Fodor Gyula

FORGÓTESTEK NYOMATÉKAI AZ ÁLTALÁNOS RELATIVITÁSELMÉLETBEN

Diplomamunka

Budapest, 1989

Témavezető: Perjés Zoltán

TARTALOMJEGYZÉK

1. BEVEZETÉS

A dolgozat célja egy forgó test által a környező vákuumban létrehozott, stacionárius és tengelyszimmetrikus gravitációs tér momentumainak a vizsgálata. Lehet-e multipólusmomentumokat definiálni görbült téridőben? A newtoni gravitációelméletben a multipólusmomentumokat a gravitációs potenciál multipólustagok összegére bontásával kaphatjuk. A momentumok ilyen formában felírt definíciójának az általánosítása görbült téridőre nehézségekbe ütközik, mivel az Einstein-egyenletek nem lineárisak. Ezért az első fejezetben olyan alakba írjuk a newtoni gravitációelméletbeli momentumok definícióját, amely könnyebben általánosítható görbült téridőre. A későbbi fejezetekben megvizsgáljuk Geroch [1] és Hansen [2] definícióját stacionárius terek momentumaira. Ezt követően leszűkítjük a tárgyalást tengelyszimmetrikus téridőkre. Ebben az esetben, ha a newtoni potenciál görbült térre való általánosítása a szimmetriatengelyen adott, akkor a téregyenlet az értékét az egész térben meghatározza, ezért ekkor kifejezhetjük a momentumokat a potenciál tengelyen való sorfejtésének együtthatóival. Hoenselaers [3] ilyen módon kiszámolta a momentumokat a hetedik rendig. Sikerült egy hatékony algoritmust készítenem, amelynek segítségével ki tudtam fejezni a momentumokat a sorfejtési együtthatók segítségével a tizenkettedik rendig.

Miért érdemes multipólusmomentumokkal foglalkozni az általános relativitáselméletben ? A momentumok egyik legfontosabb alkalmazása az, hogy segítenek a téregyenlet megoldásainak fizikai interpretációjában. Gyakran problémát jelent ugyanis, hogy mi egy valamilyen koordinátarendszerben a metrikus tenzorral megadott megoldás fizikai jelentése. A momentumok azért segíthetnek, mert (I) definíciójuk koordinátarendszertől független, valamint (II) Beig és Simon [4] bebizonyították, hogy a momentumok egy adott rendszere, konvergenciaproblémáktól eltekintve, egyértelműen meghatározza a téridőt a forgó test egy környezetén kivül, és (III) aszimptotikusan sík téridőhöz egyértelműen tartozik a momentumok egy rendszere. Így egy téridőt a vele azonos multipólusmomentumokkal rendelkező newtoni gravitációs tér relativisztikus párjának tekinthetünk. Azt, hogy a momentumok ésszerűen vannak definiálva, és hogy sok esetben egyszerűsítést jelentenek a tér leírására, jelzi, hogy a Schwarzschild-téridőnek csak a nulladik momentuma nem tűnik el.

A momentumokat a téregyenlet megoldásainak osztályozásán kívül még felhasználhatjuk új, fizikailag érdekes egzakt megoldások keresésére, és a jövőben esetleg az elektrodinamikához hasonlóan sugárzási jelenségek tanulmányozására is.

2. MOMENTUMOK A NEWTONI GRAVITÁCIÓELMÉLETBEN

Jelölje x^a a koordinátákat egy Descartes-féle koordinátarendszerben, és legyen $r^2 = x^a x_a$ az origótól való távolság négyzete. A ϕ gravitációs potenciál a $\Delta\phi = 0$ egyenletnek tesz eleget. Véges térrészben elhelyezkedő véges tömegek esetén ϕ a végtelenben $\frac{1}{r}$-nél nem tart lassabban nullához, így az alábbi módon kifejthető :

$$\phi = \frac{1}{r}Q + \frac{1}{r^3}Q_a x^a + \frac{1}{2r^5}Q_{ac}x^a x^c + ... + \frac{1}{n!r^{2n+1}}Q_{a_1...a_n}x^{a_1}...x^{a_n} + ..., \tag{2.1}$$

ahol a $Q_{a_1...a_n}$ szimmetrikus és spurmentes tenzorok a rendszer adott koordinátarendszerhez tartozó multipólusmomentumai. $Q_{a_1...a_n}$ azért választható szimmetrikusnak, mert $x^{a_1}...x^{a_n}$ szimmetrikus. A spurtalanság a $\Delta\phi = 0$ feltételből következik, ugyanis

$$\Delta\phi = h^{ac}\partial_a\partial_c\phi = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!r^{2n+1}}Q_{a_1...a_n}h^{a_1a_2}x^{a_3}...x^{a_n}, \tag{2.2}$$

ami csak akkor lehet nulla, ha az összes $Q_{a_1...a_n}$ tenzor spurtalan. Rendeljük a tér minden pontjához a momentumokat egy ottani középpontú koordinátarendszerből számolva. Ekkor helytől függő tenzormezőket kapunk.

A momentumok – ha a kifejtésben szereplő összeg konvergens – egyértelműen meghatározzák a gravitációs potenciált, és egy végtelenben jól viselkedő potenciál egyértelműen meghatározza a momentumtenzorokat. Ez a tulajdonság a görbült térre való általánosítás után is igaz marad, de az Einstein-egyenletek nemlineáris jellege miatt a bizonyítás nem nyilvánvaló.

Átalakítjuk a momentumok definícióját egy olyan alakra, ami alkalmasabb a görbült térre való általánosításra. Vezessünk be egy "kifordított" koordinátarendszert. Legyen $\bar{x}^a = r^{-2}x^a$.

Ebben a koordinátarendszerben a térbeli végtelennek egyetlen pont, az $\bar{x}^a = 0$ origó felel meg, jelöljük ezt a pontot Λ-val. ϕ a Λ pontban nem értelmezett, de folytonosan kiterjesztve $\phi|_\Lambda = 0$. Definiálhatunk egy konform transzformált potenciált, amely kiteresztve már nem feltétlenül nulla a Λ pontban. Legyen $\tilde{\phi} = \Omega^{-1/2}\phi$, ahol $\Omega = r^{-2}$. Mivel $x^a = r^2\bar{x}^a$, a (2.1) összefüggésből kaphatjuk, hogy :

$$\tilde{\phi} = Q + Q_a\bar{x}^a + \frac{1}{2}Q_{ac}\bar{x}^a\bar{x}^c + ... + \frac{1}{n!}Q_{a_1...a_n}\bar{x}^{a_1}...\bar{x}^{a_n} + ... \quad (2.3)$$

Ekkor :

$$\begin{aligned} Q &= \tilde{\phi}|_\Lambda \\ Q_a &= \frac{\partial}{\partial\bar{x}^a}\tilde{\phi}|_\Lambda \\ &\vdots \\ Q_{a_1...a_n} &= \frac{\partial}{\partial\bar{x}^{a_1}}...\frac{\partial}{\partial\bar{x}^{a_n}}\tilde{\phi}|_\Lambda. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Az új koordinátarendszerben a parciális deriváltak már nem azonosak a kovariáns deriváltakkal, mert a metrikus tenzor a következő alakú lesz :

$$h_{\bar{a}\bar{c}} = \frac{1}{\bar{r}^4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

ahol $\bar{r} = \bar{x}^a \bar{x}_a = \frac{1}{r}$, vagyis helytől függő és szinguláris a Λ pontban. Hajtsunk végre egy konform transzformációt, azaz vezessünk be egy másik, nem fizikai metrikát. Legyen $\tilde{h}_{\bar{a}\bar{c}} = \Omega^2 h_{\bar{a}\bar{c}} = \frac{1}{r^4} h_{\bar{a}\bar{c}} = \bar{r}^4 h_{\bar{a}\bar{c}}$, ami egy sík tér metrikája, és így a Λ pontban is jól viselkedik. Az új metrika szerinti kovariáns deriválás már egybeesik a (2.4) összefüggésben szereplő parciális deriváltakkal. Definiáljuk az alábbi tenzormezőket :

$$\begin{aligned} P^{(0)} &= \tilde{\phi} \\ P^{(1)}_{\bar{a}} &= \tilde{D}_{\bar{a}} P^{(0)} \\ &\vdots \\ P^{(n+1)}_{\bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_{n+1}} &= \tilde{D}_{\bar{a}_{n+1}} P^{(n)}_{\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_n}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

ahol $\tilde{D}_{\bar{a}}$ a $\tilde{h}_{\bar{a}\bar{c}}$ metrika szerinti kovariáns deriválás. Ekkor a momentumtenzorokat a következőképpen kaphatjuk :

$$Q_{a_1 \ldots a_n} = P^{(n)}_{\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_n} |_{\Lambda}. \tag{2.7}$$

A momentumtenzorokat tehát definiálhatjuk úgy is, mint a $\tilde{\phi} = \Omega^{-1/2} \phi$ potenciálnak, egy nem fizikai sokaság térbeli végtelennek megfelelő pontjában számolt többszöri kovariáns deriváltjait a $\tilde{h}_{\bar{a}\bar{c}} = \Omega^2 h_{\bar{a}\bar{c}}$ metrika szerint. A momentumok definíciójának görbült térre való általánosítása ehhez hasonló alakú lesz.

Megvizsgáljuk, hogy hogyan függenek a $P^{(n)}_{\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_n}$ tenzormezők az Ω választásától. Ha $\Omega = r^{-2}$, akkor fennállnak a következők :

$$\Omega|_{\Lambda} = 0, \quad \tilde{D}_{\bar{a}}\Omega|_{\Lambda} = 0, \tag{2.8}$$

$$\tilde{D}_{\bar{a}}\tilde{D}_{\bar{c}}\Omega = 2\tilde{h}_{\bar{a}\bar{c}}, \tag{2.9}$$

ahol $\tilde{D}_{\bar{a}}$ a $\tilde{h}_{\bar{a}\bar{c}}$-hoz tartozó deriváló operátor. Válasszunk egy másik $\bar{\Omega} = \omega\Omega$ konform szorzót, ami szintén tudja ezt a három feltételt. A harmadik feltételnek a Λ helyen való alkalmazásából következik, hogy $\omega|_{\Lambda} = 1$. Beig [5] bebizonyította, hogy a $P^{(n)}_{\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_n}$ tenzormezők a következőképpen transzformálódnak :

$$\bar{P}^{(n)}_{\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_n} = \mathcal{C} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(2n-1)!!}{(2k-1)!!} (-2)^{k-n} \omega^{-3/2-(n-1-k)} P^{(k)}_{\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_k} \tilde{D}_{\bar{a}_{k+1}}\omega \ldots \tilde{D}_{\bar{a}_n}\omega, \tag{2.10}$$

ahol $\mathcal{C}$ a szimmetrikus spurmentes rész képzését jelenti, és $(-1)!! = 1!! = 1$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\bar{h}_{\bar{a}\bar{c}} = \omega^2 h_{\bar{a}\bar{c}}$ konform transzformációnál a kovariáns deriváláshoz szükséges Christoffel-szimbólumok a következő módon transzformálódnak :

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^i_{kl} &= \Gamma^i_{kl} + C^i_{kl}, \\ C^i_{kl} &= \frac{1}{\omega}\Big[\frac{\partial\omega}{\partial x^k}\delta^i_l + \frac{\partial\omega}{\partial x^l}\delta^i_k - \frac{\partial\omega}{\partial x^m}h^{mi}h_{kl}\Big]. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Egy tetszőleges $T_{a_1\ldots a_n}$ tenzorra fennáll, hogy

$$\mathcal{C}\big[T_{a_1\ldots a_n}h_{a_{n+1}a_{n+2}}\big] = 0, \tag{2.12}$$

mivel a spurtalanításkor éppen ilyen alakú tenzorokat kell levonni. A (2.9) összefüggésnek az $\bar{\Omega}$-ra való alkalmazásával ki lehet ejteni ω magasabb rendű deriváltjait. Ezeket felhasználva a (2.10) összefüggés teljes indukcióval viszonylag egyszerűen, de hosszadalmas számolással kapható. Ha (2.10)-et a Λ helyen vesszük, $\omega|_{\Lambda} = 1$ -et behelyettesítve a momentumok transzformálódási szabályát kapjuk. Látható, hogy a momentumok megváltozása csak $\tilde{D}_{\bar{a}}\omega|_{\Lambda}$-tól függ, ami három szám. Ezért Ω

megválasztása annak a pontnak a megválasztásával ekvivalens, amelyhez képest a momentumokat számoljuk.

