

Skalármezők által létrehozott lokalizált állapotok

MTA doktori értekezés

Fodor Gyula

MTA Wigner Fizikai Kutatóközpont

Részecske- és Magfizikai Intézet



Budapest, 2019

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	4
2. Lokalizált állapotok rögzített háttéren: oszcillonok	11
2.1. Nemlineáris skalármezők rögzített háttéren	11
2.2. Skalármező Minkowski háttéren	12
2.3. A sine-Gordon breather	13
2.4. Ozcillonok (pulzonok) története	14
2.5. Ozcillonok fizikai alkalmazásai	17
2.6. Ozcillonok időfejlődése	18
2.6.1. Kölcsönhatási potenciál és kezdőadat	18
2.6.2. Numerikus módszerek az időfejlődés vizsgálatára	20
2.6.3. Az általunk használt numerikus módszer	23
2.6.4. Gauss kezdőadat időfejlődése	26
2.6.5. Majdnem-periodikus állapotok	30
2.7. Kvázibreatherek és nanopteronok	35
2.7.1. Időperiodikus állapotok	35
2.7.2. Kvázibreatherek numerikus vizsgálata	40
2.7.3. Ozcillonok és kvázibreatherek kapcsolata	48
2.7.4. Kvázibreather kezdőadat időfejlődése	53
2.8. Kis-amplitúdós kifejtés	58
2.8.1. A módszer leírása	58
2.8.2. Az alapegyenlet	63
2.8.3. Magasabb rendek a kifejtésben	66
2.8.4. Az energia	70
2.8.5. Kifejtés a ϕ^4 potenciál esetére	71
2.8.6. Kezdőadat numerikus időfejlődése	75

2.9.	A sugárzási amplitúdó analitikus meghatározása	78
2.9.1.	Oscillonok és kvázibreatherek kapcsolata	78
2.9.2.	Egydimenziós tér szimmetrikus potenciállal	80
2.9.3.	A belső tartomány egyenleteinek numerikus megoldása	85
2.9.4.	Analitikus módszer a korrekció számolására	90
2.9.5.	Nem szimmetrikus potenciálok	95
2.9.6.	Gömbszimmetrikus oscillonok sugárzása	101
2.9.7.	ε rendű korrekció magasabb dimenziónál	108
2.10.	Oscillonok sugárzásának numerikus vizsgálata	113
3.	Relativisztikus öngravitáló skalármezők: oszcillatonok	119
3.1.	Az oszcillatonok története	119
3.2.	Relativisztikus skalármezők	125
3.2.1.	A rendszert leíró egyenletek	125
3.2.2.	Tömeg gömbszimmetria esetén	127
3.2.3.	Térben konformisan sík koordináták	129
3.3.	Oscillatonok kis-amplitúdós kifejtése $\Lambda = 0$ esetén	131
3.3.1.	A koordináták megválasztása	131
3.3.2.	Vezető rendű eredmények	133
3.3.3.	A Schrödinger-Newton egyenletek	135
3.3.4.	A kifejtés magasabb rendjei	137
3.3.5.	Oscillatonok tömege, frekvenciája és mérete	140
3.4.	Oscillatonok sugárzási törvénye $\Lambda = 0$ esetén	144
3.4.1.	Fourier kifejtés	145
3.4.2.	Szingularitások a komplex síkon	147
3.4.3.	A Fourier módusok kifejtése a szingularitás környezetében	149
3.4.4.	A szinguláris breather megoldás a szingularitás környezetében	151
3.4.5.	A kvázibreather és az oszcillaton előállítása	154
3.4.6.	A tömegveszteségi ráta kis amplitúdóknál	155
3.4.7.	Farok amplitúdó	156
3.5.	Kvázibreatherek numerikus vizsgálata $\Lambda = 0$ esetén	158
3.5.1.	Aszimptotikus viselkedés	158
3.5.2.	Spektrális numerikus módszer	159
3.5.3.	Illesztési feltételek a külső határon	160
3.5.4.	A numerikus rendszer	161

3.5.5.	A rezgő farok amplitúdójának minimalizálása	162
3.5.6.	Numerikus eredmények	163
3.5.7.	A kis-amplitúdós kifejtéssel való összehasonlítás	167
3.5.8.	A tömegveszteségi ráta nagy amplitúdóknál	169
3.6.	Oscillatonok pozitív kozmológiai állandó esetén	172
3.6.1.	Kis-amplitúdós kifejtés	174
3.6.2.	A sugárzás meghatározása	177
4.	Összefoglalás és kitekintés	182
	Irodalomjegyzék	185

1. fejezet

Bevezetés

A fizika egyik alapvető kérdése, hogy a rendelkezésre álló anyag milyen módon hozhat létre térben lokalizált csomósodásokat és mi akadályozza meg, hogy szétesve, elpárologva vagy kisugárzódva, az anyag és az energia egyenletesen kitöltse a rendelkezésre álló teret. Ebben az értekezésben a problémát egy olyan elméleti oldalról közelítjük meg, ahol azokat a legegyszerűbb klasszikus térelméleti modelleket tanulmányozzuk, amelyekben hosszú élettartamú lokalizált állapotok megjelenhetnek. Így betekintést kaphatunk abba is, hogy milyen tulajdonságokkal kell rendelkeznie egy elméletnek ahhoz, hogy ilyen struktúrák egyáltalán létezhesenek. A legegyszerűbb modellekben megjelenő állapotoknak megfelelő objektumok természetesen a sokkal általánosabb, összetettebb, fizikailag is relevánsabb elméletekben is jó eséllyel megjelenhetnek. A létrejövő struktúrák jellemző mérete a részecskéktől a galaxis halmozokig terjedhet, az elméletben lévő paraméterektől, mint például a skalármező tömegétől függően.

A legegyszerűbb klasszikus relativisztikus térelméleti modellnek tekinthető az az elmélet amelyben csupán egyetlen valós ϕ skalármező szerepel 1 + 1 dimenziós rögzített Minkowski háttéren. A ϕ skalár a t idő és x térkoordinátától függ, és az általa kielégítendő differenciálegyenlet

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = U'(\phi) , \quad (1.1)$$

ahol $U'(\phi)$ a skalár önkölcsönhatását meghatározó $U(\phi)$ potenciál ϕ szerinti deriváltját jelöli. Megfelelő $U(\phi)$ potenciál választása esetén ebben a modellben már létrejöhet többféle lokalizált állapot is. A legtöbbet vizsgált esetek a szimmetrikusan két minimummal rendelkező negyedrendű ϕ^4 potenciál, $U(\phi) = (\phi^2 - 1)^2/4$, és a végtelen sok egyforma minimummal rendelkező sine-Gordon potenciál, $U(\phi) = 1 - \cos \phi$. Mind a két modellben létezik a *kink* megoldás, amely két különböző vákuum tartomány határánál alakul ki. A kink megoldás a

szolitonok osztályába tartozik. A szolitonok állandó sebességgel haladó nemlineáris hullámcsomagok, amelyek a terjedés során megőrzik alakjukat, sőt még egymással való ütközés során is nagyfokú stabilitást mutatnak. Szolitonok számos fizikai rendszerben megjelennek. Felfedezésük John Scott Russell skót mérnök nevéhez fűződik, aki 1834-ben egy csatorna mellett lovagolva több kilométeren keresztül követett egy stabil hullámcsomagot. Ha a kink sebességével mozgó rendszerből tekintjük a megoldást, akkor a legegyszerűbb sztatikus, vagyis időfüggetlen, kink megoldáshoz jutunk, melynek alakja $\phi = 4 \arctan(\pm \exp x)$. Ez csak ebben az alacsony dimenziós esetben jelent részecskeszerű megoldást, ugyanis a Derrick tétel értelmében nem létezhetnek stabil sztatikus lokalizált megoldások három vagy több térdimenzió esetén [1].

Az $1 + 1$ dimenziós kink megoldás esetén az energiasűrűség túlnyomó része valóban egy kis tartományra korlátozódik, de a kink mégsem lokalizált megoldás olyan értelemben, hogy a pozitív és negatív irányokban különböző vákuum állapotokhoz tart. A kinkok $3 + 1$ dimenziós megfelelője nem is a tér egy pontjának környezetében lokalizált részecskeszerű állapot, hanem egy doménfal, ami csak az egyik térszerű irányban lokalizált.

A sine-Gordon elméletben létező másik részecske-szerű megoldás a *sine-Gordon breather* néven ismert. (Alakját később a (2.14) egyenletben írjuk fel.) Megoldások egyparaméteres serege létezik, amelyeket a rezgés frekvenciájával paraméterezhetünk. A breather egy időben periodikusan rezgő („lélegző”) exponenciálisan lokalizált egzakt megoldás, amely stabil és nem sugároz ki energiát a végtelenbe. A sine-Gordon breathernél a skalármező a pozitív és a negatív irányban is ugyanahhoz vákuum értékhez tart, így létezhet $3 + 1$ dimenziós gömb-szimmetrikus általánosítása. Meglepő módon egy kink és annak térben tükrözött változata, vagyis antikink, ütközésekor nem jöhet létre sine-Gordon breather. Az ütközést leíró egzakt megoldás szerint a kink és az antikink sebességvesztés nélkül haladnak át egymáson. Ez az integrálható sine-Gordon elmélet egy kivételes tulajdonsága, mivel ekkor az elméletben létező végtelen sok megmaradó mennyiség miatt a felesleges energia nem képes a végtelenbe kisugárzódni. Ennek ellenére, a sine-Gordon breather kétségtelenül egy kink és egy antikink kötött állapotának tekinthető.

Az $1 + 1$ dimenziós sine-Gordon elmélet nagyon speciális abban az értelemben is, hogy ez az egyetlen valós skalárelmélet, ahol valóban periodikus exponenciálisan lokalizált breather megoldás létezik. A többi modellben, a magasabb dimenziós sine-Gordont is beleértve, nemcsak hogy egzakt megoldás nem ismert, de numerikus módszerekkel sem található véges energiával rendelkező időben periodikus megoldás. Precíz matematikai módszerekkel is belátható, hogy csak az $1 + 1$ dimenziós sine-Gordon modell esetén létezik breather megoldások egyparaméteres családja [2]. Ilyen módon, a keresett lokalizált megoldások közül a sztatikus

és a periodikus megoldások is ki vannak zárva.

Ennek ellenére, meglepő módon az önkölcsönható valós skalármező mégis létrehozhat hosszú élettartamú lokalizált rezgő megoldásokat, amelyek azonban skalár kisugárzásával energiát veszítenek és emiatt frekvenciájuk lassan változik. Ezeket az objektumokat először pulzonoknak hívták [3, 4], de később mégis az *oszcillon* név terjedt el az irodalomban [5, 6]. Például, az $1 + 1$ dimenziós ϕ^4 elméletben egy kink és antikink ütközésekor a felesleges energia kisugárzása után könnyen létrejöhetnek oszcillonok [7]. Az oszcillonok fontosságát az növeli meg jelentősen, hogy nem kivételes állapotok, hanem általános kezdőadatokból is számos esetben könnyen kifejlődnek. Egynél több térdimenzió esetén az oszcillonok energia kisugárzásával rövid idő alatt gömbszimmetrikussá válnak [8]. Oszcillonokat numerikusan nagyon könnyen elő lehet állítani egy általános harang formájú, például Gauss görbével leírható, gömbszimmetrikus kezdőadat időfejlődésének követésével. Az általánosabb numerikus szimulációk szerint oszcillonok létrejönnek véletlenszerűen kiválasztott nem gömbszimmetrikus kezdeti feltételekből is [9]. Ez azt valószínűsíti, hogy a korai univerzumban az inflaton mezőből vagy az ahhoz csatolt skalármezőkből kialakulva jelentős szerepet játszhattak. Az oszcillonok kialakulása és elbomlása során megnövekedhet a gravitációs hullámok kibocsátása, ami a gravitációs hullámok spektrumán érzékelhető csúcsokként mérhetővé válhat [10, 11, 12, 13, 14, 15].

