenlet szerint:

$$(D\Phi)^2 = c_1 \cdot \left(\left(\frac{\bar{a}-2\bar{b}-\bar{c}}{\bar{a}\cdot\bar{c}+\bar{b}^2} \right) \circ \Phi \right).$$

Ha most az a függvény is független a nulladik változójától, akkor az első egyenlet szerint a $(\partial_0\Psi_0)^2$ függvény is független a nulladik változójától; ugyanakkor minden $\mathrm{I}\ni\iota$-ra és $\mathfrak{M}_0\times\Omega_\iota\ni(\mathbf{t},\mathbf{r})$-re $\Psi_0(\mathbf{t},\mathbf{r})=Q_\iota(\mathbf{t})+P(\Phi(\mathbf{r}))$, tehát $(\partial_0\Psi_0)^2(\mathbf{t},\mathbf{r})=((DQ_\iota)(\mathbf{t}))^2$, ezért a $(DQ_\iota)^2$ függvény $\mathfrak{M}_0$-n lokálisan állandó, tehát a $DQ_\iota:\mathfrak{M}_0\to\mathbb{R}$ függvény is lokálisan állandó (mert DQ_ι folytonos!). Ezért ekkor az $\mathfrak{M}_0$ minden Ω összefüggő komponenséhez és $\mathrm{I}\ni\iota$-hoz vannak olyan $\mathbf{t}_{\Omega,\iota}\in\mathrm{I}$ és $\mathrm{B}_{\Omega,\iota}\in\mathbb{R}$ konstansok, hogy $\mathbf{t}\in\Omega$ esetén $Q_\iota(\mathbf{t})=\mathbf{t}_{\Omega,\iota}+\mathrm{B}_{\Omega,\iota}\mathbf{t}$ és így minden $\Omega\times\Omega_\iota\ni(\mathbf{t},\mathbf{r})$-re: $\Psi_0(\mathbf{t},\mathbf{r})=\mathbf{t}_{\Omega,\iota}+\mathrm{B}_{\Omega,\iota}\mathbf{t}+P(\Phi(\mathbf{r}))$. Ebből az első egyenlet alapján azonnal kapjuk, hogy ha $a_1:\mathfrak{M}_1\to\mathbb{R}$ az a függvény, amelyre $a=\mathbf{1}\otimes a_1$, akkor minden $\Omega\times\Omega_\iota\ni(\mathbf{t},\mathbf{r})$-re: $(\partial_0\Psi_0)^2(\mathbf{t},\mathbf{r})=\mathrm{B}_{\Omega,\iota}^{\,2}=$ $=a_1(\mathbf{r})/(\bar{a}-2\bar{b}-\bar{c})(\Phi(\mathbf{r}))$. Ebből látszik, hogy $\mathrm{B}_{\Omega,\iota}$ *nem függ Ω-tól* és az $a_1/((\bar{a}-2\bar{b}-\bar{c})\circ\Phi):\mathfrak{M}_1\to\mathbb{R}$ függvény lokálisan állandó $\mathfrak{M}_1$-n.■

<u>Következmény</u> - Legyen $\mathbf{r}_g\in\mathrm{I}^+$ és $a_S, c_S:\mathrm{I}\times(\mathrm{I}^+\setminus\{\mathbf{r}_g\})\to\mathbb{R}$, továbbá $f_S:\mathrm{I}\times(\mathrm{I}^+\setminus\{\mathbf{r}_g\})\to\mathrm{I}\otimes\mathrm{I}$ azok a függvények, melyekre $(\mathbf{t},\mathbf{r})\in\mathrm{I}\times(\mathrm{I}^+\setminus\{\mathbf{r}_g\})$ esetén:

$$a_S(\mathbf{t},\mathbf{r}):=1-(\mathbf{r}_g/\mathbf{r}) \;;\; c_S(\mathbf{t},\mathbf{r}):=\frac{1}{1-(\mathbf{r}_g/\mathbf{r})} \;;\; f_S(\mathbf{t},\mathbf{r}):=\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}.$$

(Vagyis $(\mathrm{I}\times(\mathrm{I}^+\setminus\{\mathbf{r}_g\})\times\mathbb{S}, g_{a_S,0,c_S,f_S})$ azonos az $\mathbf{r}_g$-paraméterű vektoriális Schwarzschild-sokasággal.)

Legyen $\mathfrak{M}_L:=\{(\mathbf{t},\mathbf{r})\in\mathrm{I}\times\mathrm{I}\,|\,\mathbf{t}<\mathbf{r}\}$ és $c_L:\mathfrak{M}_L\to\mathbb{R}^+$, $f_L:\mathfrak{M}_L\to(\mathrm{I}\otimes\mathrm{I})^+$ olyan függvények, hogy léteznek olyan $\bar{c}_L\in C^\infty(\mathrm{I}^+;\mathbb{R}^+)$, $\bar{f}_L\in C^\infty(\mathrm{I}^+;(\mathrm{I}\otimes\mathrm{I})^+)$ függvények, amelyekre $(\mathbf{t},\mathbf{r})\in\mathfrak{M}_L$ esetén

$$c_L(\mathbf{t},\mathbf{r})=\bar{c}_L(\mathbf{r}-\mathbf{t}) \quad;\quad f_L(\mathbf{t},\mathbf{r})=\bar{f}_L(\mathbf{r}-\mathbf{t})$$

teljesül.

Legyen $\Psi\equiv(\Psi_0,\Psi_1):\mathrm{I}\times(\mathrm{I}^+\setminus\{\mathbf{r}_g\})\to\mathfrak{M}_L$ C^∞-osztályú függvény és tegyük fel, hogy

a) van olyan $\Phi: I^+ \to I$ *folytonosan differenciálható* függvény, hogy

$$\Psi_1 - \Psi_0 \subseteq 1 \otimes \Phi$$

ahol 1 az $I \to \mathbb{R}$ azonosan 1 függvény;

b) $\lim\limits_{\mathbf{r} \downarrow 0} \Phi(\mathbf{r}) = 0$ és $\lim\limits_{\mathbf{r} \to \mathbf{r}_g} (D\Phi)(\mathbf{r}) = 1$;

c) $(\Psi \times id_S)^* g_{a_S, 0, c_S, f_S} = g_{1,0,c_L,f_L}$.

Ekkor:

- minden $I^+ \ni \mathbf{r}$-re $\Phi(\mathbf{r}) = \frac{2}{3}\left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_g}\right)^{3/2} \mathbf{r}_g$, tehát Φ C^∞-diffeomorfizmus I^+ és I^+ között

- minden $\mathbb{M}_L \ni (\mathbf{t}, \mathbf{r})$-re

$$c_L(\mathbf{t}, \mathbf{r}) = \frac{1}{\left[\frac{3}{2}\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{t}}{\mathbf{r}_g}\right)\right]^{2/3}} \quad ; \quad f_L(\mathbf{t}, \mathbf{r}) = \left[\frac{3}{2}\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{t}}{\mathbf{r}_g}\right)\right]^{4/3} \mathbf{r}_g \otimes \mathbf{r}_g$$

(tehát $(\mathbb{M}_L \times S, g_{1,0,c_L,f_L})$ azonos az $\mathbf{r}_g$-paraméterű vektoriális Lemaitre-sokasággal)

- léteznek olyan $\mathbf{t}_+, \mathbf{t}_- \in I$ és $B_+, B_- \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ elemek, hogy minden $(\mathbf{t}, \mathbf{r}) \in I \times (I^+ \setminus \{\mathbf{r}_g\})$ pontra

$$\Psi_0(\mathbf{t}, \mathbf{r}) = 2\mathbf{r}_g \left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_g}\right)^{1/2} + \mathbf{r}_g \log \left| \frac{\left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_g}\right)^{1/2} - 1}{\left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_g}\right)^{1/2} + 1} \right| + \begin{cases} \mathbf{t}_- + B_- \mathbf{t} & \text{, ha } \mathbf{r} < \mathbf{r}_g \\ \mathbf{t}_+ + B_+ \mathbf{t} & \text{, ha } \mathbf{r} > \mathbf{r}_g \end{cases}$$

$$\Psi_1(\mathbf{t}, \mathbf{r}) = \Psi_0(\mathbf{t}, \mathbf{r}) + \frac{2}{3}\left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_g}\right)^{3/2} \mathbf{r}_g .$$

- a Ψ függvény C^∞-*diffeomorfizmus* az $I \times (I^+ \setminus \{\mathbf{r}_g\})$ és a $\{(\mathbf{t}, \mathbf{r}) \in \mathbb{M}_L \mid \mathbf{r} - \mathbf{t} \neq \frac{2}{3}\mathbf{r}_g\}$ nyílt $I \times I$-beli részsokaságok között.

Megfordítva; ha a Φ és Ψ függvényeket a fenti formulákkal *értel-*

mezzük (ahol $\mathbf{t}_+,\mathbf{t}_-\in\mathrm{I}$ és $\mathrm{B}_+,\mathrm{B}_-\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ tetszőlegesek), valamint c_{L} és f_{L} azok a konkrét függvények $\mathfrak{M}_{\mathrm{L}}$-n, amiket felírtunk, akkor a), b) és c) teljesül.

<u>Bizonyítás</u> - Az előző állítást alkalmazzuk a következő szereposztással: $\mathfrak{M}_0:=\mathrm{I}$, $\mathfrak{M}_1:=\mathrm{I}\setminus\{\mathbf{r}_g\}$, $a:=a_{\mathrm{S}}$, $c:=c_{\mathrm{S}}$, $f:=f_{\mathrm{S}}$, $a':=1$, $b':=0$, $c':=c_{\mathrm{L}}$, $f':=f_{\mathrm{L}}$, $\mathfrak{M}':=\mathfrak{M}_{\mathrm{L}}$, $\overline{\mathfrak{M}}:=\mathrm{I}^+$, $\bar{a}:=1$, $\bar{b}:=0$, $\bar{c}:=\bar{c}_{\mathrm{L}}$, $\bar{f}:=\bar{f}_{\mathrm{L}}$.

Mivel ekkor $\mathfrak{M}_0$ összefüggő és az a függvény a nulladik változójától nem függ, ezért az előző állítás alapján a következők mondhatók:

- Ψ és Φ lokális C^∞-diffeomorfizmus.
- $\bar{c}_{\mathrm{L}}\neq 1$ az $\Phi\langle\mathrm{I}^+\setminus\{\mathbf{r}_g\}\rangle$ halmaz minden pontjában.
- Ha $P:\Phi\langle\mathrm{I}^+\setminus\{\mathbf{r}_g\}\rangle\to\mathrm{I}$ primitív függvénye a $\bar{c}_{\mathrm{L}}/(1-\bar{c}_{\mathrm{L}}):\Phi\langle\mathrm{I}^+\setminus\{\mathbf{r}_g\}\rangle\to\mathbb{R}$ függvénynek, akkor léteznek olyan $\mathbf{t}_+,\mathbf{t}_-\in\mathrm{I}$ és $\mathrm{B}_+,\mathrm{B}_-\in\mathbb{R}$ elemek, hogy

$$(\mathbf{t},\mathbf{r})\in\mathrm{I}\times]0,\mathbf{r}_g[\ \Rightarrow\ \Psi_0(\mathbf{t},\mathbf{r})=\mathbf{t}_-+\mathrm{B}_-\mathbf{t}+P(\Phi(\mathbf{r}))$$

$$(\mathbf{t},\mathbf{r})\in\mathrm{I}\times]\mathbf{r}_g,\to[\ \Rightarrow\ \Psi_0(\mathbf{t},\mathbf{r})=\mathbf{t}_++\mathrm{B}_+\mathbf{t}+P(\Phi(\mathbf{r}))$$

  teljesül. A B_+ és B_- számok nem nullák, mert $\partial_0\Psi_0$ a definíciós tartományán sehol sem nulla.
- A Φ függvény olyan, hogy minden $\mathrm{I}\setminus\{\mathbf{r}_g\}\ni\mathbf{r}$-re:

$$((\mathrm{D}\Phi)(\mathbf{r}))^2=\frac{1}{1-(\mathbf{r}_g/\mathbf{r})}\cdot\frac{1-\bar{c}_{\mathrm{L}}(\Phi(\mathbf{r}))}{\bar{c}_{\mathrm{L}}(\Phi(\mathbf{r})}.$$

- Az $\mathrm{I}\setminus\{\mathbf{r}_g\}\to\mathbb{R};\ \mathbf{r}\mapsto(1-(\mathbf{r}_g/\mathbf{r}))/(1-\bar{c}_{\mathrm{L}}(\Phi(\mathbf{r})))$ függvény lokálisan állandó, tehát léteznek olyan $\mathrm{C}_+,\mathrm{C}_-\in\mathbb{R}$ nem nulla számok, hogy

$$\mathbf{r}\in]0,\mathbf{r}_g[\quad\Rightarrow\quad \bar{c}_{\mathrm{L}}(\Phi(\mathbf{r}))=(1-\mathrm{C}_-)+\mathrm{C}_-(\mathbf{r}_g/\mathbf{r})$$

$$\mathbf{r}\in]\mathbf{r}_g,\to[\quad\Rightarrow\quad \bar{c}_{\mathrm{L}}(\Phi(\mathbf{r}))=(1-\mathrm{C}_+)+\mathrm{C}_+(\mathbf{r}_g/\mathbf{r}).$$

- Minden $\mathrm{I}\setminus\{\mathbf{r}_g\}\ni\mathbf{r}$-re $\bar{f}_{\mathrm{L}}(\Phi(\mathbf{r}))=\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}$.

Ekkor $\bar{c}_{\mathrm{L}}\circ\Phi$-t a Φ-re vonatkozó differenciálegyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy minden $\mathrm{I}\setminus\{\mathbf{r}_g\}\ni\mathbf{r}$-re:

$$\mathbf{r}\in]0,\mathbf{r}_g[\quad \Rightarrow \quad ((D\Phi)(\mathbf{r}))^2 = \frac{C_-}{1-C_-+C_-(\mathbf{r}_g/\mathbf{r})}$$

$$\mathbf{r}\in]\mathbf{r}_g,\rightarrow[\quad \Rightarrow \quad ((D\Phi)(\mathbf{r}))^2 = \frac{C_+}{1-C_++C_+(\mathbf{r}_g/\mathbf{r})}$$

teljesül.

A fentiekből látszik, hogy a $\bar{c}_L$ és $\bar{f}_L$ függvények explicit alakjának meghatározásához a Φ konkrét alakját kell ismerni, míg a Ψ meghatározásához a Φ és $P\circ\Phi$ függvényekre van szükség, ahol P primitív függvénye a $\bar{c}_L/(1-\bar{c}_L):\Phi\langle I^+\setminus\{\mathbf{r}_g\}\rangle\rightarrow\mathbb{R}$ függvénynek. Ezért minden szempontból a Φ konkrét alakját kell ismerni, ami azért lehetséges, mert rendelkezésünkre áll egy Φ-re vonatkozó differenciálegyenlet.

A Φ-re vonatkozó differenciálegyenletből következik, hogy C_+ és C_- szigorúan pozitívak. Valóban, ha $0<\mathbf{r}<\mathbf{r}_g$, akkor C_- és $1-C_-+C_-(\mathbf{r}_g/\mathbf{r})$ azonos előjelűek, tehát ha $C_-<0$ teljesülne, akkor $0\geq\lim_{\mathbf{r}\uparrow\mathbf{r}_g}(1-C_-+C_-(\mathbf{r}_g/\mathbf{r}))=1$ igaz volna, ami lehetelen; ezért $C_->0$. Hasonlóan; ha $\mathbf{r}>\mathbf{r}_g$, akkor C_+ és $1-C_++C_+(\mathbf{r}_g/\mathbf{r})$ azonos előjelűek, tehát ha $C_+<0$ teljesülne, akkor $0\geq\lim_{\mathbf{r}\downarrow\mathbf{r}_g}(1-C_++C_+(\mathbf{r}_g/\mathbf{r}))=1$ volna, ami lehetetlen; ezért $C_+>0$. Ugyanakkor; $1-C_++C_+(\mathbf{r}_g/\mathbf{r})>0$ $(\mathbf{r}_g>\mathbf{0})$ miatt $1\geq C_+$ is teljesül; ehhez az $1-C_++C_+(\mathbf{r}_g/\mathbf{r})$ határértékét kell venni $+\infty$-ben.

A Φ-re vonatkozó differenciálegyenletből következik, hogy egyértelműen léteznek olyan $\varepsilon_-,\varepsilon_+\in\{-1,+1\}$ számok, hogy

$$(D\Phi)(\mathbf{r}) = \begin{cases} \varepsilon_-\sqrt{\dfrac{C_-}{1-C_-+C_-(\mathbf{r}_g/\mathbf{r})}}, & \text{ha } \mathbf{r}\in]0,\mathbf{r}_g[\\[2ex] \varepsilon_+\sqrt{\dfrac{C_+}{1-C_++C_+(\mathbf{r}_g/\mathbf{r})}}, & \text{ha } \mathbf{r}\in]\mathbf{r}_g,\rightarrow[\end{cases}$$

Ebből következik, hogy

$$\lim_{\mathbf{r}\uparrow \mathbf{r}_g} (D\Phi)(\mathbf{r}) = \varepsilon_-\sqrt{C_-} \quad ; \quad \lim_{\mathbf{r}\downarrow \mathbf{r}_g} (D\Phi)(\mathbf{r}) = \varepsilon_+\sqrt{C_+}$$

tehát a $D\Phi$-re vonatkozó b) feltétel alapján $C_-=C_+=1$ és $\varepsilon_-=\varepsilon_+=1$, vagyis minden $I^+\ni\mathbf{r}$-re $(D\Phi)(\mathbf{r})=\sqrt{\mathbf{r}/\mathbf{r}_g}$. Ezért vannak olyan $D_-, D_+\in I$ elemek, hogy

$$\Phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} D_- + \frac{2}{3}\left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_g}\right)^{3/2}\mathbf{r}_g & , \text{ ha } \mathbf{r}\in]0,\mathbf{r}_g[\\ D_+ + \frac{2}{3}\left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_g}\right)^{3/2}\mathbf{r}_g & , \text{ ha } \mathbf{r}\in]\mathbf{r}_g,\rightarrow[\end{cases}$$

és mivel Φ folytonos és $\lim_{\mathbf{r}\downarrow 0}\Phi(\mathbf{r})=0$, ezért $D_+=D_-=0$, tehát minden minden $I^+\ni\mathbf{r}$-re

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{2}{3}\left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_g}\right)^{3/2}\mathbf{r}_g$$

teljesül. Látszik, hogy Φ C^∞-diffeomorfizmus I^+ és I^+ között és $\Phi\langle I^+\setminus\{\mathbf{r}_g\}\rangle = I^+\setminus\{\frac{2}{3}\mathbf{r}_g\}$.

Mivel minden $I^+\setminus\{\mathbf{r}_g\}\ni\mathbf{r}$-re $\bar{c}_L(\Phi(\mathbf{r}))=\mathbf{r}_g/\mathbf{r}$ és $\bar{f}_L(\Phi(\mathbf{r}))=\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}$, ezért a Φ inverzének ismeretében azonnal megkapjuk a c_L és f_L függvények explicit alakját.