Az ω transzformációa függvény alkalmas megválasztásával elérhető, hogy a dipólusmomentum eltűnjön, azaz $\bar{M}_a^{(1)} = 0$ legyen, ami annak felel meg, hogy a tömegközépponthoz viszonyítva számoljuk a momentumokat.

3. HÁROMDIMENZIÓS TÉR DEFINIÁLÁSA

A multipólusmomentumok definíciójának négydimenziós téridőre való általánosításához szükséges egy háromdimenziós tér definiálása, ami többféleképpen is lehetséges. Sztatikus tér definíciószerűen tartalmaz hiperfelületre merőleges időszerű Killing-vektorteret. Ezen a háromdimenziós hiperfelületen, az indukált metrika segítségével vezette be Geroch [1] a multipólusmomentumokat.

Geroch definícióját Hansen [2] általánosította stacionárius terekre. Legyen $(M, g_{\mu\nu})$ egy négydimenziós téridő, és K^μ időszerű Killing vektortér. Jelölje $\mathcal{M}$ a K^μ pályáinak halmazát. $\mathcal{M}$-et, legalábbis lokálisan, mindig lehet háromdimenziós differenciálható sokaságnak tekinteni. Belátjuk, hogy egy-egyértelmű megfeleltetés van a $\mathcal{M}$-en levő tenzormezők, és az M-en levő olyan $T^{\alpha\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta}$ tenzormezők között, amelyekre :

$$K_\alpha T^{\alpha\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta} = 0, \quad \ldots \quad , K^\delta T^{\alpha\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta} = 0, \qquad (3.1a)$$

$$\mathcal{L}_K T^{\alpha\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta} = 0, \qquad (3.1b)$$

ahol $\mathcal{L}_K$ a K_μ mentén vett Lie derivált. Ezt először Geroch [6] mutatta meg, az ő gondolatmenetét követjük. Legyen ψ az az M-ről $\mathcal{M}$-re való leképezés, ami bármely $p \in M$ ponthoz hozzárendeli azt a $\psi(p)$ pályát $\mathcal{M}$-ben, amelyik áthalad a p ponton. Legyen a' differenciálható függvény $\mathcal{M}$-en. Legyen $a = a' \circ \psi$, ez nyilván konstans a K^μ pályáin, így $\mathcal{L}_K a = 0$. Fordítva, ha $\mathcal{L}_K a = 0$, akkor a konstans a pályákon, és így egyértelműen definiál egy skalárfüggvényt $\mathcal{M}$-en. Skalárokra beláttuk az állítást, most kovariáns vektorokra is megmutatjuk, hogy igaz. Tetszőleges A_α kovariáns vektormező $\mathcal{M}$-en a következő alakba írható :

$$A'_\alpha = a' D_\alpha b' + ... + p' D_\alpha q', \qquad (3.2)$$

ahol D_α egy gradiens operátor $\mathcal{M}$-en, és a', ... , q' függvények $\mathcal{M}$-en. Az ennek megfelelő kovariáns vektormezőt M-en a következőképpen definiálhatjuk :

$$A_\alpha = a \nabla_\alpha b + ... + p \nabla_\alpha q, \qquad (3.3)$$

ahol ∇_α a gradiens M-en, és a, ... $, q$ a vesszős skalárfüggvényeknek megfelelő függvények M-en. Könnyen ellenőrizhető, hogy A_α kielégíti a (3.1) feltételeket. Fordítva is igaz, bármely (3.1)-et kielégítő kovariáns vektormező M-en felírható (3.3) alakban, és így (3.2) szerint definiál egy vektormezőt $\mathcal{M}$-en. A kovariáns vektorokat definiálhatjuk úgy, mint olyan operátorokat, amelyek bármely skalárfüggvényhez hozzárendelik annak egy valamilyen görbe menti deriváltját egy pontban [7]. Legyen v vektor a $p \in M$ pontban. A $\psi(p) \in \mathcal{M}$ pontban definiálhatjuk ennek a v' képét úgy, hogy

$$v'(a') = v(a \circ \psi) \tag{3.4}$$

fennálljon tetszőleges a' $\mathcal{M}$-en értelmezett skalárfüggvényre. Nyilván több különböző p pontbeli vektorhoz is hozzárendeltük ugyanazt a $\psi(p)$ pontbeli vektort. A hozzárendelést egyértelművé lehet tenni, ha a p pontban csak a K^μ Killing-vektorra ortogonális vektorokat választunk, azaz feltesszük, hogy fennáll a (3.1a) feltétel. Ha v egy (3.1a) feltételt kielégítő vektormező, és a p és a q pontok egy pályán vannak, akkor lehet, hogy a vektormezőnek a p és q helyen levő vektorához különböző $\psi(p)$-beli vektorokat rendelünk. Ennek elkerüléséhez szükséges, hogy a vektormező K^μ menti Lie deriváltja nulla legyen, azaz a (3.1b) feltétel is fennálljon. Az állitás tetszőleges tenzormezőre következik abból, hogy bármely tenzor előállítható kovariáns és kontravariáns vektorok külső szorzatainak az összegeként. Az összeadás, a külső szorzás és a kontrakció felcserélhető az M-ről $\mathcal{M}$-re való áttéréssel, így az egész tenzoralgebra $\mathcal{M}$-en egyértelműen hozzá van rendelve az M-en levő és a (3.1) tulajdonságokat kielégítő tenzorok algebrájához. A továbbiakban a (3.1)-et kielégítő tenzormezőkről úgy fogunk beszélni, mint $\mathcal{M}$-en levő tenzormezőkről.

Legyen $f = -K^\mu K_\mu > 0$. A kovetkezők nyilván tenzormezők $\mathcal{M}$-en :

$$h_{\mu\nu} = f g_{\mu\nu} + K_\mu K_\nu, \tag{3.5}$$

$$h^{\mu\nu} = f^{-1} g_{\mu\nu} + f^{-2} K_\mu K_\nu, \tag{3.6}$$

$$h_\mu^\nu = h_{\mu\rho} h^{\rho\nu} = \delta_\mu^\nu + f^{-1} K_\mu K^\nu. \tag{3.7}$$

A $h_{\mu\nu}$ tenzor pozitív definit metrikát definiál $\mathcal{M}$-en, így a $h_{\mu\nu}$ és $h^{\mu\nu}$ tenzorokat használhatjuk az indexek fel és lehúzására. h_μ^ν az $\mathcal{M}$-re való projekciós operátor szerepét játssza, ugyanis ha egy tenzormezőre (3.1b) fennáll, akkor a h_μ^ν-vel való vetületére már (3.1a) is igaz. Definiáljuk $\mathcal{M}$-en a kovariáns deriválást a következőképpen :

$$D_\varphi T^{\alpha\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta} = h_\varphi^\psi h_\mu^\alpha \ldots h_\nu^\beta h_\gamma^\rho \ldots h_\delta^\sigma \nabla_\psi T^{\mu\ldots\nu}{}_{\rho\ldots\sigma}, \tag{3.8}$$

ahol ∇_ψ a kovariáns deriválás M-en. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez újabb tenzormező $\mathcal{M}$-en. D_φ-re igaz a Leibnitz szabály, azaz két tenzor külső szorzatának a deriváltja egyenlő az első tag deriváltja szorozva a második taggal és hozzáadva a második tag deriváltját szorozva az első taggal. Tenzorok összegének a deriváltja a deriváltak összege. Tetszőleges a skalármezőre $D_{[\alpha} D_{\beta]} a = 0$, azaz D_α torziómentes. Könnyen ellenőrizhető, hogy a $h_{\mu\nu}$, $h^{\mu\nu}$ és a h_μ^ν tenzorok deriváltjai nullák. Ezekből következik, hogy D_α a $h_{\mu\nu}$ segítségével a szokásos módon fejezhető ki. Ha olyan koordinátarendszert választunk, hogy az időszerű K^μ Killing vektornak csak az egyik komponense legyen nullától különböző, akkor az $\mathcal{M}$-en levő tenzoroknak nem lesznek időszerű indexhez tartozó komponensei, így háromdimenziós téren értelmezett tenzornak tekinthetők. A következőkben az $\mathcal{M}$-en levő tenzorok indexeit latin kisbetűkkel jelöljük.

4. ASZIMPTOTIKUSAN SÍK TEREK

Következő lépés a téregyenlet megoldásai közül az aszimptotikusan sík terek kiválasztása. Aszimptotikusan sík terekre Penrose [8] munkája alapján Geroch [1] adott egy koordinátarendszertől független definíciót. Egy h_{ab} metrikájú $\mathcal{M}$ háromdimenziós sokaságot aszimptotikusan síknak nevezünk, ha létezik egy $\tilde{\mathcal{M}}$ sokaság $\tilde{h}_{ab}$ metrikával úgy, hogy :

(i) $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cup \Lambda$, ahol Λ egyetlen pont, ami a térbeli végtelennek felel meg,

(ii) $\tilde{h}_{ab} = \Omega^2 h_{ab}$, ahol Ω C^2 függvény $\mathcal{M}$-en, és kiterjeszthető a Λ pontra úgy, hogy $\tilde{\mathcal{M}}$-on is C^2 legyen,

(iii) Az Ω függvényre a következőket kötjük ki :

$$\Omega|_{\Lambda} = 0, \quad \tilde{D}_i \Omega|_{\Lambda} = 0, \tag{4.1}$$

$$\tilde{D}_i \tilde{D}_k \Omega|_{\Lambda} = 2\tilde{h}_{ik}|_{\Lambda}, \tag{4.2}$$

ahol $\tilde{D}_i$ a $\tilde{h}_{ik}$-hoz tartozó deriváló operátor.

A (4.1) feltételek azt a célt szolgálják, hogy Ω elég gyorsan tartson a végtelenben nullához. A (4.2) feltétel azt fejezi ki, hogy a transzformált metrika is sík legyen az origóban, ugyanis $\tilde{h}_{ab} = \Omega^2 h_{ab}$ konform transzformációnál a Ricci-tenzor a következőképpen transzformálódik :

$$\tilde{R}_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{\Omega}\tilde{D}_i\tilde{D}_j\Omega + \tilde{h}_{ij}\big(\frac{2}{\Omega^2}\tilde{D}_k\Omega\tilde{D}^k\Omega - \frac{1}{\Omega}\tilde{\Delta}\Omega\big), \qquad (4.3)$$

ahol $\tilde{\Delta}$ a $\tilde{h}_{ik}$-hoz tartozó Laplace operátor, és háromdimenziós térben a Ricci-tenzor egyértelműen meghatározza a görbületi tenzort.

A második fejezet alapján, $\Omega = r^{-2}$ választással, könnyen látható, hogy az euklideszi tér aszimptotikusan sík. Az euklideszi esetben (4.2) az egész térben fennáll, de görbült tér esetén ez túl erős feltétel lenne.

5. A MOMENTUMOK DEFINÍCIÓJA

Legyen ϕ egy valós vagy komplex skalárfüggvény $\mathcal{M}$-en. Ennek a momentumait fogjuk vizsgálni, feltéve, hogy h_{ij} ismert. A momentumok definícióját Geroch [1] és Hansen [2] adta meg. Teljesítse az $\mathcal{M}$ háromdimenziós sokaság h_{ij} metrikával az aszimptotikusan síkság feltételeit. Definiáljunk egy másik skalárfüggvényt, legyen $\tilde{\phi} = \Omega^{-1/2}\phi$, amiről feltételezzük, hogy analitikus a Λ pontban. Rekurzió segítségével definiáljuk az alábbi tenzormezőket a $\tilde{\mathcal{M}}$ sokaságon :

$$\begin{aligned} P^{(0)} &= \tilde{\phi} \\ P^{(1)}_i &= \tilde{D}_i P^{(0)} \\ &\;\vdots \\ P^{(n+1)}_{i_1 i_2 \dots i_{n+1}} &= \mathcal{C}\big[\tilde{D}_{i_{n+1}} P^{(n)}_{i_1 \dots i_n} - \frac{1}{2} n(2n-1) \tilde{R}_{i_1 i_2} P^{(n-1)}_{i_3 \dots i_{n+1}}\big], \end{aligned} \tag{5.1}$$

ahol $\mathcal{C}$ a szimmetrikus spurmentes rész képzését jelenti, $\tilde{D}_i$ a $\tilde{h}_{ik}$-nak megfelelő kovariáns deriválás, $\tilde{R}_{ij}$ a $\tilde{h}_{ik}$-hoz tartozó Ricci-tenzor. A Ricci-tenzor definíciója $\tilde{R}_{ik} = \tilde{R}^r{}_{irk}$, ahol a görbületi tenzort úgy definiáljuk, hogy tetszőleges v_i vektormezőre teljesül, hogy

$$(\tilde{D}_i\tilde{D}_j - \tilde{D}_j\tilde{D}_i)v_k = \tilde{R}_{ijkr}v^r. \qquad (5.2)$$

A multipólusmomentumtenzorokat úgy definiáljuk, hogy legyenek a $P^{(n)}_{i_1\dots i_n}$ tenzormezőknek a Λ pontban felvett értékei, azaz :

$$M^{(n)}_{i_1\dots i_n} = P^{(n)}_{i_1\dots i_n}|_{\Lambda}. \qquad (5.3)$$

Ha $\mathcal{M}$ euklideszi tér, akkor $\Omega = r^{-2}$ választással $\tilde{\mathcal{M}}$ is az, így $\tilde{R}_{ij} = 0$. Ha $\Delta\phi = 0$, akkor a spurmentesség teljesül, és így visszakapjuk a momentumok szokásos definíciójával ekvivalens (2.6) és (2.7) képleteket.