Az oszcillonok létezésében az elmélet nemlinearitása lényeges szerepet tölt be. Az oszcillonok nem írhatók le elsőrendű lineáris perturbáció segítségével. Kis amplitúdójú megoldások léteznek, de minél kisebb az amplitúdó annál nagyobbá válik az oszcillon térbeli mérete. Ez szükséges ahhoz, hogy a nemlinearitás hatása kicsi amplitúdóknál is érvényre juthasson. Többféle kölcsönható mezőt tartalmazó elméletekben is kialakulnak oszcillonok, mint például a standard modell bozonikus szektorában, azon feltevés mellett, hogy a Higgs tömeg a W^\pm bozon tömegének kétszerese [16, 17, 18]. Az ábeli Higgs modellekben is létrejöhetnek oszcillonok szfaleronok bomlásakor, vortex antivortex párok ütközésekor vagy szimmetriasértés eredményeképp [19, 20, 21, 22, 23, 24].

Habár a skalármező által létrehozott oszcillonok klasszikus térelméleti megoldások, nagy számú azonos részecske által létrehozott kollektív kvantum állapotoknak is tekinthetők. Mielőtt még numerikusan is megmutatták volna az oszcillonok létezését, 1975-ben megjelent cikkükben Dashen, Hasslacher és Neveu az általuk kidolgozott szemiklasszikus WKB módszer alkalmazásai során jutott el $1 + 1$ dimenziós sine-Gordon breather és ϕ^4 oszcillonok tanulmányozásához [25]. A kis amplitúdójú oszcillonokat stabil időperiodikus megoldásnak tekintve, az ezek körüli perturbációk kvantálásával számolták ki az energiaszinteket gyenge csatolásnál. A szemiklasszikus módszert Hertzberg alkalmazta oszcillonok sugárzásának meg-

határozására [26]. Inhomogén Hartree közelítés és numerikus módszerek segítségével a [27] cikkben vizsgálták kvantumelméleti rendszernek tekintett oszcillonok időfejlődését és sugárzását.

A doktori értekezés 2. fejezetében, az oszcillonokkal kapcsolatos legfontosabb cikkek áttekintése után, a sugárzásukkal kapcsolatos saját eredményeinket mutatom be részletesen [28, 29, 30, 31]. A kivételes sine-Gordon breathertől eltekintve az összes oszcillon megoldás lassan energiát veszít skalármező kisugárzásával. Ez a sugárzás bizonyos esetekben annyira kicsi lehet, hogy csak extrém pontos numerikus módszerekkel lehet esély a kimutatására. Sokáig nem volt tisztázott, hogy létezhetnek-e valóban periodikusan rezgő nem sugárzó megoldások. Gauss típusú kezdőadat paramétereinek változtatásával 2002-ben Honda és Choptuik 125 rezonancia csúcsot talált, amelyek periodikusnak tűnő oszcillonoknak feleltek meg [32]. Oszcillonokkal kapcsolatos első cikkünkben megmutattuk, hogy az ezekhez a csúcsokhoz tartozó állapotok valójában az alacsony amplitúdójú instabil tartományba tartozó oszcillonok, amelyek ha nagyon kis mértékben is, de kimutathatóan sugároznak [28]. Ehhez szükséges volt egy negyedrendű Runge-Kutta eljárással számoló nagyfelbontású numerikus kód kifejlesztése, amely képes megbízhatóan leírni egyidejűleg a egyhez közeli amplitúdójú mag tartományt, és a 10^{-6} amplitúdóra is lecsökkenő sugárzó farok zónát.

Ha az oszcillon sugárzási veszteségét ugyanolyan amplitúdójú és frekvenciájú bemenő hullám segítségével kompenzáljuk, akkor egy időben egzaktul periodikus megoldást kaphatunk, amelynél egy kis amplitúdójú állóhullám farok jelenik meg a mag tartományon kívül. A gömbszimmetrikus állóhullám farok bármilyen nagy távolságokra kiterjed, és lecsengése annyira lassú, hogy a teljes energia végtelen nagynak adódik. Az így kapott időben periodikus megoldás nem lokalizált, de mégis létezik egy mag tartománya, ahol az energiasűrűség nagyságrendekkel nagyobb mint a farok zónában. Egy adott frekvenciánál a minimális farok-amplitúdóval rendelkező megoldásra bevezettük a *kvázibreather* elnevezést [28]. A kvázibreather rendelkezik egy nagy amplitúdójú határozott mag tartománnyal. Ennek külső részétől indulva, a közbülső tartományban, a skalármező exponenciálisan nullához tart, de egy bizonyos amplitúdó alá érve a skalármező egy minimális amplitúdójú állóhullám farokban folytatódik. A kvázibreather állóhullám farkának amplitúdója megegyezik az oszcillon sugárzó farkának amplitúdójával. A kvázibreather bevezetésének nagy előnye, hogy numerikusan sokkal pontosabban számolható mint a változó frekvenciájú oszcillon. A skalármező idő szerinti Fourier kifejtésének komponenseire felírt csatolt közönséges differenciálegyenleteket spektrális módszerrel működő numerikus kód segítségével nagyon nagy pontossággal meg tudtuk oldani. Így olyan esetekben is pontosan meg tudtuk határozni a sugárzás mértékét, amikor az időfejllesztési kóddal az állapot már teljesen periodikusnak tűnik.

Az oszcillonok mag tartományát nagy pontossággal le lehet írni egy az amplitúdót jellemző ε paraméter hatványai szerinti kifejtés segítségével [33, 25, 34, 35, 36, 2]. Az $\varepsilon \rightarrow 0$ határesetben az oszcillon mérete $1/\varepsilon$ szerint tart a végtelenhez. Egy $\rho = \varepsilon r$ átskálázott radiális koordináta használatával már jól értelmezhető a kis-amplitúdós oszcillonok fogalma. A kifejtés vezető rendje meghatározza a skalár vezető rendben való $\cos(\omega t)$ harmonikus időfüggését. A magasabb rendekben megjejenő konzisztencia feltételek megadják a kis amplitúdós oszcillonok térbeli alakját. Mivel az alakot meghatározó egyenletnek csak $d = 1, 2, 3$ térdimenzió esetén van lokalizált megoldása, kis amplitúdójú oszcillonok csak ezeknél a dimenzióknál létezhetnek. Az oszcillon ω frekvenciája és az amplitúdó paraméter közötti összefüggés minden esetben az $\omega^2 = 1 - \varepsilon^2$ alakban választható. A kifejtés magas rendekig való kidolgozását a [29] cikkünkben mutattuk be részletesen. A formalizmusból kiderül az is, hogy milyen $U(\phi)$ önkölcsönhatási potenciál esetén létezhetnek kis amplitúdójú oszcillonok. Szimmetrikus potenciálok esetén a létezés szükséges feltétele, hogy $U(\phi)$ a harmonikus Klein-Gordon potenciálnál laposabban viselkedjen a minimum környezetében.

A kis-amplitúdós kifejtés magasabb rendjei jó közelítéssel megadják az oszcillon teljes energiájának az $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ frekvenciától való függését. Nagyobb amplitúdóknál a pontos függést a kvázibreather magjához tartozó energia spektrális kóddal való számolásával kaphatjuk. Kis ε értékeknél az energia ε^{2-d} szerint változik, ahol d a térbeli dimenziók száma. Az energia központi amplitúdótól való függése azért fontos, mert meghatározza a rendszer stabilitását. Könnyen ellenőrizhető, hogy az ε amplitúdó növekedésével a középpont környezetében az energiasűrűség monoton növekszik. Általános elv szerint, ha az energiasűrűség növekedésével a rendszer tömege is növekszik, akkor az objektum stabil, egyébként instabil. Az energia ε^{2-d} szerinti függéséből látszik, hogy egy és két térdimenzió esetén a kis amplitúdóval rendelkező oszcillonok stabilak, míg $d = 3$ esetén instabilak. Ezt az eredményt a numerikus szimulációk is egyértelműen megerősítik.

A fizikailag jelentős $3 + 1$ dimenziónál az $\varepsilon \rightarrow 0$ határesetben az oszcillon energiája végtelenhez tart. Az amplitúdót meghatározó ε növelésével az energia egy bizonyos ε_c kritikus értéknél eléri minimumát, és onnan növekedni kezd. A kritikus amplitúdó spektrális numerikus számolásainkból adódó értéke $\varepsilon_c = 0.254$, amelyhez az $\omega_c = 0.967$ frekvencia tartozik. Oszcillonok $\omega < \omega_c$ frekvenciával stabilak, míg $\omega \geq \omega_c$ esetén instabilak. A $d = 3$ esetben az általános Gauss formájú kezdőadatból létrejövő oszcillonok kezdetben $\omega < \omega_c$ frekvenciával rezegnek. Az energiaveszteség hatására ε lassan csökken, ω pedig növekszik az idő múlásával. Általában pár száz, de legfeljebb néhány ezer rezgés után a frekvencia eléri az ω_c kritikus értéket, és az oszcillon hirtelen elbomlik. Egy vagy kettő térdimenzió esetén egész más az oszcillonok viselkedése. Ezekben az esetekben a kialakult oszcillonok a sugárzás hatására

nem tudnak kilépni a stabil tartományból, és mivel az energiaveszteség az amplitúdó csökkenésével exponenciálisan csökken soha nem veszíthetik el az összes energiájukat. A $d = 3$ dimenziós esettel ellentétben, a $d = 1$ és $d = 2$ dimenziós oszcillonok élettartama végtelen nagy.

Habár a kis-amplitúdós kifejtés jól megadja a mag tartományt kis és közepes amplitúdók esetén, az ε -ban exponenciálisan kicsi sugárzó farkat nem képes leírni. Ez szoros kapcsolatban van azzal, hogy az ε szerinti kifejtés nem konvergens, hanem aszimptotikus sor. Az időben periodikus kvázibreathert leíró Fourier komponensekre vonatkozó egyenletek viszont adott frekvencia esetén egyértelműen meghatározzák a sugárzásért felelős minimális állóhullám farkok nagyságát. A kis-amplitúdós kifejtés és az idő szerinti Fourier kifejtés egyenleteit egyaránt kiterjesztve az r radiális koordináta komplex értékeire, a farkok nagyságát meghatározhatjuk a mennyiségek komplex r síkon való szingularitásának környezetében való viselkedése alapján. A módszert Segur és Kruskal vezette be 1987-ben, $1 + 1$ dimenziós oszcillonok esetére [34]. A [30] cikkünkben az eljárást a Borel összegzés módszerével egészítettük ki, és szimmetrikus $U(\phi)$ potenciál esetén analitikusan is meghatároztuk a sugárzási amplitúdót. Két és három térdimezió esetére a [31] publikációnkban általánosítottuk az eljárást. A doktori értekezés 2.9 fejezetében részletekbe menően elmagyarázzuk a cikkekben eléggé tömören leközölt bonyolult eljárást. A sugárzási farkok nagyságára nagy központi amplitúdók esetén kiszámolt numerikus eredményekkel összehasonlítva látható, hogy a két eljárás egymást kiegészítő konzisztens eredményt ad a különböző amplitúdó tartományokban.

A doktori értekezés 3. fejezetében a gravitációval kölcsönható valós skalármező által létrehozott lokalizált állapotokat vizsgáljuk az általános relativitáselmélet keretében. A skalár önkölcsönhatását meghatározó $U(\phi)$ potenciál ekkor a tömeges Klein-Gordon skalárnak megfelelő $U(\phi) = m\phi^2/2$ is lehet, mert a gravitáció miatt már ebben a legegyszerűbb esetben is megjelenik az elméletben a szükséges nemlinearitás. Rögzített sík háttéren a Klein-Gordon skalárt leíró egyenletek lineárisak, és így nem hozhatnak létre oszcillonokat. Az gravitáló esetben viszont a legtöbbet tanulmányozott eset éppen a tömeges Klein-Gordon skalár. Talán ezért is alakult ki és fejlődött teljesen külön az öngravitáló skalármezők által létrehozott lokalizált objektumok elmélete a sík háttéren definiált oszcillonokétól. Seidel és Suen 1991-ben numerikus módszerekkel talált öngravitáló valós skalármező által létrehozott periodikusnak tűnő gömbszimmetrikus lokalizált állapotokat, amelyeknek az *oszcillaton* nevet adták [37, 38]. Az oszcillonokhoz feltűnően hasonló elnevezés ellenére, az esetek többségében, az egyik témáról szóló cikkekben sem történik hivatkozás a másikkal kapcsolatos irodalomra.