Végül, a Ψ meghatározásához ki kell számítani a

$$\bar{c}_L/(1-\bar{c}_L) : I^+\setminus\{\tfrac{2}{3}\mathbf{r}_g\} \to \mathbb{R} \quad ; \quad \mathbf{r} \mapsto \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_g}\right)^{2/3} - 1}$$

függvény egyik P primitív függvényét (itt $I^+\setminus\{\frac{2}{3}\mathbf{r}_g\}=\Phi\langle I^+\setminus\{\mathbf{r}_g\}\rangle$). Könnyen látható, hogy a

$$P : I^+\setminus\{\tfrac{2}{3}\mathbf{r}_g\} \to I \quad ; \quad \mathbf{r} \mapsto 2\left(\frac{3}{2}\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_g}\right)^{1/3}\mathbf{r}_g + \mathbf{r}_g \log\left|\frac{\left(\frac{3}{2}\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_g}\right)^{1/3} - 1}{\left(\frac{3}{2}\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_g}\right)^{1/3} + 1}\right|$$

függvény ilyen. A $P\circ\Phi$ függvényt kiszámítva ebből kapjuk, hogy minden $(\mathbf{t},\mathbf{r})\in I\times(I^{+}\setminus\{\mathbf{r}_g\})$ pontra:

$$\Psi_0(\mathbf{t},\mathbf{r})=\begin{cases} \mathbf{t}_- + B_-\mathbf{t} + 2\mathbf{r}_g\left(\dfrac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_g}\right)^{1/2} + \mathbf{r}_g\cdot\log\left|\dfrac{\left(\dfrac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_g}\right)^{1/2}-1}{\left(\dfrac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_g}\right)^{1/2}+1}\right| & \text{, ha } \mathbf{r}<\mathbf{r}_g \\ \mathbf{t}_+ + B_+\mathbf{t} + 2\mathbf{r}_g\left(\dfrac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_g}\right)^{1/2} + \mathbf{r}_g\cdot\log\left|\dfrac{\left(\dfrac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_g}\right)^{1/2}-1}{\left(\dfrac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_g}\right)^{1/2}+1}\right| & \text{, ha } \mathbf{r}>\mathbf{r}_g \end{cases}$$

és természetesen $\Psi_1(\mathbf{t},\mathbf{r}) = \Psi_0(\mathbf{t},\mathbf{r}) + \frac{2}{3}\left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_g}\right)^{3/2}\mathbf{r}_g$. Ebből világosan látszik, hogy Ψ C^{∞}-diffeomorfizmus az $I\times(I^{+}\setminus\{\mathbf{r}_g\})$ és a $\{(\mathbf{t},\mathbf{r})\in\mathfrak{M}_L \mid |\mathbf{r}-\mathbf{t}\neq\frac{2}{3}\mathbf{r}_g\}$ halmazok között, ugyanis Ψ inverze a következő:

$$\Psi^{-1}\equiv((\Psi^{-1})_0,(\Psi^{-1})_1) : \{(\mathbf{t}',\mathbf{r}')\in I\times I \mid 0<\mathbf{r}'-\mathbf{t}'\neq\tfrac{2}{3}\mathbf{r}_g\} \to I\times(I^{+}\setminus\{\mathbf{r}_g\})$$

és $(\mathbf{t}',\mathbf{r}')\in I\times I$, $0<\mathbf{r}'-\mathbf{t}'<\frac{2}{3}\mathbf{r}_g$ esetén

$$(\Psi^{-1})_0(\mathbf{t}',\mathbf{r}') = \frac{\mathbf{t}-\mathbf{t}_-}{B_-} - \frac{2}{B_-}\cdot\mathbf{r}_g\cdot\left(\frac{3}{2}\,\frac{\mathbf{r}'-\mathbf{t}'}{\mathbf{r}_g}\right)^{1/3} - \frac{\mathbf{r}_g}{B_-}\cdot\log\left(\frac{1-\left(\frac{3}{2}\,\frac{\mathbf{r}'-\mathbf{t}'}{\mathbf{r}_g}\right)^{1/3}}{1+\left(\frac{3}{2}\,\frac{\mathbf{r}'-\mathbf{t}'}{\mathbf{r}_g}\right)^{1/3}}\right)$$

$$(\Psi^{-1})_1(\mathbf{t}',\mathbf{r}') = \left(\frac{3}{2}\,\frac{\mathbf{r}'-\mathbf{t}'}{\mathbf{r}_g}\right)^{2/3}\mathbf{r}_g$$

és $(\mathbf{t}',\mathbf{r}')\in I\times I$, $\mathbf{r}'-\mathbf{t}'>\frac{2}{3}\mathbf{r}_g$ esetén

$$(\Psi^{-1})_0(\mathbf{t}',\mathbf{r}') = \frac{\mathbf{t}-\mathbf{t}_+}{B_+} - \frac{2}{B_+}\cdot\mathbf{r}_g\cdot\left(\frac{3}{2}\,\frac{\mathbf{r}'-\mathbf{t}'}{\mathbf{r}_g}\right)^{1/3} - \frac{\mathbf{r}_g}{B_+}\cdot\log\left(\frac{1-\left(\frac{3}{2}\,\frac{\mathbf{r}'-\mathbf{t}'}{\mathbf{r}_g}\right)^{1/3}}{1+\left(\frac{3}{2}\,\frac{\mathbf{r}'-\mathbf{t}'}{\mathbf{r}_g}\right)^{1/3}}\right)$$

$$(\Psi^{-1})_1(t',r') = \left(\frac{3}{2}\,\frac{r'-t'}{r_g}\right)^{2/3} r_g .$$

Az is látható, hogy

$$\Psi\langle I\times]0,r_g[\rangle = \{(t',r')\in I\times I \mid 0<r'-t'<\tfrac{2}{3}r_g\}$$

$$\Psi\langle I\times]r_g,\to[\rangle = \{(t',r')\in I\times I \mid r'-t'>\tfrac{2}{3}r_g\}.$$

Nyilvánvaló, hogy Ψ *nem terjeszthető* ki $I\times I^{+}$-ra folytonosan.∎

<u>Megjegyzés</u> - Az állításban szereplő Ψ függvény a $t_-=t_+=0$ és $B_-=B_+=1$ esetben *teljesen azonos* a Novikov-Frolov: Fekete lyukak fizikája c. könyv 16. oldalán álló (2.4.4) és (2.4.5) formulákkal adott transzformációval. A könyvben nem Ψ, hanem a Ψ^{-1} explicit alakja található.

<u>3.Tétel</u> - Az r_g-paraméterű vektoriális Lemaitre-sokaság az r_g-paraméterű vektoriális Schwarzschild-sokaságnak *kiterjesztése.*

<u>Bizonyítás</u> - Az r_g-paraméterű vektoriális Lemaitre-sokaság $\mathbb{R}_L\times\mathbb{S}$ sokaság-bázisában a $\{(t,r)\mid 0<r-t\neq\frac{2}{3}r_g\}\times\mathbb{S}$ halmaz olyan *valódi nyílt* részhalmaz, amelyre leszűkítve a Lemaitre-metrikát olyan Lorentz-sokaságot kapunk, amelynek az előző állításban bevezetett $\Psi^{\times \mathrm{id}_{\mathbb{S}}}$ általi inverz képe egyenlő az r_g-paraméterű Schwarzschild-sokasággal.∎

6. Affin Lemaitre-sokaságok

Ebben a pontban $\mathbb{M}$ *végesdimenziós, legalább kétdimenziós valós affin teret jelöl az* $\mathbf{M}$ *vektortér felett,* $\mathbf{I}$ *egydimenziós orientált valós vektortér,* $(\mathbf{g},\mathbf{c})$ *Lorentz-struktúra* $\mathbf{M}$ *felett,* $o\in\mathbb{M}$ *rögzített pont és* $r_g\in\mathbf{I}^{+}$. Az $\mathbb{S}\left(\frac{\mathbf{E}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}}{\mathbf{I}},[\cdot|\cdot]_{\mathbf{g},\mathbf{c}}\right)$ *gömbfelületet* $\mathbb{S}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}$*-vel jelöljük. Továbbá; az* $(\mathbf{E}_{\mathbf{g},\mathbf{c}},[\cdot|\cdot]_{\mathbf{g},\mathbf{c}})$ *euklidészi tér feletti* r_g*-paraméterű vektoriális Lemaitre (ill. Schwarzschild) metrikát* g_L *(ill.* g_S*) jelöli, tehát*

- *a* g_L *definíciós tartománya az* $\mathbb{R}_L\times\mathbb{S}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}$ *sokaság, amelynek min-*

den $(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})$ *elemére és minden* $\mathrm{I}\times\mathrm{I}\times\frac{\mathbf{n}^{\perp}}{\mathrm{I}}\equiv \mathrm{T}_{(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})}(\mathbb{M}_L\times\mathbb{S}_{\mathbf{g},\mathbf{c}})$*-beli* $(\mathbf{t}',\mathbf{r}',\mathbf{v}')$, $(\mathbf{t}'',\mathbf{r}'',\mathbf{v}'')$ *érintővektorokra*:

$$g_L(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})((\mathbf{t}',\mathbf{r}',\mathbf{v}'),(\mathbf{t}'',\mathbf{r}'',\mathbf{v}'')) :=$$

$$= -(\mathbf{t}'\otimes\mathbf{t}'') + \frac{1}{\left[\frac{3}{2}\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{t}}{\mathbf{r}_g}\right)\right]^{2/3}}\cdot(\mathbf{r}'\otimes\mathbf{r}'') + \left[\frac{3}{2}\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{t}}{\mathbf{r}_g}\right)\right]^{4/3}(\mathbf{r}_g\otimes\mathbf{r}_g)\cdot(\mathbf{v}'|\mathbf{v}'')_{\mathbf{g},\mathbf{c}}.$$

– *a* g_S *definíciós tartománya az* $\mathrm{I}\times(\mathrm{I}^{+}\setminus\{\mathbf{r}_g\})\times\mathbb{S}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}$ *sokaság, amelynek minden* $(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})$ *elemére és* $\mathrm{I}\times\mathrm{I}\times\frac{\mathbf{n}^{\perp}}{\mathrm{I}}\equiv\mathrm{T}_{(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})}(\mathrm{I}\times(\mathrm{I}^{+}\setminus\{\mathbf{r}_g\})\times\mathbb{S}_{\mathbf{g},\mathbf{c}})$*-beli* $(\mathbf{t}',\mathbf{r}',\mathbf{v}')$, $(\mathbf{t}'',\mathbf{r}'',\mathbf{v}'')$ *érintővektorokra*:

$$g_S(\mathbf{t},\mathbf{r},\mathbf{n})((\mathbf{t}',\mathbf{r}',\mathbf{v}'),(\mathbf{t}'',\mathbf{r}'',\mathbf{v}'')) :=$$

$$= -\left(1-\frac{\mathbf{r}_g}{\mathbf{r}}\right)\cdot(\mathbf{t}'\otimes\mathbf{t}'') + \frac{1}{\left(1-\frac{\mathbf{r}_g}{\mathbf{r}}\right)}\cdot(\mathbf{r}'\otimes\mathbf{r}'') + (\mathbf{r}\otimes\mathbf{r})\cdot(\mathbf{v}'|\mathbf{v}'')_{\mathbf{g},\mathbf{c}}.$$

Ebben a pontban a következő kérdésre válaszolunk: megadható-e olyan affin Lorentz-sokaság, amelynek a bázisa *egyenlő* $\mathbb{M}\setminus\{\sigma+\mathbf{c}\otimes\mathrm{I}\}$-vel és amely *izomorf* az $\mathbf{r}_g$-paraméterű vektoriális Lemaitre-sokasággal? A 4. pontban megadtunk egy általános módszert, amellyel vektoriális Lorentz-sokaságokból (gömbszimmetrikus) affin Lorentz-sokaságok állíthatók elő. Már ott megjegyeztük, hogy az a módszer nem alkalmazható affin Lemaitre-sokaság konstrukciójára, mert csak olyan vektoriális Lorentz-sokaságokból lehet kiindulni, amelyek bázisa $\mathbb{M}\times\mathbb{S}$ alakú, ahol $\mathbb{M}\subset\mathrm{I}\times\mathrm{I}^{+}$; ugyanakkor a vektoriális Lemaitre-sokaságok bázisa $\mathbb{M}_L\times\mathbb{S}$ alakú, ahol $\mathbb{M}_L:=\{(\mathbf{t},\mathbf{r})\in\mathrm{I}\times\mathrm{I}\mid \mathbf{r}-\mathbf{t}>0\}\not\subset\mathrm{I}\times\mathrm{I}^{+}$). Ezért – első ránézésre – nem nyilvánvaló, hogy a kérdés valójában triviálisan (igenlően) megválaszolható.

Az affin Lemaitre-sokaság(ok) konstrukciója szempontjából annak az észrevételnek van döntő jelentősége, hogy $\mathrm{I}\times\mathrm{I}^{+}$ és $\mathbb{M}_L$ egymással C^∞-diffeomorf nyílt részsokaságok $I\times I$-ben. Ezért a következőket tehetjük:

- Veszünk *tetszőleges* $\Xi: I\times I^+ \to \mathbb{M}_L$ C^∞-diffeomorfizmust.
- Elkészítjük a $\Xi\times id_{\mathbb{S}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}}: I\times I^+\times\mathbb{S}_{\mathbf{g},\mathbf{c}} \to \mathbb{M}_L\times\mathbb{S}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}$ leképezést, amely szintén C^∞-diffeomorfizmus.
- Képezzük a g_L vektoriális Lemaitre-metrika $\Xi\times id_{\mathbb{S}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}}$ függvény általi inverz képét; ezzel kapjuk a $(I\times I^+\times\mathbb{S}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}, (\Xi\times id_{\mathbb{S}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}})^* g_L)$ vektoriális Lorentz-sokaságot, amely izomorf az $\mathbf{r}_g$-paraméterű vektoriális Lemaitre-sokasággal.
- Az imént előállított Lorentz-metrikának a

$$\Phi_{\mathbf{g},\mathbf{c},\sigma} : \mathbb{M}\setminus(\sigma+\mathbf{c}\otimes I) \to I\times I^+\times\mathbb{S}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}$$

  C^∞-diffeomorfizmus által létesített inverz képét képezzük. Ekkor az

$$(\mathbb{M}\setminus(\sigma+\mathbf{c}\otimes I)\ ,\ \Phi_{\mathbf{g},\mathbf{c},\sigma}^*((\Xi\times id_{\mathbb{S}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}})^* g_L))$$

  pár olyan affin Lorentz-sokaság, amelynek bázisa *egyenlő* az $\mathbb{M}\setminus(\sigma+\mathbf{c}\otimes I)$ nyílt halmazzal és amely *izomorf* az $\mathbf{r}_g$-paraméterű vektoriális Lemaitre-sokasággal.

A fenti eljárással előállított affin Lorentz sokaságokat *$(\Xi,\mathbf{r}_g)$-paraméterű affin Lemaitre-sokaságoknak nevezzük.* Ezek (rögzített $\mathbf{r}_g$ mellett) mind izomorfak egymással; vagyis ezek *izomorfia-osztálya* a Ξ választásától *független.*

A következő természetes kérdés: az affin Lematire-sokaságok milyen kapcsolatban állnak az affin Schwarzschild-sokaságokkal? Az 5. pont eredményei alapján a válasz nyilvánvaló: *akármilyen* $\Xi: I\times I^+ \to \mathbb{M}_L$ C^∞-diffeomorfizmust is választunk, a $(\Xi,\mathbf{r}_g)$-paraméterű affin Lemaitre-sokaság *kiterjesztése* az $\mathbf{r}_g$-paraméterű affin Schwarzschild-sokaságnak. Valóban; legyen $\Psi: I\times(I^+\setminus\{\mathbf{r}_g\}) \to \mathbb{M}_L$ tetszőleges olyan injektív lokális C^∞-diffeomorfizmus, amelyre $(\Psi\times id_{\mathbb{S}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}})^* g_L = g_S$ teljesül. Ha $\mathbb{M}_S := \mathbb{M}\setminus(\sigma+\mathbf{c}\otimes I)\setminus\{a\in\mathbb{M} \mid |\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)| = \mathbf{r}_g\}$, akkor könnyen látható, hogy a

$$H := \Phi^{-1}_{\mathbf{g},\mathbf{c},\sigma}\circ((\Xi^{-1}\circ\Psi)\times id_{S_{\mathbf{g},\mathbf{c}}})\circ\Phi_{\mathbf{g},\mathbf{c},\sigma}\Big|_{\mathbb{M}_S} : \mathbb{M}_S \to \mathbb{M}\setminus(\sigma+\mathbf{c}\otimes I)$$

leképezés olyan injektív lokális C^{∞}-diffeomorfizmus, hogy

$$H^{*}(((\Xi\times id_{S_{\mathbf{g},\mathbf{c}}})\circ\Phi_{\mathbf{g},\mathbf{c},\sigma})^{*}g_L) = (\Phi_{\mathbf{g},\mathbf{c},\sigma}\Big|_{\mathbb{M}_S})^{*}g_S$$

teljesül, vagyis az $(\mathbb{M}_S,(\Phi_{\mathbf{g},\mathbf{c},\sigma}\Big|_{\mathbb{M}_S})^{*}g_S)$ $\mathbf{r}_g$-paraméterű affin Schwarzschild-sokaság izomorf a $(H\langle\mathbb{M}_S\rangle, g\Big|_{\mathbb{M}_S})$ Lorentz-sokasággal, ahol $g:=((\Xi\times id_{S_{\mathbf{g},\mathbf{c}}})\circ\Phi_{\mathbf{g},\mathbf{c},\sigma})^{*}g_L$ a $(\Xi,\mathbf{r}_g)$-paraméterű affin Lemaitre-metrika és $H\langle\mathbb{M}_S\rangle\subseteq\mathbb{M}\setminus(\sigma+\mathbf{c}\otimes I)$ valódi nyílt részhalmaz. Az is látszik, hogy a $H\langle\mathbb{M}_S\rangle$ halmaz egyenlő is lehet $\mathbb{M}_S$-sel, ha a $\Xi^{-1}\circ\Psi: I\times(I^{+}\setminus\{\mathbf{r}_g\})\to I\times I^{+}$ injektív lokális C^{∞}-diffeomorfizmus az $I\times(I^{+}\setminus\{\mathbf{r}_g\})$ halmazra képez.

Befejezésül felírunk egy teljesen konkrét affin Lemaitre-sokaságot és részletesen tárgyaljuk annak a kapcsolatát a megfelelő affin Schwarzschild-sokasággal.

Ehhez először megjegyezzük, hogy egy $Z\equiv\begin{pmatrix} Z_{00} & Z_{01} \\ Z_{10} & Z_{11}\end{pmatrix}\in GL(I\times I)$ leképezésre pontosan akkor teljesül $Z\langle I\times I^{+}\rangle=\mathbb{R}_L$, ha $Z_{00}\neq 0$ és $Z_{01}<Z_{11}$ és $Z_{10}=Z_{00}$. E mellett az $Z\langle I\times(I^{+}\setminus\{\mathbf{r}_g\})\rangle=\{(\mathbf{t},\mathbf{r})\in\mathbb{R}_L \mid \mathbf{r}-\mathbf{t}\neq\frac{2}{3}\mathbf{r}_g\}$ pontosan akkor teljesül, ha $Z_{11}=Z_{01}+\frac{2}{3}$.

<u>Jelölés</u> - Ha $Z\equiv\begin{pmatrix} Z_{00} & Z_{01} \\ Z_{10} & Z_{11}\end{pmatrix}\in GL(I\times I)$ olyan, hogy $Z_{00}\neq 0$, $Z_{10}=Z_{00}$ és $Z_{11}>Z_{01}$, akkor Ξ_Z jelöli az Z operátor leszűkítését az $I\times I^{+}$ és $\mathbb{R}_L$ halmazokra; tehát ekkor $\Xi_Z: I\times I^{+}\to\mathbb{R}_L$ C^{∞}-diffeomorfizmus.

<u>17.Állítás</u> - Legyen $Z\equiv\begin{pmatrix} Z_{00} & Z_{01} \\ Z_{00} & Z_{11}\end{pmatrix}\in GL(I\times I)$ olyan, hogy $Z_{00}\neq 0$, és $Z_{11}>Z_{01}$. Ekkor az $\mathbb{M}\setminus(\sigma+\mathbf{c}\otimes I)$ nyílt $\mathbb{M}$-beli részsokaság feletti

$$g := \Phi_{\mathbf{g},\mathbf{c},\sigma}{}^{*}((\Xi_Z\times id_{S_{\mathbf{g},\mathbf{c}}})^{*}g_L)$$

affin Lemaitre-metrikára teljesül az, hogy minden $\mathbb{M}\setminus(\sigma+\mathbf{c}\otimes\mathbb{I})\ni a$-ra

$$g(a) = -Z_{00}^2\left(1-\frac{1}{\left(\frac{3}{2}(Z_{11}-Z_{01})\frac{|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)|}{\mathbf{r}_g}\right)^{2/3}}\right)\cdot(\mathbf{c}\underset{\mathbf{g}}{\otimes}\mathbf{c}) -$$

$$-2Z_{00}\left(\frac{Z_{11}}{\left(\frac{3}{2}(Z_{11}-Z_{01})\frac{|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)|}{\mathbf{r}_g}\right)^{2/3}}-Z_{01}\right)\cdot(\mathbf{c}\underset{\mathbf{g}}{\otimes}\omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)) +$$

$$+\left(\frac{Z_{11}^2-\left(\frac{3}{2}(Z_{11}-Z_{01})\right)^2}{\left(\frac{3}{2}(Z_{11}-Z_{01})\frac{|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)|}{\mathbf{r}_g}\right)^{2/3}}-Z_{01}^2\right)\cdot(\omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)\underset{\mathbf{g}}{\otimes}\omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)) +$$

$$+\frac{\left(\frac{3}{2}(Z_{11}-Z_{01})\right)^2}{\left(\frac{3}{2}(Z_{11}-Z_{01})\frac{|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)|}{\mathbf{r}_g}\right)^{2/3}}\cdot\mathbf{g}\circ(\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}\times\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}),$$

ahol

$$\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}} : \mathbf{M}\to\mathbf{E}_{\mathbf{g},\mathbf{c}} \quad ; \quad \mathbf{x}\mapsto\mathbf{x}+\mathbf{c}\otimes_{\mathbb{I}}\mathbf{g}(\mathbf{c},\mathbf{x})$$

és

$$\omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}} : \mathbb{M}\setminus(\mathbf{c}\otimes\mathbb{I})\to\mathbb{S}_{\mathbf{g},\mathbf{c}} \quad ; \quad \mathbf{x}\mapsto\frac{\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(\mathbf{x})}{|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(\mathbf{x})|} .$$

<u>Bizonyítás</u> - Első lépésben a 14.Állítást alkalmazva kapjuk, hogy

$$(\Xi_Z\times id_{\mathbb{S}_{\mathbf{g},\mathbf{c}}})^* g_L = g_{a,b,c,f} ,$$

ahol $a,b,c:\mathbb{I}\times\mathbb{I}^+\to\mathbb{R}$ és $f:\mathbb{I}\times\mathbb{I}^+\to\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}$ azok a függvények, amelyekre $(\mathbf{t},\mathbf{r})\in\mathbb{I}\times\mathbb{I}^+$ esetén:

$$a(\mathbf{t},\mathbf{r}) = Z_{00}^2\left(1-\frac{1}{\left(\frac{3}{2}(Z_{11}-Z_{01})\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_g}\right)^{2/3}}\right)$$

$$b(\mathbf{t},\mathbf{r}) = Z_{00}\left(\frac{Z_{11}}{\left(\frac{3}{2}(Z_{11}-Z_{01})\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_g}\right)^{2/3}}-Z_{01}\right)$$

$$c(\mathbf{t},\mathbf{r}) = \frac{Z_{11}^2}{\left(\frac{3}{2}(Z_{11}-Z_{01})\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_g}\right)^{2/3}} - Z_{01}^2$$

$$f(\mathbf{t},\mathbf{r}) = \left(\frac{3}{2}(Z_{11}-Z_{01})\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_g}\right)^{4/3} (\mathbf{r}_g\otimes\mathbf{r}_g).$$

Ezután a 15.Állítást alkalmazva megkapjuk a $g:=\Phi_{\mathbf{g},\mathbf{c},o}^{*}g_{a,b,c,f}$ affin Lemaitre-metrika fenti konkrét alakját.∎

Figyeljük meg, hogy az előbb konstruált affin Lemaitre-metrika mennyi paramétertől függ:

- az $\mathbb{M}$ affin tértől, amely legalább kétdimenziós, végesdimenziós valós affin tér,
- az I egydimenziós valós vektortértől,
- az $o\in\mathbb{M}$ ponttól,
- az $\mathbf{M}$ feletti $(\mathbf{g},\mathbf{c})$ Lorentz-struktúrától,
- az I-n választott orientációtól,
- az $\mathbf{r}_g\in I^+$ elemtől,
- a $Z\in GL(I\times I)$ operátortól, amelyre $Z\langle I\times I^+\rangle=\mathfrak{M}_L$ teljesül.

