

Eötvös Loránd Tudományegyetem  
Természettudományi Kar  
Fizika Doktori Iskola  
Részecskefizika és csillagászat doktori program

---

# Lineáris perturbációk és a kényszeregyenletek megoldásainak numerikus vizsgálata az általános relativitáselméletben

---

Doktori értekezés tézisei

**Csukás Károly Zoltán**

PhD hallgató

Wigner Fizikai Kutatóközpont  
Részecske- és Magfizikai Intézet



Témavezető

**Dr. Rác István**

tudományos tanácsadó, Wigner FK  
az MTA doktora

Iskolavezető

**Dr. Gubicza Jenő**

egyetemi tanár, ELTE  
az MTA doktora

Programvezető

**Dr. Petrovay Kristóf**

egyetemi tanár, ELTE  
az MTA doktora

2021

# 1. Bevezetés

Az általános relativitáselmélet a gravitáció által dominált folyamatok—mint az univerzum nagyskálás szerkezetének alakulása, csillagok gravitációs összeomlása, feketelyukak kölcsönhatása a környezetükkel—leírására alkalmas, minden eddigi kísérleti ellenőrzés próbáját nagyon nagy pontossággal kiálló, legelfogadottabb elmélete. A dinamikát leíró Einstein-féle téregyenletek azonban csatolt, erősen nemlineáris egyenletek rendszereként értelmezhető és mint ilyen, nem létezik olyan módszer, amivel az összes megoldását előállíthatnánk. Az ismert analitikus megoldásoknak is csupán kis részében nyilvánvaló a megoldás fizikai jelentősége, míg nem ismert sok, feltételezhetően a természetben is lejátszódó dinamikai folyamat modellezésére alkalmas egzakt megoldás.

Mindezek következtében a numerikus módszerek a legfontosabb eszközeink közé tartoznak, melyek segítségünkre lehetnek az erős gravitációs térben zajló dinamikai folyamatok megértése során. A numerikus vizsgálatok fontosságát illusztrálja az is, hogy habár a GW150914 katalógusjelű, feketelyukak összeolvadásának tulajdonított gravitációs hullámot egy sablonmentes algoritmus találta meg, a később észlelt, halványabb események valószínűleg elvesztek volna a zajban, ha szimulációk nem biztosítanak jelelakokat a keresések finomításához. A jelenleg alkalmazott módszerek sikerességük ellenére nagyon idő- és kapacitásigényesek, és nem is minden esetben alkalmazhatóak, így már most látszik, hogy jelentős fejlesztésekre van szükség, ha lépést szeretnénk tartani a detektorok érzékenységének javulásával. Például a GW170817 katalógusjelű esemény értelmezését már most korlátozzák a kettős neutroncsillag-rendszerekben fellépő árapály erőkkel kapcsolatos behatárolt ismereteink.

Az árapályerőknek tulajdoníthatóan a kettős feketelyuk szimulációkban is fel lép egy nem fizikai eredetűnek tekintett, a pontosságot lényegesen zavaró sugárzás. Az Einstein-egyenlet kezdőadatokra vonatkozó kényszereket leíró része alulhatározott egyenletrendszert képez. Ezek megoldására az általánosan elfogadott módszer elliptikus egyenletek rendszereként értelmezi és oldja meg a kényszereket. Ebből következik, hogy a kezdőadatok előállítása során peremfeltételeket kell meghatározunk a feketelyukak közvetlen közelében és a végtelenben. Ez utóbbi garantálhatja

számunkra, hogy a kapott megoldás aszimptotikus viselkedése összhangban legyen a fizikai elvek által támasztott elvárásokkal, azonban a belső peremfeltétel megfelelő megfogalmazása teljesen nyitott, megoldatlan probléma. Éppen ezért, mind a belső peremfeltételek finomítása, mind pedig az olyan módszerek fejlesztése, ami nem függ az erős gravitációs mezőben kirótt peremfeltételektől, kétségtelenül jelentősen hozzájárulhat a kompakt kettős rendszerek teljesebb megértéséhez.