Az oszcillatonokkal kapcsolatos vizsgálatok többsége a fizikailag fontos $3 + 1$ dimenziós esetre korlátozódik. Mint korábban láttuk, a $3 + 1$ dimenziós sík háttéren definiált oszcillonok

néhány ezer rezgés után hirtelen elbomlanak. Ezzel szemben, a $3 + 1$ dimenziós öngravitáló oszcillatonok élettartama végtelen, viselkedésük az $1 + 1$ és $2 + 1$ oszcillonokéhoz hasonló. Az oszcillatonok Gauss formájú kezdőadatokból is könnyen kifejlődnek, és nem szimmetrikus kezdőadatokból is gömbszimmetrikus oszcillatonok jönnek létre a felesleges tömeg gyors kisugárzásával. Az oszcillatonok sugárzása valójában annyira kicsi, hogy sokáig hallgatólagosan azt feltételezték, hogy időben periodikusak. Még az idő szerinti Fourier kifejtést alkalmazó számolásokban sem találtak a sugárzásra utaló jeleket. Ez érthető annak fényében, hogy a maximális tömegű stabil oszcillatonnál, ahol a sugárzó faroknak a középponti amplitúdóhoz való aránya a legnagyobb, a sugárzó farok amplitúdója 10^{-8} rendű, míg a mag tartományban 0.5 körüli.

Elsőnek Don Page mutatott rá 2003-ban, hogy az oszcillatonoknak szükségképpen sugározniuk kell, vagyis nem lehetnek időben egzaktul periodikusak [39]. Az elveszített energia miatt az amplitúdójuk és frekvenciájuk nagyon lassan változik az idő múlásával. A [40] cikkünkben a sugárzás nagyságának meghatározásához a korábban oszcillonokra kifejlesztett eljárást általánosítottuk oszcillatonok esetére. Egy következő cikkben spektrális módszert alkalmazó numerikus számolással is meghatároztuk a sugárzás mértékét, és az analitikus eredményeinkkel konzisztens értékeket kaptunk [41]. Pozitív de kicsi kozmológiai állandó tovább növeli a sugárzás mértékét, de az még mindig exponenciálisan kicsi marad [42]. A doktori értekezés 3. fejezetében a [40, 42, 41] cikkekben közölt oszcillatonokkal kapcsolatos eredményeket ismertetem részletesen.

Az oszcillatonoknak számos fizikai alkalmazását javasolták eddig az irodalomban. Kozmológiai modellekben szereplő skalármezők által létrehozott oszcillatonok alkalmasak lehetnek a galaxisokban lévő sötét anyag modellezésére [43, 44]. Az oszcillatonok kialakulásához szükséges valós skalármezőt a legtermészetesebb módon az axionok és hasonló alacsony tömegű gyengén kölcsönható hipotetikus bozon részecskék adhatják [45, 46, 47, 48]. Ha a skalármező önkölcsönhatását az axionokra jellemző $U(\phi)$ potenciál határozza meg, akkor bizonyos cikkekben a kialakuló oszcillatonokat axion-csillagoknak nevezik [49, 50, 51]. Axion-szerű mezők fejlődését vizsgáló kozmológiai szimulációk azt mutatják, hogy a formálódó diffúz sötét anyagcsomók középső részén oszcillatonoknak megfelelő szoliton magok jönnek létre [52, 53]. Nagyon alacsony tömegű axion-szerű részecskék által alkotott elmosódott (fuzzy) sötét anyag magyarázatot adhat arra, hogy a galaxisokban miért nem figyelhetünk meg bizonyos méret alatti sötét anyag csomókat [54, 55, 56, 57]. Csillagok belsejében is összegyűlhet a skalár sötét anyag, és ott oszcillaton-szerű magot hozhat létre [58, 59]. Gravitáció hatása alatt álló tömeges valós vektormezők is létrehozhatnak lokalizált állapotokat, úgynevezett Proca-csillagokat, az oszcillatonokhoz hasonlóan időben periodikusan rezgő metrikával [60, 59].

2. fejezet

Lokalizált állapotok rögzített háttéren: oszcillonok

2.1. Nemlineáris skalármezők rögzített háttéren

Legyen adott egy $d+1$ dimenziós téridő, amelynek geometriai szerkezetét egy g_{ab} metrikus tenzor határozza meg. Egy minimálisan csatolt valós ϕ skalármezőnek ezen a rögzített görbült háttéren való viselkedése a következő Lagrange-sűrűségfüggvénnyel írható le

$$\mathcal{L}_M = -\sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \nabla^a \phi \nabla_a \phi + U(\phi) \right], \quad (2.1)$$

ahol $U(\phi)$ a skalár önkölcsönhatását meghatározó potenciál, ∇_a a g_{ab} metrikához tartozó deriváló operátor, és g a metrika determinánsa. Az ebből képzett hatásintegrál

$$A_M = \int dt d^d x \mathcal{L}_M, \quad (2.2)$$

amelynek variálásával kaphatjuk a skalármezőt leíró téregyenletet,

$$\nabla^a \nabla_a \phi = U'(\phi), \quad (2.3)$$

ahol a vessző a potenciál ϕ szerinti deriváltját jelöli. A metrika szerinti variálással kaphatjuk a skalármező energia-impulzus tenzorát,

$$T_{ab} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta A_M}{\delta g^{ab}} = \nabla_a \phi \nabla_b \phi - g_{ab} \left[\frac{1}{2} \nabla^c \phi \nabla_c \phi + U(\phi) \right]. \quad (2.4)$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy az energia-impulzus tenzor (2.3) teljesülése esetén divergenzia mentes, $\nabla^b T_{ab} = 0$. Az $U(\phi) = m^2 \phi^2 / 2$ választás az m tömegű Klein-Gordon mező

elméletének felel meg. Az értekezésben, néhány kivételtől eltekintve, $c = G = \hbar = 1$ Planck-egységeket használunk.

Ha a téridőn létezik egy k^a időszerű Killing vektormező, $\nabla^{(a}k^{b)} = 0$, akkor a $J^a = T^{ab}k_b$ vektor divergencia mentes lesz, $\nabla^a J_a = 0$, és így megmaradó mennyiségeket definiál. Ha t^a jelöli a konstans t időfelületek jövőbe mutató egységnyi hosszúságú normálvektorát, akkor az energiasűrűséget $\mathcal{E} = t^a J_a$ definiálja.

Rögzített anti-de Sitter háttéren definiált valós skalármező által létrehozott gömbszimmetrikus lokalizált állapotokat a [61] cikkünkben tanulmányoztuk részletesen. A negatív Λ kozmológiai konstans effektív vonzó hatásának köszönhetően ekkor minden esetben léteznek nem sugárzó breather megoldások [62]. A fejezet további részében rögzített sík Minkowski háttéren definiált skalármezőkkel foglalkozunk.

2.2. Skalármező Minkowski háttéren

Sík Minkowski háttér esetén $g_{ab} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$, és az önkölcsönható skalármező fejlődését leíró (2.3) téregyenlet az alábbi alakba írható:

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \Delta \phi = U'(\phi) , \quad (2.5)$$

ahol d térbeli dimenzió esetén a Laplace-operátor derékszögű koordinátákban felírt alakja

$$\Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x^i{}^2} . \quad (2.6)$$

Minkowski háttér esetén a k^a időszerű Killing vector és a t^a normál vektor egyaránt $k^a = t^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$, és így az energiasűrűség $\mathcal{E} = t^a J_a$ a definíciója szerint az energiasűrűség kifejezése

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i}\right)^2 + U(\phi) , \quad (2.7)$$

és a teljes energia egy adott időpillanatban $E = \int \mathcal{E} d^d x$.

A koordináta-rendszer közepe körül gömbszimmetrikus skalármező esetén gömbi koordinátákat célszerű használni. Ekkor a Laplace-operátor alakja

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{d-1} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) , \quad (2.8)$$

ahol $r^2 = \sum_{i=1}^d (x^i)^2$. Az energiasűrűség

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)^2 + U(\phi) , \quad (2.9)$$

és az \bar{r} sugarú gömbön belüli energia

$$E(\bar{r}) = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^{\bar{r}} r^{d-1} \mathcal{E} dr . \quad (2.10)$$

Mivel a konstans t hiperfelület t^a normálisát kifelé választottuk, a Stoke's tétel érvényességéhez az n^a a radiális irányú normálvektort befelé mutatónak választjuk (lásd Wald könyv appendix B.2 [63]). Ekkor a kifelé irányuló energiaáram-sűrűség

$$\mathcal{S} = n^a J_a = -\frac{\partial\phi}{\partial t} \frac{\partial\phi}{\partial r} , \quad (2.11)$$

és az \bar{r} sugarú gömbön kimenő energiaáram

$$S(\bar{r}) = -\frac{dE(\bar{r})}{dt} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \bar{r}^{d-1} \mathcal{S}_{r=\bar{r}} . \quad (2.12)$$

2.3. A sine-Gordon breather

Ebben a dolgozatban hosszú élettartamú lokalizált állapotokkal foglalkozunk. A legegyszerűbb ilyen állapotok az úgynevezett breather (lélegző) megoldásai az $1 + 1$ dimenziós sine-Gordon egyenletnek. A kölcsönhatást leíró potenciál ekkor $U(\phi) = 1 - \cos\phi$, aminek minimum körüli kifejtéséből látható, hogy egy $m = 1$ tömegű önkölcsönható skalármezőnek felel meg,

$$U(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2 - \frac{1}{24}\phi^4 + \frac{1}{720}\phi^6 + \mathcal{O}(\phi^8) . \quad (2.13)$$

Ekkor $d = 1$ térbeli dimenzió esetén a *sine-Gordon breather* megoldások következő egyparaméteres serege ismert:

$$\phi(x, t) = 4 \arctan \left[\frac{\varepsilon \sin(\omega t)}{\omega \cosh(\varepsilon x)} \right] , \quad (2.14)$$

ahol az ε paraméter határozza meg az állapot amplitúdóját. A paraméter a $0 < \varepsilon < 1$ tartományban lehet, és a frekvenciát az amplitúdóval az $\omega^2 = 1 - \varepsilon^2$ összefüggés köti össze.

Régóta sejtették, hogy $1 + 1$ dimenzió esetén csak a sine-Gordon potenciál esetén léteznek valóban lokalizált breather megoldások [64, 65]. Később potenciálok bizonyos osztályára [66], majd általános analitikusan kifejthető potenciálra is belátták, hogy más esetben nincsenek $1 + 1$ dimenziós breatherek [2]. A továbbiakban leírt vizsgálatainkból egyértelműen következik, hogy a sine-Gordon breather megoldások családja analitikus potenciál esetén az egyetlen valóban periodikus lokalizált egyparaméteres megoldáscsalád, amely a paraméter kis értékére a vákuum megoldáshoz tart. A sine-Gordon breatherek csak sík $1 + 1$ dimenziós háttéren léteznek. Be fogjuk látni azt is, hogy ha $d > 1$, akkor $d + 1$ dimenziós sík téridő

estén nincs olyan potenciál, amire egzaktul periodikusan rezgő lokalizált breatherek családja létezne. Numerikus vizsgálatok azt is mutatják, hogy különálló breather megoldások létezése sem valószínű, még nagy amplitúdók esetén sem [67].

A sine-Gordon breather kis-amplitúdós kifejtése átskálázott tér- és időkoordináták bevezetésével hajtható végre, $\xi = \varepsilon x$ és $\tau = \omega t$ választással, ahol $\omega^2 = 1 - \varepsilon^2$. Ekkor a breather megoldások kifejthetők az ε paraméter szerint,

$$\begin{aligned} \phi &= 4 \arctan \left[\frac{\varepsilon \sin \tau}{\omega \cosh \xi} \right] \\ &= 4\varepsilon \frac{\sin \tau}{\cosh \xi} + \varepsilon^3 \frac{\sin \tau}{\cosh \xi} \left(2 - \frac{1}{\cosh^2 \xi} \right) + \varepsilon^3 \frac{\sin(3\tau)}{3 \cosh^3 \xi} + \mathcal{O}(\varepsilon^5). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Kis amplitúdóknál az első tag dominál, és az amplitúdó arányos ε -nal. A jellemző méretét az objektumnak a nevezőben lévő $\cosh \xi$ tag határozza meg, ezért a méret kis amplitúdók esetén $1/\varepsilon$ -nal arányos. A nulla amplitúdós határesetben a breather megoldások egyre kiterjedtebbé válnak, miközben az amplitúdójuk csökken. Bizonyos értelemben a homogén, helyfüggetlenül oszcilláló $\phi = \sin t$ megoldáshoz tartanak, ami azonban végtelen energiájú lenne. Kis amplitúdók esetén a breather megoldások $\sin(\omega t)$ szerint oszcillálnak, de a kifejtés magasabb rendjében megjelennek $\sin(3\omega t)$, $\sin(5\omega t)$, ... módusok is.