Ezzel szemben egy euklidészi tér feletti vektoriális Lemaitre-metrika csak a következő paraméterektől függ:

- az $\mathbf{E}$ vektortértől, amely legalább egydimenziós, végesdimenziós valós vektortér,
- az I egydimenziós vektortértől,
- a $[\cdot|\cdot]:\mathbf{E}\times\mathbf{E}\to I\otimes I$ euklidészi formától,
- az I-n választott orientációtól,
- az $\mathbf{r}_g\in I^+$ elemtől.

Arról nem is szólva, hogy a g_L vektoriális Lemaitre-metrikák sokkal egyszerűbb alakúak, mint a fent előállított affin Lemaitre-metrikák. Ugyanakkor minden affin Lemaitre-sokaság izomorf egy vektoriális Lemaitre-sokasággal. Ezért legalábbis kétséges az, hogy az általános relativitáselméletben célszerűbb affin Lorentz-sokaságokkal folalkozni, mint vektoriális Lorentz-sokaságokkal.

Végezetül felírjuk az affin Lemaitre-sokaságok és a megfelelő paraméterű affin Schwarzschild-sokaságok explicit kapcsolatát.

<u>18. Állítás</u> - Legyen $Z \equiv \begin{pmatrix} Z_{00} & Z_{01} \\ Z_{00} & Z_{11} \end{pmatrix} \in GL(I\times I)$ olyan, hogy $Z_{00} \neq 0$, $Z_{11} > Z_{01}$. Legyen $\mathbb{M}_S := \{a \in \mathbb{M} \mid 0 < |\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)| \neq \mathbf{r}_g\}$ és tekintsük azt a

$$H : \mathbb{M}_S \to \mathbb{M} \setminus (\sigma + \mathbf{c} \otimes I)$$

függvényt, amelyre $a \in \mathbb{M}_S$ esetén:

$$H(\sigma) := \sigma + Z_{00}^{-1}\left(\mathbf{c} + \left(\frac{Z_{00}-Z_{01}}{Z_{11}-Z_{01}}\right)\cdot \omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)\right) \otimes \left(-_I\mathbf{g}(\mathbf{c}, a-\sigma) + \Psi_{\mathbf{r}_g}(|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)|)\right) +$$

$$+ \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{|\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)|}{\mathbf{r}_g}\right)^{2/3} \cdot \frac{Z_{00}^{-1}}{Z_{11}-Z_{01}} \cdot \left(Z_{00}\omega_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma) - Z_{01}\mathbf{c}\right) \otimes \mathbf{r}_g \ ,$$

ahol:

$$\Psi_{\mathbf{r}_g} : I^+ \setminus \{\mathbf{r}_g\} \to I;$$

$$\mathbf{r} \mapsto 2\mathbf{r}_g\left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_g}\right)^{1/2} + \mathbf{r}_g \log\left|\frac{\left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_g}\right)^{1/2} - 1}{\left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_g}\right)^{1/2} + 1}\right| .$$

Ekkor H injektív lokális C^∞-diffeomorfizmus és a

$$g := \Phi_{\mathbf{g},\mathbf{c},\sigma}{}^*((\Xi_Z \times id_{S_{\mathbf{g},\mathbf{c}}})^* g_L)$$

affin Lemaitre-metrika H által létesített inverz képe egyenlő az $\mathbf{r}_g$-paraméterű, $\mathbb{M}_S$ bázisú $(\Phi_{\mathbf{g},\mathbf{c},\sigma}|_{\mathbb{M}_S})^* g_S$ affin Schwarzscild-metrikával. Továbbá, ha $Z_{11} = Z_{01} + \frac{2}{3}$, akkor $H\langle\mathbb{M}_S\rangle = \mathbb{M}_S$ is teljesül, sőt

$$H\langle\{a \in \mathbb{M} \mid 0 < |\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)| < \mathbf{r}_g\}\rangle = \{a \in \mathbb{M} \mid 0 < |\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)| < \mathbf{r}_g\}$$

$$H\langle\{a \in \mathbb{M} \mid |\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)| > \mathbf{r}_g\}\rangle = \{a \in \mathbb{M} \mid |\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)| > \mathbf{r}_g\}$$

$$H\langle\{a \in \mathbb{M} \mid |\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)| = \mathbf{r}_g\}\rangle = \{a \in \mathbb{M} \mid |\pi_{\mathbf{g},\mathbf{c}}(a-\sigma)| = \mathbf{r}_g\}.$$

<u>Bizonyítás</u> - Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy

$$H = \Phi_{\mathbf{g},\mathbf{c},\sigma}^{-1} \circ ((\Xi_Z^{-1} \circ \Psi) \times id_{S_{\mathbf{g},\mathbf{c}}}) \circ (\Phi_{\mathbf{g},\mathbf{c},\sigma}|_{\mathbb{M}_S})$$

ahol $\Psi : I \times (I \setminus \{\mathbf{r}_g\}) \to \mathfrak{M}_L$ az a függvény, amelyre $(\mathbf{t}, \mathbf{r}) \in I \times (I \setminus \{\mathbf{r}_g\})$

esetén:

$$\Psi(\mathbf{t},\mathbf{r}) = \left(\mathbf{t} + \Psi_{\mathbf{r}_g}(\mathbf{r}),\ \mathbf{t} + \Psi_{\mathbf{r}_g}(\mathbf{r}) + \frac{2}{3}\left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_g}\right)^{3/2}\mathbf{r}_g \right).$$

Mivel erre a Ψ-re a 16.Állítás Következménye szerint $\Psi^* g_L = g_S$ teljesül és Ψ injektív lokális C^∞-diffeomorfizmus, ezért a bevezetőben mondottak alapján az állítás nyilvánvaló.∎

7. Formálisan gömbszimmetrikus Lorentz-sokaságok

Ebben a pontban $\mathbf{I}$ *valós egydimenziós orientált vektorteret jelöl,* $(\mathbf{E},\mathbf{I},[\cdot|\cdot])$ *valós végesdimenziós (és a triviális esetek kizárása végett legalább egydimenziós) euklidészi tér lesz. Az* $\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}$ *egységgömb-felületét* S*-sel jelöljük, ami az* $\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}$*-nek* dim(E)-1 *dimenziós részsokasága és minden* $n\in S$ *elemre a* $\mathbf{T}_n(S)$ *érintőtér kanonikusan azonosul az* $\frac{n^{\perp}}{\mathbf{I}}$ *lineáris altérrel* $\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}$*-ben. Az* $\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}$ *feletti* $(\cdot|\cdot)$ *skalárszorzat meghatároz* S *felett egy kitüntetett Riemann-metrikát.*

XX. Állítás - Az

$$S : \mathbf{E}\setminus\{\mathbf{0}\} \to \mathbf{I}^{+}\times S \quad ; \quad q \to \left(|q|, \frac{q}{|q|}\right)$$

leképezés olyan C^{∞}-diffeomorfizmus amelynek inverze az

$$S^{-1} : \mathbf{I}^{+}\times S \to \mathbf{E}\setminus\{\mathbf{0}\} \quad ; \quad (r,n) \to r\otimes n$$

függvény. Továbbá; minden $(r,n)\in\mathbf{I}^{+}\times S$ elemre az S^{-1} deriváltja az (r,n) pontban azonos (ítható) az

$$\mathbf{I}\times\frac{n^{\perp}}{\mathbf{I}} \to \mathbf{E} \quad ; \quad (\mathbf{r},\mathbf{n}) \to (r\otimes\mathbf{n}) + (\mathbf{r}\otimes n)$$

lineáris operátorral, ahol: $\mathbf{T}_n(S)\equiv\frac{n^{\perp}}{\mathbf{I}}$.

Bizonyítás - ■

Ezért az

$$\mathrm{id}_{\mathbf{I}}\times S^{-1} : \mathbf{I}\times\mathbf{I}^{+}\times S \to \mathbf{I}\times(\mathbf{E}\setminus\{\mathbf{0}\})$$
$$(t,r,n) \to (t, r\otimes n)$$

függvény is C^{∞}-diffeomorfizmus. Ebből következik, hogy minden $\mathbf{I}\times(\mathbf{E}\setminus\{\mathbf{0}\})$ által tartalmazott nyílt halmazon értelmezett Lorentz-metrika $\mathrm{id}_{\mathbf{I}}\times S^{-1}$ általi transzformáltja ("pull-back"-je) Lorentz-metrikát határoz meg egy $\mathbf{I}\times\mathbf{I}^{+}\times S$ által tartalmazott nyílt halmazon.

XX. Tétel - Legyen $M\subseteq\mathbf{I}\times(\mathbf{E}\setminus\{\mathbf{0}\})$ nyílt halmaz és

$$(\alpha,\beta,\gamma)\in C^{\infty}(M; \mathbf{R}\times\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\times\mathrm{Sym}(\mathbf{E},[\cdot|\cdot]))$$

tetszőleges függvény. Ekkor az $(\mathrm{id}_{\mathbf{I}}\times S)\langle M\rangle$ halmaz nyílt részhalmaza $\mathbf{I}\times\mathbf{I}^{+}\times S$-nek és

$$g = (\mathrm{id}_{\mathbf{I}}\times S^{-1})^{*}\, g_{\alpha,\beta,\gamma}$$

olyan bilineáris forma-mező $(\mathrm{id}_{\mathbf{I}}\times S)\langle M\rangle$ felett, hogy minden $(t,r,n)\in(\mathrm{id}_{\mathbf{I}}\times S)\langle M\rangle$ pontra és minden

$$(\mathbf{t}',\mathbf{r}',\mathbf{n}'), (\mathbf{t}'',\mathbf{r}'',\mathbf{n}'') \in \mathbf{T}_{(t,r,n)}((\mathrm{id}_{\mathbf{I}}\times S)\langle M\rangle) \equiv \mathbf{I}\times\mathbf{I}\times\frac{n^{\perp}}{\mathbf{I}}$$

érintővektor-párra:

$g(t,r,n)((\mathbf{t}',\mathbf{r}',\mathbf{n}'),(\mathbf{t}'',\mathbf{r}'',\mathbf{n}''))=$

$=-\alpha(t,r\otimes n)\cdot(\mathbf{t}'\otimes\mathbf{t}'')+(\beta(t,r\otimes n)\,|\,n)\cdot(\mathbf{t}'\otimes\mathbf{r}''+\mathbf{t}''\otimes\mathbf{r}')+(\gamma(t,r\otimes n)_{\mathbf{I}}n\,|\,n)\cdot(\mathbf{r}'\otimes\mathbf{r}'')+$

$+(\gamma(t,r\otimes n)_{\mathbf{I}}\mathbf{n}'\,|\,\mathbf{n}'')\cdot(r\otimes r)+$

$+(\beta(t,r\otimes n)\,|\,\mathbf{t}'\otimes\mathbf{n}''+\mathbf{t}''\otimes\mathbf{n}']\otimes r+(\gamma(t,r\otimes n)_{\mathbf{I}}n\,|\,\mathbf{r}'\otimes\mathbf{n}''+\mathbf{r}''\otimes\mathbf{n}']\otimes r$

teljesül.

Bizonyítás - Triviális. ■

XX. Állítás - Legyen $M\subseteq\mathbf{I}\times(\mathbf{E}\setminus\{\mathbf{0}\})$ nyílt halmaz és

$$(\alpha,\beta,\gamma)\in C^{\infty}(M;\mathbf{R}\times\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\times\mathrm{Sym}(\mathbf{E},[\cdot\,|\,\cdot]))$$

tetszőleges függvény. Ekkor az $(\mathrm{id}_{\mathbf{I}}\times S)\langle M\rangle$ halmazon értelmezett $g=(\mathrm{id}_{\mathbf{I}}\times S^{-1})^{*}\,g_{\alpha,\beta,\gamma}$ bilineáris forma-mezőre a következő állítások ekvivalensek:

a) Minden $(t,r,n)\in(\mathrm{id}_{\mathbf{I}}\times S)\langle M\rangle$ pontra a $\beta(t,r\otimes n)\in\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}$ vektor *párhuzamos* az n-nel és az n vektor *sajátvektora* a $\gamma(t,r\otimes n)_{\mathbf{I}}\in\mathrm{Sym}(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}},(\cdot\,|\,\cdot))$ operátornak.

b) Minden $(t,r,n)\in(\mathrm{id}_{\mathbf{I}}\times S)\langle M\rangle$ pontra és

$$(\mathbf{t}',\mathbf{r}',\mathbf{n}'),(\mathbf{t}'',\mathbf{r}'',\mathbf{n}'')\in\mathbf{T}_{(t,r,n)}((\mathrm{id}_{\mathbf{I}}\times S)\langle M\rangle)\equiv\mathbf{I}\times\mathbf{I}\times\frac{n^{\perp}}{\mathbf{I}}$$

érintővektor-párra:

$g(t,r,n)((\mathbf{t}',\mathbf{r}',\mathbf{n}'),(\mathbf{t}'',\mathbf{r}'',\mathbf{n}''))=$

$=-\alpha(t,r\otimes n)\cdot(\mathbf{t}'\otimes\mathbf{t}'')+(\beta(t,r\otimes n)\,|\,n)\cdot(\mathbf{t}'\otimes\mathbf{r}''+\mathbf{t}''\otimes\mathbf{r}')+(\gamma(t,r\otimes n)_{\mathbf{I}}n\,|\,n)\cdot(\mathbf{r}'\otimes\mathbf{r}'')+$

$+(\gamma(t,r\otimes n)_{\mathbf{I}}\mathbf{n}'\,|\,\mathbf{n}'')\cdot(r\otimes r).$

Bizonyítás - Triviális. ■

XX. Állítás - Legyen $\mathcal{M}\subseteq\mathbf{I}\times\mathbf{I}$ tetszőleges nyílt halmaz és legyenek

$$a,\,b,\,c:\mathcal{M}\to\mathbf{R};\quad f:\mathcal{M}\to\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}$$

tetszőleges függvények. Tekintsük az $\mathcal{M}\times\mathbf{S}$ szorzatsokaságon azt a

$$g\in\prod_{(t,r,n)\in\mathcal{M}\times\mathbf{S}}\mathrm{B}(\mathbf{T}_{(t,r,n)}(\mathcal{M}\times\mathbf{S});\mathbf{I}\otimes\mathbf{I})$$

bilineáris forma mezőt, amely minden $(t,r,n)\in\mathcal{M}\times\mathbf{S}$ pontban minden

$$(\mathbf{t}',\mathbf{r}',\mathbf{n}'),(\mathbf{t}'',\mathbf{r}'',\mathbf{n}'')\in\mathbf{T}_{(t,r,n)}(\mathcal{M}\times\mathbf{S})\equiv\mathbf{I}\times\mathbf{I}\times\frac{n^{\perp}}{\mathbf{I}}$$

érintővektor-párhoz a következő értéket rendeli:

$g(t,r,n)((\mathbf{t}',\mathbf{r}',\mathbf{n}'),(\mathbf{t}'',\mathbf{r}'',\mathbf{n}''))=$

$=-a(t,r)\cdot(\mathbf{t}'\otimes\mathbf{t}'')+b(t,r)\cdot(\mathbf{t}'\otimes\mathbf{r}''+\mathbf{t}''\otimes\mathbf{r}')+c(t,r)\cdot(\mathbf{r}'\otimes\mathbf{r}'')+f(t,r)\cdot(\mathbf{n}'\,|\,\mathbf{n}'').$

Ekkor az $(\mathcal{M}\times\mathbf{S},g)$ pár pontosan akkor Lorentz-sokaság, ha az a,b,c,f függvények mind C^{∞}-osztályúak és fennállnak a következő egyenlőségek:

a) $\dim(\mathbf{E})=1$ esetén $[a\cdot c+b^{2}>0]=\mathcal{M}$.

b) dim(**E**)=2 esetén

$$[f \neq 0]=\mathcal{M},$$
$$[f>0]=[a\cdot c+b^2>0],$$
$$[f<0]=[a\cdot c+b^2<0]\cap[a<0]\cap[c>0].$$

c) dim(**E**)≥ 3 esetén $[a\cdot c+b^2>0]=[f>0]=\mathcal{M}$.

Továbbá; ha $\mathcal{M}\subseteq \mathbf{I}\times\mathbf{I}^+$, akkor $g=(\mathrm{id}_\mathbf{I}\times S^{-1})^* g_{\alpha,\beta,\gamma}$, ahol

$$(\alpha,\beta,\gamma) \in C^\infty(M; \mathbf{R}\times\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\times \mathrm{Sym}(\mathbf{E},[\cdot\,|\,\cdot]))$$

az a függvény, amelyre $M=(\mathrm{id}_\mathbf{I}\times S^{-1})(\mathcal{M}\times S)$ és minden $(t,r,n)\in\mathcal{M}\times S$ pontra

$$\alpha(t,r\otimes n)=a(t,r);$$
$$\beta(t,r\otimes n)=b(t,r)\cdot n;$$
$$\gamma(t,r\otimes n)=c(t,r)\cdot(n\otimes n)+\frac{f(t,r)}{r\otimes r}\cdot(\mathrm{id}_\mathbf{E}-n\otimes n)$$

Bizonyítás - Legyen $(t,r,n)\in\mathcal{M}\times S$ tetszőleges pont és legyenek

$$\mathbf{t},\mathbf{r}\in \mathbf{I}\backslash\{0\},\quad \mathbf{n}\in\frac{n^\perp}{\mathbf{I}},\quad |\mathbf{n}|=1$$

tetszőlegesek. Ekkor:

$$a(t,r)=-\frac{g(t,r,n)((\mathbf{t},\mathbf{0},\mathbf{0}),(\mathbf{t},\mathbf{0},\mathbf{0}))}{\mathbf{t}\otimes\mathbf{t}}$$
$$b(t,r)=\frac{g(t,r,n)((\mathbf{t},\mathbf{0},\mathbf{0}),(\mathbf{0},\mathbf{r},\mathbf{0}))}{\mathbf{t}\otimes\mathbf{r}}$$
$$c(t,r)=\frac{g(t,r,n)((\mathbf{0},\mathbf{r},\mathbf{0}),(\mathbf{0},\mathbf{r},\mathbf{0}))}{\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}}$$
$$f(t,r)=g(t,r,n)((\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{n}),(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{n})).$$

Ezért a g bilineáris forma-mező pontosan akkor C^∞-osztályú, ha az a,b,c,f függvények mind C^∞-osztályúak.

Legyen $(t,r,n)\in\mathcal{M}\times S$ rögzített pont és legyenek:

$$\mathbf{g}=g(t,r,n)$$
$$\boldsymbol{a}=a(t,r),\quad \boldsymbol{b}=b(t,r),\quad \boldsymbol{c}=c(t,r),\quad \boldsymbol{f}=f(t,r)$$
$$\mathbf{M}_1=\mathbf{I}\times\mathbf{I}\times\{0\},\ \mathbf{M}_2=\{0\}\times\{0\}\times\frac{n^\perp}{\mathbf{I}},\ \mathbf{M}=\mathbf{T}_{(t,r,n)}(\mathcal{M}\times S)\equiv\mathbf{I}\times\mathbf{I}\times\frac{n^\perp}{\mathbf{I}}$$
$$\mathbf{g}_1=\mathbf{g}|_{\mathbf{M}_1\times\mathbf{M}_1},\quad \mathbf{g}_2=\mathbf{g}|_{\mathbf{M}_2\times\mathbf{M}_2}.$$

Ekkor $\mathbf{M}=\mathbf{M}_1\oplus\mathbf{M}_2$ és $\mathbf{g}=\mathbf{g}_1\oplus\mathbf{g}_2$, és $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ g-ortogonálisak. Ezért **g** nemelfajultsága esetén $\mathbf{g}_1$ és $\mathbf{g}_2$ mindketten nemelfajultak, tehát **g** pontosan akkor Lorentz-forma **M** felett, ha a két következő alternatíva közül (pontosan) az egyik teljesül:

a) $\mathbf{g}_1$ Lorentz-forma $\mathbf{M}_1$ felett és $\mathbf{g}_2$ euklidészi forma $\mathbf{M}_2$ felett;

b) $\mathbf{g}_1$ euklidészi forma $\mathbf{M}_1$ felett és $\mathbf{g}_2$ Lorentz-forma $\mathbf{M}_2$ felett.