Annak megértéséhez, hogy a Ricci-tenzort tartalmazó tag miért szerepel az (5.1) definícióban, meg kell vizsgálni, hogy egyértelműen vannak-e definiálva a momentumok, és hogy mi az Ω függvény jelentése.

6. Ω JELENTÉSÉNEK VIZSGÁLATA

Euklideszi esetben, ha Ω-t úgy választjuk, hogy $\tilde{\mathcal{M}}$ is Euklideszi legyen, akkor mint a 2. fejezetben láttuk, Ω választása ekvivalens annak a pontnak a megválasztásával, amelyre vonatkoztatva a momentumokat számoljuk. Ω egy kicsiny változása megfelel a koordinátarendszer egy kis eltolásának.

Válasszunk egy másik Ω-t, legyen $\bar{\Omega} = \omega\Omega$. Ahhoz, hogy az aszimptotikusan síkság (iii) feltételének (4.2) egyenlete továbbra is fennálljon, szükséges, hogy ω-t az $\tilde{\mathcal{M}}$-re folytonosan kiterjesztve $\omega|_{\Lambda} = 1$ teljesüljön. Beig [5] kiszámolta a $P^{(n)}_{i_1 \ldots i_n}$ tenzormezők transzformálódási szabályát tetszőleges ω esetére :

$$\bar{P}^{(n)}_{i_1 \ldots i_n} = \mathcal{C} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(2n-1)!!}{(2k-1)!!} (-2)^{k-n} \omega^{-3/2-(n-1-k)} P^{(k)}_{i_1 \ldots i_k} \tilde{D}_{i_{k+1}} \omega \ldots \tilde{D}_{i_n} \omega, \tag{6.1}$$

ami azonos a sík térre vonatkozó (2.10) képlettel. Felhasználva, hogy a $\bar{h}_{ac} = \omega^2 \tilde{h}_{ac}$ konform transzformációnál a Christoffel-szimbólumok (2.11)-nek megfelelően változnak, és hogy a Ricci-tenzor a következőképpen transzformálódik :

$$\bar{R}_{ij} = \tilde{R}_{ij} - \frac{1}{\Omega}\tilde{D}_i \tilde{D}_j \Omega - \frac{1}{\Omega}\tilde{h}_{ij}\tilde{\Delta}\Omega + \frac{2}{\Omega^2}\tilde{D}_i \Omega \tilde{D}_j \Omega, \qquad (6.2)$$

valamint azt, hogy (2.12) szerint, tetszőleges a metrikus tenzorral külső szorzott tenzor szimmetrikus spurmentes része nulla, a (6.1) transzformálódási szabály teljes indukcióval egyszerűen, de hosszú számolás után kapható.

Ha ezt a Λ helyen vesszük, a momentumtenzorok transzformálódási szabályát kapjuk :

$$\bar{M}^{(n)}_{i_1 \dots i_n} = \mathcal{C} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(2n-1)!!}{(2k-1)!!} (-2)^{k-n} M^{(k)}_{i_1 \dots i_k} \tilde{D}_{i_{k+1}} \omega|_{\Lambda} \dots \tilde{D}_{i_n} \omega|_{\Lambda}. \qquad (6.3)$$

Látható, hogy a momentumok megváltozása csak $\tilde{D}_i \omega|_{\Lambda}$-tól függ, ami három szám. Ez is mutatja, hogy Ω megválasztása annak a koorddinátarendszernek a megválasztásával ekvivalens, amelyhez képest a momentumokat számoljuk. Görbült térben nem lehet a (4.2) összefüggés segítségével kiejteni az ω második deriváltjait, mivel az csak a Λ pontban áll fenn. Ezért ha a $P^{(n)}_{i_1 \ldots i_n}$ tenzorok definíciójából a Ricci-tenzort tartalmazó tagot kihagynánk, akkor a tenzorok megváltozásában ω többszörös kovariáns deriváltjai is megjelennének, de ha belevesszük a definícióba ezt a tagot, akkor a többszörös deriváltak kiejtik egymást. Ha megjelennének a többszörös deriváltak, az azért lenne baj, mert így a momentumtenzorok értéke egy háromnál több dimenziós paraméterhalmaztól függene, amelyet nem feleltethetnénk meg a háromdimenziós térben való eltolásoknak.

Euklideszi térben, a newtoni gravitációelméletben, annak a pontnak az alkalmas megválasztásával, amelyre vonatkoztatva a momentumokat számoljuk, mindig elérhető, hogy a dipólusmomentum nulla legyen. Ez – ha ϕ valós – ω megválasztásával görbült térben is megtehető. Az $M_i = 0$

feltételből $\tilde{D}_i\omega|_\Lambda$ kifejezhető, amit behelyettesítve kaphatjuk :

$$\bar{M}^{(n)}_{i_1...i_n} = \mathcal{C}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(2n-1)!!}{(2k-1)!!}(-M^{(0)})^{k-n}M^{(k)}_{i_1...i_k}M_{i_{k+1}}...M_{i_n}. \tag{6.4}$$

Komplex ϕ esetén hasonlóan elérhető, hogy a dipólusmomentum valós része nulla legyen. Ez a transzformálás azért jelentős, mert így a momentumtenzorok értéke függetlenné válik Ω megválasztásától.

7. ϕ MEGVÁLASZTÁSA

Meg kell vizsgálni, hogy mi legyen az a ϕ skalárfüggvény, aminek a momentumait számoljuk. Többféle választás is lehetséges, amelyekhez különböző momentumtumtenzorok tartozhatnak. Hogy a momentumok számolásához szükséges deriválásokat el tudjuk végezni, szükséges, hogy $\tilde{\phi} = \Omega^{-1/2}\phi$ analitikus legyen a Λ pontban.

Euklideszi térben $\Omega = r^{-2}$ választással $\tilde{\phi} = \frac{1}{r}\phi$, így a feltétel az, hogy ϕ ne tartson a végtelenben $\frac{1}{r}$-nél lassabban nullához. Ez véges térrészben lévő véges tömegek esetén így is van.

Ernst [9] nyomán definiálható a következő vektortér a téridőn : $\psi_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} K^\nu K^{\rho;\sigma}$, ahol K^μ az időszerű Killing vektor. Az $R_{ij} = 0$ vákuum Einstein egyenletekből következik, hogy ψ_μ lokálisan egy gradiens, azaz létezik egy ψ skalárfüggvény, hogy $\psi_{;\nu} = \psi_\nu$.

Stacionárius esetben Hansen [2] két valós függvényt választott :

$$\begin{aligned} \phi_M &= \frac{1}{4} f^{-1}(f^2 + \psi^2 - 1), \\ \phi_J &= \frac{1}{2} f^{-1}\psi, \end{aligned} \tag{7.1}$$

ahol $f = -K_\mu K^\mu$, a Killing vektor normájának abszolút értéke. A ϕ_M-hez tartozó momentumok a tömegmomentumok, a ϕ_J-hez tartozók pedig a forgási momentumok. Az utóbbi elnevezésének jogosságát mutatja az, hogy sztatikus tér esetén

$\psi = 0$, és így $\phi_J = 0$, és a hozzá tartozó momentumok eltűnnek.

Egyesítsük a f és ψ potenciálokat a komplex Ernst potenciállá :

$$\mathcal{E} = f + i\psi. \tag{7.2}$$

Ebből képezzük a következő komplex gravitációs potenciált :

$$\xi = \frac{1-\mathcal{E}}{1+\mathcal{E}}. \tag{7.3}$$

Ekkor :

$$Re\frac{\xi}{\xi\xi^* - 1} = \phi_M \quad , \quad Im\frac{\xi}{\xi\xi^* - 1} = -\phi_J. \tag{7.4}$$

Legyen $\phi = \frac{\xi}{\xi\xi^*-1}$. Ebből komplex momentumokat kapunk, amelyeknek valós és képzetes részeik előjeltől eltekintve a Hansen által definiált tömeg és forgási momentumokat adják.

Beig és Simon [4] egy tételéből következik, hogy előjeltől eltekintve szintén ugyanezeket a momentumokat kapjuk a

$$\phi = \xi \tag{7.5}$$

választással. A következőkben csak a ξ-ből számolt komplex momentumokkal fogunk foglalkozni.

8. A TÉREGYENLETEK

Tegyük fel, hogy M-ben csak az origó egy környezetében van anyag. Ezt a részt kizárva, a külső térben a vákuum Einstein-egyenletek érvényesek. Ezekből az alábbi egyenletek következnek [10] :

$$(\xi\xi^* - 1)\Delta\xi = 2\xi^*(\nabla\xi)^2 \tag{8.1}$$

és

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Rh_{ij} = \frac{\xi_{,i}\xi^*_{,j} + \xi^*_{,i}\xi_{,j} - h_{ij}\xi^{,r}\xi^*_{,r}}{(\xi\xi^* - 1)^2}, \tag{8.2}$$

ahol $i, j = 1, 2, 3$, és $\Delta\xi$, $(\nabla\xi)^2$ és R_{ij} a $\mathcal{M}$-en levő h_{ij} metrikának megfelelő mennyiségek. A (8.1) egyenlet elvileg megoldható ξ-re, és ekkor a (8.2) egyenletből kifejezhetők a metrikus tenzor komponensei.

A (8.1) és (8.2) téregyenletek a

$$\mathbf{G} = \frac{1 + \xi^*}{1 - \xi} \quad \frac{\nabla\xi}{\xi\xi^* - 1} \tag{8.3}$$

vektor bevezetésével az alábbi **G**-ben elsőrendű formába íhatók [10] :

$$R_{ij} = G_i G_j^* + G_i^* G_j, \tag{8.4}$$

$$(\nabla - \mathbf{G} + \mathbf{G}^*)\mathbf{G} = 0, \tag{8.5}$$

$$(\nabla - \mathbf{G} + \mathbf{G}^*) \times \mathbf{G} = 0, \tag{8.6}$$

ahol $\times$ a háromdimenziós vektorszorzat. A későbbiekben a momentumok számolásakor is célszerű lesz egy hasonló vektor bevezetése.

Beig és simon [4] belátták, hogy konvergenciaproblémáktól eltekintve, adott momentumtenzorokhoz egyértelműen tartozik egy téridő, és forditva, egy aszimptotikusan sík téridőhöz egyértelműen vannak értelmezve a momentumtenzorok.