Már a hetvenes években rájöttek, hogy általános potenciál esetén is hasonló kis-amplitúdós kifejtést lehet alkalmazni [33, 25, 35, 36, 68], de akkor az nem lesz konvergens. Az alkalmazott kifejtés egy gyengén lokalizált periodikus megoldás aszimptotikus sorként való közelítést adja. A konvergencia hiánya ellenére az aszimptotikus kifejtés igen hasznosnak bizonyul, mivel rögzített ε esetén egy bizonyos n_ε rendig egyre javuló közelítést ad. Azonban az n_ε -nál magasabb rendű tagok egyre nagyobb járulékot adnak, és a sor végül divergál. Minél kisebb ε , annál magasabb rendig érvényes a kifejtés. Bármely $n > 0$ egész számhoz létezik olyan kicsi ε , hogy $n_\varepsilon > n$.

2.4. Oszcillonok (pulzonok) története

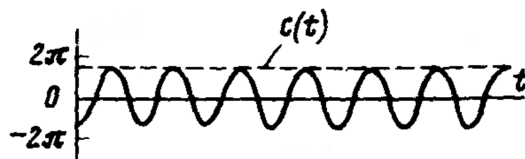
Az $1+1$ dimenziós sine-Gordon breatheren kívül, időben egzaktul periodikusan rezgő térben lokalizált megoldásai ugyan nincsenek a sík háttéren felírt (2.5) egyenletnek, de nagyon hosszú élettartamú lokalizált rezgő megoldások mégis léteznek. Ilyen megoldások létezésének lehetőségét egzaktul nem megoldható $1+1$ dimenziós elméletek esetén először Kosevich és Kovalev [33], valamint Dashen, Hasslacher és Neveu [25] tanulmányozta 1975-ben perturbációs módszerek alkalmazásával, és ugyanebben az évben Kudryavtsev numerikus módszerekkel mutatta meg, hogy két $1+1$ dimenziós szoliton (ϕ^4 kink) ütközésével valóban létrejöhetnek

ilyen hosszú élettartamú lokalizált állapotok [7]. Ezek az állapotok nem teljesen periodikusak, mivel lassan energiát veszítenek a skalármező végtelenbe való kisugárzásával. Eközben a frekvenciájuk és az amplitúdójuk is lassan változik. Két szoliton ütközésével létrejövő kötött állapotra a bion név terjedt el az irodalomban [69]. Az időben periodikus bionokat breathereknek nevezzük, és ha a periodicitás csak közelítőleg áll fenn, akkor a pulzon vagy oszcillon elnevezés használatos.

Gömbszimmetrikus hosszú élettartamú oszcilláló állapotokat 3+1 dimenzió esetén először Bogolyubskii és Makhan'kov talált 1977-ben Dubnában, numerikus időfejllesztő kód használatával [3, 4, 68]. A megoldásokat eredetileg pulzonoknak nevezték el, de később az *oszcillon* elnevezés terjedt el. Kezdeti feltételként az 1 + 1 dimenziós sine-Gordon breather alakját használták,

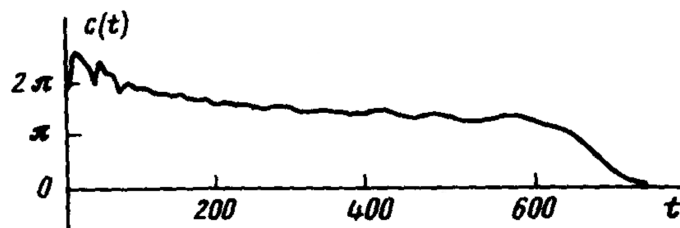
$$\phi_{t=0} = 4 \arctan \left[\frac{\varepsilon}{\omega \cosh(\varepsilon r)} \right], \quad \omega^2 = 1 - \varepsilon^2, \quad (2.16)$$

az $\varepsilon/\omega = 10$ választással, ahol r a középponttól való távolság. Háromdimenziós tér esetén, továbbra is az $U(\phi) = 1 - \cos \phi$ sine-Gordon potenciál választása mellett, ez lokalizált rezgő anyagcsomóként fejlődik, amint a 2.1. ábrán látható. A rezgés azonban csak közelítőleg



2.1. ábra. A skalármező középpontbeli értéke az idő függvényében, 3 + 1 dimenzió és sine-Gordon potenciál esetén. A rezgés periódusa $T \approx 7.4$. Forrás: Bogolyubskii és Makhan'kov [4].

periodikus. A 2.2. ábrán látható módon, hosszabb idő elteltével az amplitúdó csökken, a



2.2. ábra. A skalármező középpontbeli rezgésének felső burkológörbéje az idő függvényében. Forrás: Bogolyubskii és Makhan'kov [4].

skalár kisugárzódik a végtelenbe, és végül az oszcillon elbomlik. Ugyanebben a cikkben Bogolyubskii és Makhan'kov hasonló hosszú élettartamú 3 + 1 dimenziós gömbszimmetrikus

állapotokról számol be szimmetrikus negyedrendű ϕ^4 potenciál választása mellett is, amikor $U(\phi) = (\phi^2 - 1)^2/4$. Ekkor a skalármező a potenciál minimuma, $\phi = 1$ vagy $\phi = -1$ körül rezeg. A minimuma körül szimmetrikus potenciál esetén az alsó burkológörbe jó közelítéssel a felsőnek $\phi = 0$ -ra való tükrözöttje, de nem szimmetrikus potenciál esetén is hasonló formájú.

Gömbszimmetrikus $n + 1$ téridő-dimenziós oszcillonok, $n \geq 3$ esetén, a 2.2 ábrához hasonló módon, miután amplitúdójuk egy bizonyos érték alá csökken, hirtelen elbomlanak. Ezzel szemben az $1 + 1$ és $2 + 1$ dimenziós oszcillonoknál nem figyelhető meg ez a hirtelen elbomlás. Az oszcillonok bármilyen hosszú ideig megmaradnak, egyre lassabban csökkenő amplitúdóval. Egy térdimenziós ϕ^4 oszcillonokat Geicke vizsgált pontosabb numerikus módszerekkel 1983-ban, és több ezer rezgési periódust figyelt meg nagyon lassan csökkenő amplitúdóval [70]. Geicke hasonlóan hosszú élettartamú cirkulárisan szimmetrikus stabil oszcillonokat talált $2 + 1$ térdimenzió esetén a sine-Gordon és a ϕ^4 potenciál esetén is [71]. Kisebb amplitúdójú kezdőértékek esetén az amplitúdó csökkenés és a frekvencia változás annyira kicsi lehet, hogy az alkalmazott numerikus eljárással nem mutatható ki, és az állapot időben periodikusnak tűnik. Később, Gleiser és Sornborger [72] tanulmányozott $2 + 1$ dimenziós oszcillonokat részletesebben, egy precízebb numerikus módszert alkalmazva.

Az oszcillonok iránt való érdeklődés 1994 után kezdett gyorsabban növekedni, amikor Marcelo Gleiser numerikus módszerekkel részletesebben tanulmányozta oszcillonok kialakulását szimmetrikus és antiszimmetrikus ϕ^4 potenciál esetén [5]. A következő évben megjelent részletesebb cikkükben, Copeland, Gleiser és Müller pulzonok helyett oszcillonoknak kezdtek nevezni ezeket az objektumokat [6], azzal az indokkal, hogy az új név jobban kifejezi az oszcillon magjának egyenletes, majdnem periodikus rezgő mozgását.

Már a kezdeti vizsgálatokból is kitűnt, hogy nagyon sokféle gömbszimmetrikus kezdőadattól hasonló jellegű oszcillonok fejlődnek ki, ami mutatja az oszcillonok gömbszimmetrikus perturbációkkal szembeni stabilitását. Későbbi vizsgálatok megmutatták hogy az oszcillonok általános perturbációkkal szemben is stabilak, mivel nem szimmetrikus kezdő konfiguráció is gyorsan gömbszimmetrikus oszcillon állapot felé fejlődik, a nem szimmetrikus rész végtelenbe való kisugárzásával [73, 74, 8, 9].

A ϕ^4 potenciálhoz tartozó oszcillonok tanulmányozásától eléggé elkülönülten fejlődött a sine-Gordon esetben létrejövő hosszú élettartamú állapotok vizsgálata [75, 73, 76, 77, 74, 78]. Ezekben a sine-Gordon potenciált használó cikkekben az oszcillon elnevezés nem terjedt el. Az állapotok közel periodikussága miatt a breather elnevezést használták, valamint Bogolyubskii és Makhan'kov munkáira való hivatkozás miatt az eredeti pulzon név is fennmaradt.

Klasszikus, vagyis nem kvantált skalármezők által létrehozott oszcillonok kialakulását, fejlődését, tulajdonságait, stabilitását és sugárzását a 2.6-2.10 fejezetekben mutatjuk be

részletesen. Kvantumelméleti rendszernek tekintett oszcillonok energiaszintjeit, sugárzását és stabilitását a [25], [26] és [27] cikkekben tanulmányozták.

2.5. Oszcillonok fizikai alkalmazásai

Az oszcillonok (pulzonok) kezdeti vizsgálatát relativisztikusan invariáns nemlineáris egyenletek részecskeszerű megoldásainak a keresése motiválta [3, 4, 68]. Kötött állapotokat először két $1 + 1$ dimenziós kink ütközésének numerikus szimulációja során figyeltek meg [7, 79, 80, 81, 82, 83]. Gleiser a kozmológiai fázisátmenetek tanulmányozása során jutott el az oszcillonok tanulmányozásához [5, 6]. Aszimmetrikus ϕ^4 potenciál esetén a két vákuum állapot közötti átmenetek hozhatnak létre kötött állapotokat [84]. Oszcillonok az korai univerzum inflációs időszakában is létrejöhetnek az inflatonból vagy az ahhoz rendelt egyéb skalármezőkből, és befolyásolhatták az infláció dinamikáját [85, 86, 87]. Oszcillonok szintén kialakulhatnak doménfalak által határolt tartományok összezsugorodás utáni összeomlásának eredményeként [88].

Hormuzdiar és Hsu [89] megmutatta, hogy bizonyos klasszikus pion állapotok a $3 + 1$ dimenziós sine-Gordon egyenlettel írhatók le, amelyeknek hosszú élettartamú oszcillon megoldásai léteznek. A standard modell bozonikus szektorában is megjelennek oszcillonok, azon feltevés mellett, hogy a Higgs tömeg a W^\pm bozon tömegének kétszerese [16, 17, 18, 90]. Ábeli Higgs elméletekben szfaleronok bomlásának numerikus tanulmányozásakor oszcillonok kialakulását figyelték meg [19, 20]. Az ábeli Higgs modellekben létrejöhetnek oszcillonok vortex antivortex párok ütközésével, vagy szimmetriasértés eredményeképp is [21, 22, 23, 24]. Szuperszimmetrikus elméletekben is megmutatták oszcillonok létezését [91]. Oszcillonokkal analóg struktúrák atomi Bose-Einstein kondenzátumokban is megjelenhetnek [92].