Legyenek:

$$\mathrm{L}_1 : \mathbf{I}\times\mathbf{I} \to \mathbf{M}_1 \quad ; \quad (\mathbf{t}',\mathbf{r}') \to (\mathbf{t}',\mathbf{r}',0)$$

$$\mathrm{L}_2 : \frac{\mathrm{n}^{\perp}}{\mathbf{I}} \to \mathbf{M}_2 \quad ; \quad \mathbf{n}' \to (0,0,\mathbf{n}').$$

Ekkor L_1 és L_2 lineáris bijekciók és a $\mathbf{g}_1'=\mathbf{g}_1 \circ (\mathrm{L}_1 \times \mathrm{L}_1)$ ill. $\mathbf{g}_2'=\mathbf{g}_2 \circ (\mathrm{L}_2 \times \mathrm{L}_2)$ bilineáris formák olyanok, hogy:

$$\mathbf{g}_1' : (\mathbf{I}\times\mathbf{I}) \times (\mathbf{I}\times\mathbf{I}) \to \mathbf{I}\otimes\mathbf{I}$$

$$((\mathbf{t}',\mathbf{r}'),(\mathbf{t}'',\mathbf{r}'')) \to -a\cdot(\mathbf{t}'\otimes\mathbf{t}'') + b\cdot(\mathbf{t}'\otimes\mathbf{r}''+\mathbf{t}''\otimes\mathbf{r}') + c\cdot(\mathbf{r}'\otimes\mathbf{r}'')$$

illetve:

$$\mathbf{g}_2' : \frac{\mathrm{n}^{\perp}}{\mathbf{I}} \times \frac{\mathrm{n}^{\perp}}{\mathbf{I}} \to \mathbf{I}\otimes\mathbf{I}$$

$$(\mathbf{n}',\mathbf{n}'') \to f\cdot(\mathbf{n}' \mid \mathbf{n}'').$$

Ha dim(**E**)=1, akkor $\dim(\frac{\mathrm{n}^{\perp}}{\mathbf{I}})=0$, tehát $\mathbf{g}_2'$ nem lehet Lorentz-forma és ekkor az f vektor előjelétől függetlenül kapjuk, hogy **g** pontosan akkor Lorentz-forma, ha az a) kijelentés teljesül, azaz $\mathbf{g}_1'$ Lorentz-forma, ami a 4.Lemma alapján azt jelenti, hogy $a\cdot c+b^2>0$.

Ha dim(**E**)=2, akkor $\dim(\frac{\mathrm{n}^{\perp}}{\mathbf{I}})=1$, ezért $\mathbf{g}_2'$ pontosan akkor Lorentz- (ill. euklidészi) forma, ha $f<0$ (ill. $f<0$). Ezért a 4.Lemma szerint a) ekvivalens azzal, hogy $a\cdot c+b^2>0$ és $f>0$, illetve b) ekvivalens azzal, hogy $a\cdot c+b^2<0$ és $a<0$ és $c>0$ és $f<0$.

Ha dim(**E**)≥ 3, akkor $\dim(\frac{\mathrm{n}^{\perp}}{\mathbf{I}})\geq 2$, ezért $\mathbf{g}_2'$ nem lehet Lorentz-forma, vagyis b) ki van zárva és ekkor a 4.Lemma szerint a) ekvivalens azzal, hogy $a\cdot c+b^2>0$ és $f>0$.

Ebből következik, hogy az a,b,c és f függvényekre megfogalmazott feltételek ekvivalensek azzal, hogy minden $(t,r,n)\in\mathcal{M}\times\mathbf{S}$ pontban a $g(t,r,n)$ bilineáris forma Lorentz-forma. ■

<u>**Definíció**</u> - Legyen $\mathcal{M}\subseteq\mathbf{I}\times\mathbf{I}$ nyílt halmaz és

$$a,\ b,\ c : \mathcal{M} \to \mathbf{R};\quad f : \mathcal{M} \to \mathbf{I}\otimes\mathbf{I}$$

tetszőleges függvények. Ekkor $g_{a,b,c,f}$ jelöli azt a bilineáris forma-mezőt az $\mathcal{M}\times\mathbf{S}$ szorzat-sokaság felett, amit az XX.Állításban értelmeztünk.

<u>**Megjegyzések**</u> 1) Ha tehát az a,b,c,f függvények mind C^{∞}-osztályúak és fennállnak a $[a\cdot c+b^2>0]=[f>0]=\mathcal{M}$ egyenlőségek, akkor az **E** dimenziójától függetlenül $g_{a,b,c,f}$ Lorentz-metrika $\mathcal{M}\times\mathbf{S}$ felett.

2) Ha $\mathcal{M}\subseteq\mathbf{I}\times\mathbf{I}^+$ *nem igaz*, akkor $g_{a,b,c,f}$ szükségképpen *nem egyenlő* egyetlen

$$(\mathrm{id}_{\mathbf{I}}\times\mathrm{S}^{-1})^*\, g_{\alpha,\beta,\gamma}$$

alakú bilineáris forma-mezővel sem, de lehet ilyennel *izomorf*. Valóban; ha $\mathcal{N}\subseteq\mathbf{I}\times\mathbf{I}^+$ olyan nyílt halmaz, hogy létezik $\Psi{:}\mathcal{N}\to\mathcal{M}$ C^{∞}-diffeomorfizmus, akkor a $(\Psi\times\mathrm{id}_{\mathbf{S}})^*\, g_{a,b,c,f}$ bilineáris forma-mező definíciós tartománya $\mathbf{I}\times\mathbf{I}^+\times\mathbf{S}$-nek része, tehát van olyan (α,β,γ) függvény, hogy $(\Psi\times\mathrm{id}_{\mathbf{S}})^*\, g_{a,b,c,f}=(\mathrm{id}_{\mathbf{I}}\times\mathrm{S}^{-1})^*\, g_{\alpha,\beta,\gamma}$.

A $g_{a,b,c,f}$ alakú Lorentz-metrikák alapvető transzformációs tulajdonságát írja le a következő állítás.

XX. Állítás - Legyen $\mathcal{M}' \subseteq \mathbf{I}\times\mathbf{I}$ nyílt halmaz és

$$a',\, b',\, c' : \mathcal{M}' \to \mathbf{R};\quad f' : \mathcal{M}' \to \mathbf{I}\otimes\mathbf{I}$$

tetszőleges függvények. Ha $\mathcal{M}\subseteq\mathbf{I}\times\mathbf{I}$ nyílt halmaz és

$$\Psi=(\Psi_t,\Psi_r) \in C^\infty(\mathcal{M};\mathcal{M}')\quad;\quad R \in \mathbf{O}(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}},(\cdot\,|\,\cdot))$$

akkor a $\Psi\times R\in C^\infty(\mathcal{M}\times S;\mathcal{M}'\times S)$ függvényre teljesül az, hogy

$$(\Psi\times R)^*\, g_{a',b',c',f'} = g_{a,b,c,f}$$

ahol:

$$a=(a'\circ\Psi)\cdot(\partial_t\Psi_t)^2 - 2\cdot(b'\circ\Psi)\cdot(\partial_t\Psi_t)\cdot(\partial_t\Psi_r) - (c'\circ\Psi)(\partial_t\Psi_r)^2$$

$$b=(b'\circ\Psi)\cdot((\partial_t\Psi_t)\cdot(\partial_r\Psi_r)+(\partial_r\Psi_t)\cdot(\partial_t\Psi_r)) - (a'\circ\Psi)\cdot(\partial_t\Psi_t)\cdot(\partial_r\Psi_t) +$$
$$+(c'\circ\Psi)\cdot(\partial_t\Psi_r)\cdot(\partial_r\Psi_r)$$

$$c=(c'\circ\Psi)\cdot(\partial_r\Psi_r)^2 + 2\cdot(b'\circ\Psi)\cdot(\partial_r\Psi_t)\cdot(\partial_r\Psi_r) - (a'\circ\Psi)\cdot(\partial_r\Psi_t)^2$$

$$f= f'\circ\Psi$$

Bizonyítás - Triviális. ■

Következmény - Ha $\mathcal{M}\subseteq\mathbf{I}\times\mathbf{I}$ tetszőleges nyílt halmaz és

$$a,\, b,\, c : \mathcal{M} \to \mathbf{R};\quad f: \mathcal{M} \to \mathbf{I}\otimes\mathbf{I}$$

tetszőleges függvények, akkor

a) $R \in \mathbf{O}(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}},(\cdot\,|\,\cdot))$ esetén:

$$(\mathrm{id}_{\mathcal{M}}\times R)^*\, g_{a,b,c,f} = g_{a,b,c,f}$$

teljesül (tehát a $g_{a,b,c,f}$ alakú Lorentz-metrikák formálisan gömbszimmetrikusak);

b) Ha az a,b,c és f függvények az első változójuktól függtelenek, akkor minden $\mathbf{t}\in\mathbf{I}$ vektorra, $((\mathrm{id}_\mathbf{I} + \mathbf{t})\times \mathrm{id}_\mathbf{I})\langle\mathcal{M}\rangle\subseteq\mathcal{M}$ esetén:

$$\left((\mathrm{id}_\mathbf{I} + \mathbf{t})\times \mathrm{id}_\mathbf{I}\times \mathrm{id}_S\right)^* g_{a,b,c,f} = g_{a,b,c,f}$$

teljesül (tehát ekkor a $g_{a,b,c,f}$ alakú Lorentz-metrikák formálisan sztatikusak).

Bizonyítás - Triviális.■

Példák -

1) (Általánosított **Minkowski-sokaság)**

Legyenek $a,\, b,\, c : \mathbf{I}\times(\mathbf{I}\setminus\{\mathbf{0}\}) \to \mathbf{R}$ és $f : \mathbf{I}\times(\mathbf{I}\setminus\{\mathbf{0}\}) \to \mathbf{I}\otimes\mathbf{I}$ azok a függvények, amelyekre $(\mathrm{t},\mathrm{r})\in\mathbf{I}\times(\mathbf{I}\setminus\{\mathbf{0}\})$ esetén:

$$a(\mathrm{t},\mathrm{r}) = 1,\quad b(\mathrm{t},\mathrm{r}) = 0,\quad c(\mathrm{t},\mathrm{r}) = 1,\quad f(\mathrm{t},\mathrm{r}) = \mathrm{r}\otimes\mathrm{r}.$$

Az $(\mathbf{I}\times(\mathbf{I}\setminus\{\mathbf{0}\})\times S, g_{a,b,c,f})$ Lorentz-sokaságot **általánosított Minkowski-sokságnak** nevezzük. A **Minkowski-sokság** ennek az a nyílt részsokasága, amelynek bázisa az $\mathbf{I}\times\mathbf{I}^+\times S$ halmaz.

2) (Általánosított **Schwarzschild-sokaság)**

Legyen $\mathrm{r}_g\in\mathbf{I}$ tetszőleges és $a,\, b,\, c : \mathbf{I}\times(\mathbf{I}\setminus\{\mathrm{r}_g,\mathbf{0}\}) \to \mathbf{R}$ és $f : \mathbf{I}\times(\mathbf{I}\setminus\{\mathrm{r}_g,\mathbf{0}\}) \to \mathbf{I}\otimes\mathbf{I}$ azok a függvények, amelyekre $(\mathrm{t},\mathrm{r})\in\mathbf{I}\times(\mathbf{I}\setminus\{\mathrm{r}_g,\mathbf{0}\})$ esetén:

$$a(\mathrm{t,r}) = 1 - \frac{\mathrm{r_g}}{\mathrm{r}}, \quad b(\mathrm{t,r}) = 0, \quad c(\mathrm{t,r}) = \frac{1}{1 - \frac{\mathrm{r_g}}{\mathrm{r}}}, \quad f(\mathrm{t,r}) = \mathrm{r} \otimes \mathrm{r}.$$

Az $(\mathbf{I}\times(\mathbf{I}\setminus\{\mathbf{r_g},\mathbf{0}\})\times\mathbf{S}, g_{a,b,c,f})$ Lorentz-sokaságot $\mathbf{r_g}$-paraméterű **általánosított Schwarz-schild-sokságnak** nevezzük. Az $\mathbf{r_g}$-paraméterű **Schwarzschild-sokság** ennek az a nyílt részsokasága, amelynek bázisa az $\mathbf{I}\times(\mathbf{I}^+\setminus\{\mathbf{r_g}\})\times\mathbf{S}$ halmaz; ekkor feltesszük, hogy $\mathbf{r_g}\geq\mathbf{0}$. Nyilvánvaló, hogy a $\mathbf{0}$-paraméterű általánosított Schwarzschild-sokaság egyenlő az általánosított Minkowski-sokasággal és a $\mathbf{0}$-paraméterű Schwarzschild-sokaság egyenlő a Minkowski-sokasággal

3) (Általánosított **Reissner-Nordström sokaság)**
Legyenek $\mathbf{r_g},\mathbf{Q}\in\mathbf{I}$ tetszőlegesek és $\mathcal{M}=\{(\mathrm{t,r})\in\mathbf{I}\times\mathbf{I}\,|$

Példák -

1) (Általánosított **Minkowski-sokaság)**

Legyenek a,b,c:$\mathbf{I}\times(\mathbf{I}\setminus\{\mathbf{0}\})\to\mathbf{R}$ és f:$\mathbf{I}\times(\mathbf{I}\setminus\{\mathbf{0}\})\to\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}$ azok a függvények, amelyekre $(t,r)\in\mathbf{I}\times(\mathbf{I}\setminus\{\mathbf{0}\})$ esetén:

$$a(t,r) = 1, \quad b(t,r) = 0, \quad c(t,r) = 1, \quad f(t,r) = r\otimes r.$$

Az $(\mathbf{I}\times(\mathbf{I}\setminus\{\mathbf{0}\})\times\mathbf{S}, g_{a,b,c,f})$ Lorentz-sokaságot **általánosított Minkowski-sokságnak** nevezzük. A **Minkowski-sokság** ennek az a nyílt részsokasága, amelynek bázisa az $\mathbf{I}\times\mathbf{I}^{+}\times\mathbf{S}$ halmaz.

2) (Általánosított **Schwarzschild-sokaság)**

Legyen $\mathbf{r}_g\in\mathbf{I}$ tetszőleges és a,b,c:$\mathbf{I}\times(\mathbf{I}\setminus\{\mathbf{r}_g,\mathbf{0}\})\to\mathbf{R}$ és f:$\mathbf{I}\times(\mathbf{I}\setminus\{\mathbf{r}_g,\mathbf{0}\})\to\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}$ azok a függvények, amelyekre $(t,r)\in\mathbf{I}\times(\mathbf{I}\setminus\{\mathbf{r}_g,\mathbf{0}\})$ esetén:

$$a(t,r) = 1 - \frac{\mathbf{r}_g}{r}, \quad b(t,r) = 0, \quad c(t,r) = \frac{1}{1-\dfrac{\mathbf{r}_g}{r}}, \quad f(t,r) = r\otimes r.$$

Az $(\mathbf{I}\times(\mathbf{I}\setminus\{\mathbf{r}_g,\mathbf{0}\})\times\mathbf{S},\ g_{a,b,c,f})$ Lorentz-sokaságot $\mathbf{r}_g$-paraméterű **általánosított Schwarzschild-sokságnak** nevezzük. Az $\mathbf{r}_g$-paraméterű **Schwarzschild-sokság** ennek az a nyílt részsokasága, amelynek bázisa az $\mathbf{I}\times(\mathbf{I}^{+}\setminus\{\mathbf{r}_g\})\times\mathbf{S}$ halmaz; ekkor feltesszük, hogy $\mathbf{r}_g\geq\mathbf{0}$. Nyilvánvaló, hogy a $\mathbf{0}$-paraméterű általánosított Schwarzschild-sokaság egyenlő az általánosított Minkowski-sokasággal és a $\mathbf{0}$-paraméterű Schwarzschild-sokaság egyenlő a Minkowski-sokasággal

3) (Általánosított **Reissner-Nordström sokaság)**

Legyenek $\mathbf{r}_g,\mathbf{Q}\in\mathbf{I}$ tetszőlegesek és $\mathcal{M}=\{(t,r)\in\mathbf{I}\times\mathbf{I}|$

$$a(t,r) = 1 - \frac{\mathbf{r}_g}{r} - \left(\frac{\mathbf{Q}}{r}\right)^2, \quad b(t,r) = 0, \quad c(t,r) = \frac{1}{1-\dfrac{\mathbf{r}_g}{r}-\left(\dfrac{\mathbf{Q}}{r}\right)^2}, \quad f(t,r) = r\otimes r.$$

7. Formálisan hengerszimmetrikus Lorentz-sokaságok

Ebben a pontban $\mathbf{I}$ *valós egydimenziós orientált vektorteret jelöl,* $(\mathbf{E},\mathbf{I},[\cdot|\cdot])$ *valós végesdimenziós (és a triviális esetek kizárása végett legalább kétdimenziós) euklidészi tér lesz. Az* $\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}$ *egységgömb-felületét* $\mathbf{S}$*-sel jelöljük és minden* $\mathbf{m}\in\mathbf{S}$ *elemre* $\mathbf{S}_{\mathbf{m}}=\mathbf{S}\cap\frac{\mathbf{m}^{\perp}}{\mathbf{I}}$*. Az* $\mathbf{S}_{\mathbf{m}}$ *elemeit* $\mathbf{m}$*-szerinti azimutvektoroknak nevezzük. Ha* $\mathbf{m}\in\mathbf{S}$*, akkor* $\mathbf{S}_{\mathbf{m}}$ *az* $\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}$*-nek* dim(E)-2 *dimenziós részsokasága és minden* $\mathrm{n}\in\mathbf{S}_{\mathbf{m}}$ *pontra a* $\mathbf{T}_{\mathrm{n}}(\mathbf{S}_{\mathbf{m}})$ *érintőtér kanonikusan azonosul az* $\frac{\mathbf{m}^{\perp}}{\mathbf{I}}\cap\frac{\mathbf{n}^{\perp}}{\mathbf{I}}$ *lineáris altérrel* $\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}$*-ben, vagyis az* $\frac{(\mathbf{Rn}\oplus\mathbf{Rm})^{\perp}}{\mathbf{I}}$ *altérrel; ezért az* $\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}$ *feletti* $(\cdot|\cdot)$ *skalárszorzat meghatároz* $\mathbf{S}_{\mathbf{m}}$ *felett egy kitüntetett Riemann-metrikát. Ha* dim(E)=3 *és* $\mathbf{E}$ *orientált, akkor minden* $\mathbf{m},\mathrm{n}\in\mathbf{S}$ *vektorra* $\mathbf{m}\times\mathrm{n}$ *jelöli azt az elemet* $\mathbf{S}$*-ben, amelyre az* $(\mathbf{m},\mathrm{n},\mathbf{m}\times\mathrm{n})$ *hármas pozitív bázis* $\mathbf{E}$*-ben.*

19. Állítás - Legyen $\mathbf{m}\in\mathbf{S}$. Ekkor az:

$$\mathrm{S}_{\mathbf{m}}:\ \mathbf{E}\setminus(\mathbf{m}\otimes\mathbf{I})\to\mathbf{S}_{\mathbf{m}}\times\mathbf{I}^{+}\times]0,\pi[\ ;\quad \mathrm{q}\to\left(\frac{\mathrm{q}-\mathbf{m}\otimes(\mathbf{m}|\mathrm{q}]}{|\mathrm{q}-\mathbf{m}\otimes(\mathbf{m}|\mathrm{q}]|},\ |\mathrm{q}|,\ \mathrm{Arccos}\left(\frac{(\mathbf{m}|\mathrm{q}]}{|\mathrm{q}|}\right)\right)$$

leképezés olyan C^{∞}-diffeomorfizmus (ahol $\mathrm{Arccos}=(\cos|_{]0,\pi[})^{-1}$) amelynek inverze az

$$\mathrm{S}_{\mathbf{m}}^{-1}:\ \mathbf{S}_{\mathbf{m}}\times\mathbf{I}^{+}\times]0,\pi[\ \to\mathbf{E}\setminus(\mathbf{m}\otimes\mathbf{I})\ ;\quad (\mathrm{n},\mathrm{r},\theta)\to\mathrm{r}\otimes(\mathrm{n}\cdot\sin\theta+\mathbf{m}\cdot\cos\theta)$$

függvény. Továbbá; minden $(\mathrm{n},\mathrm{r},\theta)\in\mathbf{S}_{\mathbf{m}}\times\mathbf{I}^{+}\times]0,\pi[$ elemre az $\mathrm{S}_{\mathbf{m}}^{-1}$ deriváltja az $(\mathrm{n},\mathrm{r},\theta)$ pontban azonos(ítható) az

$$\frac{(\mathbf{Rn}\oplus\mathbf{Rm})^{\perp}}{\mathbf{I}}\times\mathbf{I}\times\mathbf{R}\to\mathbf{E}$$
$$(\mathbf{n},\mathbf{r},\theta)\to(\mathrm{r}\otimes\mathbf{n})\cdot\sin\theta+\mathbf{r}\otimes(\mathrm{n}\cdot\sin\theta+\mathbf{m}\cdot\cos\theta)+\theta\cdot\mathrm{r}\otimes(\mathrm{n}\cdot\cos\theta-\mathbf{m}\cdot\sin\theta)$$

lineáris operátorral, ahol:

$$\mathrm{T}_{(\mathrm{n},\mathrm{r},\theta)}(\mathbf{S}_{\mathbf{m}}\times\mathbf{I}^{+}\times]0,\pi[)\equiv\frac{(\mathbf{Rn}\oplus\mathbf{Rm})^{\perp}}{\mathbf{I}}\times\mathbf{I}\times\mathbf{R}.$$

Bizonyítás - ■

Ezért $\mathbf{m}\in\mathbf{S}$ esetén az

$$\mathrm{id}_{\mathbf{I}}\times\mathrm{S}_{\mathbf{m}}^{-1}:\ \mathbf{I}\times\mathbf{S}_{\mathbf{m}}\times\mathbf{I}^{+}\times]0,\pi[\ \to\mathbf{I}\times(\mathbf{E}\setminus(\mathbf{m}\otimes\mathbf{I}))$$
$$(\mathrm{t},\mathrm{n},\mathrm{r},\theta)\to(\mathrm{t},\ \mathrm{r}\otimes(\mathrm{n}\cdot\sin\theta+\mathbf{m}\cdot\cos\theta))$$

függvény is C^{∞}-diffeomorfizmus. Ebből következik, hogy minden $\mathbf{I}\times(\mathbf{E}\setminus(\mathbf{m}\otimes\mathbf{I}))$ által tartalmazott nyílt halmazon értelmezett Lorentz-metrika $\mathrm{id}_{\mathbf{I}}\times\mathrm{S}_{\mathbf{m}}^{-1}$ általi transzformáltja ("pull-back"-je) Lorentz-metrikát határoz meg egy $\mathbf{I}\times\mathbf{S}_{\mathbf{m}}\times\mathbf{I}^{+}\times]0,\pi[$ által tartalmazott nyílt halmazon. A pontos állítást a 3.Tételben fogalmazzuk meg; előtte a jelöléseket egyszerűsítjük.