Analitikus és numerikus vizsgálatok kölcsönhatására egy jó példa az asztrofizikai szempontból alapvető fontosságú, forgó feketelyukakat modellező Kerr-megoldás feletti lineáris perturbációk vizsgálata. Az egyszerűbben kezelhető Minkowski és Schwarzschild megoldások tanulmányozása alapján azt feltételezzük, hogy a Kerr-téridő általános stabilitásának bizonyítása szempontjából kulcsfontosságú megértenünk a lineáris perturbációk viselkedését. Vannak analitikus jóslatok a perturbációk lecsengésére vonatkozóan, de a feketelyuk forgása miatti csatolás olyan mértékben bonyolítja a megoldandó problémát, hogy szükségesnek bizonyul a feltevéseink megerősítése és következtetéseink ellenőrzése független numerikus vizsgálatok által.

Ugyanezen keretek között vizsgálható ezen perturbációk szuperradiáns szóródása a feketelyukon. A Kerr-megoldásban már az eseményhorizonton kívül megváltozik az aszimptotikusan stacionárius megfigyelő világvonalának kauzális jellege. Ennek következtében az ergoregión kívül pozitív definit energia azon belül negatívvá válhat. Amennyiben ezt a negatív energiát elnyeli a feketelyuk, a megmaradási tételek révén a végtelenbe egy a kezdetinél nagyobb energiájú hullámcsomag távozhat. Frekvencia-térben az egyenletek szétválaszthatóak és csupán analitikus módszerekkel is jelentős eredményeket lehet elérni. Ezzel szemben a következtetések idő-térbe való átültethetőségét ismét numerikus vizsgálatokkal kell ellenőriznünk.

A dolgozatomban ismertetek egy numerikus módszert, ami egy a Wigner Fizikai Kutatóintézetben korábban kifejlesztett eljárás jelentős általánosítása, majd alkalmazom a korábban kifejtett két problémakör tanulmányozására: Először egy Kerr-feketelyuk, mint háttér fölött terjedő lineáris elektromágneses és gravitációs perturbációk lecsengésével és szóródásával kapcsolatos eredményeimet mutatom be, majd a gravitációs kényszeregyenletek, mint evolúciós egyenletek kontextusában Schwarzschild-kezdőadat nemlineáris perturbációival kapcsolatos megállapításaimat ismertetem.

## 2. Tudományos célkitűzések

A munkám alapja egy spinsúlyozott gömbfüggvényekre építő spektrális numerikus módszer kidolgozása. A spinsúlyozott gömbfüggvényeket transzformációs tulajdonságaik alkalmassá teszik arra, hogy tenzoriális mennyiségek komponenseit úgy ábrázoljam, mint spinsúlyozott gömbfüggvények lineáris kombinációit.

A Kerr-téridő fölötti lineáris perturbációkra vonatkozó egyenletek sugárzást leíró részei szétcsatolódnak, ha Newman–Penrose-változókkal írjuk fel őket. További egyszerűsítést jelent, hogy Teukolsky felismerése szerint ezen változóknak megfelelően átskálázott változatai egyetlen közös mesteregyenletet elégítenek ki. A különböző fizikai tartalommal bíró perturbációkat így egyetlen egyenlet, Teukolsky mester-egyenlete írja le, ahol az eltérő fizikát a mezők spinsúlya jeleníti meg. A kifejlesztett nagy pontosságú, robusztus numerikus módszerem lehetővé tette, hogy ezen mezők nagyon hosszú távú időfejlődését is vizsgálhassam. Megkülönböztetett figyelmet szántam a nem-forgásszimmetrikus konfigurációk szisztematikus vizsgálatának. Érdemes kiemelni, hogy az általam kifejlesztett numerikus módszer tette lehetővé azt, hogy elsőként vizsgálhassam ezeket a nem-forgásszimmetrikus dinamikai folyamatokat. Szintén Teukolsky egyenletének keretein belül vizsgáltam kompakt tartójú kezdőadatokhoz tartozó megoldások szuperradianciáját.