9. TENGELYSZIMMETRIKUS TÉR MOMENTUMAI

A továbbiakban leszűkítjük a tárgyalást tengelyszimmetrikus (és stacionárius) téridőkre. Legyenek a koordináták $x^0 = t$, $x^1 = \rho$, $x^2 = z$ és $x^3 = \varphi$. Hansen [2] észrevette, hogy mivel a $\rho = 0$ szimmetriatengelyen levő tenzoroknak a tengely körül való elforgatáskor nem szabad megváltozniuk, a momentumtenzorok csak a tengely irányú n^a egységvektor önmagával vett spurmentes külső szorzatainak a számszorosai lehetnek. Azaz egy konstans szorozva $\mathcal{C}[n^{i_1}...n^{i_n}]|_{\Lambda}$ alakúak. Tehát a momentumtenzorok egy konstans szorzótól eltekintve ismertek. Ezért Hansen a következő skalár momentumokat definiálja :

$$P_n = \frac{1}{n!} P^{(n)}_{i_1 ... i_n} n^{i_1} ... n^{i_n}|_{\Lambda}. \tag{9.1}$$

Mivel a tengelyen $n^a = (0, 1, 0)$, a momentumok a következő alakba irhatók :

$$P_n = \frac{1}{n!} P^{(n)}_{2...2}|_{\Lambda}. \tag{9.2}$$

Stacionárius és tengelyszimmetrikus téridő metrikáját a következő alakban szokás felírni :

$$ds^2 = \frac{1}{f}[e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2] - f(dt - \omega d\varphi)^2, \qquad (9.3)$$

ahol f , γ és ω csak $x^1 = \rho$-tól és $x^2 = z$-től függ. (3.5) segítségével a háromdimenziós $\mathcal{M}$-en definiált metrika

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} e^{2\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \end{pmatrix}. \qquad (9.4)$$

Ebből :

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Rh_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho}\gamma_{,1} & \frac{1}{\rho}\gamma_{,2} & 0 \\ \frac{1}{\rho}\gamma_{,2} & -\frac{1}{\rho}\gamma_{,1} & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 e^{-2\gamma}(\gamma_{,11} + \gamma_{,22}) \end{pmatrix}. \qquad (9.5)$$

Amit a (8.2) egyenlettel összehasonlítva :

$$\begin{aligned} \gamma_{,1} &= \frac{\rho}{(\xi\xi^* - 1)^2}(\xi_{,1}\xi^*_{,1} - \xi_{,2}\xi^*_{,2}), \\ \gamma_{,2} &= \frac{\rho}{(\xi\xi^* - 1)^2}(\xi_{,1}\xi^*_{,2} + \xi^*_{,1}\xi_{,2}), \end{aligned} \qquad (9.6)$$

$\Delta\xi = \frac{1}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{h}h^{ij}\xi_{,j}) = (\xi_{,11} + \xi_{,22} + \frac{1}{\rho}\xi_{,1})e^{-2\gamma}$, és $(\nabla\xi)^2 = h^{ij}(\partial_i\xi)(\partial_j\xi) = [(\xi_{,1})^2 + (\xi_{,2})^2]e^{-2\gamma}$. Ezeket a (8.1) téregyenletbe beírva :

$$(\xi\xi^* - 1)(\xi_{,11} + \xi_{,22} + \frac{1}{\rho}\xi_{,1}) = 2\xi^*[(\xi_{,1})^2 + (\xi_{,2})^2]. \qquad (9.7)$$

Hajtsuk végre az alábbi koordinátatranszformációt :

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho^2 + z^2} \quad , \qquad \bar{z} = \frac{z}{\rho^2 + z^2} \quad , \qquad \bar{\varphi} = \varphi. \tag{9.8}$$

Az új koordinátarendszerben a metrikus tenzor a következő alakú lesz :

$$h_{\bar{i}\bar{j}} = \frac{1}{\bar{r}^4} \begin{pmatrix} e^{2\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\rho}^2 \end{pmatrix}. \tag{9.9}$$

ahol $\bar{r}^2 = \bar{\rho}^2 + \bar{z}^2$. Ezentúl csak ebben a koordinátarendszerben dolgozunk, ezért a továbbiakban elhagyjuk a koordinátákról és az $\bar{r}$-ről a felülhúzást. $\Delta\xi = r^4 e^{-2\gamma}(\xi_{,11} + \xi_{,22} + \frac{1}{\rho}\xi_{,1} - \frac{2\rho}{r^2}\xi_{,1} - \frac{2z}{r^2}\xi_{,2})$, és

$(\nabla\xi)^2 = r^4 e^{-2\gamma}[(\xi_{,1})^2 + (\xi_{,2})^2]$. Beirva a (8.1) téregyenletbe :

$$(\xi\xi^* - 1)(\xi_{,11} + \xi_{,22} + \frac{1}{\rho}\xi_{,1} - \frac{2\rho}{r^2}\xi_{,1} - \frac{2z}{r^2}\xi_{,2}) = 2\xi^*[(\xi_{,1})^2 + (\xi_{,2})^2]. \tag{9.10}$$

A (9.6) egyenletekből :

$$\begin{aligned} \gamma_{,1} &= \frac{1}{(\xi\xi^* - 1)^2}\frac{\rho}{r^2}[(z^2 - \rho^2)(\xi_{,1}\xi^*_{,1} - \xi_{,2}\xi^*_{,2}) - 2\rho z(\xi_{,1}\xi^*_{,2} + \xi^*_{,1}\xi_{,2})], \\ \gamma_{,2} &= \frac{1}{(\xi\xi^* - 1)^2}\frac{\rho}{r^2}[2\rho z(\xi_{,1}\xi^*_{,1} - \xi_{,2}\xi^*_{,2}) + (z^2 - \rho^2)(\xi_{,1}\xi^*_{,2} + \xi^*_{,1}\xi_{,2})]. \end{aligned} \tag{9.11}$$

10. KONFORM TRANSZFORMÁCIÓ

Legyen az $\tilde{\mathcal{M}}$ sokaság az eredeti $\mathcal{M}$ sokaság és az origó uniója, azaz $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cup \Lambda$. Válasszunk $\Omega = r^2$-et, ekkor a metrika $\tilde{\mathcal{M}}$-on $\tilde{h}_{ij} = \Omega^2 h_{ij} = r^4 h_{ij}$, azaz

$$\tilde{h}_{ij} = \begin{pmatrix} e^{2\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \end{pmatrix}. \tag{10.1}$$

Könnyen ellenőrizhető,hogy ha $\gamma|_{\Lambda} = 1$, akkor a tér kielégíti az aszimptotikusan síkság feltételeit. $\tilde{\Delta}\xi = (\xi_{,11} + \xi_{,22} + \frac{1}{\rho}\xi_{,1})e^{-2\gamma}$, $(\tilde{\nabla}\xi)^2 = [(\xi_{,1})^2 + (\xi_{,2})^2]e^{-2\gamma}$ és $\tilde{\nabla} r \tilde{\nabla}\xi = \frac{1}{r}(\rho\xi_{,1} + z\xi_{,2})e^{-2\gamma}$. Ezek felhasználásával a (9.10) egyenlet a következő alakba írható:

$$(\xi\xi^* - 1)(\tilde{\Delta}\xi - \frac{2}{r}\tilde{\nabla} r \tilde{\nabla}\xi) = 2\xi^*(\tilde{\nabla}\xi)^2. \tag{10.2}$$

Vezessük be a momentumok számolásához szükséges $\tilde{\xi} = \Omega^{-1/2}\xi = \frac{1}{r}\xi$ menynyiséget. Az előző egyenletbe $\xi = r\tilde{\xi}$ -t helyettesítve, a téregyenletet kapjuk $\tilde{\xi}$-ra :

$$(r^2\tilde{\xi}\tilde{\xi}^* - 1)\tilde{\Delta}\tilde{\xi} = 2\tilde{\xi}^*[r^2(\tilde{\nabla}\tilde{\xi})^2 + 2r\tilde{\xi}\tilde{\nabla}\tilde{\xi}\tilde{\nabla} r + \tilde{\xi}^2]. \tag{10.3}$$

Ez az egyenlet elvileg megoldható $\tilde{\xi}$-ra. A (10.1) metrikából számolható a Ricci-tenzor :

$$\tilde{R}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho}\gamma_{,1} - \gamma_{,11} - \gamma_{,22} & \frac{1}{\rho}\gamma_{,2} & 0 \\ \frac{1}{\rho}\gamma_{,2} & -\frac{1}{\rho}\gamma_{,1} - \gamma_{,11} - \gamma_{,22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.4)$$

Vezessük be a következő jelöléseket : $D = r^2\tilde{\xi}\tilde{\xi}^* - 1$, $\tilde{G}_1 = \frac{1}{D}(z\tilde{\xi}_{,1} - \rho\tilde{\xi}_{,2})$, $\tilde{G}_2 = \frac{1}{D}(\rho\tilde{\xi}_{,1} + z\tilde{\xi}_{,2} + \tilde{\xi})$ és $\tilde{G}_3 = 0$. Helyettesítsük be a Ricci-tenzor (10.4) kifejezésébe a (9.11) összefüggéseket, és $\xi = r\tilde{\xi}$ -t. A jelöléseket felhasználva kapjuk, hogy :

$$\tilde{R}_{ij} = (\tilde{G}_i\tilde{G}_j^* + \tilde{G}_i^*\tilde{G}_j). \quad (10.5)$$

A (10.4) összefüggésből kifejezhető $\gamma_{,i}$ a Ricci-tenzor segítségével, a következőképpen :

$$\gamma_{,1} = \frac{\rho}{2}(\tilde{R}_{11} - \tilde{R}_{22}) \ , \qquad \gamma_{,2} = \rho\tilde{R}_{12}. \quad (10.6)$$

Így $\tilde{R}_{ij}$-t és $\gamma_{,i}$-t kifejeztük $\tilde{\xi}$ segítségével. $\gamma_{,i}$-re a kovariáns deriválásoknál lesz szükség, ugyanis a (10.1) metrikából számolt Christoffel-szimbólumok : $\Gamma^3_{13} = \frac{1}{\rho}$, $\Gamma^1_{33} = -\rho e^{-2\gamma}$, $\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = -\Gamma^1_{22} = \gamma_{,1}$, $\Gamma^2_{22} = \Gamma^1_{12} = -\Gamma^2_{11} = \gamma_{,2}$, a többi nulla.

Ha a (10.3) egyenletnek ismernénk egy $\tilde{\xi}$ megoldását, akkor (10.5) alapján ki tudnánk számolni a Ricci-tenzort, ennek felhasználásával, (10.6) és (10.7) segítségével a Christoffel-szimbólumokat. Ezek felhasználásával (5.1) és (9.2) alapján a momentumokat.

11. SORFEJTÉSI EGYÜTTHATÓK

Ha $\tilde{\xi}$ adott a szimmetriatengelyen, akkor a (10.3) egyenlet meghatározza az értékét az egész térben. Adjuk meg $\tilde{\xi}$-ot a tengelyen sorfejtési együtthatók segítségével, azaz legyen

$$\tilde{\xi}(\rho = 0) \quad = \sum_{n=0}^{\infty} m_n z^n, \tag{11.1}$$

ahol az m_n-ek komplex konstansok. Az m_n számok egyértelműen meghatározzák a momentumok értékét.

Nyilvánvalóan igaz, hogy $P_0 = m_0$ és $P_1 = m_1$. Sztatikus esetben Hoenselaers [11] belátta, hogy $P_2 = m_2$. Ezért úgy sejtették, hogy $P_n = m_n$. Hansen [2] kiszámolta a Kerr megoldás momentumait , $P_n = m(ia)^n$, ami minden n-re a sejtésnek megfelelő. Singer [12] a sejtést igaznak találta $n = 3$-ra. De I. Hauser észrevette, hogy $n = 4$ és $n = 5$-re már nem igaz a sejtés. Hoenselaers [3] kiszámolta a momentumokat $n = 7$-ig, de nem talált semmi szabályosságot bennük. Sikerült egy hatékonyabb algoritmust készítenem, amelynek segítségével ki tudtam számolni a momentumok értékét a tizenkettedik rendig.

$P^{(n)}_{i_1\ldots i_n}$ kiszámolásához szükség van a $\partial_1 P^{(n-1)}_{i_1\ldots i_{n-1}}$ és a $\partial_2 P^{(n-1)}_{i_1\ldots i_{n-1}}$ deriváltakra. Azaz szükség van a $\tilde{\xi}$ többszörös deriváltjaira az origóban. Az n. momentum kiszámolásához szükségesek a $\partial_1^a \partial_2^b \tilde{\xi}|_\Lambda$ mennyiségek, ahol $a + b \leq n$. Ezt a problémát úgy oldottam meg, hogy a (10.3) egyenletbe behelyettesítettem a $\tilde{\xi}$ sorfejtését a következő alakban :

$$\tilde{\xi} = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} \rho^i z^j, \tag{11.2}$$

ahol $a_{0j} = m_j$. Az azonos ρ és z hatványok együtthatóit összehasonlítva a következő összefüggés kapható :

$$(r+2)^2 a_{r+2,s} = -(s+2)(s+1)a_{r,s+2}$$
$$+\sum_{\substack{k+m+p=r\\ l+n+q=s}} a_{kl}a^*_{mn}[a_{pq}(p^2+q^2-4p-5q-2pk-2ql-2)$$
$$+a_{p+2,q-2}(p+2)(p+2-2k)+a_{p-2,q+2}(q+2)(q+1-2l)] \quad . \tag{11.3}$$

Ennek segítségével az a_{ij} konstansokat ki lehet fejezni az m_i konstansok segítségével. Egy adott a_{ij} kiszámolásához sajnos szükség van szinte az összes olyan a_{kl}-re, amelyre $i+j>k+l$, vagy amelyre $i+j=k+l$ és $k<j$. A számolást megnehezíti, hogy négy szumma van egymásba ágyazva. A (11.3) összefüggés alapján kiszámolva az a_{ij} együtthatókat, ha i páratlan, $a_{ij} = 0$ adódik, ami szükséges ahhoz, hogy $\tilde{\xi}$ analitikus legyen a Λ pontban.