Jelölés - Ha $\mathbf{m}\in S$, akkor a következő függvényjeleket alkalmazzuk:

$$\nu_{\mathbf{m}} : \mathbf{S}_{\mathbf{m}} \times \mathbf{R} \to \mathbf{S} \ ; \ (\mathrm{n},\theta) \to \mathrm{n}\cdot\sin\theta + \mathbf{m}\cdot\cos\theta$$

$$\nu^{\perp}_{\mathbf{m}} : \mathbf{S}_{\mathbf{m}} \times \mathbf{R} \to \mathbf{S} \ ; \ (\mathrm{n},\theta) \to \mathrm{n}\cdot\cos\theta - \mathbf{m}\cdot\sin\theta.$$

Megjegyzések - 1) Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{m}\in\mathbf{S}$ esetén minden

$$(\mathrm{t,n,r},\theta) \in \mathbf{I}\times\mathbf{S}_{\mathbf{m}}\times\mathbf{I}^{+}\times]0,\pi[$$

pontra $(\mathrm{id}_{\mathbf{I}}\times \mathrm{S}_{\mathbf{m}}^{-1})(\mathrm{t,n,r},\theta)=(\mathrm{t,r}\otimes \nu_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta))$.

2) Ha $\mathbf{m}\in \mathrm{S}$, akkor $(\mathrm{n},\theta)\in \mathbf{S}_{\mathbf{m}}\times\mathbf{R}$ esetén:

$$\nu^{\perp}_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta) = \nu_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta+\pi/2)$$

$$(\nu^{\perp}_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta) \mid \nu_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta)) = 0$$

$$\mathbf{Rn}\oplus\mathbf{Rm} = \mathbf{R}\nu_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta)\oplus\mathbf{R}\nu^{\perp}_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta).$$

3. Tétel - Legyen $\mathrm{M}\subseteq\mathbf{I}\times(\mathbf{E}\setminus(\mathbf{m}\otimes\mathbf{I}))$ nyílt halmaz és

$$(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathrm{C}^{\infty}(\mathrm{M};\ \mathbf{R}\times\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}\times\mathrm{Sym}(\mathbf{E},[\cdot\mid\cdot]))$$

tetszőleges függvény. Ekkor minden $\mathbf{m}\in\mathbf{S}$ elemre az

$$\mathrm{M}_{\mathbf{m}} = (\mathrm{id}_{\mathbf{I}}\times \mathrm{S}_{\mathbf{m}})\langle\mathrm{M}\rangle$$

halmaz nyílt részhalmaza $\mathbf{I}\times\mathbf{S}_{\mathbf{m}}\times\mathbf{I}^{+}\times]0,\pi[$-nek és

$$\mathrm{g}_{\mathbf{m};\alpha,\beta,\gamma} = (\mathrm{id}_{\mathbf{I}}\times\mathrm{S}_{\mathbf{m}}^{-1})^{*}\,\mathrm{g}_{\alpha,\beta,\gamma}$$

olyan bilineáris forma-mező $\mathrm{M}_{\mathbf{m}}$ felett, hogy minden $(\mathrm{t,n,r},\theta)\in \mathrm{M}_{\mathbf{m}}$ pontra és minden

$$(\mathbf{t}',\mathbf{n}',\mathbf{r}',\theta'),(\mathbf{t}'',\mathbf{n}'',\mathbf{r}'',\theta'') \in \mathbf{T}_{(\mathrm{t,n,r},\theta)}(\mathrm{M}_{\mathbf{m}}) \equiv \mathbf{I}\times\frac{(\mathbf{Rn}\oplus\mathbf{Rm})^{\perp}}{\mathbf{I}}\times\mathbf{I}\times\mathbf{R}$$

érintővektor-párra:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{g}_{\mathbf{m};\alpha,\beta,\gamma}(\mathrm{t,n,r},\theta)((\mathbf{t}',\mathbf{n}',\mathbf{r}',\theta'),(\mathbf{t}'',\mathbf{n}'',\mathbf{r}'',\theta'')) = \\
&= -\alpha(\mathrm{t,r}\otimes\nu_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta))\cdot(\mathbf{t}'\otimes\mathbf{t}'') + (\beta(\mathrm{t,r}\otimes\nu_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta))\mid\mathbf{t}'\otimes\mathbf{n}''+\mathbf{t}''\otimes\mathbf{n}']\otimes\mathrm{r}\cdot\sin\theta + \\
&+ (\gamma(\mathrm{t,r}\otimes\nu_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta))_{\mathbf{I}}\mathbf{n}'\mid\mathbf{n}'')\cdot(\mathrm{r}\otimes\mathrm{r})\cdot\sin^2\theta + (\gamma(\mathrm{t,r}\otimes\nu_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta))_{\mathbf{I}}\nu_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta)\mid\nu_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta))\cdot(\mathbf{r}'\otimes\mathbf{r}'') + \\
&+ (\gamma(\mathrm{t,r}\otimes\nu_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta))_{\mathbf{I}}\nu^{\perp}_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta)\mid\nu_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta))\cdot(\theta'\mathbf{r}''+\theta''\mathbf{r}')\otimes\mathrm{r} + \\
&+ (\gamma(\mathrm{t,r}\otimes\nu_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta))_{\mathbf{I}}\nu^{\perp}_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta)\mid\nu^{\perp}_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta))\cdot(\mathrm{r}\otimes\mathrm{r})\cdot\theta'\theta'' + \\
&+ (\beta(\mathrm{t,r}\otimes\nu_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta))\mid\nu_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta))\cdot(\mathbf{t}'\otimes\mathbf{r}''+\mathbf{t}''\otimes\mathbf{r}') + \\
&+ (\gamma(\mathrm{t,r}\otimes\nu_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta))_{\mathbf{I}}\nu_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta)\mid\mathbf{r}'\otimes\mathbf{n}''+\mathbf{r}''\otimes\mathbf{n}']\otimes\mathrm{r}\cdot\sin\theta + \\
&+ (\beta(\mathrm{t,r}\otimes\nu_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta))\mid\nu^{\perp}_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta))\cdot(\theta'\mathbf{t}''+\theta''\mathbf{t}')\otimes\mathrm{r} + \\
&+ (\gamma(\mathrm{t,r}\otimes\nu_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta))_{\mathbf{I}}\nu^{\perp}_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta)\mid\theta'\mathbf{n}''+\theta''\mathbf{n}')\cdot(\mathrm{r}\otimes\mathrm{r})\cdot\sin\theta
\end{aligned}$$

teljesül.

Bizonyítás - Triviális. ■

20. Állítás - Legyen $M \subseteq \mathbf{I} \times (\mathbf{E} \setminus (\mathbf{m} \otimes \mathbf{I}))$ nyílt halmaz és

$$(\alpha,\beta,\gamma) \in C^{\infty}(M; \mathbf{R} \times \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}} \times \mathrm{Sym}(\mathbf{E},[\cdot|\cdot]))$$

tetszőleges függvény. Ekkor minden $\mathbf{m} \in \mathbf{S}$ elemre az

$$M_{\mathrm{m}} = (\mathrm{id}_{\mathbf{I}} \times S_{\mathrm{m}})\langle M \rangle \subseteq \mathbf{I} \times \mathbf{S}_{\mathrm{m}} \times \mathbf{I}^{+} \times]0,\pi[$$

halmazon értelmezett $g_{\mathrm{m};\alpha,\beta,\gamma}$ bilineáris forma-mezőre a következő állítások ekvivalensek:

a) Minden $(t,n,r,\theta) \in M_{\mathrm{m}}$ pontra a $\beta(t,r \otimes \nu_{\mathrm{m}}(n,\theta)) \in \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}$ vektor *ortogonális* az $\mathbf{R}n \oplus \mathbf{R}m$ altérre és $\mathbf{R}n \oplus \mathbf{R}m$ *invariáns altere* a $\gamma(t,r \otimes \nu_{\mathrm{m}}(n,\theta))_{\mathbf{I}} \in \mathrm{Sym}(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}},(\cdot|\cdot))$ operátornak.

b) Minden $(t,n,r,\theta) \in M_{\mathrm{m}}$ pontra és

$$(\mathbf{t}',\mathbf{n}',\mathbf{r}',\theta'), (\mathbf{t}'',\mathbf{n}'',\mathbf{r}'',\theta'') \in \mathbf{T}_{(t,n,r,\theta)}(M_{\mathrm{m}}) \equiv \mathbf{I} \times \frac{(\mathbf{R}n \oplus \mathbf{R}m)^{\perp}}{\mathbf{I}} \times \mathbf{I} \times \mathbf{R}$$

érintővektor-párra:

$$g_{\mathrm{m};\alpha,\beta,\gamma}(t,n,r,\theta)((\mathbf{t}',\mathbf{n}',\mathbf{r}',\theta'),(\mathbf{t}'',\mathbf{n}'',\mathbf{r}'',\theta'')) =$$
$$= -\alpha(t,r \otimes \nu_{\mathrm{m}}(n,\theta)) \cdot (\mathbf{t}' \otimes \mathbf{t}'') + (\beta(t,r \otimes \nu_{\mathrm{m}}(n,\theta)) \,|\, \mathbf{t}' \otimes \mathbf{n}'' + \mathbf{t}'' \otimes \mathbf{n}'] \otimes r \cdot \sin\theta +$$
$$+ (\gamma(t,r \otimes \nu_{\mathrm{m}}(n,\theta))_{\mathbf{I}} \mathbf{n}' \,|\, \mathbf{n}'') \cdot (r \otimes r) \cdot \sin^2\theta + (\gamma(t,r \otimes \nu_{\mathrm{m}}(n,\theta))_{\mathbf{I}} \nu_{\mathrm{m}}(n,\theta) \,|\, \nu_{\mathrm{m}}(n,\theta)) \cdot (\mathbf{r}' \otimes \mathbf{r}'') +$$
$$+ (\gamma(t,r \otimes \nu_{\mathrm{m}}(n,\theta))_{\mathbf{I}} \nu_{\mathrm{m}}^{\perp}(n,\theta) \,|\, \nu_{\mathrm{m}}(n,\theta)) \cdot (\theta' \mathbf{r}'' + \theta'' \mathbf{r}') \otimes r +$$
$$+ (\gamma(t,r \otimes \nu_{\mathrm{m}}(n,\theta))_{\mathbf{I}} \nu_{\mathrm{m}}^{\perp}(n,\theta) \,|\, \nu_{\mathrm{m}}^{\perp}(n,\theta)) \cdot (r \otimes r) \cdot \theta' \theta''.$$

Ha az a) mellett még az is teljesül, hogy minden $(t,n,r,\theta) \in M_{\mathrm{m}}$ pontra a $\nu_{\mathrm{m}}(n,\theta)$ vektor *vagy* a $\nu_{\mathrm{m}}^{\perp}(n,\theta)$ vektor *sajátvektora* a $\gamma(t,r \otimes \nu_{\mathrm{m}}(n,\theta))_{\mathbf{I}}$ operátornak, akkor $g_{\mathrm{m};\alpha,\beta,\gamma}$-ban az utolsó előtti (nemdiagonális) tag is eltűnik.

Bizonyítás - Triviális. ■

21. Állítás - Tegyük fel, hogy $\dim(\mathbf{E})=3$ és $\mathbf{E}$, $\mathbf{I}$ orientáltak. Legyen $\mathcal{M} \subseteq \mathbf{I} \times \mathbf{R}$ tetszőleges nyílt halmaz és legyenek

$$a, d : \mathcal{M} \to \mathbf{R}; \quad b, e : \mathcal{M} \to \mathbf{I}; \quad c, f : \mathcal{M} \to \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$$

tetszőleges függvények. Adott $\mathbf{m} \in \mathbf{S}$ vektorra tekintsük az $\mathbf{I} \times \mathbf{S}_{\mathrm{m}} \times \mathcal{M}$ szorzatsokaságon azt a

$$g \in \prod_{(t,n,r,\theta) \in \mathbf{I} \times \mathbf{S}_{\mathrm{m}} \times \mathcal{M}} B(\mathbf{T}_{(t,n,r,\theta)}(\mathbf{I} \times \mathbf{S}_{\mathrm{m}} \times \mathcal{M}); \mathbf{I})$$

bilineáris forma mezőt, amely minden $(t,n,r,\theta) \in \mathbf{I} \times \mathbf{S}_{\mathrm{m}} \times \mathcal{M}$ pontban minden

$$(\mathbf{t}',\mathbf{n}',\mathbf{r}',\theta'), (\mathbf{t}'',\mathbf{n}'',\mathbf{r}'',\theta'') \in \mathbf{T}_{(t,n,r,\theta)}(\mathbf{I} \times \mathbf{S}_{\mathrm{m}} \times \mathcal{M}) \equiv \mathbf{I} \times \frac{(\mathbf{R}n \oplus \mathbf{R}m)^{\perp}}{\mathbf{I}} \times \mathbf{I} \times \mathbf{R}$$

érintővektor-párhoz a következő értéket rendeli:

$$g(t,n,r,\theta)((\mathbf{t}',\mathbf{n}',\mathbf{r}',\theta'),(\mathbf{t}'',\mathbf{n}'',\mathbf{r}'',\theta'')) =$$
$$= -a(r,\theta) \cdot (\mathbf{t}' \otimes \mathbf{t}'') + b(r,\theta) \otimes (\mathbf{m} \times \mathbf{n} \,|\, \mathbf{t}' \otimes \mathbf{n}'' + \mathbf{t}'' \otimes \mathbf{n}'] + c(r,\theta) \cdot (\mathbf{n}' \,|\, \mathbf{n}'') + d(r,\theta) \cdot (\mathbf{r}' \otimes \mathbf{r}'') +$$
$$+ e(r,\theta) \otimes (\theta' \mathbf{r}'' + \theta'' \mathbf{r}') + f(r,\theta) \cdot \theta' \theta''.$$

Ekkor az $(\mathbf{I} \times \mathbf{S}_{\mathrm{m}} \times \mathcal{M}, g)$ pár pontosan akkor Lorentz-sokaság, ha az a,b,c,d,e,f függvények mind C^{∞}-osztályúak és fennállnak a következő egyenlőségek:

$$[a \cdot c + b \otimes b \neq 0] = \mathcal{M}$$

$$[a \cdot c + b \otimes b > 0] = [d > 0] \cap [f > 0] \cap [d \cdot f - e \otimes e > 0]$$

$$[a \cdot c + b \otimes b < 0] = [a < 0] \cap [c > 0] \cap [d \cdot f - e \otimes e < 0].$$

Továbbá; ha $\mathcal{M} \subseteq \mathbf{I}^{+} \times]0,\pi[$, akkor $\mathrm{g} = \mathrm{g}_{\mathbf{m};\alpha,\beta,\gamma}$, ahol

$$(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathrm{C}^{\infty}(\mathrm{M}; \mathbf{R} \times \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}} \times \mathrm{Sym}(\mathbf{E},[\cdot \mid \cdot]))$$

az a függvény, amelyre $\mathrm{M} = \mathbf{I} \times \mathrm{S}_{\mathbf{m}}^{-1} \langle \mathbf{S}_{\mathbf{m}} \times \mathcal{M} \rangle$ és minden $(\mathrm{t},\mathrm{n},\mathrm{r},\theta) \in \mathbf{I} \times \mathbf{S}_{\mathbf{m}} \times \mathcal{M}$ pontra

$$\alpha(\mathrm{t}, \mathrm{r} \otimes \nu_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta)) = a(\mathrm{r},\theta);$$

$$\beta(\mathrm{t}, \mathrm{r} \otimes \nu_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta)) = \frac{b(\mathrm{r},\theta)}{\mathrm{r} \cdot \sin\theta}; \quad ((\mathrm{m} \times \mathrm{n}))$$

$$\gamma(\mathrm{t}, \mathrm{r} \otimes \nu_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta)) = d(\mathrm{r},\theta) \cdot \nu_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta) \otimes \nu_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta) + \frac{f(\mathrm{r},\theta)}{\mathrm{r} \otimes \mathrm{r}} \cdot \nu_{\mathbf{m}}^{\perp}(\mathrm{n},\theta) \otimes \nu_{\mathbf{m}}^{\perp}(\mathrm{n},\theta) +$$

$$+ 2 \cdot \frac{e(\mathrm{r},\theta)}{\mathrm{r}} \nu_{\mathbf{m}}(\mathrm{n},\theta) \circledcirc \nu_{\mathbf{m}}^{\perp}(\mathrm{n},\theta) + \frac{c(\mathrm{r},\theta)}{(\mathrm{r} \otimes \mathrm{r}) \cdot \sin^2\theta} \cdot (\mathbf{m} \times \mathrm{n}) \otimes (\mathbf{m} \times \mathrm{n}).$$

Bizonyítás - Legyen $(\mathrm{t},\mathrm{n},\mathrm{r},\theta) \in \mathbf{I} \times \mathbf{S}_{\mathbf{m}} \times \mathcal{M}$ tetszőleges pont és legyenek

$$\mathbf{t}, \mathbf{r} \in \mathbf{I} \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad \mathbf{n} \in \frac{(\mathbf{R}\mathrm{n} \oplus \mathbf{R}\mathbf{m})^{\perp}}{\mathbf{I}} = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{m} \times \mathrm{n}), \quad |\mathbf{n}| = 1$$

tetszőlegesek. Ekkor:

$$a(\mathrm{r},\theta) = -\frac{\mathrm{g}(\mathrm{t},\mathrm{n},\mathrm{r},\theta)((\mathbf{t},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}),(\mathbf{t},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}))}{\mathbf{t} \otimes \mathbf{t}}$$

$$b(\mathrm{r},\theta) = \frac{\mathrm{g}(\mathrm{t},\mathrm{n},\mathrm{r},\theta)((\mathbf{t},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}),(\mathbf{0},\mathbf{m} \times \mathrm{n},\mathbf{0},\mathbf{0}))}{\mathbf{t}}$$

$$c(\mathrm{r},\theta) = \mathrm{g}(\mathrm{t},\mathrm{n},\mathrm{r},\theta)((\mathbf{0},\mathbf{n},\mathbf{0},\mathbf{0}),(\mathbf{0},\mathbf{n},\mathbf{0},\mathbf{0}))$$

$$d(\mathrm{r},\theta) = \frac{\mathrm{g}(\mathrm{t},\mathrm{n},\mathrm{r},\theta)((\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{r},\mathbf{0}),(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{r},\mathbf{0}))}{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}$$

$$e(\mathrm{r},\theta) = \frac{\mathrm{g}(\mathrm{t},\mathrm{n},\mathrm{r},\theta)((\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1}),(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{r},\mathbf{0}))}{\mathbf{r}}$$

$$f(\mathrm{r},\theta) = \mathrm{g}(\mathrm{t},\mathrm{n},\mathrm{r},\theta)((\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1}),(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1})).$$

Ezért a g bilineáris forma-mező pontosan akkor C^{∞}-osztályú, ha az a,b,c,d,e,f függvények mind C^{∞}-osztályúak.