A Teukolsky-egyenlettel ellentétben a kényszerek esetében nincs hagyománya spinsúlyozott változók alkalmazásának, ezeket a következő eljárással vezetem be. A kezdőfelületet 2-dimenziós felületekkel fóliázva a kényszeregyenleteknek eleget tevő tenzoriális mennyiségek felbonthatóak ezen felületekre merőleges és érintő irányú részekre. Ezen új változók közül kiválasztható négy olyan, amelyekre felírva a kényszeregyenleteket azok egy parabolikus és két hiperbolikus parciális differenciálegyenletből álló rendszert vagy két szimmetrizálható hiperbolikus parciális differenciálegyenletből és egy algebrai egyenletből álló rendszert alkotnak. Numerikus módszerem alkalmazható, ha a 2-dimenziós felületeket topológiai gömböknek választom és ezeken a felületeken definiálok egy komplex fényszerű bázist. A tenzoriális mennyiségeink ezen bázison vett komponensei adott spinsúlyú függvények. Vizsgálatom tárgyát a perturbált Schwarzschild-kezdőadatok képezik olyan módon, hogy a szabadon választható változókat a Schwarzschild-kezdőadatnak megfelelően vá-

lasztom, míg a kényszeregyenleteknek eleget tevő változókat egy Schwarzschildtól eltérő kezdőadattal indítva integrálom. Az egyik alapvetően fontos kérdés az, hogy milyen nem gömbszimmetrikus perturbációkkal hozhatok létre az előbb felvázolt módon Schwarzschildhoz hasonló aszimptotikusan sík kezdőadatokat. Ezen deformált feketelyuk kezdőadatok jelentőségét éppen az azok által tartalmazott gravitációs sugárzás adja.

### 3. Alkalmazott eszközök

Az alkalmazott numerikus módszer topológiai gömbökkel fóliázható sokaságokon felírt tenzoregyenletek kezelésére alkalmas. Ezen feltételeknek eleget tevő problémák esetén a tenzormezők megfelelő bázison vett komponensei spinsúlyozott függvények, így az egyenletek megoldásait kereshetem spinsúlyozott gömbfüggvényeken kifejtett sorokat felhasználva. A numerikus alkalmazás során ezeket a sorokat a numerikus pontosságra vonatkozó elvárásaim figyelembevételével egy kellően magas rendű módustrunkálom.

A spinsúlyozott gömbfüggvények segítségével elvégzett kifejtés előnye az, hogy a fóliációhoz tartozó gömbökön az érintőleges deriváltak mindig megadhatóak, mint az  $\vec{\partial}$  és  $\vec{\bar{\partial}}$ , valamint a  $\partial_\phi$  deriváló operátorok lineáris kombinációi. Ennek megfelelően a szögek szerinti deriválások algebrai műveletekké redukálódnak, így azokat egzakt módon, analitikusan elvégezhetem. Ezt kihasználva a parciális differenciálegyenletek kettővel kevesebb változójú függvényekre, a kifejtési együtthatókra vonatkozó csatolt differenciálegyenlet-rendszerre vezetnek. A kényszeregyenletek esetében így közönséges differenciálegyenletek csatolt rendszerét kapom, de a Teukolsky-egyenlet esetében is 1+1 változós parciális differenciálegyenlet-rendszert kapok.

A módszerem egy megkülönböztető jellemzője, hogy az egyenletben előforduló nemlinearitásokat teljesen spektrálisan kezeli. Elterjedt megoldás a mezők spektrális és koordináta reprezentációja között váltani attól függően, hogy a kérdéses művelet milyen módon egyszerűbb elvégezni. Az általam használt eljárás esetében nincs

szükség ilyen típusú váltásokra. A függvények szorzatát a Gaunt-együtthetők segítségével egyszerűen meg tudjuk határozni. A sehol el nem tűnő 0 spinsúlyú függvényekkel való osztást ezek után az inverz operátorokra vonatkozó Neumann-sor felhasználásával, hibahatáron belül, szorzásokra vezetem vissza. Ilyen módon minden szükséges műveletet elvégezhetek magukon a kifejtési együtthetőkön és nincs szükség a spinsúlyozott gömbfüggvényeket kiértékelni és a műveletek eredményeit ismét kifejtetni spinsúlyozott gömbfüggvényeken.

## 4. Eredmények

1. PhD munkám során kifejlesztettem egy új, a spinsúlyozott harmonikus gömbfüggvényeken alapuló teljesen spektrális módszert. Az eljárás alapjául szolgáló összefüggéseket kivonatolt formában [1] függelékében ismertettük.

A módszert eddig két, elméleti háttérben jelentősen eltérő alkalmazás fejlesztésében alkalmaztam. A gyakorlatban bebizonyosodott, hogy ez az eljárás rendkívül pontos és hatékony numerikus eljárást eredményez.