Ilyen módon kiszámolható $\tilde{\xi}$ polinom alakjában a szükséges rendig. Ezután a (10.5), (10.6) és (10.7) összefüggések alapján számolhatók a Ricci-tenzor komponensei és a Christoffel-szimbólumok, majd (5.1) és (9.2) felhasználásával a momentumok. Nehézséget okozhat a $P^{(n)}_{i_1\ldots i_n}$ tenzorok (5.1) definíciójában a spurtalanítás elvégzése.

12. SPURTALANÍTÁS

Egy tetszőleges $T_{i_1 i_2 \ldots i_n} = T_{(i_1 i_2 \ldots i_n)}$ szimmetrikus tenzort úgy spurtalaníthatunk, hogy valamilyen számszor hozzáadjuk a tenzor többszörös spurjait a megfelelő számú h_{ik}-val szorozva és szimmetrizálva. Vagyis :

$$\mathcal{C}(T_{i_1 \ldots i_n})_{i_1 \ldots i_n} = T_{i_1 \ldots i_n} + \sum_{k=1}^{[n/2]} A_k^{(n)} h_{(i_1 i_2} h_{i_3 i_4} \ldots h_{i_{2k-1} i_{2k}} h^{r_1 r_2} h^{r_3 r_4} \ldots h^{r_{2k-1} r_{2k}} T_{r_1 \ldots r_{2k} i_{2k+1} \ldots i_n)} . \tag{12.1}$$

Az $A_k^{(n)}$ konstansokat úgy kell megválasztani, hogy az eredmény valóban spurtalan legyen, azaz fennálljon, hogy

$$\mathcal{C}(T_{i_1 \ldots i_n})_{i_1 \ldots i_n} h^{i_1 i_2} = 0. \tag{12.2}$$

Ebből a feltételből háromdimenziós tenzorok esetén a következő rekurziós összefüggést kaphatjuk :

$$A_{k+1}^{(n)} = -\frac{(n-2k)(n-2k-1)}{2(k+1)(2n-2k-1)} A_k^{(n)}, \tag{12.3}$$

ahol $A_0^{(n)} = 1$-et definiálhatunk. Ebből $A_m^{(n)}$-et kifejezve :

$$A_m^{(n)} = \frac{(-1)^m n!\,(2n-2m-1)!!}{2^m m!\,(n-2m)!\,(2n-1)!!}. \tag{12.4}$$

Az eddigiek alapján már számolhatók a momentumok, de a képletek nagy száma miatt ez nehézségekbe ütközhet. Ezért célszerű az eljárást tovább egyszerűsíteni.

13. SZIMMETRIKUS TENZOROK

A $P_{i_1 \ldots i_n}^{(n)}$ tenzoroknak 3^n komponense van, de a szimmetria miatt sokkal kevesebb független komponens megadása elegendő. Vezessük be a következő jelölést :

$$P_{a,b,c}^{(n)} = P^{(n)}_{\underbrace{1\ldots1}_{a}\underbrace{2\ldots2}_{b}\underbrace{3\ldots3}_{c}}, \tag{13.1}$$

ahol $a+b+c=n$. Ezek meghatározzák a $P^{(n)}_{i_1\dots i_n}$ tenzort, és számuk :

$$\sum_{a=0}^{n}(n-a+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2). \tag{13.2}$$

A kovariáns deriváláshoz szükséges Christoffel szimbólumok alakját behelyettesítve a $P^{(n)}_{i_1\dots i_n}$ tenzorok (5.1) rekurziós definíciójába, és felhasználva, hogy minden csak ρ-tól és z-től függ, $P^{(n)}_{a,b,c}$-re a következő rekurziós összefüggést kapjuk:

$$\begin{aligned}
P^{(n)}_{a,b,c} &= \frac{1}{n}\mathcal{C}\Big\{a\frac{\partial}{\partial\rho}P^{(n-1)}_{a-1,b,c}+b\frac{\partial}{\partial z}P^{(n-1)}_{a,b-1,c}\\
&-\Big[(a(a-1)+2ab)\gamma_{,1}+2ac\frac{1}{\rho}\Big]P^{(n-1)}_{a-1,b,c}-\Big[2ab+b(b-1)\Big]\gamma_{,2}P^{(n-1)}_{a,b-1,c}\\
&+a(a-1)\gamma_{,2}P^{(n-1)}_{a-2,b+1,c}+b(b-1)\gamma_{,1}P^{(n-1)}_{a+1,b-2,c}\\
&+c(c-1)\rho e^{-2\gamma}P^{(n-1)}_{a+1,b,c-2}-\Big(n-\frac{3}{2}\Big)\Big[a(a-1)\tilde{R}_{11}P^{(n-2)}_{a-2,b,c}\\
&+2ab\tilde{R}_{12}P^{(n-2)}_{a-1,b-1,c}+b(b-1)\tilde{R}_{22}P^{(n-2)}_{a,b-2,c}\Big]\Big\}.
\end{aligned} \tag{13.3}$$

Itt $\mathcal{C}$ már csak a spurtalanítást jelenti, amit elvégezhetnénk a (12.1) és a (12.4) képletek alapján, észrevéve, hogy csak az olyan tagokra van szükség, amelyben $A^{(n)}_1$ vagy $A^{(n)}_2$ szerepel.

Találtam egy módszert, amellyel a spurtalanítás egyszerűbb, a fellépő képletek száma is kevesebb, és az $e^{-2\gamma}$ tag sem fordul elő.

14. OLYAN TENZOROK BEVEZETÉSE, AMELYEKNEK A HÁRMAS INDEXű KOMPONENSEIK NULLÁK

Vegyük észre, hogy a spurtalan $P^{(n)}_{i_1 \ldots i_n}$ tenzorra akkor is a helyes értéket kapjuk, ha $P^{(k)}_{i_1 \ldots i_k}$ helyett a

$$P^{(k)}_{i_1 \ldots i_k} + h_{(i_1 i_2} Q^{(k-2)}_{i_3 \ldots i_k)}, \tag{14.1}$$

tenzorokból számoljuk ki az (5.1) rekurzív definíciójuk segítségével, ahol $k < n$, és $Q^{(k-2)}_{i_3 \ldots i_k}$ tetszőleges szimmetrikus tenzor. Ez azért van így, mert $P^{(n)}_{i_1 \ldots i_n}$ számolásakor csak olyan járulékos tagokat kapunk, amelyeknek a spurmentes részei nullák. A spurtalanítást is ilyen tenzor hozzáadásával lehet elvégezni, ezért ha $k < n$ esetén elhagyjuk a spurtalanítást, $P^{(n)}_{i_1 \ldots i_n}$-re továbbra is a helyes értéket kapjuk.

Definiáljuk az $S^{(n)}_{a,b,c}$ tenzort (13.3)-hoz hasonlóan, azzal az eltéréssel, hogy S helyére mindenhol P-t írunk, hozzáadunk

$h_{(i_1 i_2} Q^{(n-2)}_{i_3 \ldots i_n)}$ -t a jobboldalon, és elhagyjuk a spurtalanítás $\mathcal{C}$ operátorát, azaz legyen

$$
\begin{aligned}
&S^{(0)}_{0,0,0} = P^{(0)}_{0,0,0} \quad , \qquad S^{(1)}_{a,b,c} = P^{(1)}_{a,b,c},\\
&S^{(n)}_{a,b,c} = \frac{1}{n}\Big\{ a\frac{\partial}{\partial\rho} S^{(n-1)}_{a-1,b,c} + b\frac{\partial}{\partial z} S^{(n-1)}_{a,b-1,c}\\
&\quad - \Big[(a(a-1)+2ab)\gamma_{,1} + 2ac\frac{1}{\rho}\Big] S^{(n-1)}_{a-1,b,c} - \Big[2ab + b(b-1)\Big]\gamma_{,2} S^{(n-1)}_{a,b-1,c}\\
&\quad + a(a-1)\gamma_{,2} S^{(n-1)}_{a-2,b+1,c} + b(b-1)\gamma_{,1} S^{(n-1)}_{a+1,b-2,c}\\
&\quad + c(c-1)\rho e^{-2\gamma} S^{(n-1)}_{a+1,b,c-2} - \Big(n - \frac{3}{2}\Big)\Big[a(a-1)\tilde{R}_{11} S^{(n-2)}_{a-2,b,c}\\
&\quad + 2ab\tilde{R}_{12} S^{(n-2)}_{a-1,b-1,c} + b(b-1)\tilde{R}_{22} S^{(n-2)}_{a,b-2,c}\Big]\Big\}\\
&\quad + \Big(h_{(i_1 i_2} Q^{(n-2)}_{i_3\ldots i_n)}\Big)^{(n)}_{abc}.
\end{aligned} \tag{14.2}
$$

Ekkor :

$$
P^{(n)}_{a,b,c} = \mathcal{C}\big(S^{(n)}_{a,b,c}\big)^{(n)}_{a,b,c}. \tag{14.3}
$$

Legyen

$$
Q^{(n)}_{a,b,c} = Q^{(n)}_{\underbrace{1\ldots1}_{a}\underbrace{2\ldots2}_{b}\underbrace{3\ldots3}_{c}}, \tag{14.4}
$$

ahol $a+b+c=n$.

Megmutatjuk, hogy a $Q^{(k-2)}_{i_3\ldots i_k}$ tenzorok megválaszthatók úgy, hogy $S^{(n)}_{a,b,c} = 0$ fennálljon, ha $c \neq 0$. Ez nyilvánvalóan igaz $n = 0$-ra és $n = 1$-re, ugyanis ha $n = 0$, akkor c is csak nulla lehet, és $S^{(1)}_{0,0,1} = P^{(1)}_{0,0,1} = \frac{\partial}{\partial\varphi}\tilde{\xi} = 0$. Tegyük fel, hogy sikerült ezt elérni $k < n$-re. $Q^{(n)}_{a,b,c}$-t úgy kell megválasztani, hogy $Q^{(n)}_{a,b,c} = 0$ legyen ha $c \neq 0$, mert különben h_{33}-al szorozva újabb hármas indexeket hozna be. Ekkor $S^{(n)}_{a,b,c}$ csak $c = 0$ vagy $c = 2$ esetén lehet nullától különböző. Felírva a $S^{(n)}_{a,b,2} = 0$ feltételt, kapjuk hogy :

$$Q^{(n-2)}_{a,b,0} = \frac{n-1}{\rho} e^{-2\gamma} S^{(n-1)}_{a+1,b,0}. \tag{14.5}$$

Beláttuk, hogy a $Q^{(k-2)}_{i_3 \ldots i_k}$ tenzorok megválaszthatók úgy, hogy $S^{(n)}_{a,b,c} = 0$ ha $c \neq 0$.

Legyen

$$S^{(n)}_{a} = S^{(n)}_{a,b,0}. \tag{14.6}$$

Az $S^{(n)}_{a,b,c}$ tenzorok (14.2) rekurziós definíciója a következő alakú lesz :

$$
\begin{aligned}
&S_0^{(0)} = \tilde{\xi} \quad , \quad S_0^{(1)} = \frac{\partial}{\partial z} S_0^{(0)} \quad , \quad S_1^{(1)} = \frac{\partial}{\partial \rho} S_0^{(0)}, \\
&\quad S_a^{(n)} = \frac{1}{n} \Bigg\{ a \frac{\partial}{\partial \rho} S_{a-1}^{(n-1)} + (n-a) \frac{\partial}{\partial z} S_a^{(n-1)} \\
&\quad + a\Big[(a+1-2n)\gamma_{,1} - \frac{a-1}{\rho}\Big] S_{a-1}^{(n-1)} + (a-n)(a+n-1)\gamma_{,2} S_a^{(n-1)} \\
&\quad + a(a-1)\gamma_{,2} S_{a-2}^{(n-1)} + (n-a)(n-a-1)(\gamma_{,1} - \frac{1}{\rho}) S_{a+1}^{(n-1)} \\
&\quad - \Big(n - \frac{3}{2}\Big) \Big[a(a-1)\tilde{R}_{11} S_{a-2}^{(n-2)} \qquad + 2a(n-a)\tilde{R}_{12} S_{a-1}^{(n-2)} \\
&\quad + (n-a)(n-a-1)\tilde{R}_{22} S_a^{(n-2)} \Big] \Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{14.7}
$$

A P tenzorokat a következőképpen kaphatjuk :

$$
P_{a,b,c}^{(n)} = \mathcal{C}\Big(S_a^{(n)}\Big)_{a,b,c}^{(n)}, \tag{14.8}
$$

ahol $\mathcal{C}$ már csak a spurtalanítást jelöli.