Legyen $(\mathrm{t},\mathrm{n},\mathrm{r},\theta) \in \mathbf{I} \times \mathbf{S}_{\mathbf{m}} \times \mathcal{M}$ rögzített pont és legyenek:

$$\mathbf{g} = \mathrm{g}(\mathrm{t},\mathrm{n},\mathrm{r},\theta)$$

$$\boldsymbol{a} = a(\mathrm{r},\theta), \quad \boldsymbol{b} = b(\mathrm{r},\theta), \quad \boldsymbol{c} = c(\mathrm{r},\theta), \quad \boldsymbol{d} = d(\mathrm{r},\theta), \quad \boldsymbol{e} = e(\mathrm{r},\theta), \quad \boldsymbol{f} = f(\mathrm{r},\theta)$$

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{I} \times \frac{(\mathbf{R}\mathrm{n} \oplus \mathbf{R}\mathbf{m})^{\perp}}{\mathbf{I}} \times \{\mathbf{0}\} \times \{\mathbf{0}\}, \quad \mathbf{M}_2 = \{\mathbf{0}\} \times \{\mathbf{0}\} \times \mathbf{I} \times \mathbf{R},$$

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}|_{\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_1}, \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{g}|_{\mathbf{M}_2 \times \mathbf{M}_2}.$$

Ekkor $\mathbf{M}=\mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2$ és $\mathbf{g}=\mathbf{g}_1 \oplus \mathbf{g}_2$, és $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ g-ortogonálisak. Ezért g nemelfajultsága esetén $\mathbf{g}_1$ és $\mathbf{g}_2$ mindketten nemelfajultak, tehát g pontosan akkor Lorentz-forma **M** felett, ha a két következő alternatíva közül (pontosan) az egyik teljesül:

a) $\mathbf{g}_1$ Lorentz-forma $\mathbf{M}_1$ felett és $\mathbf{g}_2$ euklidészi forma $\mathbf{M}_2$ felett;

b) $\mathbf{g}_1$ euklidészi forma $\mathbf{M}_1$ felett és $\mathbf{g}_2$ Lorentz-forma $\mathbf{M}_2$ felett.

Legyen $\mathbf{z} \in \mathbf{I} \setminus \{\mathbf{0}\}$ rögzített vektor és legyenek

$$\mathrm{L}_1 : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \to \mathbf{M}_1 \quad ; \quad (\mathbf{t}', \mathbf{z}') \to (\mathbf{t}', \left(\frac{\mathbf{z}'}{\mathbf{z}}\right) \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n}), \mathbf{0}, \mathbf{0})$$

$$\mathrm{L}_2 : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \to \mathbf{M}_2 \quad ; \quad (\mathbf{r}', \mathbf{z}') \to (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{r}', \left(\frac{\mathbf{z}'}{\mathbf{z}}\right)).$$

Ekkor L_1 és L_2 lineáris bijekciók és a $\mathbf{g}_1' = \mathbf{g}_1 \circ (\mathrm{L}_1 \times \mathrm{L}_1)$ ill. $\mathbf{g}_2' = \mathbf{g}_2 \circ (\mathrm{L}_2 \times \mathrm{L}_2)$ bilineáris formák olyanok, hogy:

$$\mathbf{g}_1' : (\mathbf{I} \times \mathbf{I}) \times (\mathbf{I} \times \mathbf{I}) \to \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$$

$$((\mathbf{t}', \mathbf{z}'), (\mathbf{t}'', \mathbf{z}'')) \to -a \cdot (\mathbf{t}' \otimes \mathbf{t}'') + \left(\frac{b}{\mathbf{z}}\right) \cdot (\mathbf{t}' \otimes \mathbf{z}'' + \mathbf{t}'' \otimes \mathbf{z}') + \left(\frac{c}{\mathbf{z} \otimes \mathbf{z}}\right) \cdot (\mathbf{z}' \otimes \mathbf{z}'')$$

illetve:

$$\mathbf{g}_2' : (\mathbf{I} \times \mathbf{I}) \times (\mathbf{I} \times \mathbf{I}) \to \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$$

$$((\mathbf{r}', \mathbf{z}'), (\mathbf{r}'', \mathbf{z}'')) \to d \cdot (\mathbf{r}' \otimes \mathbf{r}'') + \left(\frac{e}{\mathbf{z}}\right) \cdot (\mathbf{r}' \otimes \mathbf{z}'' + \mathbf{r}'' \otimes \mathbf{z}') + \left(\frac{f}{\mathbf{z} \otimes \mathbf{z}}\right) \cdot (\mathbf{z}' \otimes \mathbf{z}'').$$

Ezért a 4. Lemma alapján:

- az a) kijelentés ekvivalens azzal, hogy $a \cdot \left(\frac{c}{\mathbf{z} \otimes \mathbf{z}}\right) + \left(\frac{b}{\mathbf{z}}\right)^2 > 0$ és $d > 0$ és $\left(\frac{f}{\mathbf{z} \otimes \mathbf{z}}\right) > 0$ és $d \cdot \left(\frac{f}{\mathbf{z} \otimes \mathbf{z}}\right) - \left(\frac{e}{\mathbf{z}}\right)^2 > 0$, vagyis $a \cdot c + b \otimes b > 0$ és $d > 0$ és $f > 0$ és $d \cdot f - e \otimes e > 0$;

- a b) kijelentés ekvivalens azzal, hogy $(-d) \cdot \left(\frac{f}{\mathbf{z} \otimes \mathbf{z}}\right) + \left(\frac{e}{\mathbf{z}}\right)^2 > 0$ és $-a > 0$ és $\left(\frac{c}{\mathbf{z} \otimes \mathbf{z}}\right) > 0$ és hogy $(-a) \cdot \left(\frac{c}{\mathbf{z} \otimes \mathbf{z}}\right) - \left(\frac{b}{\mathbf{z}}\right)^2 > 0$, vagyis $d \cdot f - e \otimes e < 0$ és $a < 0$ és $c > 0$ és $a \cdot c + b \otimes b < 0$.

Ebből következik, hogy a:

$$[a \cdot c + b \otimes b \neq 0] = \mathcal{M}$$
$$[a \cdot c + b \otimes b > 0] = [d > 0] \cap [f > 0] \cap [d \cdot f - e \otimes e > 0],$$
$$[a \cdot c + b \otimes b < 0] = [a < 0] \cap [c > 0] \cap [d \cdot f - e \otimes e < 0]$$

relációk ekvivalensek azzal, hogy minden $(\mathrm{t}, \mathrm{n}, \mathrm{r}, \theta) \in \mathbf{I} \times \mathbf{S}_{\mathrm{m}} \times \mathcal{M}$ pontra a $\mathrm{g}(\mathrm{t}, \mathrm{n}, \mathrm{r}, \theta)$ bilineáris forma Lorentz-forma. ■

Megjegyezzük, hogy az előző állításban szereplő halmaz-egyenlőségek *ekvivalensek* a következőkkel:

$$[d \cdot f - e \otimes e \neq 0] = \mathcal{M}$$
$$[d \cdot f - e \otimes e > 0] = [d > 0] \cap [f > 0] \cap [a \cdot c + b \otimes b > 0]$$
$$[d \cdot f - e \otimes e < 0] = [a < 0] \cap [c > 0] \cap [a \cdot c + b \otimes b < 0]$$

ami azt mutatja, hogy e relációk szempontjából az $(-a,b,c)$ és (d,e,f) függvényhármasok szerepe teljesen *szimmetrikus*.

Definíció - Legyen $\dim(\mathbf{E})=3$, $\mathbf{E}$ és $\mathbf{I}$ orientáltak és $\mathcal{M}\subseteq\mathbf{I}\times\mathbf{R}$ nyílt halmaz és

$$a, d : \mathcal{M}\to\mathbf{R};\quad b, e : \mathcal{M}\to\mathbf{I};\quad c, f : \mathcal{M}\to\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}$$

tetszőleges függvények. Ekkor minden $\mathbf{m}\in\mathbf{S}$ vektorra $g_{\mathbf{m};a,b,c,d,e,f}$ jelöli azt a bilineáris forma-mezőt az $\mathbf{I}\times\mathbf{S}_{\mathbf{m}}\times\mathcal{M}$ szorzatsokaság felett, amit a 21.Állításban értelmeztünk.

Ha $\mathcal{M}\subseteq\mathbf{I}^{+}\times]0,\pi[$ *nem igaz*, akkor $g_{\mathbf{m};a,b,c,d,e,f}$ szükségképpen *nem egyenlő* egyetlen $g_{\mathbf{m};\alpha,\beta,\gamma}$ alakú bilineáris forma-mezővel sem, de lehet ilyennel *izomorf*. Valóban; ha $\mathcal{N}\subseteq\mathbf{I}^{+}\times]0,\pi[$ olyan nyílt halmaz, hogy létezik $\Psi:\mathcal{N}\to\mathcal{M}$ C^{∞}-diffeomorfizmus, akkor a $\Psi^{*}g_{\mathbf{m};a,b,c,d,e,f}$ bilineáris forma-mező definíciós tartománya $\mathbf{I}^{+}\times]0,\pi[$-nek része, tehát van olyan (α,β,γ) függvény, hogy $\Psi^{*}g_{\mathbf{m};a,b,c,d,e,f}=g_{\mathbf{m};\alpha,\beta,\gamma}$.

A $g_{\mathbf{m};a,b,c,d,e,f}$ alakú Lorentz-metrikák alapvető transzformációs tulajdonságát írja le a következő állítás.

22. Állítás - Legyen $\dim(\mathbf{E})=3$, $\mathbf{E}$ és $\mathbf{I}$ orientáltak és $\mathcal{M}'\subseteq\mathbf{I}\times\mathbf{R}$ nyílt halmaz és

$$a', d' : \mathcal{M}'\to\mathbf{R};\quad b', e' : \mathcal{M}'\to\mathbf{I};\quad c', f' : \mathcal{M}'\to\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}$$

tetszőleges függvények. Minden $\mathbf{m}\in\mathbf{S}$ vektorra legyen

$$\mathbf{O}_{\mathbf{m}}(\tfrac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}},(\cdot|\cdot)) = \{\, R\in\mathbf{O}(\tfrac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}},(\cdot|\cdot)) \mid R\mathbf{m}=\pm\mathbf{m} \,\}.$$

Ha $\mathcal{M}\subseteq\mathbf{I}\times\mathbf{R}$ nyílt halmaz és

$$\mathbf{t}\in\mathbf{I}\ ;\quad \Psi=(\Psi_{r},\Psi_{\theta})\in C^{\infty}(\mathcal{M};\mathcal{M}')\ ;\quad R\in\mathbf{O}_{\mathbf{m}}(\tfrac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}},(\cdot|\cdot))$$

akkor az $(\mathrm{id}_{\mathbf{I}}+\mathbf{t})\times R\times\Psi\in C^{\infty}(\mathbf{I}\times\mathbf{S}_{\mathbf{m}}\times\mathcal{M};\mathbf{I}\times\mathbf{S}_{\mathbf{m}}\times\mathcal{M}')$ függvényre teljesül az, hogy

$$((\mathrm{id}_{\mathbf{I}}+\mathbf{t})\times R\times\Psi)^{*}\, g_{\mathbf{m};a',b',c',d',e',f'} = g_{\mathbf{m};a,b,c,d,e,f}$$

ahol:

$$a = a'\circ\Psi$$
$$b = (b'\circ\Psi)\cdot\det(R)$$
$$c = c'\circ\Psi$$
$$d = (d'\circ\Psi)\cdot(\partial_{r}\Psi_{r})^{2} + 2\cdot(e'\circ\Psi)\otimes(\partial_{r}\Psi_{\theta})\cdot(\partial_{r}\Psi_{r}) + (f'\circ\Psi)\otimes(\partial_{r}\Psi_{\theta})\otimes(\partial_{r}\Psi_{\theta})$$
$$e = (d'\circ\Psi)\cdot(\partial_{r}\Psi_{r})\cdot(\partial_{\theta}\Psi_{r}) + (e'\circ\Psi)\cdot((\partial_{r}\Psi_{r})\cdot(\partial_{\theta}\Psi_{\theta})+(\partial_{r}\Psi_{\theta})\otimes(\partial_{\theta}\Psi_{r})) + (f'\circ\Psi)\otimes(\partial_{r}\Psi_{\theta})\cdot(\partial_{\theta}\Psi_{\theta})$$
$$f = (d'\circ\Psi)\cdot(\partial_{\theta}\Psi_{r})\otimes(\partial_{\theta}\Psi_{r}) + 2\cdot(e'\circ\Psi)\otimes(\partial_{\theta}\Psi_{r})\cdot(\partial_{\theta}\Psi_{\theta}) + (f'\circ\Psi)\cdot(\partial_{\theta}\Psi_{\theta})^{2}.$$

Bizonyítás - Triviális. ■

Tehát $\mathbf{t}\in\mathbf{I}$ és $R\in\mathbf{O}_{\mathbf{m}}(\tfrac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}},(\cdot|\cdot))$, $\det(R)=1$ esetén

$$((\mathrm{id}_{\mathbf{I}}+\mathbf{t})\times R\times\mathrm{id}_{\mathcal{M}'})^{*}\, g_{\mathbf{m};a',b',c',d',e',f'} = g_{\mathbf{m};a',b',c',d',e',f'}$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy a $g_{\mathbf{m};a,b,c,d,e,f}$ alakú Lorentz-metrikák formálisan sztatikusak és hengerszimmetrikusak.

<u>Példa</u> - (Általánosított **Kerr-sokaság**)

Legyen dim(**E**)=3, **E** és **I** orientáltak, $(\mathbf{m},\mathbf{a},\mathbf{r}_g)\in \mathbf{S}\times\mathbf{I}\times\mathbf{I}_0^+$ tetszőleges és $\mathcal{M}(\mathbf{a},\mathbf{r}_g)\subseteq\mathbf{I}\times\mathbf{R}$ az alábbi nyílt halmaz:

$$\mathcal{M}(\mathbf{a},\mathbf{r}_g) = \{\, (\mathrm{r},\theta) \in \mathbf{I}\times]0,\pi[\;\mid\; (\mathrm{r}\otimes\mathrm{r}) + (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cdot\cos^2\theta > 0 \text{ és } (\mathrm{r}\otimes\mathrm{r})-(\mathrm{r}\otimes\mathbf{r}_g)+(\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}) \neq 0 \,\}.$$

Nyilvánvaló, hogy:

$$\mathcal{M}(\mathbf{a},\mathbf{r}_g) = \begin{cases} (\mathbf{I}\times]0,\pi[)\setminus\{(0,\pi/2)\} & ;\ \text{ha } |\mathbf{a}| > \mathbf{r}_g/2 \\ ((\mathbf{I}\setminus\{\mathbf{r}_+,\mathbf{r}_-\})\times]0,\pi/2[)\setminus\{(0,\pi/2)\} & ;\ \text{ha } |\mathbf{a}| \le \mathbf{r}_g/2 \end{cases}$$

ahol $|\mathbf{a}| \le \mathbf{r}_g/2$ esetén:

$$\mathbf{r}_\pm = (\mathbf{r}_g/2) \pm \sqrt{(\mathbf{r}_g/2)\otimes(\mathbf{r}_g/2) - (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})}\,,$$

vagyis az $\{\mathbf{r}_+,\mathbf{r}_-\}$ halmaz egyenlő az

$$\mathbf{I}\to\mathbf{I} \;;\; \mathrm{r}\mapsto(\mathrm{r}\otimes\mathrm{r})-(\mathrm{r}\otimes\mathbf{r}_g)+(\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})$$

másodfokú polinomiális függvény gyökeinek halmazával. Az $(\mathbf{m},\mathbf{a},\mathbf{r}_g)$-paraméterű **Kerr-sokaság** - definíció szerint - az

$$(\mathbf{I}\times\mathbf{S}_\mathbf{m}\times\mathcal{M}(\mathbf{a},\mathbf{r}_g), g_{\mathbf{m};a,b,c,d,e,f})$$

Lorentz-sokaság, ahol

$$a, d : \mathcal{M}(\mathbf{a},\mathbf{r}_g)\to\mathbf{R};\quad b, e : \mathcal{M}(\mathbf{a},\mathbf{r}_g)\to\mathbf{I};\quad c, f : \mathcal{M}(\mathbf{a},\mathbf{r}_g)\to\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}$$

azok a függvények, melyekre minden $(\mathrm{r},\theta)\in\mathcal{M}(\mathbf{a},\mathbf{r}_g)$ esetén:

$$a(\mathrm{r},\theta) := 1 - \frac{\mathbf{r}_g\otimes\mathrm{r}}{(\mathrm{r}\otimes\mathrm{r}) + (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cdot\cos^2\theta}$$

$$b(\mathrm{r},\theta) := -\left(\frac{(\mathbf{r}_g\otimes\mathbf{a})\cdot\sin\theta}{(\mathrm{r}\otimes\mathrm{r}) + (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cdot\cos^2\theta}\right)\cdot\mathrm{r}\cdot\sin\theta$$

$$c(\mathrm{r},\theta) := \left((\mathrm{r}\otimes\mathrm{r}) + (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}) + \frac{(\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cdot\sin^2\theta}{(\mathrm{r}\otimes\mathrm{r}) + (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cdot\cos^2\theta}\cdot(\mathrm{r}\otimes\mathbf{r}_g)\right)\cdot\sin^2\theta$$

$$d(\mathrm{r},\theta) := \frac{(\mathrm{r}\otimes\mathrm{r}) + (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cdot\cos^2\theta}{(\mathrm{r}\otimes\mathrm{r}) - (\mathbf{r}_g\otimes\mathrm{r}) + (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})}$$

$$e(\mathrm{r},\theta) := 0$$

$$f(\mathrm{r},\theta) := (\mathrm{r}\otimes\mathrm{r}) + (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cdot\cos^2\theta\,.$$

Tehát az $(\mathbf{m},\mathbf{a},\mathbf{r}_g)$-paraméterű g Kerr-metrika definíciós tartománya az $\mathbf{I}\times\mathbf{S}_\mathbf{m}\times\mathcal{M}(\mathbf{a},\mathbf{r}_g)$ halmaz és minden $(\mathrm{t},\mathrm{n},\mathrm{r},\theta)\in\mathbf{I}\times\mathbf{S}_\mathbf{m}\times\mathcal{M}(\mathbf{a},\mathbf{r}_g)$ pontra és minden

$$(\mathbf{t}',\mathbf{n}',\mathbf{r}',\theta'), (\mathbf{t}'',\mathbf{n}'',\mathbf{r}'',\theta'') \in \mathrm{T}_{(\mathrm{t},\mathrm{n},\mathrm{r},\theta)}(\mathbf{I}\times\mathbf{S}_\mathbf{m}\times\mathcal{M}(\mathbf{a},\mathbf{r}_g)) \equiv \mathbf{I}\times\frac{(\mathbf{Rn}\oplus\mathbf{Rm})^\perp}{\mathbf{I}}\times\mathbf{I}\times\mathbf{R}$$

érintővektor-párra:

$$\mathrm{g}(\mathrm{t},\mathrm{n},\mathrm{r},\theta)((\mathbf{t}',\mathbf{n}',\mathbf{r}',\theta'),(\mathbf{t}'',\mathbf{n}'',\mathbf{r}'',\theta'')) = -\left(1 - \frac{\mathbf{r}_g\otimes\mathrm{r}}{(\mathrm{r}\otimes\mathrm{r}) + (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cdot\cos^2\theta}\right)\cdot(\mathbf{t}'\otimes\mathbf{t}'') \;-$$

$$-\left(\frac{(\mathbf{r}_g \otimes \mathbf{a})\cdot \sin\theta}{(\mathrm{r}\otimes\mathrm{r}) + (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cdot\cos^2\theta}\right)\cdot(\mathbf{m}\times\mathrm{n}\,|\,\mathbf{t}'\otimes\mathbf{n}''+\mathbf{t}''\otimes\mathbf{n}']\otimes\mathrm{r}\cdot\sin\theta\ +$$

$$+\left((\mathrm{r}\otimes\mathrm{r}) + (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}) + \frac{(\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cdot\sin^2\theta}{(\mathrm{r}\otimes\mathrm{r}) + (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cdot\cos^2\theta}\cdot(\mathrm{r}\otimes\mathbf{r}_g)\right)\cdot(\mathbf{n}'\,|\,\mathbf{n}'')\cdot\sin^2\theta\ +$$

$$+\left(\frac{(\mathrm{r}\otimes\mathrm{r}) + (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cdot\cos^2\theta}{(\mathrm{r}\otimes\mathrm{r}) - (\mathbf{r}_g\otimes\mathrm{r}) + (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})}\right)\cdot(\mathbf{r}'\otimes\mathbf{r}'') + ((\mathrm{r}\otimes\mathrm{r}) + (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cdot\cos^2\theta)\cdot\theta'\theta''.$$

Ez valóban Lorentz-metrika az $\mathbf{I}\times\mathbf{S}_\mathbf{m}\times\mathcal{M}(\mathbf{a},\mathbf{r}_g)$ szorzatsokaság felett, mert könnyen kiszámítható, hogy minden $(\mathrm{r},\theta)\in\mathcal{M}(\mathbf{a},\mathbf{r}_g)$ pontra:

$$(a\cdot c + b\otimes b)(\mathrm{r},\theta) = ((\mathrm{r}\otimes\mathrm{r})\text{-}(\mathrm{r}\otimes\mathbf{r}_g) + (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}))\cdot\sin^2\theta \neq 0,$$

tehát:

(I) $|\mathbf{a}| > \mathbf{r}_g/2$ esetén

$$\mathcal{M}(\mathbf{a},\mathbf{r}_g) = (\mathbf{I}\times]0,\pi[)\setminus\{(0,\pi/2)\}$$

és az $\mathcal{M}(\mathbf{a},\mathbf{r}_g)$ halmaz minden pontjában $a\cdot c+b\otimes b>0$, $d>0$, $f>0$ és $e=0$ teljesül, tehát

$$\mathcal{M}(\mathbf{a},\mathbf{r}_g) = [a\cdot c+b\otimes b>0] = [d>0]\cap[f>0]\cap[d\cdot f\text{-}e\otimes e>0],$$

ezért a 21. Állítás szerint $g_{\mathbf{m};a,b,c,d,e,f}$ Lorentz-metrika;