Számos kozmológiai modellben az inflációt közvetlenül követi az előfűtés időszaka (preheating), amelynek során az inflaton energiája a hozzá csatolt mezőkbe megy át, és gyorsan változó, nagy sűrűségkülönbséggel rendelkező tartományok jönnek létre. Ezen dinamikus struktúrák gravitációs hullámokat bocsátanak ki, amelyek a tervezett űrbeli gravitációs hullám detektorokkal mérhetővé válhatnak. A folyamat során a modellben szereplő skalármezők oszcillonokat hozhatnak létre, amelyek a gravitációs hullámok spektrumán érzékelhető csúcsokként jelenhetnek meg [10, 11, 12, 13, 14, 15]. A kialakult oszcillonok a fermionok létrejöttét is elősegíthetik [93, 94]. Az inflációs időszak után létező oszcillonokból nagy számú kis tömegű fekete lyuk is kialakulhat, ami sötét anyagként lehet jelen az univerzumban [95].

Fontos tisztázni, hogy az univerzum tágulása hogyan befolyásolja az oszcillonok kialakulását és élettartamát. Mint láttuk, sík $1 + 1$ dimenziós háttéren az oszcillonok sugárzása

egyre lassul, és így végtelen ideig megmaradnak. Numerikus szimulációk azt mutatják [96], hogy egydimenziós táguló háttér esetén is fennáll, hogy általános kezdőadatokból könnyen kialakulnak oszcillonok, és a skalármező kisugárzásával nagyon lassan csökken az amplitúdójuk, miközben a méretük egyre növekszik. Ha viszont eközben a méretük összemérhetővé válik a kozmológiai horizont méretével, akkor viszonylag hirtelen elbomlanak. 1 + 1 dimenziós de Sitter háttéren értelmezett oszcillonok kis amplitúdó paraméter szerinti kifejtésével megmutatható, hogy a sugárzásuk a horizont mérete szerint exponenciálisan el van nyomva [97]. Három térdimenziós táguló háttér esetén is létrejönnek oszcillonok, valós skalármezőből, valamint ábeli Higgs modellekben is [98]. A világegyetem tágulásának hatását a gravitációs mezőhöz csatolt skalármező által létrehozott lokalizált állapotokra (oszcillatonokra) a 3.6 fejezetben ismertetjük részletesen.

2.6. Oszcillonok időfejlődése

2.6.1. Kölcsönhatási potenciál és kezdőadat

Az irodalomban az oszcillonok viselkedését legalaposabban a két minimummal rendelkező szimmetrikus negyedrendű potenciál esetén tanulmányozták. Mivel a (2.5) téregyenlet baloldala ϕ -nek csak a deriváltjaitól függ, a skalármező $\phi \rightarrow \phi + \phi_0$ konstans eltolásával elérhetjük, hogy a potenciál a $\phi = 0$ körül legyen szimmetrikus. A téregyenlet csak a potenciál deriváltját tartalmazza, ezért az ilyen potenciál általános alakja

$$U(\phi) = \frac{m^2}{8\lambda^2} (\phi^2 - \lambda^2)^2, \quad (2.17)$$

ahol m és λ két pozitív paraméter. Mivel ennek a potenciálnak a kifejtése a $\phi = \pm\lambda$ minimumai körül $m(\phi - \lambda)^2/2$ taggal indul, a paraméter m a skalármező tömegét határozza meg. A (2.5) téregyenletben a skalármező $\phi \rightarrow \lambda\phi$ átskálázásával a potenciál minimumait a $\phi = \pm 1$ helyre mozdítjuk, és ezután $\lambda = 1$ értékével dolgozhatunk. Ezután és a tér- és időkoordináták átskálázásával a skalár tömegét tetszőleges pozitív értékre állíthatjuk be. Az oszcillonok időfejlődésének numerikus vizsgálatakor az irodalomban leginkább az $m = \sqrt{2}$ választást használják, amikor

$$U(\phi) = \frac{1}{4} (\phi^2 - 1)^2, \quad U'(\phi) = \phi (\phi^2 - 1). \quad (2.18)$$

A végtelenben a skalármező értéke a $\phi = \pm 1$ vákuum értékek valamelyikéhez kell tartson ahhoz, hogy véges energiás állapotunk legyen. A témában megjelent cikkek többségében a $\phi = -1$ értéket választották, de a $\phi = 1$ használata is elterjedt. A két választás teljesen

ekvivalens, csak a kezdőadat amplitúdóját kell ellenkező előjelűnek venni. A későbbi kisamplitúdós számolásokkal való jobb összevethetőség érdekében a dolgozatunkban feltesszük, hogy a mező a $\phi = -1$ értékhez tart a végtelenben, és a $\phi \rightarrow \phi - 1$ helyettesítéssel a vákuum értéket a $\phi = 0$ helyre toljuk. A potenciál és deriváltjának alakja ekkor a következő lesz

$$U(\phi) = \frac{1}{4}\phi^2(\phi - 2)^2 \quad , \quad U'(\phi) = \phi(\phi - 1)(\phi - 2) \quad . \quad (2.19)$$

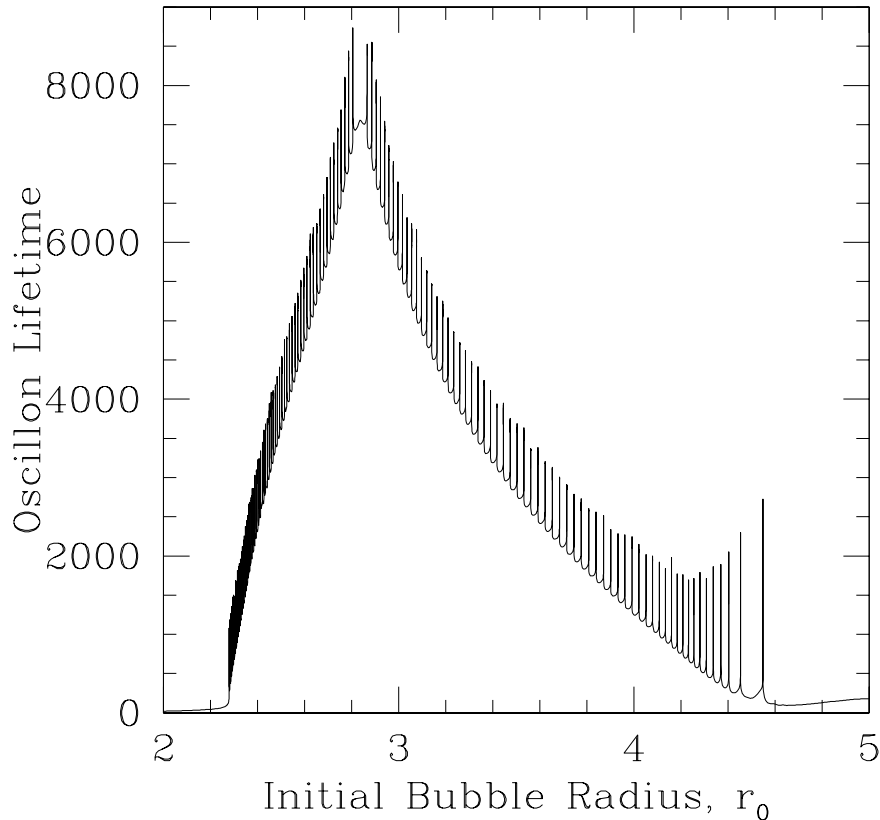
Mivel tetszőleges szimmetrikus negyedrendű potenciál áttranszformálható erre az alakra, elegendő a rendszer tanulmányozása ennek a konkrét potenciálnak az esetére. Az hogy ϕ a végtelenben nullához tart a numerikus kód stabilitását és pontosságát is elősegíti.

Gleiser és szerzőtársai cikkeikben az origó körüli Gauss görbe alakú kezdőadat időbeli fejlődését tanulmányozták részletesebben $3 + 1$ dimenzió esetén [5, 6]. Mivel a téregyenlet másodrendű, egy adott $t = 0$ időpillanatban a skalármezőnek és az időderiváltjának az értékét szükséges megadni,

$$\phi|_{t=0} = C \exp(-r^2/r_0^2) \quad , \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad , \quad (2.20)$$

ahol C a skalármező kezdeti értéke a középpontban, valamint r_0 a buborék méretét jellemző paraméter. Amikor C pozitív, a kezdeti amplitúdó a potenciál másik minimuma felé irányul. A C paraméter és a Gleiser és Honda cikkeiben használt ϕ_c amplitúdó paraméter közötti kapcsolat $C = \phi_c + 1$, a kölcsönhatást leíró potenciál eltolása miatt. A C és r_0 paraméterek megegyeznek a [99] cikkben az élettartam ábrákhoz használt paraméterrel. A kezdőadat a végtelenben a $\phi = 0$ vákuum értékhez tart. Változtatva r_0 és C értékét, (2.20) sima lokalizált kezdőadatok kétparaméteres seregét határozza meg. A lehetséges r_0 és C értékek egy nagy nyílt részhalmazára a rendszer egy rövid átmeneti állapot után egy hosszú élettartamú közel periodikus oszcillon állapotba megy át, eközben lassan energiát sugároz ki, majd amikor az energiája egy bizonyos érték alá csökken, a maradék energiát a végtelenbe gyorsan kisugározva hirtelen elbomlik.

Ha a mező központi értékét is rögzítjük a $C = 2$ választással, akkor kezdetben a skalár a potenciál két vákuum értéke között változik. A $C = 2$ rögzítésével és r_0 változtatásával kapott egyparaméteres megoldássereget vizsgálták az irodalomban legalaposabban. Ethan Honda 2000-ben készült doktori dolgozatában [100, 32] a $3 + 1$ dimenziós oszcillonok élettartamáról közölt rendkívül részletes grafikont a 2.3 ábrán mutatjuk. Mivel a végső elbomlás nagyon gyorsan és mindig hasonló módon történik, az ábra nem függ lényegesen az élettartam pontos definíciójától. Az élettartamnak például azt az időintervallumot tekinthetjük, amikor az oszcillon energiája az eredeti tíz százalékára csökken. Az ábrán 125 keskeny rezonancia-szerű csúcsot láthatunk, ahol az élettartam ugrásszerűen megnövekszik. Ahhoz hogy az ábrán



2.3. ábra. Oszcillonok élettartama a kezdeti buborék r_0 sugarának a függvényében, $C = 2$ esetén. Forrás: Ethan Honda [100].

látható magasságú csúcsokat kapják, 10^{-14} pontossággal be kellett hangolni az r_0 paraméter értékét. További hangolással a csúcsok magassága tovább növelhető, de ez olyan numerikus kódot igényel, ami a szokásos 16 tizedesjegynél többet használ a numerikus számolás során. Az itt megjelenő oszcillon állapotok részletes jellemzését, és a csúcsok megjelenésének okait később fogjuk tanulmányozni, a saját numerikus eredményeink ismertetésekor. A saját munkáink megjelenése előtt úgy gondolták, hogy az ábrán lévő csúcsok időben periodikus lokalizált állapotoknak felelnek meg, de látni fogjuk, hogy a csúcsoknál lévő oszcillonok is nagyon lassan energiát sugároznak ki, ezért nem lehetnek egzaktul időben periodikusak.

2.6.2. Numerikus módszerek az időfejlődés vizsgálatára

Az oszcillonokkal (pulzonokkal) kapcsolatos kezdeti cikkekben semmi információ sem található a megtalálásukhoz használt numerikus kódról és az alkalmazott határfeltételekről

[3, 4, 68]. Az ezután megjelent publikációk mindegyikében a véges differenciák módszerét alkalmazzák a differenciálegyenletek diszkretizálására a kezdőérték-probléma numerikus megoldása során. Néhány cikkben a karakterisztikák módszerét használják [70, 71, 101], de legtöbb esetben az r radiális és t időkoordináták mentén történő egyenletes rácsfelbontást alkalmazzák, kezdetben másodrendű, később negyedrendű interpolációval.

Gömbszimmetrikus esetben a középpontbeli regularitás szükséges és elégséges feltétele az, hogy a ϕ skalárnak a radiális r koordináta szerinti páratlan rendű deriváltjai eltűnjenek az $r = 0$ helyen. Ekkor a ϕ függvényt negatív r értékekre is ki lehet terjeszteni úgy, hogy az sima és tükrözésre szimmetrikus legyen az $r = 0$ körül. Az $1 + 1$ térdimenziós esetben is szokásos ezt a szimmetriát megkövetelni, az $r = -\infty$ -ben való határfeltétel és az együtt mozgó rendszer kiszabása helyett. Bármely dimenzió esetén, a téregyenletek teljesülése miatt, a regularitás feltétele egyenértékű azzal a megszorítással, hogy az origóban a ϕ értéke véges, és r szerinti deriváltja nulla. Numerikus kódokban a középponti regularitás megkövetelésének legegyszerűbb módja a tükrözési szimmetria kihasználása a numerikus deriváltak számolásakor, negatív koordinátájú virtuális rácsponatok alkalmazásával.