Adott n-re $S_a^{(n)}$ csak $n+1$ komponensből áll, tehát tovább sikerült csökkenteni a számoláskor megjelenő képletek számát.

Zavarónak látszanak az $\frac{1}{\rho}$-t tartalmazó tagok a (14.7) indukciós képletekben. Belátjuk, hogy mégsem jelennek meg ρ negatív kitevőjű hatványai a sorfejtésekben. Legyen $\tilde{R}_{11}$ =

$\rho^2\tilde{R}'_{11}$, $\tilde{R}_{12} = \rho\tilde{R}'_{12}$, $\tilde{R}_{22} = \tilde{R}'_{22}$, $\gamma_{,1} = \rho\gamma'_{,1}$, és $\gamma_{,2} = \rho^2\gamma'_{,2}$. Ekkor (10.5) és (10.6)-ból következik, hogy $\tilde{R}'_{11}$, $\tilde{R}'_{12}$, $\tilde{R}'_{22}$, $\gamma'_{,1}$, és $\gamma'_{,2}$ mindannyian ρ^2 és z hatványsoraként írhatók fel, úgy, hogy ρ negatív kitevőjű hatványai nem jelennek meg. Legyen

$$S_a^{(n)} = \rho^a Z_a^{(n)}. \tag{14.9}$$

Ekkor (14.7) alapján felírhatók $Z_a^{(n)}$ indukciós összefüggései :

$$\begin{aligned}
Z_0^{(0)} &= \tilde{\xi} \quad , \quad Z_0^{(1)} = \frac{\partial}{\partial z} Z_0^{(0)} \quad , \quad Z_1^{(1)} = \frac{\partial}{\partial \rho} Z_0^{(0)}, \\
Z_a^{(n)} &= \frac{1}{n}\Bigg\{ a\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} Z_{a-1}^{(n-1)} + (n-a)\frac{\partial}{\partial z} Z_a^{(n-1)} + a(a+1-2n)\gamma'_{,1} Z_{a-1}^{(n-1)} \\
&\quad + (a-n)(a+n-1)\gamma'_{,2}\rho^2 Z_a^{(n-1)} + a(a-1)\gamma'_{,2} Z_{a-2}^{(n-1)} \\
&\quad + (n-a)(n-a-1)(\rho^2\gamma'_{,1} - 1) Z_{a+1}^{(n-1)} \\
&\quad - \left(n - \frac{3}{2}\right)\Big[a(a-1)\tilde{R}'_{11} Z_{a-2}^{(n-2)} + 2a(n-a)\tilde{R}'_{12} Z_{a-1}^{(n-2)} \\
&\qquad + (n-a)(n-a-1)\tilde{R}'_{22} Z_a^{(n-2)} \Big] \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{14.10}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ebből következik, hogy $Z_a^{(n)}$ ρ^2 és z pozitív kitevőjű hatványsoraként írható fel.

15. A SPURTALANÍTÁS ELVÉGZÉSE

Ha az $S^{(n)}_{a,b,c}$ mennyiségeket már kiszámoltuk, akkor a $P^{(n)}_{a,b,c}$ tenzormezők kiszámolása (14.8) alapján nagyon bonyolult lehet, mert a spurtalanítás (12.1) és (12.4) képleteiben az az összes lehetséges $A^{(n)}_k$-ra szükség van a spurtalanításhoz. Ezen segít, hogy a $P^{(n)}_{i_1\dots i_n}$ tenzormezők értékére csak a Λ pontban van szükség. $S^{(n)}_{a,b,c} = 0$ ha $c \neq 0$, így a spurmentes rész számolásakor nem jelenik meg h^{33}, ami szinguláris a Λ pontban. Ezért $S^{(n)}_a|_\Lambda$ spurmentes része a helyes értéket adja $P^{(n)}_{a,b,c}|_\Lambda$,-re, azaz :

$$P^{(n)}_{a,b,c}|_\Lambda = \mathcal{C}\Big(S^{(n)}_a|_\Lambda\Big)^{(n)}_{a,b,c}. \tag{15.1}$$

(14.9) felhasználásával látható, hogy $S^{(n)}_a|_\Lambda = 0$ ha $a \neq 0$. A skalár momentumok kiszámolásához (9.2) alapján csak $P^{(n)}_{2\dots2}|_\Lambda$-re van szükség. Tehát egy olyan $S^{(n)}_{i_1\dots i_n}$ tenzort kell spurtalanítani, amelyre csak $S^{(n)}_{2\dots2} \neq 0$, és az eredménynek csak a 2...2 komponensére van szükség. Felhasználva, hogy a Λ pontban $h_{22} = h^{22} = 1$, a spurtalanítás (12.1) és (12.4) képletei alapján :

$$\mathcal{C}(S_{i_1\ldots i_n})_{22\ldots 2} = S_{22\ldots 2} + S_{22\ldots 2}\sum_{m=1}^{[n/2]} A_m^{(n)}$$
$$= \frac{S_{2\ldots 2}\, n!}{(2n-1)!!}\sum_{m=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^m(2n-2m-1)!!}{2^m m!\,(n-2m)!} = \frac{S_{2\ldots 2}\, n!}{(2n-1)!!}. \tag{15.2}$$

Így a skalár momentumok (9.2) és (15.1) alapján :

$$P_n = \frac{1}{(2n-1)!!} S_0^{(n)}|_{\Lambda}. \tag{15.3}$$

16. AZ ALGORITMUS ÖSSZEFOGLALÁSA

Az eddigiekben áttekintettük a momentumok kiszámolásához szükséges algoritmus összes lépését. Ha az m. momentumig akarunk elmenni a számolással, akkor a következő lépéseket kell végrehajtani :

1°] $\tilde{\xi}$ (11.1) sorfejtésében az együtthatók meghatározása a (11.3) öszszefüggés segítségével, vagyis az olyan a_{ij}

együtthatók kifejezése az m_i konstansokkal, amelyekre $i + j \leq m$.

2°] (10.5) és (10.6) alapján számolhatók az $\tilde{R}_{ij}$ Ricci-tenzor komponensei, és a $\gamma_{,i}$ deriváltak, ρ és z-nek az $m-2$-ed rendű polinomjaiként. (Azért az $m-2$-ed rendig, mert először a második momentum számolásakor fordulnak elő.)

3°] $S_0^{(0)} = \tilde{\xi}$, $S_0^{(1)} = \frac{\partial}{\partial z} S_0^{(0)}$ és $S_1^{(1)} = \frac{\partial}{\partial \rho} S_0^{(0)}$ kiszámolása, $S^{(0)}$-nál m-ed, $S_i^{(1)}$-nél $m-1$-ed rendű polinomként.

4°] A (14.7) rekurziós képlet alapján az $S_a^{(n)}$ mennyiségek számolása $m-n$-ed rendű polinomokként. Csak az olyan $S_a^{(n)}$ mennyiségekre van szükség, amelyekre $a \leq m-n$ és $a < n$. (Ez azért van így, mert az $S_a^{(m)}$ mennyiségek közül csak $S_0^{(m)}$-ra van szükség, az $S_a^{(m-1)}$ mennyiségek közül már $S_0^{(m-1)}$ és $S_1^{(m-1)}$ is szükséges, és így tovább.)

5°] A (15.3) összefüggés alapján számolhatók a P_n momentumok, azaz kifejezhetők az m_i konstansok segítségével.

17. SZÁMOLÁS ELVÉGZÉSE

A momentumok számolásához készítettem egy REDUCE [13] nyelven írt programot. A REDUCE-nak azt a tulajdonságát használtam fel, hogy olyan polinomokkal tud számolni, amelyeknek az együtthatóik paraméter alakban megadott konstansok.

A tárigény csökkentése szempontjából lényeges, hogy minden polinomot csak olyan pontosságig őrizzünk meg, amennyire az a további számolásokhoz szükséges. Ezért a számolás során sokszor el kell hagyni a polinomokból olyan tagokat, amelyek konstansszor $\rho^i z^j$ alakúak, ahol $i+j>n$ és n pozitív egész. Ez a WEIGHT $\rho=1, z=1$; WTLEVEL n; utasítással érhető el. Ekkor a REDUCE nem hajt végre ρ és z szerinti differenciálást, ezért a levágást a CLEAR ρ, z; utasítással ki lehet kapcsolni.

A számoláshoz a KFKI BASF számítógépét használtam. A tizenkettedik rendig való számoláshoz 4 Mbyte memória és majdnem egy óra gépidő volt szükséges. Úgy tapasztaltuk, hogy ha eggyel magasabb rendig akartunk elmenni a számolással, a szükséges gépidő körülbelül a kétszeresére növekedett.

Vezessük be az alábbi jelölést :

$$M_{ij} = m_i m_j - m_{i-1} m_{j+1}, \tag{17.1}$$

ahol $i > j + 1$. Az M_{ik} mennyiségek között az alábbi összefüggések állnak fenn :

$$\begin{aligned} m_c M_{a+3,b+1} &= m_{b+1} M_{a+3,c} - m_{a+2} M_{b+2,c}, \\ m_{a+3} M_{b+2,c} &= m_{b+2} M_{a+3,c} - m_{c+1} M_{a+3,b+1}, \end{aligned} \tag{17.2}$$

ahol $a \geq b \geq c$. Ezeknek segítségével a momentumokra kapott képletekből azok a tagok, amelyekben olyan $m_j M_{ik}$ tényező szerepel, amelyekre $j < k$ vagy $j > i$, kifejezhetők olyan tagokkal, amelyekben csak olyan $m_j M_{ik}$ szorzat szerepel, amelyre $i \geq j \geq k$.

A momentumokra kapott képletekben az egyes tagok együtthatóit lényegesen egyszerűsíteni lehet, ha konstans szorzók egy részét beledefiniáljuk az M_{ik} mennyiségekbe. Ezért az n. momentum képletébe az M_{ik} helyett definiáljunk egy S_{ik} mennyiséget a következőképpen :

$$M_{ik} = \frac{(i-2)! \quad (n-i)! \quad (2n-1)!!}{(n-2)! \quad (2i+1)!! \quad (2n-2i-3)!!} S_{ik}. \tag{17.3}$$

A szorzó nem függ a második indextől, de függ attól, hogy hányadik momentumba helyettesítjük be, vagyis a különböző momentumokban levő S_{ik} mennyiségek nem egyenlőek egymással.