(II) $|\mathbf{a}| \leq \mathbf{r}_g/2$ esetén az $\mathcal{M}(\mathbf{a},\mathbf{r}_g)$ halmazt előállítjuk az összefüggő komponenseinek uniójaként:

$$\mathcal{M}(\mathbf{a},\mathbf{r}_g) = \mathcal{M}_+(\mathbf{a},\mathbf{r}_g)\cup\mathcal{M}_0(\mathbf{a},\mathbf{r}_g)\cup\mathcal{M}_-(\mathbf{a},\mathbf{r}_g)$$

ahol:

$$\mathcal{M}_-(\mathbf{a},\mathbf{r}_g) = (]\leftarrow,\mathbf{r}_-[\times]0,\pi[)\setminus\{(0,\pi/2)\}$$
$$\mathcal{M}_0(\mathbf{a},\mathbf{r}_g) =]\mathbf{r}_-,\mathbf{r}_+[\times]0,\pi[$$
$$\mathcal{M}_+(\mathbf{a},\mathbf{r}_g) =]\mathbf{r}_+,\rightarrow[\times]0,\pi[$$

ahol $\mathbf{r}_\pm = (\mathbf{r}_g/2) \pm \sqrt{(\mathbf{r}_g/2)\otimes(\mathbf{r}_g/2) - (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})}$. Nyilvánvaló, hogy

$$[a\cdot c+b\otimes b>0] = \mathcal{M}_-(\mathbf{a},\mathbf{r}_g)\cup\mathcal{M}_+(\mathbf{a},\mathbf{r}_g)$$
$$[a\cdot c+b\otimes b<0] = \mathcal{M}_0(\mathbf{a},\mathbf{r}_g)$$

és minden $(\mathrm{r},\theta)\in[a\cdot c+b\otimes b<0]$ pontban

$$a(\mathrm{r},\theta) = \frac{(\mathrm{r}\otimes\mathrm{r}) - (\mathbf{r}_g\otimes\mathrm{r}) + (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cdot\cos^2\theta}{(\mathrm{r}\otimes\mathrm{r}) + (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cdot\cos^2\theta} \leq \frac{(\mathrm{r}\otimes\mathrm{r}) - (\mathbf{r}_g\otimes\mathrm{r}) + (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})}{(\mathrm{r}\otimes\mathrm{r}) + (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cdot\cos^2\theta} < 0$$

$$c(\mathrm{r},\theta) := \left((\mathrm{r}\otimes\mathrm{r}) + (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}) + \frac{(\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cdot\sin^2\theta}{(\mathrm{r}\otimes\mathrm{r}) + (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cdot\cos^2\theta}\cdot(\mathrm{r}\otimes\mathbf{r}_g)\right)\cdot\sin^2\theta =$$

$$= \left(\frac{((\mathrm{r}\otimes\mathrm{r}) + (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}))^2 - ((\mathrm{r}\otimes\mathrm{r}) - (\mathrm{r}\otimes\mathbf{r}_g) + (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}))\cdot(\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cdot\sin^2\theta}{(\mathrm{r}\otimes\mathrm{r}) + (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cdot\cos^2\theta}\right)\cdot\sin^2\theta > 0$$

$$d(\mathrm{r},\theta) := \frac{(\mathrm{r}\otimes\mathrm{r}) + (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cdot\cos^2\theta}{(\mathrm{r}\otimes\mathrm{r}) - (\mathbf{r}_g\otimes\mathrm{r}) + (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})} < 0$$

$$e(\mathrm{r},\theta) := 0$$

$$f(\mathrm{r},\theta) := (\mathrm{r}\otimes\mathrm{r}) + (\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cdot\cos^2\theta > 0$$

tehát $[a \cdot c + b \otimes b < 0] \subseteq [a<0] \cap [c>0] \cap [d \cdot f - e \otimes e < 0]$. Továbbá, ha $(\mathrm{r},\theta) \in [a \cdot c + b \otimes b > 0]$, akkor:

$$d(\mathrm{r},\theta) := \frac{(\mathrm{r} \otimes \mathrm{r}) + (\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}) \cdot \cos^2\theta}{(\mathrm{r} \otimes \mathrm{r}) - (\mathrm{r}_\mathrm{g} \otimes \mathrm{r}) + (\mathbf{a} \otimes \mathbf{a})} > 0$$

$$f(\mathrm{r},\theta) := (\mathrm{r} \otimes \mathrm{r}) + (\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}) \cdot \cos^2\theta > 0$$

$$e(\mathrm{r},\theta) := 0$$

tehát $[a \cdot c + b \otimes b > 0] \subseteq [d > 0] \cap [f > 0] \cap [d \cdot f - e \otimes e > 0]$. Ezért a 21. Állítás szerint $\mathrm{g}_{\mathbf{m};a,b,c,d,e,f}$ Lorentz-metrika.

KAUZALITÁS

Ebben a pontban $(\mathbf{E}, \mathbf{I}, [\cdot|\cdot])$ *tetszőleges, legalább kétdimenziós, végesdimenziós, valós euklidészi teret jelöl.*

Ha M *sokaság, akkor* M*-ben haladó görbéknek nevezzük az* I*-beli nyílt intervallumon értelmezett,* M*-be ható* C^{∞}*-osztályú függvényeket. Egy görbét globálisnak mondunk, ha definíciós tartománya egyenlő* I*-vel.*

<u>Definíció</u> - Ha (M,g) Lorentz-sokaság, akkor egy $r:\mathrm{I}\rightarrowtail\mathrm{M}$ görbét *időszerűnek*, (ill. *fényszerűnek*, ill. *nemtérszerűnek*) nevezünk, ha az r definíciós tartományának minden τ pontjára az $\dot{r}(\tau)\in\mathbf{T}_{r(\tau)}(\mathrm{M})$ érintővektor időszerű, (ill. fényszerű, ill. nem térszerű, azaz időszerű, vagy fényszerű). Ha (M,g) téridő (tehát időorintált Lorentz-sokaság), akkor egy $r:\mathrm{I}\rightarrowtail\mathrm{M}$ nemtérszerű görbét *jövőbe-* (ill. *múltba-*) *mutatónak* nevezünk, ha az r definíciós tartományának minden τ elemére az $\dot{r}(\tau)$ vektor az adott időorientációra nézve pozitív (ill. negatív) nemtérszerű érintővektor az $r(\tau)$ pont érintőterében.

Lorentz-sokaságban a nemtérszerű görbék a legegyszerűbb folyamat-modellek, ezért a Lorentz-sokaságok ill. téridők dinamikai tulajdonságainak elemzését a nemtérszerű görbék halmazának vizsgálatával célszerű indítani. A második lépés a nemtérszerű ill. időszerű *geodetikusok* analízise lehet.

Lorentz-sokaságban egy *nem injektív*, nemtérszerű görbe olyan folyamat-modell, amely nincs összhangban a fizikai okság elvével, ezért - fizikai modellelméleti ok miatt - ki kell zárni a nem injektív, nemtérszerű görbéket tartalmazó Lorentz-sokaságokat.

<u>Definíció</u> - Ha (M,g) Lorentz-sokaság, akkor azt mondjuk, hogy az $\mathrm{M}'\subseteq\mathrm{M}$ *halmaz kauzális* (ill. *kronologikus*), ha minden M'-ben haladó nemtérszerű (ill. időszerű) görbe injektív. Az (M,g) Lorentz-sokaságot *kauzálisnak* (ill. *kronologikusnak*) nevezzük, ha az M halmaz kauzális (ill. kronologikus). Ha (M,g) téridő, akkor azt mondjuk, hogy az $\mathrm{M}'\subseteq\mathrm{M}$ halmaz *lényegében kauzális* (ill. *lé-*

nyegében kronologikus), ha ha minden M'-ben haladó jövőbe mutató nemtérszerű (ill. jövőbe mutató időszerű) görbe injektív. Az (M,g) téridőt *lényegében kauzálisnak* (ill. *lényegében kronologikusnak*) nevezzük, ha az M halmaz lényegében kauzális (ill. lényegében kronologikus).

Megjegyzések - 1) Minden kauzális Lorentz-sokaság kronologikus és minden lényegében kauzális téridő lényegében kronologikus. Minden kauzális téridő lényegében kauzális. Ha tehát egy téridő kauzális, akkor az összes többi oksági tulajdonsággal is rendelkezik; *ezért* érdemes a kauzalitás fogalmát bevezetni olyan Lorentz-sokaságokra is, amelyek esetleg nem is időorientálhatók.

2) Létezik nem kronologikus téridő (ld. Kerr-sokaság).

3) Létezik nem kauzális, de kronologikus téridő (ld. Kerr-sokaság).

Állítás - Legyen $M \subseteq I \times \mathbf{E}$ nem üres nyílt halmaz és

$$(\alpha,\beta,\gamma) \in C^{\infty}(M;\mathbb{R}\times\frac{\mathbf{E}}{I}\times\mathrm{Sym}(\mathbf{E},[\cdot|\cdot]))$$

Lorentz-függvény. Ekkor az $\{a\in M|\gamma(a)\in GL_{+}(\mathbf{E},[\cdot|\cdot])\}$ halmaz kauzális az $(M,g_{\alpha,\beta,\gamma})$ Lorentz-sokaságban.

Bizonyítás - Legyen $(t,q):I\to M$ nemtérszerű görbe, ahol $I\subseteq I$ nyílt intervallum. Ekkor minden $I\ni\tau$-ra:

$$-\alpha(t(\tau),q(\tau))\cdot\dot{t}(\tau)^{2} + 2(\beta(t(\tau),q(\tau))|\dot{q}(\tau))\cdot\dot{t}(\tau) +$$
$$+ (\gamma(t(\tau),q(\tau))_{I}\dot{q}(\tau)|\dot{q}(\tau)) \le 0.$$

Ha (t,q) benne halad az $\{a\in M|\gamma(a)\in GL_{+}(\mathbf{E},[\cdot|\cdot])\}$ halmazban, azaz minden $I\ni\tau$-ra $\gamma(t(\tau),q(\tau)):\mathbf{E}\to\mathbf{E}$ pozitív definit, akkor minden $I\ni\tau$-ra $\dot{t}(\tau)\neq 0$, különben $\dot{q}(\tau)=0$ is teljesülne a fenti egyenlőtlenség miatt, pedig (t,q) deriváltja sehol sem nulla (a 0 vektor térszerű!). Ezért a Rolle tétel szerint a $t:I\to I$ függvény injektív és akkor a (t,q) függvény még inkább az.∎

Következmény - Legyen $M\subseteq I\times\mathbf{E}$ nyílt halmaz és

$$(\alpha,\beta,\gamma) : M \longrightarrow \mathbb{R}\times\frac{\mathbf{E}}{I}\times\mathrm{Sym}(\mathbf{E},[\cdot|\cdot])$$

Lorentz-függvény. Ekkor az $[\alpha>0]\cap[\beta=0]$ halmaz kauzális az $(M,g_{\alpha,\beta,\gamma})$ Lorentz-sokaságban.

Bizonyítás - $[\alpha>0]\cap[\beta=0] \subseteq \{a\in M \mid \gamma(a)\in GL_+(\mathbf{E},[\cdot|\cdot])\}$, mert $\alpha(a)>0$ esetén $(\alpha\gamma+\beta\otimes\beta)(a)\in GL_+(\mathbf{E},[\cdot|\cdot])$ (és természetesen kauzális halmaz minden részhalmaza kauzális).█

<u>Állítás</u> - Legyen $\mathfrak{M}\subseteq \mathrm{I}\times\mathrm{I}$ nyílt halmaz és $a,b,c\in C^{\infty}(\mathfrak{M};\mathbb{R})$ illetve $f\in C^{\infty}(\mathfrak{M};\mathrm{I}\otimes\mathrm{I})$ olyan függvények, hogy az $\mathfrak{M}$ minden pontjában $ac+b^2>0$ és $f>0$. Ekkor a $[c>0]\times\mathbb{S}$ és az $[a<0]\times\mathbb{S}$ halmazok kauzálisak az $(\mathfrak{M}\times\mathbb{S},g_{a,b,c,f})$ Lorentz-sokaságban.

Bizonyítás - Legyen $(t,r,n):\mathrm{I}\to\mathfrak{M}\times\mathbb{S}$ tetszőleges nemtérszerű görbe, ahol $\mathrm{I}\subseteq\mathrm{I}$ nyílt intervallum. Ekkor minden $\tau\in\mathrm{I}$ pontra:

$$0 \geq -a(t(\tau),r(\tau))\cdot\dot{t}(\tau)^2 + 2b(t(\tau),r(\tau))\cdot\dot{t}(\tau)\cdot\dot{r}(\tau) + $$
$$+ c(t(\tau),r(\tau))\cdot\dot{r}(\tau)^2 + f(t(\tau),r(\tau))\otimes[\dot{n}(\tau)|\dot{n}(\tau)].$$

a) Állítjuk, hogy ha (t,r,n) a $[c>0]\cap\mathbb{S}$ halmazban halad, azaz minden $\mathrm{I}\ni\tau$-ra $c(t(\tau),r(\tau))>0$, akkor az $t:\mathrm{I}\to\mathrm{I}$ függvény injektív. Ha nem így lenne, akkor a Rolle tétel szerint volna olyan $\tau\in\mathrm{I}$, hogy $\dot{t}(\tau)=0$ és akkor a fenti egyenlőtlenség szerint:

$$0 \leq c(t(\tau),r(\tau))\cdot\dot{r}(\tau)^2 + f(t(\tau),r(\tau))\otimes[\dot{n}(\tau)|\dot{n}(\tau)] \leq 0$$

tehát $\dot{r}(\tau)=0$ is és $\dot{n}(\tau)=0$ is teljesülne, ami lehetetlen.

b) Állítjuk, hogy ha (t,r,n) az $[a<0]\cap\mathbb{S}$ halmazban halad, azaz minden $\mathrm{I}\ni\tau$-ra $a(t(\tau),r(\tau))<0$, akkor az $r:\mathrm{I}\to\mathrm{I}$ függvény injektív. Ha nem így lenne, akkor a Rolle tétel szerint volna olyan $\tau\in\mathrm{I}$, hogy $\dot{r}(\tau)=0$ és akkor a fenti egyenlőtlenség szerint:

$$0 \leq -a(t(\tau),r(\tau))\cdot\dot{t}(\tau)^2 + f(t(\tau),r(\tau))\otimes[\dot{n}(\tau)|\dot{n}(\tau)] \leq 0$$

tehát $\dot{t}(\tau)=0$ is és $\dot{n}(\tau)=0$ is teljesülne, ami lehetetlen.█

<u>Következmény</u> - Legyen $\mathfrak{M}\subseteq\mathrm{I}\times\mathrm{I}$ nyílt halmaz és $a,c\in C^{\infty}(\mathfrak{M};\mathbb{R})$ illetve $f\in C^{\infty}(\mathfrak{M};\mathrm{I}\otimes\mathrm{I})$ olyan függvények, hogy az $\mathfrak{M}$ minden pontjában $ac>0$ és $f>0$. Ekkor az $(\mathfrak{M}\times\mathbb{S},g_{a,0,c,f})$ gömbszimmetrikus, vektoriális Lorentz-sokaság kauzális.

Bizonyítás - Ekkor $[ac>0]=\mathfrak{M}$ miatt az $[a<0]\times\mathbb{S}$ és $[c>0]\times\mathbb{S}$ halmazok az $\mathfrak{M}\times\mathbb{S}$-nek diszjunkt nyílt felbontását alkotják, tehát minden $\mathfrak{M}\times\mathbb{S}$-ben haladó görbe vagy az egyikben, vagy a másikban halad, tehát az előző állítás szerint injektív is, ha nemtérszerű.█

Tehát az összes eddig bevezetett gömbszimmetrikus vektoriális

Lorentz-sokaság kauzális (vagyis a vektoriális Minkowski, Schwarzschild, Lemaitre, Reissner-Nordström, Einstein, de Sitter, Friedmann és Robertson-Walker sokaságok mind kauzálisak).

Állítás - Legyen $\dim \mathbf{E}=3$, $\mathbf{E}$ és I orientáltak, $\mathfrak{M}\subseteq \mathrm{I}\times\mathbb{R}$ nyílt halmaz és legyenek

$$a,d\in C^{\infty}(\mathfrak{M};\mathbb{R})\ ;\ b,e\in C^{\infty}(\mathfrak{M};\mathrm{I})\ ;\ c,f\in C^{\infty}(\mathfrak{M};\mathrm{I}\otimes\mathrm{I})$$

olyan függvények, hogy:

$$\mathfrak{M} = [a\cdot c+b\otimes b\neq 0],$$
$$[a\cdot c+b\otimes b>0] = [d>0]\cap[f>0]\cap[d\cdot f-e\otimes e>0],$$
$$[a\cdot c+b\otimes b<0] = [a<0]\cap[c>0]\cap[d\cdot f-e\otimes e<0].$$

Ekkor minden $\mathbb{S}\ni\mathbf{m}$-re:

1) Az

$$\mathrm{I}\times\mathbb{S}_{\mathbf{m}}\times([a\cdot c+b\otimes b>0]\cap[c>0])$$
$$\mathrm{I}\times\mathbb{S}_{\mathbf{m}}\times([a\cdot c+b\otimes b<0]\cap[f>0])$$

halmazok kauzálisak az $(\mathrm{I}\times\mathbb{S}_{\mathbf{m}}\times\mathfrak{M},g_{\mathbf{m};a,b,c,d,e,f})$ Lorentz-sokaságban.

2) Az

$$\mathrm{I}\times\mathbb{S}_{\mathbf{m}}\times[c<0]$$

halmaz *nem kronologikus* az $(\mathrm{I}\times\mathbb{S}_{\mathbf{m}}\times\mathfrak{M},g_{\mathbf{m};a,b,c,d,e,f})$ Lorentz-sokaságban. Pontosabban; e halmaz minden pontjához létezik azon áthaladó, globális, periodikus, *időszerű* görbe, amely ebben a halmazban halad.

3) Az

$$\mathrm{I}\times\mathbb{S}_{\mathbf{m}}\times[c=0]$$

halmaz *nem kauzális*, de *kronologikus* az $(\mathrm{I}\times\mathbb{S}_{\mathbf{m}}\times\mathfrak{M},g_{\mathbf{m};a,b,c,d,e,f})$ Lorentz-sokaságban. Pontosabban; e halmaz minden pontjához létezik azon áthaladó, globális, periodikus, *fényszerű* görbe, amely ebben a halmazban halad.

Bizonyítás - Legyen $M:=\mathrm{I}\times\mathbb{S}_{\mathbf{m}}\times\mathfrak{M}$ és $g:=g_{\mathbf{m};a,b,c,d,e,f}$. A definíció szerint minden $(t,n,r,\theta)\in M$ pontra és minden

$$(\mathbf{t}',\mathbf{n}',\mathbf{r}',\theta'),(\mathbf{t}'',\mathbf{n}'',\mathbf{r}'',\theta'')\in \mathrm{I}\times\mathrm{T}_n(\mathbb{S}_{\mathbf{m}})\times\mathrm{I}\times\mathbb{R}\equiv \mathrm{T}_{(t,n,r,\theta)}(M)$$

érintővektorra:

$$g(t,n,r,\theta)((\mathbf{t}',\mathbf{n}',\mathbf{r}',\Theta'),(\mathbf{t}'',\mathbf{n}'',\mathbf{r}'',\Theta'')) :=$$
$$= -a(r,\theta)\cdot(\mathbf{t}'\otimes\mathbf{t}'') + b(r,\theta)\otimes(\mathbf{m}\mathrm{x}\mathrm{n}\,|\,\mathbf{t}'\otimes\mathbf{n}''+\mathbf{t}''\otimes\mathbf{n}'] + c(r,\theta)\cdot(\mathbf{n}'\,|\,\mathbf{n}'') +$$
$$+ d(r,\theta)\cdot(\mathbf{r}'\otimes\mathbf{r}'') + e(r,\theta)\otimes(\Theta'\mathbf{r}''+\Theta''\mathbf{r}') + f(r,\theta)\cdot\Theta'\Theta''.$$

Legyen $I\subseteq I$ nyílt intervallum és $(t,n,r,\theta):I\to M$ (a g Lorentz-metrikára nézve) nemtérszerű görbe. Ekkor az I intervallumon teljesül a következő függvény-egyenlőtlenség:

$$0 \geq {}_I g(t,n,r,\theta)_I((\dot t,\dot n,\dot r,\dot\theta),(\dot t,\dot n,\dot r,\dot\theta)) =$$
$$= -a(r,\theta)\cdot\dot t^2 + 2b(r,\theta)\otimes(\mathbf{m}\mathrm{x}n\,|\,\dot n]\cdot\dot t + c(r,\theta)\otimes[\dot n\,|\,\dot n] + d(r,\theta)\cdot\dot r^2 +$$
$$+ 2e(r,\theta)\otimes\dot\theta\cdot\dot r + f(r,\theta)\otimes(\dot\theta\otimes\dot\theta).$$

(I) Tegyük fel, hogy a görbe $I\mathrm{x}S_{\mathbf{m}}\mathrm{x}([a\cdot c+b\otimes b>0]\cap[c>0])$-ban halad. Megmutatjuk, hogy ekkor a $t:I\to I$ függvény injektív (és akkor a görbe még inkább az). Ha nem így volna, akkor a Rolle tétel szerint létezne olyan $\tau\in I$ pont, hogy $\dot t(\tau)=0$ és akkor teljesülne a következő egyenlőtlenség:

$$0 \geq c(r(\tau),\theta(\tau))\otimes[\dot n(\tau)\,|\,\dot n(\tau)] + d(r(\tau),\theta(\tau))\cdot\dot r^2(\tau) +$$
$$+ 2e(r(\tau),\theta(\tau))\otimes\dot\theta(\tau)\cdot\dot r(\tau) + f(r(\tau),\theta(\tau))\otimes(\dot\theta(\tau)\otimes\dot\theta(\tau)) =$$
$$= c(r(\tau),\theta(\tau))\otimes[\dot n(\tau)\,|\,\dot n(\tau)] +$$
$$+ \left(\sqrt{d(r(\tau),\theta(\tau))}\cdot\dot r(\tau) + \frac{e(r(\tau),\theta(\tau))\otimes\dot\theta(\tau)}{\sqrt{d(r(\tau),\theta(\tau))}}\right)^2 +$$
$$+ \left(\frac{d(r(\tau),\theta(\tau))\cdot f(r(\tau),\theta(\tau))-(e\otimes e)(r(\tau),\theta(\tau))}{d(r(\tau),\theta(\tau))}\right)\cdot\otimes(\dot\theta(\tau)\otimes\dot\theta(\tau)) \geq 0$$

hiszen $(r(\tau),\theta(\tau))\in[a\cdot c+b\otimes b>0]\cap[c>0]\subseteq[d\cdot f-e\otimes e>0]\cap[d>0]\cap[c>0]$ miatt:

$$c(r(\tau),\theta(\tau)) > 0$$
$$d(r(\tau),\theta(\tau)) > 0$$
$$d(r(\tau),\theta(\tau))\cdot f(r(\tau),\theta(\tau))-(e\otimes e)(r(\tau),\theta(\tau)) > 0.$$

Ezért $\dot n(\tau)=0$ és $\dot\theta(\tau)=0$ és $\dot r(\tau)=0$ is teljesülne $\dot t(\tau)=0$ mellett, ami lehetetlen.