2. Részletesen vizsgáltam a Kerr-téridő feletti elektromágneses és gravitációs perturbációk hosszútávú időfejlődését, illetve azok aszimptotikus viselkedését. A konformis kompaktifikáció és a hiperboloidális kezdőértékprobléma alkalmazása lehetővé tette, hogy a perturbációk lecsengésének ütemét közvetlenül az eseményhorizonton, a jövő fényszerű végtelenben és a jövő időszerű végtelent közelítendő, köztes helyeken az evolúció kései szakaszaiban meghatározzam. Az ilyen természetű vizsgálatok sorában megkülönbözteti munkámat a nem tengelyszimmetrikus konfigurációknak szentelt kitüntetett figyelem. Megmutattam, hogy ezekben az esetekben létezik a konfigurációknak egy halmaza, aminek a viselkedését korábbi analitikus vizsgálatok nem írják le megfelelő módon. Érdeemes kiemelni, hogy a numerikus eljárásaim helyességét alátámasztandó, valamint az alapegyenletek megfelelő implementációjának ellenőrzésére elsőként alkalmaztam az adott kontextusban újszerűnek számító megmaradó

áramokat. Az vonatkozó eredményeimet egy PRD közlemény foglalja össze [1].

3. Ugyanezen kereteken belül részletesen tanulmányoztam bozonikus perturbációk szuperradiáns szórását. Meghatároztam azokat a differenciáloperátorokat, amelyek a TME adott spinsúlyú megoldásait ellentett spinsúlyú megoldásokba képezi. Ezzel kiegészítve az előző pontban is hivatkozott megmaradó áramokat azok alkalmassá váltak egyetlen megoldás szuperradiáns amplifikációjának jellemzésére. A vizsgált megoldásokat három csoportba soroltam aszerint, hogy a kezdőadat milyen arányban fed át az ergoszférával. Eredményeim azt sugallják, hogy jelentős szuperradianciára akkor számíthatunk, amikor a kezdőadat nem elhanyagolható része tartózkodik az ergoszférában. A témában írt tanulmányt a PRD-ben jelent meg [3].
4. Vizsgáltam a kényszeregyenletek perturbált Schwarzschild megoldásait. A kényszeregyenletek evolúciós egyenletekként történő értelmezése során nem magától értetődő, hogyan kontrollálhatom a megoldások aszimptotikus viselkedését. Megmutattam, hogy a szakirodalomban ezidáig használt közel-Schwarzschild megoldáscsalád meghatározása túlságosan merev, az adott igen szűk osztályban nincs aszimptotikusan sík megoldás a gömbszimmetrikus Schwarzschild-kezdőadatot leszámítva. Minden más esetben a magasabb rendű módusok bekapcsolnak egy visszacsatolást, ami miatt a kezdőadat külső görbülete tenzoriális vetületének a nyomának a monopól része nem képes kellően gyorsan lecsengeni. Ezt követően megmutattam, hogy a közel-Schwarzschild megoldáscsalád meghatározásának kereteit lazítva, azaz a vizsgált megoldáshalmaz megfelelő bővítésével, a kritikus módus lecsengése jelentősen javítható. Konkrétan, igazoltam, hogy a kényszeregyenletek mindkét evolúciós alakjára vonatkozóan – azaz, akár a parabolikus-hiperbolikus, akár pedig az algebrai-hiperbolikus egyenletek választása esetén – végtelen sok olyan közel-Schwarzschild-kezdőadat található, amely egyben aszimptotikusan sík is. A témában írt tanulmány a CQG-ben jelent meg [2].

## A tézispontokhoz kapcsolódó publikációk

- [1] K. Z. Csukás, I. Rácz, G. Zs. Tóth: *Numerical investigation of the dynamics of linear spin  $s$  fields on Kerr background: Late time tails of spin  $s = \pm 1, \pm 2$  fields*, Phys. Rev. D 100, 104025, arXiv:1905.09082, (2019)
- [2] K. Z. Csukás, I. Rácz: *Numerical investigations of the asymptotics of solutions to the evolutionary form of the constraints*, Class. Quantum Grav. 37, 155006, arXiv:1911.02900, (2020)
- [3] K. Z. Csukás, I. Rácz: *Numerical investigation of the dynamics of linear spin  $s$  fields on Kerr background II: Superradiant scattering*, Phys. Rev. D 103, 084035, arXiv:2101.05530, (2021)