Az első tizenkét momentumra kapott értékek a következők :

$P_0 = m_0$

$P_1 = m_1$

$P_2 = m_2$

$P_3 = m_3$

$P_4 = m_4 - S_{20} m_0^*$

$P_5 = m_5 - S_{20}m_1^* - S_{30}m_0^*$

$P_6 = m_6 - S_{20}m_2^* + \frac{7}{5}S_{20}m_0^{*2}m_0 - S_{30}m_1^* - S_{40}m_0^* - 2S_{31}m_0^*$

$P_7 = m_7 - S_{20}m_3^* + 2S_{20}m_1^*m_0^*m_0 - \frac{9}{5}S_{20}m_0^{*2}m_1 - S_{30}m_2^* + \frac{9}{5}S_{30}m_0^{*2}m_0 - S_{40}m_1^* - \frac{44}{25}S_{31}m_1^* - S_{50}m_0^* - \frac{38}{15}S_{41}m_0^*$

$P_8 = m_8 - S_{20}m_4^* + \frac{38}{21}S_{20}m_2^*m_0^*m_0 + \frac{11}{21}S_{20}m_1^{*2}m_0 - 2S_{20}m_1^*m_0^*m_1 - S_{20}m_0^{*3}m_0^2 - 20S_{20}m_0^{*2}m_2 - S_{30}m_3^* + \frac{18}{7}S_{30}m_1^*m_0^*m_0 + \frac{27}{14}S_{30}m_0^{*2}m_1 - S_{40}m_2^* + \frac{11}{5}S_{40}m_0^{*2}m_0 - \frac{23}{14}S_{31}m_2^* - S_{50}m_1^* - \frac{34}{15}S_{41}m_1^* - S_{60}m_0^* - \frac{11}{4}S_{51}m_0^* - 3S_{42}m_0^*$

$P_9 = m_9 - S_{20}m_5^* + \frac{20}{11}S_{20}m_3^*m_0^*m_0 + \frac{8}{11}S_{20}m_2^*m_1^*m_0 - \frac{106}{77}S_{20}m_2^*m_0^*m_1 - \frac{41}{77}S_{20}m_1^{*2}m_1 - \frac{21}{11}S_{20}m_1^*m_0^{*2}m_0^2 - \frac{288}{11}S_{20}m_1^*m_0^*m_2 + 2S_{20}m_0^{*3}m_1m_0 - S_{30}m_4^* + \frac{16}{7}S_{30}m_2^*m_0^*m_0 + \frac{5}{7}S_{30}m_1^{*2}m_0 + \frac{156}{49}S_{30}m_1^*m_0^*m_1 - \frac{11}{7}S_{30}m_0^{*3}m_0^2 - \frac{1012}{49}S_{30}m_0^{*2}m_2 - S_{40}m_3^* + \frac{22}{7}S_{40}m_1^*m_0^*m_0 + \frac{583}{147}S_{40}m_0^{*2}m_1 - \frac{11}{7}S_{31}m_3^* + \frac{748}{49}S_{31}m_0^{*2}m_1 - S_{50}m_2^* + \frac{13}{5}S_{50}m_0^{*2}m_0 - \frac{314}{147}S_{41}m_2^* - S_{60}m_1^* - \frac{87}{35}S_{51}m_1^* - \frac{373}{147}S_{42}m_1^* - S_{70}m_0^* - \frac{20}{7}S_{61}m_0^* - \frac{148}{35}S_{52}m_0^*$

$P_{10} = m_{10} - S_{20}m_6^* + \frac{274}{143}S_{20}m_4^*m_0^*m_0 + \frac{262}{429}S_{20}m_3^*m_1^*m_0 - \frac{146}{143}S_{20}m_3^*m_0^*m_1 + \frac{71}{429}S_{20}m_2^{*2}m_0 - \frac{106}{143}S_{20}m_2^*m_1^*m_1 - \frac{727}{429}S_{20}m_2^*m_0^{*2}m_0^2 - \frac{4930}{231}S_{20}m_2^*m_0^*m_2 - \frac{37}{39}S_{20}m_1^{*2}m_0^*m_0^2 - \frac{1685}{231}S_{20}m_1^{*2}m_2 + \frac{42}{13}S_{20}m_1^*m_0^{*2}m_1m_0 + \frac{7}{13}S_{20}m_0^{*4}m_0^3 + \frac{252}{13}S_{20}m_0^{*3}m_2m_0 - \frac{125}{13}S_{20}m_0^{*3}m_1^2 - S_{30}m_5^* + \frac{74}{33}S_{30}m_3^*m_0^*m_0 + \frac{34}{33}S_{30}m_2^*m_1^*m_0 + \frac{101}{33}S_{30}m_2^*m_0^*m_1 + \frac{127}{132}S_{30}m_1^{*2}m_1 - 3S_{30}m_1^*m_0^{*2}m_0^2 - \frac{109}{4}S_{30}m_1^*m_0^*m_2 - \frac{5}{4}S_{30}m_0^{*3}m_1m_0 - \frac{1317}{56}S_{30}m_0^{*2}m_3 - S_{40}m_4^* + \frac{58}{21}S_{40}m_2^*m_0^*m_0 + \frac{19}{21}S_{40}m_1^{*2}m_0 + \frac{55}{9}S_{40}m_1^*m_0^*m_1 - \frac{143}{63}S_{40}m_0^{*3}m_0^2 - \frac{682}{49}S_{40}m_0^{*2}m_2 - \frac{67}{44}S_{31}m_4^* + \frac{589}{28}S_{31}m_1^*m_0^*m_1 - \frac{33}{7}S_{31}m_0^{*2}m_2 - S_{50}m_3^* + \frac{26}{7}S_{50}m_1^*m_0^*m_0 + \frac{39}{7}S_{50}m_0^{*2}m_1 - \frac{37}{18}S_{41}m_3^* + \frac{8833}{588}S_{41}m_0^{*2}m_1 - S_{60}m_2^* + 3S_{60}m_0^{*2}m_0 - \frac{33}{14}S_{51}m_2^* - \frac{4063}{1764}S_{42}m_2^* - S_{70}m_1^* - \frac{13}{5}S_{61}m_1^* - \frac{713}{196}S_{52}m_1^* - S_{80}m_0^* - \frac{35}{12}S_{71}m_0^* - \frac{339}{70}S_{62}m_0^* - \frac{1553}{392}S_{53}m_0^*$

$P_{11} = m_{11} - S_{20}m_7^* + \frac{134}{65}S_{20}m_5^*m_0^*m_0 + \frac{38}{65}S_{20}m_4^*m_1^*m_0 - \frac{10}{13}S_{20}m_4^*m_0^*m_1 + \frac{2}{13}S_{20}m_3^*m_2^*m_0 - \frac{22}{39}S_{20}m_3^*m_1^*m_1 - \frac{23}{13}S_{20}m_3^*m_0^{*2}m_0^2 - \frac{1256}{65}S_{20}m_3^*m_0^*m_2 - \frac{11}{39}S_{20}m_2^{*2}m_1 - \frac{86}{65}S_{20}m_2^*m_1^*m_0^*m_0^2 - \frac{52}{5}S_{20}m_2^*m_1^*m_2 + \frac{446}{195}S_{20}m_2^*m_0^{*2}m_1m_0 -$

$\frac{9}{65}S_{20}m_1^{*3}m_0^2 + \frac{62}{39}S_{20}m_1^{*2}m_0^*m_1m_0 + \frac{84}{65}S_{20}m_1^*m_0^{*3}m_0^3 + \frac{2296}{65}S_{20}m_1^*m_0^{*2}m_2m_0 - \frac{1071}{65}S_{20}m_1^*m_0^{*2}m_1^2 - \frac{7}{5}S_{20}m_0^{*4}m_1m_0^2 + \frac{308}{5}S_{20}m_0^{*3}m_2m_1 - S_{30}m_6^* + \frac{30}{13}S_{30}m_4^*m_0^*m_0 + \frac{34}{39}S_{30}m_3^*m_1^*m_0 + \frac{370}{117}S_{30}m_3^*m_0^*m_1 + \frac{11}{39}S_{30}m_2^{*2}m_0 + \frac{170}{117}S_{30}m_2^*m_1^*m_1 - \frac{101}{39}S_{30}m_2^*m_0^{*2}m_0^2 - \frac{6038}{273}S_{30}m_2^*m_0^*m_2 - \frac{61}{39}S_{30}m_1^{*2}m_0^*m_0^2 - \frac{2138}{273}S_{30}m_1^{*2}m_2 - \frac{40}{13}S_{30}m_1^*m_0^{*2}m_1m_0 - \frac{2824}{91}S_{30}m_1^*m_0^*m_3 + S_{30}m_0^{*4}m_0^3 + 24S_{30}m_0^{*3}m_2m_0 - \frac{37}{3}S_{30}m_0^{*3}m_1^2 - S_{40}m_5^* + \frac{8}{3}S_{40}m_3^*m_0^*m_0 + \frac{4}{3}S_{40}m_2^*m_1^*m_0 + \frac{50}{9}S_{40}m_2^*m_0^*m_1 + \frac{17}{9}S_{40}m_1^{*2}m_1 - \frac{13}{3}S_{40}m_1^*m_0^{*2}m_0^2 - \frac{3433}{189}S_{40}m_1^*m_0^*m_2 - \frac{104}{27}S_{40}m_0^{*3}m_1m_0 - \frac{5993}{189}S_{40}m_0^{*2}m_3 - \frac{58}{39}S_{31}m_5^* + \frac{14530}{819}S_{31}m_2^*m_0^*m_1 + \frac{5021}{819}S_{31}m_1^{*2}m_1 - \frac{536}{91}S_{31}m_1^*m_0^*m_2 - 77S_{31}m_0^{*2}m_3 - S_{50}m_4^* + \frac{68}{21}S_{50}m_2^*m_0^*m_0 + \frac{23}{21}S_{50}m_1^{*2}m_0 + \frac{533}{63}S_{50}m_1^*m_0^*m_1 - \frac{65}{21}S_{50}m_0^{*3}m_0^2 - \frac{507}{49}S_{50}m_0^{*2}m_2 - 2S_{41}m_4^* + \frac{7993}{378}S_{41}m_1^*m_0^*m_1 + \frac{4927}{252}S_{41}m_0^{*2}m_2 - S_{60}m_3^* + \frac{30}{7}S_{60}m_1^*m_0^*m_0 + 7S_{60}m_0^{*2}m_1 - \frac{41}{18}S_{51}m_3^* + \frac{27989}{1764}S_{51}m_0^{*2}m_1 - \frac{233}{108}S_{42}m_3^* - S_{70}m_2^* + \frac{17}{5}S_{70}m_0^{*2}m_0 - \frac{52}{21}S_{61}m_2^* - \frac{841}{252}S_{52}m_2^* - S_{80}m_1^* - \frac{8}{3}S_{71}m_1^* - \frac{59}{14}S_{62}m_1^* - \frac{119}{36}S_{53}m_1^* - S_{90}m_0^* - \frac{62}{21}S_{81}m_0^* - \frac{467}{90}S_{72}m_0^* - \frac{125}{21}S_{63}m_0^*$

$$P_{12} = m_{12} - S_{20}m_8^* + \tfrac{38}{17}S_{20}m_6^*m_0^*m_0 + \tfrac{134}{221}S_{20}m_5^*m_1^*m_0 - \tfrac{626}{1105}S_{20}m_5^*m_0^*m_1 + \tfrac{178}{2431}S_{20}m_4^*m_2^*m_0 - \tfrac{482}{1105}S_{20}m_4^*m_1^*m_1 - \tfrac{285}{143}S_{20}m_4^*m_0^{*2}m_0^2 - \tfrac{225084}{12155}S_{20}m_4^*m_0^*m_2 - \tfrac{79}{2431}S_{20}m_3^{*2}m_0 - \tfrac{106}{221}S_{20}m_3^*m_2^*m_1 - \tfrac{2826}{2431}S_{20}m_3^*m_1^*m_0^*m_0^2 - \tfrac{9404}{1105}S_{20}m_3^*m_1^*m_2 + \tfrac{4374}{2431}S_{20}m_3^*m_0^{*2}m_1m_0 - \tfrac{717}{2431}S_{20}m_2^{*2}m_0^*m_0^2 - \tfrac{38762}{12155}S_{20}m_2^{*2}m_2 - \tfrac{621}{2431}S_{20}m_2^*m_1^{*2}m_0^2 + \tfrac{26124}{12155}S_{20}m_2^*m_1^*m_0^*m_1m_0 + \tfrac{2796}{2431}S_{20}m_2^*m_0^{*3}m_0^3 + \tfrac{2421943}{85085}S_{20}m_2^*m_0^{*2}m_2m_0 - \tfrac{160349}{12155}S_{20}m_2^*m_0^{*2}m_1^2 + \tfrac{2826}{12155}S_{20}m_1^{*3}m_1m_0 + \tfrac{2286}{2431}S_{20}m_1^{*2}m_0^{*2}m_0^3 + \tfrac{1584983}{85085}S_{20}m_1^{*2}m_0^*m_2m_0 - \tfrac{96061}{12155}S_{20}m_1^{*2}m_0^*m_1^2 - \tfrac{252}{85}S_{20}m_1^*m_0^{*3}m_1m_0^2 + \tfrac{588}{5}S_{20}m_1^*m_0^{*2}m_2m_1 - \tfrac{21}{85}S_{20}m_0^{*5}m_0^4 - \tfrac{1176}{85}S_{20}m_0^{*4}m_2m_0^2 + \tfrac{504}{85}S_{20}m_0^{*4}m_1^2m_0 - \tfrac{672}{17}S_{20}m_0^{*3}m_2^2 - S_{30}m_7^* + \tfrac{158}{65}S_{30}m_5^*m_0^*m_0 + \tfrac{586}{715}S_{30}m_4^*m_1^*m_0 + \tfrac{483}{143}S_{30}m_4^*m_0^*m_1 + \tfrac{50}{143}S_{30}m_3^*m_2^*m_0 + \tfrac{417}{325}S_{30}m_3^*m_1^*m_1 - \tfrac{1857}{715}S_{30}m_3^*m_0^{*2}m_0^2 - \tfrac{70877}{3575}S_{30}m_3^*m_0^*m_2 + \tfrac{2811}{7150}S_{30}m_2^{*2}m_1 - \tfrac{1602}{715}S_{30}m_2^*m_1^*m_0^*m_0^2 - \tfrac{40597}{3575}S_{30}m_2^*m_1^*m_2 - \tfrac{22281}{7150}S_{30}m_2^*m_0^{*2}m_1m_0 - \tfrac{178687}{7150}S_{30}m_2^*m_0^*m_3 - \tfrac{171}{715}S_{30}m_1^{*3}m_0^2 - \tfrac{13161}{7150}S_{30}m_1^{*2}m_0^*m_1m_0 - \tfrac{453113}{50050}S_{30}m_1^{*2}m_3 + \tfrac{12}{5}S_{30}m_1^*m_0^{*3}m_0^3 +$$