(II) Tegyük fel, hogy a görbe $I\mathrm{x}S_{\mathbf{m}}\mathrm{x}([a\cdot c+b\otimes b<0]\cap[f>0])$-ban halad. Jelölje $\omega:I\to I^*$ azt az egyértelműen meghatározott függvényt,

amelyre minden I∋τ-ra $\dot{n}(\tau)=\omega(\tau)\otimes(\mathbf{m}\times n(\tau))$ teljesül.
Megmutatjuk, hogy ekkor az r:I→I függvény injektív (és akkor a görbe még inkább az). Ha nem így volna, akkor a Rolle tétel szerint létezne olyan τ∈I pont, hogy $\dot{r}(\tau)=0$ és akkor teljesülne a következő egyenlőtlenség:

$$0 \geq -a(r(\tau),\theta(\tau))\cdot\dot{t}^2(\tau) + 2b(r(\tau),\theta(\tau))\otimes(\mathbf{m}\times n(\tau)|\dot{n}(\tau)]\cdot\dot{t}(\tau) +$$

$$+ c(r(\tau),\theta(\tau))\otimes[\dot{n}(\tau)|\dot{n}(\tau)] + f(r(\tau),\theta(\tau))\otimes\cdot(\dot{\theta}(\tau)\otimes\dot{\theta}(\tau)) =$$

$$= -a(r(\tau),\theta(\tau))\cdot\dot{t}^2(\tau) + 2b(r(\tau),\theta(\tau))\otimes\omega(\tau)\cdot\dot{t}(\tau) +$$

$$+ c(r(\tau),\theta(\tau))\otimes(\omega(\tau)\otimes\omega(\tau)) + f(r(\tau),\theta(\tau))\otimes(\dot{\theta}(\tau)\otimes\dot{\theta}(\tau)) =$$

$$= \left(\sqrt{-a(r(\tau),\theta(\tau))}\cdot\dot{t}(\tau) + \frac{b(r(\tau),\theta(\tau))\otimes\omega(\tau)}{\sqrt{-a(r(\tau),\theta(\tau))}}\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{a(r(\tau),\theta(\tau))\cdot c(r(\tau),\theta(\tau))+(b\otimes b)(r(\tau),\theta(\tau))}{a(r(\tau),\theta(\tau))}\right)\otimes(\omega(\tau)\otimes\omega(\tau)) +$$

$$+ f(r(\tau),\theta(\tau))\cdot(\dot{\theta}(\tau)\otimes\dot{\theta}(\tau)) \geq 0,$$

hiszen $(r(\tau),\theta(\tau))\in[a\cdot c+b\otimes b<0]\cap[f>0]\subseteq[a<0]\cap[f>0]$ miatt:

$$f(r(\tau),\theta(\tau)) > 0$$

$$a(r(\tau),\theta(\tau)) < 0$$

$$a(r(\tau),\theta(\tau))\cdot c(r(\tau),\theta(\tau))+(b\otimes b)(r(\tau),\theta(\tau)) < 0.$$

Ezért $\omega(\tau)=0$, tehát $\dot{n}(\tau)=0$ és $\dot{\theta}(\tau)=0$ és $\dot{t}(\tau)=0$ is teljesülne $\dot{r}(\tau)=0$ mellett, ami lehetetlen.

(III) Legyen $(t_0,n_0,r_0,\theta_0)\in\mathrm{I}\times\mathbb{S}_{\mathbf{m}}\times[c<0]$ rögzített pont és legyen $\Omega:\mathbf{E}\to\frac{\mathbf{E}}{\mathrm{I}}$ tetszőleges olyan nem nulla antiszimmetrikus operátor, amelynek magja egyenlő $\mathbf{m}\otimes$I-vel. Tekintsük a:

$$\underline{(t,n,r,\theta)} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{I}\times\mathbb{S}_{\mathbf{m}}\times[c<0] \quad ; \quad \tau \longmapsto (t_0,(\exp(\tau\otimes\Omega))_{\mathrm{I}}n_0,r_0,\theta_0)$$

függvényt! Ez olyan globális, periodikus görbe, amely áthalad a $(t_0,n_0,r_0,\theta_0)\in\mathrm{I}\times\mathbb{S}_{\mathbf{m}}\times[c<0]$ ponton és az $\mathrm{I}\times\mathbb{S}_{\mathbf{m}}\times[c<0]$ halmazban halad. Mivel $\dot{t}\equiv0$, $\dot{r}\equiv0$, $\dot{\theta}\equiv0$ és $c_\circ(r,\theta)\equiv c(r_0,\theta_0)$, ezért I-n fennáll a következő függvény-egyenlőtlenség:

$$0 \geq -a(r(\tau),\theta(\tau))\cdot\dot{t}^2(\tau) +$$

$$+\ 2b(r(\tau),\theta(\tau))\cdot(\mathbf{m}\times n(\tau)\,|\,r(\tau)\otimes\dot{n}(\tau))\cdot\dot{t}(\tau)\cdot\sin\theta(\tau) +$$

$$+\ c(r(\tau),\theta(\tau))\cdot|r(\tau)\otimes\dot{n}(\tau)|^2\cdot\sin^2\theta(\tau) + f(r(\tau),\theta(\tau))\cdot(r(\tau)\otimes\dot{\theta}(\tau))^2 =$$

$$= -a(r(\tau),\theta(\tau))\cdot\dot{t}^2(\tau) +$$

$$+\ 2b(r(\tau),\theta(\tau))\cdot(r(\tau)\otimes\omega(\tau))\cdot\dot{t}(\tau)\cdot\sin\theta(\tau) +$$

$$+\ c(r(\tau),\theta(\tau))\cdot(r(\tau)\otimes\omega(\tau))^2\cdot\sin^2\theta(\tau) + f(r(\tau),\theta(\tau))\cdot(r(\tau)\otimes\dot{\theta}(\tau))^2 =$$

$$= \left(\sqrt{-a(r(\tau),\theta(\tau))}\cdot\dot{t}(\tau) + \frac{b(r(\tau),\theta(\tau))}{\sqrt{-a(r(\tau),\theta(\tau))}}\cdot(r(\tau)\otimes\omega(\tau))\cdot\sin\theta(\tau)\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{a(r(\tau),\theta(\tau))\cdot c(r(\tau),\theta(\tau))+b^2(r(\tau),\theta(\tau))}{a(r(\tau),\theta(\tau))}\right)\cdot(r(\tau)\otimes\omega(\tau))^2\cdot\sin^2\theta(\tau) +$$

$$+\ f(r(\tau),\theta(\tau))\cdot(r(\tau)\otimes\dot{\theta}(\tau))^2 \geq 0,$$

hiszen $(r(\tau),\theta(\tau))\in[ac+b^2<0]\cap[f>0]\subseteq[ac+b^2<0]\cap[a<0]\cap[f>0]$ miatt:

$$f(r(\tau),\theta(\tau)) > 0$$

$$a(r(\tau),\theta(\tau)) < 0$$

$$a(r(\tau),\theta(\tau))\cdot c(r(\tau),\theta(\tau))+b^2(r(\tau),\theta(\tau)) < 0.$$

Ezért $r(\tau)\neq 0$ miatt $\omega(\tau)=0$, tehát $\dot{n}(\tau)=0$ és $\dot{\theta}(\tau)=0$ és $\dot{t}(\tau)=0$ is teljesülne $\dot{r}(\tau)=0$ mellett, ami lehetetlen.■

<u>Következmény</u> - Legyen $\dim\mathbf{E}=3$, $\mathbf{E}$ orientált és $(\mathbf{r}_g,\mathbf{a},\mathbf{m})\in\mathbb{I}^+\times\mathbb{I}\times\mathbb{S}$ *tetszőleges*. Ekkor az $(\mathbf{r}_g,\mathbf{a},\mathbf{m})$-paraméterű Kerr-sokaság kauzális.

Bizonyítás - Az $(\mathbf{r}_g,\mathbf{a},\mathbf{m})$-paraméterű Kerr-sokaság bázisa az

$$\mathbb{I}\times\mathbb{S}_{\mathbf{m}}\times\mathfrak{M}(\mathbf{r}_g,\mathbf{a})$$

halmaz, ahol

$$\mathfrak{M}(\mathbf{r}_g,\mathbf{a}) := \begin{cases} \mathbb{I}^+\times]0,\pi[& ;\ \text{ha } |\mathbf{a}|>\mathbf{r}_g/2 \\ (\mathbb{I}^+\setminus\{\mathbf{r}_-(\mathbf{r}_g,\mathbf{a}),\mathbf{r}_+(\mathbf{r}_g,\mathbf{a})\})\times]0,\pi[& ;\ \text{ha } |\mathbf{a}|\leq\mathbf{r}_g/2 \end{cases},$$

ahol $|\mathbf{a}|\leq\mathbf{r}_g/2$ esetén:

$$\mathbf{r}_\pm(\mathbf{r}_g,\mathbf{a}) := (\mathbf{r}_g/2)\cdot\left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{r}_g/2}\right)^2}\right).$$

Továbbá, az $(\mathbf{r}_g, \mathbf{a}, \mathbf{m})$-paraméterű Kerr-metrika azonos a

$$g_{a,b,c,d,e,f}$$

hengerszimmetrikus Lorentz-metrikával, ahol minden $(r,\theta) \in \mathfrak{M}_{(\mathbf{r}_g, \mathbf{a})}$ pontra:

$$a(r,\theta) := 1 - \frac{\mathbf{r}_g/r}{1+(\mathbf{a}/r)^2\cos^2\theta} ;$$

$$b(r,\theta) := -\left(\frac{(\mathbf{r}_g/r)(\mathbf{a}/r)\sin\theta}{1+(\mathbf{a}/r)^2\cos^2\theta}\right) ;$$

$$c(r,\theta) := 1 + (\mathbf{a}/r)^2 + \frac{(\mathbf{r}_g/r)(\mathbf{a}/r)^2\sin^2\theta}{1+(\mathbf{a}/r)^2\cos^2\theta} ;$$

$$d(r,\theta) := \frac{1+(\mathbf{a}/r)^2\cos^2\theta}{1-(\mathbf{r}_g/r)+(\mathbf{a}/r)^2} ;$$

$$e(r,\theta) := 0 ;$$

$$f(r,\theta) := 1+(\mathbf{a}/r)^2\cos^2\theta .$$

Mivel $\mathfrak{M}_{(\mathbf{r}_g, \mathbf{a})} = [c>0] = [f>0]$ (sőt $\mathfrak{M}_{(\mathbf{r}_g, \mathbf{a})} = [c\geq 1] = [f\geq 1]$), ezért az előző állítás szerint az

$$\mathrm{I}\times\mathbb{S}_{\mathbf{m}}\times[ac+b^2>0]$$
$$\mathrm{I}\times\mathbb{S}_{\mathbf{m}}\times[ac+b^2<0]$$

halmazok kauzálisak és ezek a sokaság bázisának diszjunkt, nyílt felbontását alkotják, tehát minden bázisban haladó görbe a fenti nyílt halmazok közül pontosan az egyikben halad.∎

Egyébként, - a fenti jelöléseket használva -, minden $(r,\theta) \in \mathfrak{M}_{(\mathbf{r}_g, \mathbf{a})}$ pontra:

$$a(r,\theta)\cdot c(r,\theta) + b(r,\theta)^2 = 1-(\mathbf{r}_g/r)+(\mathbf{a}/r)^2,$$

ezért $|\mathbf{a}| \leq \mathbf{r}_g/2$ esetén:

$$[ac+b^2>0] = (]0,\mathbf{r}_-[\cup]\mathbf{r}_+,\rightarrow[)\times]0,\pi[,$$

$$[ac+b^2<0] =]\mathbf{r}_-,\mathbf{r}_+[\times]0,\pi[,$$

ahol $\mathbf{r}_\pm := \mathbf{r}_\pm(\mathbf{r}_g, \mathbf{a})$.

$$_{\mathrm{I}}g(t,n,r,\theta)_{\mathrm{I}}((\dot t,\dot n,\dot r,\dot\theta),(\dot t,\dot n,\dot r,\dot\theta)) :=$$
$$:= -a(r,\theta)\cdot\dot t^2 + 2b(r,\theta)\otimes(\mathbf{m}\times n|\dot n]\cdot\dot t + c(r,\theta)\otimes[\dot n|\dot n] + d(r,\theta)\cdot\dot r^2 +$$
$$+ 2e(r,\theta)\otimes\dot\theta\cdot\dot r + f(r,\theta)\otimes(\dot\theta\otimes\dot\theta) \equiv c(r_0,\theta_0)\otimes[\Omega_{\mathrm{I}}n_0|\Omega_{\mathrm{I}}n_0] < 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a görbe *időszerű* a $g_{\mathbf{m};a,b,c,d,e,f}$ Lorentz-metrikára nézve. (Még az is látszik, hogy ha a fenti görbe változóját leosztjuk a $-c(r_0,\theta_0)\otimes[\Omega_{\mathrm{I}}n_0|\Omega_{\mathrm{I}}n_0]>0$ szám pozitív négyzetgyökével, akkor olyan görbét kapunk, amely a fenti tulajdonságokon kívül még *világvonal* is a $g_{\mathbf{m};a,b,c,d,e,f}$ Lorentz-metrikára nézve.)

(IV) Legyen $(t_0,n_0,r_0,\theta_0)\in\mathrm{I}\times\mathbb{S}_{\mathbf{m}}\times[c=0]$ rögzített pont és legyen $\Omega:\mathbf{E}\to\frac{\mathbf{E}}{\mathrm{I}}$ tetszőleges olyan nem nulla antiszimmetrikus operátor, amelynek magja egyenlő $\mathbf{m}\otimes\mathrm{I}$-vel. Tekintsük a:

$$\underline{(t,n,r,\theta)} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{I}\times\mathbb{S}_{\mathbf{m}}\times[c\Leftarrow 0] \quad ; \quad \tau \longmapsto (t_0,(\exp(\tau\otimes\Omega))_{\mathrm{I}}n_0,r_0,\theta_0)$$

függvényt! Ez olyan globális, periodikus görbe, amely áthalad a $(t_0,n_0,r_0,\theta_0)\in\mathrm{I}\times\mathbb{S}_{\mathbf{m}}\times[c=0]$ ponton és az $\mathrm{I}\times\mathbb{S}_{\mathbf{m}}\times[c=0]$ halmazban halad. Mivel $\dot t\equiv 0$, $\dot r\equiv 0$, $\dot\theta\equiv 0$ és $c\circ(r,\theta)\equiv c(r_0,\theta_0)=0$, ezért I-n fennáll a következő függvény-egyenlőség:

$$_{\mathrm{I}}g(t,n,r,\theta)_{\mathrm{I}}((\dot t,\dot n,\dot r,\dot\theta),(\dot t,\dot n,\dot r,\dot\theta)) :=$$
$$:= -a(r,\theta)\cdot\dot t^2 + 2b(r,\theta)\otimes(\mathbf{m}\times n|\dot n]\cdot\dot t + c(r,\theta)\otimes[\dot n|\dot n] + d(r,\theta)\cdot\dot r^2 +$$
$$+ 2e(r,\theta)\otimes\dot\theta\cdot\dot r + f(r,\theta)\otimes(\dot\theta\otimes\dot\theta) \equiv c(r_0,\theta_0)\otimes[\Omega_{\mathrm{I}}n_0|\Omega_{\mathrm{I}}n_0] = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a görbe *fényszerű* a $g_{\mathbf{m};a,b,c,d,e,f}$ Lorentz-metrikára nézve, ezért az $\mathrm{I}\times\mathbb{S}_{\mathbf{m}}\times[c=0]$ halmaz *nem kauzális*. Azonban ez a halmaz *kronologikus*. Valóban, az a,b,c,d,e és f függvényekre vonatkozó kényszerek alapján:

$$[c=0] \subseteq [a\cdot c+b\otimes b>0] \subseteq [d>0]\cap[f>0]\cap[d\cdot f-e\otimes e>0],$$

ezért ha $(t,n,r,\theta):\mathrm{I}\to\mathrm{I}\times\mathbb{S}_{\mathbf{m}}\times\mathfrak{M}$ *időszerű* görbe, amely az $\mathrm{I}\times\mathbb{S}_{\mathbf{m}}\times[c=0]$ halmazban halad, akkor a t függvénynek injektívnek kell lennie, különben a Rolle-tétel szerint volna olyan $\tau\in\mathrm{I}$, hogy $\dot t(\tau)=0$ és akkor:

$$0>d(r(\tau),\theta(\tau))\cdot\dot r^2(\tau)+2e(r(\tau),\theta(\tau))\otimes\dot\theta(\tau)\cdot\dot r(\tau)+f(r(\tau),\theta(\tau))\otimes(\dot\theta(\tau)\otimes\dot\theta(\tau))$$

$$= \left(\sqrt{d(r(\tau),\theta(\tau))}\cdot\dot{r}(\tau) + \frac{e(r(\tau),\theta(\tau))\otimes\dot{\theta}(\tau)}{\sqrt{d(r(\tau),\theta(\tau))}}\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{d(r(\tau),\theta(\tau))\cdot f(r(\tau),\theta(\tau))-(e\otimes e)(r(\tau),\theta(\tau))}{d(r(\tau),\theta(\tau))}\right)\cdot\otimes(\dot{\theta}(\tau)\otimes\dot{\theta}(\tau)) \geq 0$$

ami lehetetlen. ∎

<u>Következmény</u> - Legyen dim**E**=3, **E** és **I** orientáltak és legyen $(\mathbf{m},\mathbf{a},\mathbf{r}_g)\in\mathbb{S}\times\mathbf{I}\times\mathbf{I}^+$ *tetszőleges*. Ekkor az $(\mathbf{m},\mathbf{a},\mathbf{r}_g)$-paraméterű vektoriális Kerr-sokaság a következő kauzalitási tulajdonságokkal rendelkezik: az

$$\mathbf{I}\times\mathbb{S}_{\mathbf{m}}\times\{\ (r,\theta)\in\mathfrak{M}(\mathbf{a},\mathbf{r}_g)\mid\ (r\otimes r)+(\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})+\frac{(\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cdot\sin^2\theta}{(r\otimes r)+(\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cos^2\theta}\cdot(\mathbf{r}_g\otimes r)>0,$$

$$(r\otimes r)+(\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cos^2\theta>0\ \}$$

halmaz kauzális és az:

$$\mathbf{I}\times\mathbb{S}_{\mathbf{m}}\times\{\ (r,\theta)\in\mathfrak{M}(\mathbf{a},\mathbf{r}_g)\mid\ (r\otimes r)+(\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})+\frac{(\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cdot\sin^2\theta}{(r\otimes r)+(\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cos^2\theta}\cdot(\mathbf{r}_g\otimes r)=0,$$

$$(r\otimes r)+(\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cos^2\theta>0\ \}$$

halmaz kronologikus, de nem kauzális és az:

$$\mathbf{I}\times\mathbb{S}_{\mathbf{m}}\times\{\ (r,\theta)\in\mathfrak{M}(\mathbf{a},\mathbf{r}_g)\mid\ (r\otimes r)+(\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})+\frac{(\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cdot\sin^2\theta}{(r\otimes r)+(\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cos^2\theta}\cdot(\mathbf{r}_g\otimes r)<0,$$

$$(r\otimes r)+(\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cos^2\theta>0\ \}$$

halmaz nem kronologikus.
A két utóbbi (nem kauzális) halmaz része a $\mathbf{I}\times\mathbb{S}_{\mathbf{m}}\times]\leftarrow,0[\times]0,\pi[$ "nem-fizikai" tartománynak.

Bizonyítás - Az előző állítás alapján triviális. ∎