A külső határfeltételt ideális esetben $r = \infty$ -ben kell megadni, és azt kell kifejeznie, hogy a rendszer izolált, azaz nincs befelé jövő sugárzás a végtelenből. A numerikus számolásoknál nyilvánvalóan csak véges számú rácsponthasználat lehetséges, ezért a leginkább elterjedt módszer a külső határnak egy nagy $r = r_{\max}$ értékénél való megválasztása. Ha elég nagy távolságra vesszük fel a külső határfelületet, akkor nagyon sokáig tart amíg onnan bármilyen zavar beér a központi tartományba, ezért mindegy milyen határfeltételt alkalmazunk ott. Mivel a zavar terjedésének a sebessége a fény sebességével azonos, ilyen módon csak rövid idejű szimulációkat végezhetünk. Ha T idő helyett $2T$ ideig akarunk számolni, akkor emiatt kétszer akkora térbeli tartományt is kell vennünk, ami kétszer annyi rácsponthot jelent. Emiatt a szükséges számítástechnikai kapacitás T^2 -el arányosan növekszik. Valamelyest hatékonyabbá teszi a számolást, ha a külső határ a fény sebességével mozog kifelé, mindig új rácsponthok hozzáadásával [6], megakadályozva az onnan visszaverődő sugárzást. Mivel ekkor a számítási kapacitás továbbra is T^2 -el skálázódik, ez a módszer is csak közepes ideig alkalmas az oszcillonok leírására.

Mivel az oszcillonoknak éppen a nagyon hosszú távú időfejlődése érdekes, mégis szükségessé válik a külső határt egy állandó véges $r = r_{\max}$ -nál megválasztani. A problémát még tovább nehezíti, hogy a numerikus zavarok terjedése, különösen magasabb rendű diszkretizáció esetén, a fénysebesség többszöröse is lehet. A külső felületen megkövetelt határfeltételnek minél jobban meg kell akadályoznia a kimenő sugárzás visszaverődését, és ezzel a központi tartományban az oszcillon fejlődésének helytelen befolyásolását. A nulla tömegű mezőkre

alkalmazható a csak kimenő sugárzást megengedő Sommerfeld feltétel, amelynek alakja egydimenziós tér esetén

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \phi \Big|_{r=r_{\max}} = 0 , \quad (2.21)$$

valamint háromdimenziós gömbszimmetrikus tér esetén

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \right) (r\phi) \Big|_{r=r_{\max}} = 0 . \quad (2.22)$$

Oszcillonok csak tömeges mezőkből jöhetnek létre, és bár a Sommerfeld feltétel csak tömegtelen mezőkre érvényes, de alkalmazása mégis csökkenti a külső határról visszaverődő zavart [70, 71, 101].

A kimenő sugárzás elnyelésére, és a visszaverődés megakadályozására Gleiser és Sornborger [72] bevezettek egy $\gamma(r)\frac{\partial\phi}{\partial t}$ alakú csillapítási tagot a (2.5) téregyenlet jobb oldalára. A $\gamma(r)$ együtthatót egy r_0 sugáron belül nullának véve, és azon kívül $(r - r_0)^2$ -el arányosnak választva, a disszipáció fokozatosan jelenik meg, ezért az eljárást adiabatikus csillapítási módszernek nevezték el. Az r_0 értékét az oszcillon méretének legalább húszszorosára kellett választani. Az eljárás nagy előnye, hogy a szimuláció idejének növeléséhez nem szükséges a térbeli rácspontok számát növelni, így a szükséges számítástechnikai kapacitás csak T -vel arányosan növekszik. A módszert főleg 2 + 1 dimenziós oszcillonok tanulmányozásához használták, mivel azok nem bomlanak el nagyon hosszú idő után sem. További hasonló módszer tömeges mezők tanulmányozására az úgynevezett szivacs szűrő, amikor a Sommerfeld feltétellel arányos disszipációs tagot adnak hozzá a téregyenlethez, a külső határ előtti véges tartományban [102, 103, 104, 105]. A csillapítási tag ezeken a módokon való hozzáadásának hátránya, hogy megváltoztatja a megoldandó problémát, ugyanis még ha a rácspontok Δr távolsága nullához is tart, akkor sem az eredeti fizikai téregyenletet közelítjük. A megoldás érvényességének vizsgálatokor a csillapítási tartomány sugarától és a csillapítási tényező nagyságától való függést is külön vizsgálni kell.

Háromdimenziós oszcillonok paraméter terének részletes tanulmányozása Honda és Choptuik nevéhez fűződik [100, 32]. Dolgozatukban a külső határnál való visszaverődés csökkentésére úgynevezett „monoton növekvően gyorsuló” (monotonically increasingly boosted) koordinátákat használtak. Ezt egy új radiális koordináta bevezetésével érik el,

$$\tilde{r} = r + f(r)t , \quad (2.23)$$

a t időkoordináta és a szögkoordináták változatlan hagyásával. A monoton növekvő $f(r)$ függvényt úgy választják meg, hogy az egy bizonyos r_0 sugár körüli δ vastagságú gömbhéj tartományban a belső 0 értékről a külső 1 értékhez tartson. Így a belső részen változatlan

marad a koordináta-rendszer, míg az átmeneti tartományban fokozatosan átmegey a külső null koordinátákba. Az átmeneti tartományban a kimenő és a bejövő sugárzás terjedési sebessége is rendkívül lelassul, a gyakorlatilag a sugárzás „belefagy” ebbe a zónába. Ahogy csökken a terjedési sebesség, a hullámok feltorlódnak, kékeltolődást szenvednek, azaz a hullámhosszuk csökken. A rövid hullámhosszú sugárzásra erősebben hat a numerikus eljárásban eleve meglévő disszipáció, ezért a hullámok gyakorlatilag elnyelődnek ebben az átmeneti tartományban. Mivel mindkét irányú terjedés gátolva van, a kimenő hullámok külső tartományból való visszaverődése elhanyagolható mértékre csökken. A módszer hátránya, hogy a választott koordináta-rendszer már nem időfüggetlen. A belső tartományban levő rácsponok lassan átvándorolnak az egyre szélesebbé váló átmeneti tartományba, és így egyre kevesebb rácsponok marad az oszcillon magjának leírására. Szerencsére ez a csökkenés nagyon lassú. Be lehet látni, hogy a szükséges számítástechnikai kapacitás $T \ln T$ módon skálázódik. Honda és Choptyuk a módszert $3 + 1$ dimenziós oszcillonok vizsgálatához használták. Itt a hangsúly nem is a nagyon hosszú idejű számoláson volt, hanem nagyon sok nagy pontosságú futtatáson különböző kezdeti adatok megválasztásával.

2.6.3. Az általunk használt numerikus módszer

Saját numerikus számolásainkban a külső határ problémáját a tér kompaktifikációjával oldottuk meg [28, 29, 30, 31]. Az eddigi radiális koordináta végtelen nagy, $0 \leq r < \infty$ tartományát az

$$r = \frac{2R}{\kappa(1 - R^2)} \quad (2.24)$$

összefüggéssel leképezzük az új radiális koordináta véges, $0 \leq R < 1$ intervallumára, ahol κ egy konstans. A térbeli rácsponokat az R koordináta szerint egyenletesen választjuk meg. A κ konstans a vizsgált oszcillon méretétől függően különböző értékűnek választható. Célszerű olyan értéket megadni, hogy nagyjából azonos számú rácspon jusson a középponti oszcillon leírására, és a távoli tartományban a kimenő sugárzás leírására is. Számolásaink során tipikus értéke $\kappa = 0.05$, de nagy méretű oszcillonoknál célszerű értékét a mérettel fordított arányosan választani. Mivel kis-amplitúdós oszcillonok mérete az amplitúdójukkal fordítottan arányos, ilyen esetekben a κ konstans az amplitúdóval arányosnak választjuk.

Az R koordináta használatával a (2.5) téregyenlet a következő formába írható:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\kappa^2(1 - R^2)^3}{2(1 + R^2)} \left[\frac{(1 - R^2)}{2(1 + R^2)} \frac{\partial^2 \phi}{\partial R^2} - \frac{R(3 + R^2)}{(1 + R^2)^2} \frac{\partial \phi}{\partial R} + \frac{(d - 1)}{2R} \frac{\partial \phi}{\partial R} \right] - U'(\phi). \quad (2.25)$$

Bevezetve a

$$\phi_t = \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (2.26)$$

$$\phi_R = \frac{\partial \phi}{\partial R}, \quad (2.27)$$

új változókat, a probléma elsőrendű differenciálegyenletek rendszereként értelmezhető a ϕ , ϕ_t és ϕ_R változókra. A megoldandó egyenletek

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \phi_t, \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial t} = \frac{\kappa^2(1-R^2)^3}{2(1+R^2)} \left[\frac{(1-R^2)}{2(1+R^2)} \frac{\partial \phi_R}{\partial R} - \frac{R(3+R^2)}{(1+R^2)^2} \phi_R + \frac{(d-1)}{2R} \phi_R \right] - U'(\phi), \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial \phi_R}{\partial t} = \frac{\partial \phi_t}{\partial R}, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial R} = \phi_R. \quad (2.31)$$

Ha (2.31) teljesül a $t = 0$ kezdeti időpillanatban, akkor a (2.28) és (2.30) fejlődési egyenletek miatt később is érvényben marad, ezért kényszernek tekinthető. A 2.29 egyenlet jobboldalán a szögletes zárójelben lévő harmadik tagot nem lehet közvetlenül kiértékelni a középpontnak megfelelő $R = 0$ koordinátánál. Az ennek a helynek megfelelő rácspontban ezt a tagot a

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \phi}{\partial R^2} \quad (2.32)$$

azonossággal számoljuk.

A tér kompaktifikációjával elkerülhetjük azt, hogy egy önkényesen kiválasztott távoli de véges sugarú gömbön kelljen megadnunk külső határfeltételeket. Az alkalmazott numerikus eljárás a Rácz Istvánnal közösen kidolgozott, és először mágneses monopólusok időfejlődésére alkalmazott numerikus kód módosított változata [106, 107].

A kezdetiértékprobléma megoldásához diszkrétizáljuk a koordinátákat megadó t és R független változókat. Egyenletes rácsot vezetünk be, Δt és ΔR lépésközökkel. A Courant faktor $\frac{\Delta t}{\Delta R} = 1$ választásával a numerikus kódunk stabilnak bizonyul. A térbeli deriváltakat szimmetrikus negyedrendű formulák (sémák) segítségével számoljuk. Az idő szerint való integrálás az ún. „vonalak módszerével” történik, negyedrendű Runge-Kutta eljárással, a Gustafsson, Kreiss és Olinger könyvében leírtaknak megfelelően [108]. Az időfejlődési kód stabilitásának biztosítása érdekében az elsőrendűvé alakított (2.28)-(2.30) téregyenletekhez hozzáadunk egy-egy csillapítási tagot, amelyek a ϕ , ϕ_t és ϕ_R skalár mennyiségek hatodik R szerinti deriváltjával arányosak. Mivel egyúttal $(\Delta R)^5$ -el is arányosnak is választjuk a tagokat, ez nem csökkenti a használt numerikus kód rendjét, az továbbra is negyedrendű marad, mivel a csillapítási tagok hatása egyre csökken a numerikus felbontás növelésével.