$$\frac{1098}{25}S_{30}m_1^*m_0^{*2}m_2m_0 - \frac{576}{25}S_{30}m_1^*m_0^{*2}m_1^2 + \frac{33}{50}S_{30}m_0^{*4}m_1m_0^2 +$$

$$\frac{749}{25}S_{30}m_0^{*3}m_3m_0 + \frac{403}{5}S_{30}m_0^{*3}m_2m_1 - S_{40}m_6^* + \frac{386}{143}S_{40}m_4^*m_0^*m_0 +$$

$$\frac{162}{143}S_{40}m_3^*m_1^*m_0 + \frac{11722}{2145}S_{40}m_3^*m_0^*m_1 +$$

$$\frac{57}{143}S_{40}m_2^{*2}m_0 +$$

$$\frac{2062}{715}S_{40}m_2^*m_1^*m_1 - \frac{525}{143}S_{40}m_2^*m_0^{*2}m_0^2 - \frac{1962203}{135135}S_{40}m_2^*m_0^*m_2 -$$

$$\frac{333}{143}S_{40}m_1^{*2}m_0^*m_0^2 - \frac{712249}{135135}S_{40}m_1^{*2}m_2 - \frac{124}{15}S_{40}m_1^*m_0^{*2}m_1m_0 -$$

$$\frac{39944}{945}S_{40}m_1^*m_0^*m_3 + \frac{5}{3}S_{40}m_0^{*4}m_0^3 +$$

$$\frac{2552}{135}S_{40}m_0^{*3}m_2m_0 - \frac{478}{27}S_{40}m_0^{*3}m_1^2 - \frac{3956}{135}S_{40}m_0^{*2}m_4 - \frac{73}{50}S_{31}m_6^* +$$

$$\frac{11784}{715}S_{31}m_3^*m_0^*m_1 + \frac{6432}{715}S_{31}m_2^*m_1^*m_1 - \frac{2823}{650}S_{31}m_2^*m_0^*m_2 -$$

$$\frac{8079}{4550}S_{31}m_1^{*2}m_2 - \frac{2586}{25}S_{31}m_1^*m_0^*m_3 - \frac{177}{5}S_{31}m_0^{*3}m_1^2 -$$

$$S_{50}m_5^* + \frac{34}{11}S_{50}m_3^*m_0^*m_0 + \frac{18}{11}S_{50}m_2^*m_1^*m_0 + \frac{831}{110}S_{50}m_2^*m_0^*m_1 +$$

$$\frac{587}{220}S_{50}m_1^{*2}m_1 - \frac{65}{11}S_{50}m_1^*m_0^{*2}m_0^2 - \frac{45656}{3465}S_{50}m_1^*m_0^*m_2 -$$

$$\frac{871}{132}S_{50}m_0^{*3}m_1m_0 - \frac{1079}{45}S_{50}m_0^{*2}m_3 - \frac{382}{195}S_{41}m_5^* + \frac{220741}{12285}S_{41}m_2^*m_0^*m_1 +$$

$$\frac{78461}{12285}S_{41}m_1^{*2}m_1 + \frac{26252}{945}S_{41}m_1^*m_0^*m_2 - \frac{3364}{45}S_{41}m_0^{*2}m_3 - S_{60}m_4^* +$$

$$\frac{26}{7}S_{60}m_2^*m_0^*m_0 +$$

$$\frac{9}{7}S_{60}m_1^{*2}m_0 + \frac{74}{7}S_{60}m_1^*m_0^*m_1 - \frac{85}{21}S_{60}m_0^{*3}m_0^2 - \frac{506}{63}S_{60}m_0^{*2}m_2 -$$

$$\frac{489}{220}S_{51}m_4^* + \frac{156559}{6930}S_{51}m_1^*m_0^*m_1 + \frac{21619}{990}S_{51}m_0^{*2}m_2 - \frac{401}{195}S_{42}m_4^* +$$

$\frac{548}{9}S_{42}m_0^{*2}m_2 - S_{70}m_3^* + \frac{34}{7}S_{70}m_1^*m_0^*m_0 + \frac{1751}{210}S_{70}m_0^{*2}m_1 -$
$\frac{12}{5}S_{61}m_3^* + \frac{5392}{315}S_{61}m_0^{*2}m_1 - \frac{1039}{330}S_{52}m_3^* - S_{80}m_2^* + \frac{19}{5}S_{80}m_0^{*2}m_0 -$
$\frac{107}{42}S_{71}m_2^* - \frac{409}{105}S_{62}m_2^* - \frac{5867}{1980}S_{53}m_2^* - S_{90}m_1^* - \frac{474}{175}S_{81}m_1^* -$
$\frac{478}{105}S_{72}m_1^* - \frac{1588}{315}S_{63}m_1^* - S_{100}m_0^* - \frac{119}{40}S_{91}m_0^* - \frac{27}{5}S_{82}m_0^* -$
$\frac{1487}{210}S_{73}m_0^* - \frac{439}{90}S_{64}m_0^*$

Sajnos nem sikerült a képletek alapján egyszerű általános formulát találni a momentumokra. A Kerr-metrikára $M_{ik} = 0$.

Miért hasznosak a momentumokra kapott képletek?

(I) Tetszőleges tengelyszimmetrikus, stacionárius és aszimptotikusan sík téridőnek ki tudjuk számolni a momentumait, ha ki tudjuk számolni $\tilde{\xi}$-nek a szimmetriatengelyen való sorfejtési együtthatóit.

(II) Próbálhatunk olyan téregyenletmegoldásokat keresni, amelyekre csak az első n momentum nem nulla. Ezzel úgy kisérletezhetünk, hogy az n-nél magasabb rendű momentumokra kapott kifejezéseket nullával tesszük egyenlővé, és a kapott egyenleteket próbáljuk megoldani a sorfejtési együtthatókra.

18. A MOMENTUMOK TRANSZFORMÁCIÓJA

Meg lehet próbálkozni azzal, hogy más Ω választással esetleg egyszerűbb kifejezéseket kapunk a momentumokra. Ehhez nem szükséges az egész számolást újrakezdeni, mert a $P^{(n)}_{i_1 \dots i_n}$ tenzormezők (6.1) transzformálódási szabálya felhasználásával kiszámolhatjuk a P_n skalár momentumok transzformálódási képletét.

A skalármomentumok (9.2) alakjába beírva a (6.1) transzformálódási képletet :

$$\bar{P}_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(2n-1)!!}{(2k-1)!!}(-2)^{k-n}\mathcal{C}\Big[\big(P^{(k)}_{i_1 \dots i_k}\tilde{D}_{i_{k+1}}\omega \dots \tilde{D}_{i_n}\omega\big)^{(n)}_{2 \dots 2}\Big]_\Lambda \tag{18.1}$$

Felhasználva, hogy

$$P^{(k)}_{i_1\dots i_k} = \mathcal{C}\big(S^{(k)}_{i_1\dots i_k}\big), \tag{18.2}$$

a P tenzor helyébe az S tenzor írható. Az $S^{(k)}_{i_1\dots i_k}$ tenzort úgy definiáltuk, hogy nincs hármas indexű komponense, és a tengelyszimmetria miatt az ω függvény deriváltjának sincs forgás irányú, azaz hármas indexű komponense. Ezért a sputalanítás (12.1) képletében nem fordul elő h^{33}, ami szinguláris a Λ pontban, és így a spurtalanítást fel lehet cserélni a Λ pontba tartással. Az $S^{(k)}_{i_1\dots i_k}$ tenzornak a szimmetriatengelyen csak a csupa kettes indexű komponense nem nulla, és a szimmetria és a deriválhatóság miatt a tengelyen az ω deriváltjának is csak a kettes komponense lehet nullától különböző. Ezért egy olyan n indexes tenzort kell spurtalanítanunk, amelynek csak a csupa kettes indexű komponense nem nulla, és az eredménynek is csak a csupa kettes indexű komponensére van szükség. Ezt a (15.2) képlet alapján úgy kell elvégezni, hogy az egyetlen nem nulla komponenst szorozzuk $\frac{n!}{(2n-1)!!}$ -al. $S^{(k)}_{i_1\dots i_k}$ kiszámolására használjuk még fel a (15.3) összefüggést, így a skalár momentumok transzformálódási szabálya a következő alakba írható :

$$\bar{P}_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{-\tilde{D}_2\omega}{2} \right)_{\Lambda}^{k-n} P_k \tag{18.3}$$

Klasszikus esetben, ha a rendszer tömegközéppontjára vonatkoztatva számoljuk a multipólusmomentumokat, a dipólusmomentumra nullát kapunk. Mivel görbült térben a momentumok komplexek, ez nem tehető meg, de alkalmasan választva $D_2\omega$-t elérhető, hogy a dipólusmomentum valós része nulla legyen. Ez azért is jelentős, mert így a momentumok értékét függetlenné tehetjük Ω választásától.

Nyilván csak valós ω-nak van fizikai jelentése, de komplex transzformációval is próbálhatjuk egyszerűbbé tenni a képleteket. Hansen [2] kiszámolta a Kerr megoldás momentumait, $P_n = m(ia)^n$. $\tilde{D}_2\omega = 2ia$ választásnál a transzformált momentumok közül csak a nulladik momentum nem tűnik el, $\bar{P}_0 = m$, azaz a Schwarzschild-téridő momentumait kapjuk. Más tereknél is próbálkozhatunk azzal, hogy komplex $\bar{\Omega} = \omega\Omega$

választással egyszerűbb alakba írhatók-e a momentumok. Ha igen, akkor a momentumokat az egyszerűbb tér momentumaiból a (18.3) képlet segítségével kaphatjuk.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönetet mondok Perjés Zoltánnak, hogy elvállalta a témavezetésemet. ő ajánlotta a gravitációs multipólusmomentumok témakörét diplomamunkának. Munkámat nagy figyelemmel kisérte, és rengeteg hasznos segítséget nyújtott a dolgozat elkészítése során.

IRODALOM

[1] R. Geroch, J. Math. Phys. 11, 2580 (1970) I-II.

[2] R. O. Hansen, J. Math. Phys. 15, 46 (1974)

[3] C. Hoenselaers a *Gravitational Collapse and Relativity*, című kötetben, szerkesztők: H. Sato és T. Nakamura, World Scientific (1986)

[4] W. Simon and R. Beig, J. Math. Phys. 24, 1163 (1983), F. J. Ernst a *Solutions of Einstein's Equations, Techniques and Results* című kötetben, szerkesztők: C. Hoenselaers és W. Dietz, Springer, Heidelberg (1984)

[5] R. Beig, Acta Phys. Austriaca 53, 249 (1981)

[6] R. Geroch, J. Math. Phys. 12, 918 (1971)

[7] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis : *The Large Scale Structure of Space Time* , Cambridge (1973)

[8] R. Penrose, Proc. Roy. Soc. (London), A284, 159 (1965)

[9] F. J. Ernst, Phys. Rev. 167, 1175 (1968)

[10] Perjés Zoltán, *Stacionárius gravitációs terek tulajdonságai*, Magyar Fizikai Folyóirat (1976)

[11] C. Hoenselaers, Prog. Theor. Phys. 56, 324 (1976)

[12] B. Singer, Diplomarbeit, Universität Würzburg (1985)

[13] A. Hearn; Reduce user's manual, the Rank Co., Santa Monica, (1983)