Néhány nem fizikai rácspontot is hozzáadunk az eddigiekhez, negatív radiális koordináta esetén, $R < 0$ -ra, és a „végtelenen túli”, $R > 1$ tartományra is. Ahelyett, hogy az $R < 0$ rácspontokban a skalármező időfejlődését számolnánk, a skalár $R = 0$ körüli szimmetriáját használjuk a függvények értékének beállítására. Továbbá, mivel ϕ tömeges mező, ezért exponenciálisan tart nullához a végtelennél. Emiatt $R \geq 1$ -re a ϕ , ϕ_t és ϕ_R mezők értékét nullának rögzítjük le a teljes időfejlődés alatt. Ez megoldja a térbeli végtelen problémáját a (2.25) egyenletben, hiszen az $R = 1$ -nek megfelelő rácspontban nem kell értékeket számolni. A nem fizikai rácspontok hozzáadásának köszönhetően mindenhol elegendő csupán szimmetrikus sémákat használni a térbeli deriváltak számolása során. Egyébként, a rács szélső pontja-in féloldalas sémák lennének szükségesek. Az alkalmazott módszerrel az alsó határnál lévő pontoknál a tükrözési szimmetria, a felső határnál pedig a $\phi = 0$ feltétel felhasználásával számolunk.

Ugyan a térbeli irányokra való kompaktifikálás az R koordináta értékét egy véges intervallumra korlátozza, a szomszédos numerikus rácspontok valódi fizikai távolsága egyre nagyobbá válik ahogy közeledünk $R = 1$ -hez. Ez a távoli tartomány, ahol a kimenő sugárzást már nem tudjuk megfelelően leírni, egyre távolabbra kerül ahogy a ΔR térbeli lépésközt csökkentjük. Konkrét numerikus szimulációk, amelyet egyre növekvő számú rácsponttal elvégeztünk, megmutatták, hogy kimenő tömeges mezők által alkotott hullámcsomagok elnyelődnek az átmeneti tartományban, anélkül hogy visszaverődnének a központi részekre. Ily módon a numerikus szimulációink precíz leírását adják a skalármező viselkedésének a központi tartományban, még nagyon hosszú időtartamokra is. Az egyszerű, de fizikailag nem egyenlő lépésközű rácsfelosztás, a disszipációs tag alkalmazásával együtt, a kimenő sugárzás elnyelődéséhez vezet, a [72, 32] cikkekben alkalmazott módszerekhez hasonlóan. Továbbá, az $R \approx 1$ aszimptotikus tartományban a bejövő fény nagyon alacsony koordináta sebessége miatt, a központi tartomány viselkedése helyesen meghatározható hosszú ideig még azután is, hogy numerikus hibák jelennek meg $R \approx 1$ -nél.

3 + 1 dimenziós oszcillonok szimulációja $t = 7000$ -ig, a tipikus maximális élettartamukig, 2^{13} térbeli rácspont használatával körülbelül egy hétig tart egy átlagos személyi számítógépen. Mivel azonban nagy számú futásra van szükség a paraméter-tér tanulmányozására, legtöbbször 2^{12} rácspontot használtunk.

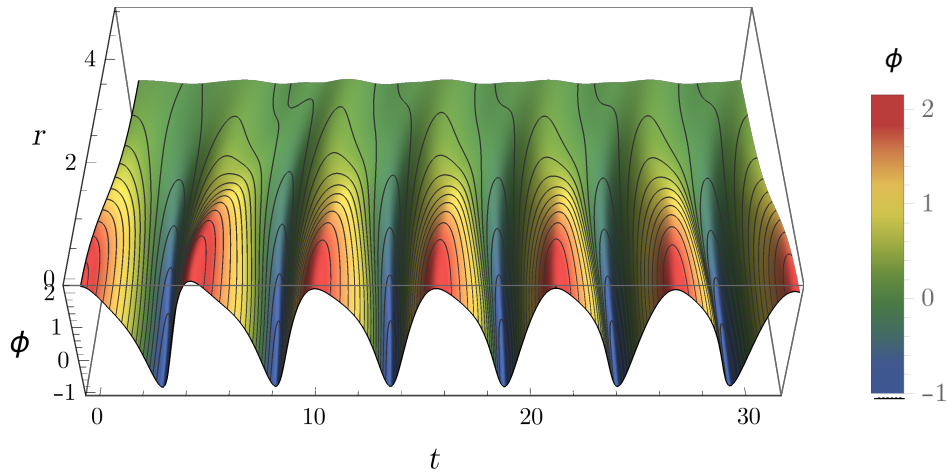
Konvergencia tesztek elvégzésével megbizonyosodtunk róla, hogy a kódunk valóban negyedrendű közelítést adja a fejlődési egyenleteknek. Továbbá, figyelemmel kísértük az energia megmaradás és a (2.31) kényszer egyenlet teljesülését az időfejlődés során. Kódunk nagyon fontos ellenőrzése volt a tömeges lineáris Klein-Gordon mező időfejlődésének vizsgálata, ami Green függvények segítségével is számolható, nagyon nagy pontossággal [109]. A köz-

ponti tartományban a skalármező fejlődésének a két független módszerrel számolt értéke rendkívül jó egyezést mutatott még $t \approx 10^4$ esetén is.

Oszcillonok numerikus időfejlődését bemutató munkáink [28, 29] megjelenése után mások is további független numerikus kódok segítségével vizsgálták a problémát, hasonló és a korábbiakkal összeegyeztethető eredményeket kapva [110, 111, 99]. Saffin és Tranberg [110] mesterséges csillapítási tagot alkalmaztak egy nagy távolságra levő gömbszimmetrikus tartományban, és a külső határon a skalármező értékét nullának vették. Salmi és Hindmarsh cikkükben [111] a távoli külső határon a skalármező második parciális deriváltjait tartalmazó határfeltételt alkalmaztak, ami tömeges mezőkre is nagyon jól elnyeli a kimenő sugárzást a skalár m tömegéhez képest nagy frekvenciájú rezgések esetén. Érdekes módon, az amplitúdó, frekvencia és energia függésére hatványtörvény szerinti függést figyeltek meg. Andersen és Tranberg [99] ugyanilyen határfeltételt használva, részletesen feltérképezte az oszcillonok élettartamának a függését a 2.20 Gauss formájú kezdőadat szélességét és amplitúdóját leíró r_0 és C paramétereiktől. Látványosan színes és informatív ábrákat közöltek $d = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ térbeli dimenzió esetére. Megmutatták, hogy a korábban Honda és Choptuik által megfigyelt vékony csúcsok az (r_0, C) térben rendkívül vékony egydimenziós falaknak felelnek meg.

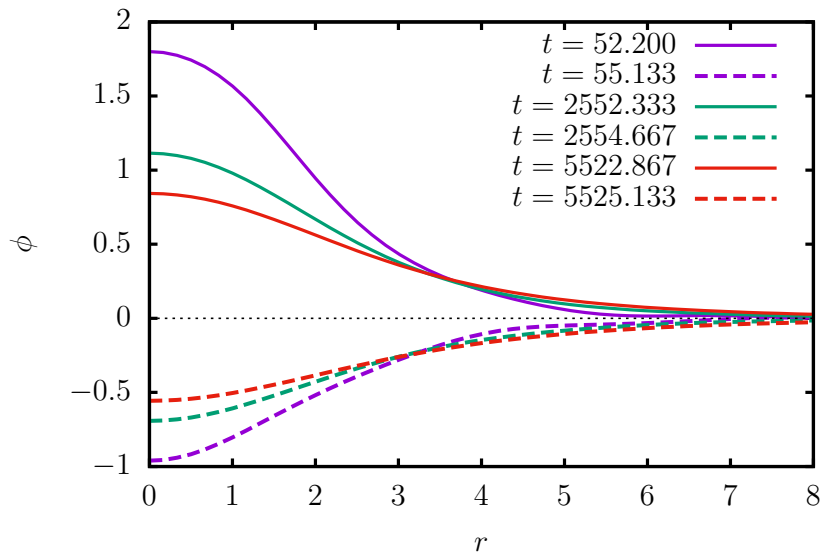
2.6.4. Gauss kezdőadat időfejlődése

Numerikus időfejlődési kódunk segítségével először a Gleiser [5, 6] és Honda [100, 32] által elért eredményeket reprodukáltuk. A vizsgált esetben a skalármező önkölcsönhatását szimmetrikus negyedrendű $U(\phi)$ potenciál határozza meg, amit a mező és a koordináták átskálázásával és az egyik minimum $\phi = 0$ helyre tolásával a (2.19) alakúnak választunk. A $t = 0$ kezdő időpillanatban a skalármező értékét Gauss görbe formájúnak vesszük, a (2.20) egyenletben leírt alaknak megfelelően. A mező időderiváltját nullának állítjuk be, ami időtükrözésre szimmetrikus fejlődésnek felel meg. A (2.20) kifejezésben a skalár a végtelenben a $\phi = 0$ vákuum értékhez tart, és így véges energiájú kezdőadatnak felel meg. A $C = 2$ kezdeti középponti amplitúdó rögzítésével, és az r_0 paraméter változtatásával kapható az oszcillon élettartamára az Ethan Honda által készített 2.3 ábra. A Gauss kezdőadat tipikus hosszú idejű fejlődését a $C = 2$, $r_0 = 2.70716$ kezdőadat részletesebb elemzésével mutatjuk be, a saját numerikus kódunk segítségével kapott eredmények alapján. A 2.4 ábrán a skalármezőnek a központi tartományban való kezdeti viselkedését láthatjuk. A mező a Gauss kezdőadathoz nagyon hasonló térbeli formában rezegni kezd, $T \approx 5.3$ körüli periódusidővel, ami $\omega = 2\pi/T \approx 1.2$ körfrekvenciának felel meg. Hosszú élettartamú oszcillon állapot jön létre, ami körülbelül 1240 hasonló rezgés után, $t = 5800$ környékén, a skalármező erőtelje-



2.4. ábra. A ϕ skalármező kezdeti függése az r radiális és t időkoordinátáktól, $r_0 = 2.70716$ és $C = 2$ esetén. Az idő a jobboldali irányban növekszik.

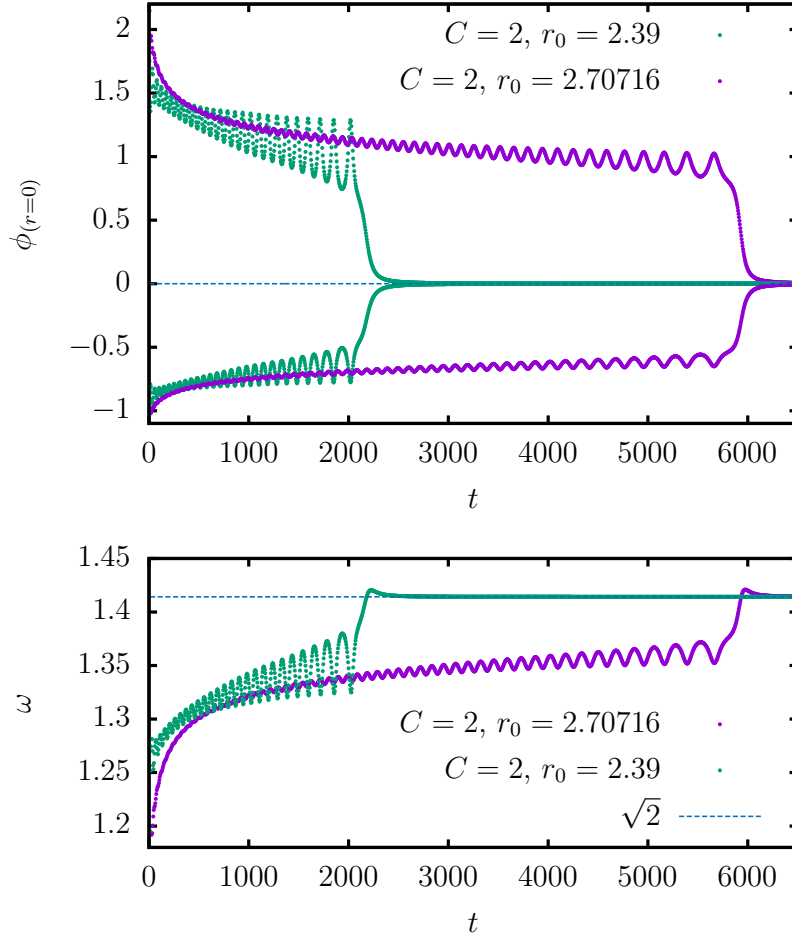
sebb kisugárzásával bomlani kezd. Ezután, nagyjából 25 rezgés alatt, annyira lecsökken az amplitúdója, hogy már nem tekinthető lokalizált objektumnak. A 2.5 ábrán a skalár radiális függésének az időbeli változását mutatjuk az oszcillon állapot fejlődésének elején, közepe táján, és az elbomlás előtt. Látható, hogy $t = 5500$ körül a rezgés amplitúdója a kezdetinek



2.5. ábra. A skalármező alakja az r radiális koordináta függvényeként, olyan időpillanatokban, amikor a mező éppen a maximumát vagy minimumát veszi fel a középpontban ($r_0 = 2.70716$, $C = 2$). A szaggatott vonalak az azonos szinnel ábrázolt maximum utáni közvetlen minimumnak felelnek meg.

körülbelül a felére csökken, miközben az oszcillon mérete viszonylag kis mértékben növekszik.

szik. A 2.6 ábrán a skalár $r = 0$ középponti viselkedését mutatjuk az idő függvényeként. Mivel a rezgés periódusideje kicsi az oszcillon élettartamához képest, csak a ϕ maximumai-



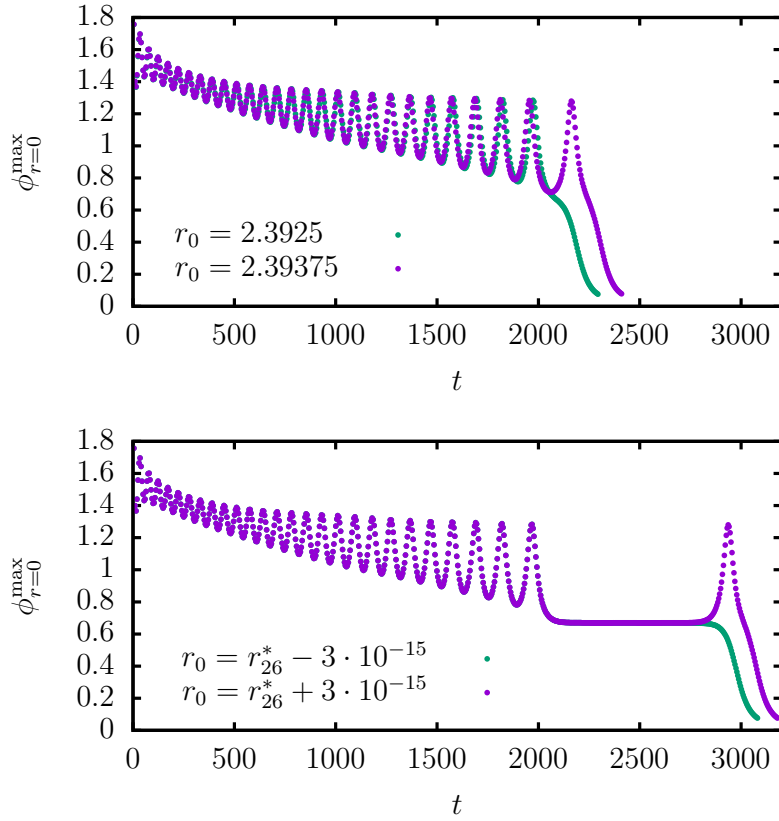
2.6. ábra. A skalármező központi értékének minimum és maximum értékei, valamint rezgési frekvenciájának időfüggése, két különböző Gauss kezdőadat esetén.

nak és minimumainak megfelelő pontokat ábrázoljuk. A pontok a rezgés alsó és felső burkoló görbét rajzolják ki. Az ábrán egy másik, rövidebb élettartamú Gauss kezdőadat időfejlődését is megadjuk, $C = 2$ és $r_0 = 2.39$ -nek megfelelően. A rezgés frekvenciáját a szomszédos maximumok közötti $T = 2\pi/\omega$ időtartamból számoltuk, a maximum helyének másodrendű interpolációval való meghatározásával. Az oszcillonok frekvenciája mindig a skalármező tömege által meghatározott $\omega = \sqrt{2}$ érték alatt van, majd a bomlás során ehhez az értékhez tart. Az oszcillon állapot elbomlása után, a skalár központi tartományban való rezgésének amplitúdója $(t - t_b)^{-3/2}$ -nel arányosan csökken, ahol $t_b \approx 2175$ az $r_0 = 2.39$ kezdőadatra, és $t_b \approx 5918$ az $r_0 = 2.70716$ esetén. A $-3/2$ hatványkitevő ugyanaz mint a szabad lineáris

Klein-Gordon mező kisugárzásánál [109].

A Gauss típusú kezdőadat időfejlődésének a C és r_0 paramétereiktől való függését Copeland, Gleiser és Müller kezdte alaposabban tanulmányozni [6]. A vizsgált kezdőadatok általában a 2.6 ábrán lévőkhez hasonlóan fejlődnek, különféle élettartamokkal. Már Copeland, Gleiser és Müller cikkének 7. ábrája alapján is sejthető volt, hogy bizonyos kezdeti értékek környezetében rezonancia-szerű csúcsok jelenhetnek meg. Részben ez motiválta Honda és Choptuik részletes munkáját[100, 32], amelyből a 2.3 ábrát a 125 csúccsal átvettük. A keskeny csúcsok megjelenése szoros kapcsolatban van az oszcillonok alsó és felső burkológörbájén megjelenő alacsony frekvenciás oszcillációkkal, amelyeket a 2.6 ábrán is láthatunk. Ezeket Honda és Choptuik *alak-módusoknak* (shape-mode) nevezte, és a nagy frekvenciával rezgő oszcillonok amplitúdójának és térbeli méretének alacsony frekvenciával történő rezgésének felelnek meg. A keskeny csúcsok két oldalán lévő állapotok a burkológörbén megjelenő alacsonyfrekvenciás oszcillációk számában különböznek. Minden csúcsnál egyel nagyobbá vagy kisebbé válik az oszcillációk száma. A 2.3 ábrán lévő csúcsok helyét, balról jobbra haladva, jelöljük r_n^* -el, ahol $0 \leq n \leq 124$. Az első csúcs előtti állapotoknál, $r_0 < r_0^*$ esetén, nincs alacsony frekvenciás oszcilláció a burkológörbén. Az oszcillációk száma az r_{62}^* csúcsig minden rezonanciánál egyel növekszik, az élettartam növekedésével együtt, majd r_{63}^* -tól kezdve egyesével csökken. A 2.3 ábrán a különböző csúcsokhoz tartozó majdnem-periodikus állapotok más-más T periódusidővel rezegnek, a $4.446 < T < 4.556$ intervallumban. Általános oszcillon állapotok, ide értve a hangolt állapotok kevésbé periodikus kezdeti részét, hosszabb periódusidővel rendelkeznek, a $4.6 < T < 5$ tartományban.

A 2.7 ábrán a 27-dik rezonancia körüli állapotok időfejlődését mutatjuk. A finoman hangolt esetben a $2100 < t < 2800$ időintervallumban egy nagyon jó közelítéssel állandó amplitúdójú és frekvenciájú rezgés alakul ki, amit a továbbiakban *majdnem-periodikus állapotnak* nevezünk. Minél közelebb vannak a kezdeti paraméterek a kritikus értékhez, annál hosszabbá válik a kialakuló majdnem-periodikus állapot. Az alsó burkológörbe alakja nagyon hasonló a felsőhöz, bár az amplitúdója más, ezért nem mutatjuk az ábrán. Ha a skalár önkölcsönhatását definiáló potenciál szimmetrikus lenne a minimuma körül, akkor a két burkológörbe egymás tükrözöttje lenne. A hosszabb élettartamú *szuperkritikus* állapotok akkor jelentkeznek, ha a kritikus r_{26}^* értéket felülről közelítjük meg. Ekkor a rezgések burkológörbájén az utolsó alacsony frekvenciás csúcs egyre későbbre tolódik ki, helyet adva két csúcs között egy majdnem-periodikus állapotnak. A csúcs alsó oldalán, $r_0 < r_{26}^*$ esetén, közel a kritikus értékhez, ugyanazok a majdnem-periodikus állapotok alakulnak ki, de a végén elbomlanak újabb csúcs kialakulása nélkül. Ezeket nevezzük *szubkritikus* állapotoknak. A jelenség magyarázata az, hogy ha az oszcillonok központi amplitúdója egy bizonyos érték alá csökken, akkor a



2.7. ábra. A felső ábrán a $C = 2$ esetén $r_{26}^* \approx 2.39297$ körül kialakuló 27-dik rezonancia két oldalán kialakuló tipikus oszcillon állapotok felső burkológörbéjét alkotó pontokat mutatjuk. Az alsó ábrán a rezonanciához nagyon közeli két finomhangolt állapot fejlődését láthatjuk, a csúcs két oldalán.

korábban a burkológörbén való alacsony frekvenciás rezgésként megjelenő alak-módus instabillá válik. A finomhangolás segítségével ezt az instabil alak-módust semlegesíthetjük, és így megfigyelhetünk egy kisebb amplitúdós oszcillont, ami egyébként az instabil tartományba tartozik.

2.6.5. Majdnem-periodikus állapotok

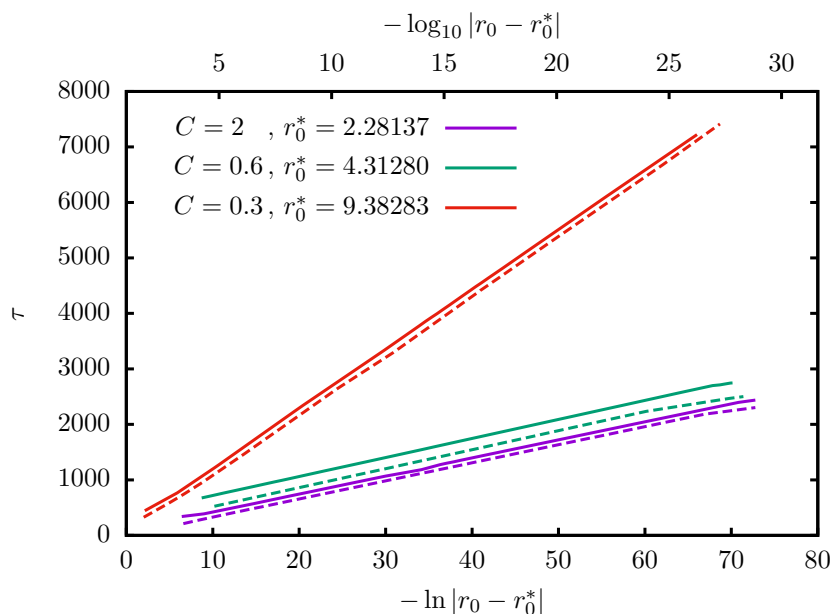
Honda és Choptuik cikkükben megmutatták[32], hogy a rezonanciák közelében az oszcillon τ élettartama egy skálázási törvénynek megfelelően alakul,

$$\tau \sim \gamma \ln |r_0 - r_0^*| + \delta, \quad (2.33)$$

ahol a γ skálázási kitevő különböző értéket vesz fel minden egyes rezonanciánál, és a δ konstans eltérő szubkritikus és superkritikus állapotok esetén is. Habár úgy tűnik, hogy

a majdnem-periodikus állapotok élettartama bármilyen nagyra növelhető a kezdeti paraméter finomhangolásával, a gyakorlatban nagyon nehéz hosszú élettartamokat elérni, mivel numerikusan nem tudunk a rezonancia r_n^* értékéhez nagyon közeli számokat reprezentálni az alkalmazott számítógép és numerikus program adott gépi pontossága miatt. A szokásos 16 jegynél nagyobb pontossággal számoló programokkal lehetséges hosszabb élettartamok elérése, de a számolási idő radikális növekedése miatt ez a módszer csak korlátozott mértékben alkalmazható. SGI típusú számítógép „long double” változóinak használatával a szokásos 16 tizedesjegy helyett 32-re tudtunk számolni, így a finomhangolás javításával a majdnem-periodikus állapotok megfigyelt élettartamát is a duplájára tudtuk növelni. Hasonló eredmény érhető el szokásos személyi számítógépen dupla pontosságú számolást lehetővé tevő numerikus könyvtárak alkalmazásával [112, 113, 114].

A 2.8 ábrán az oszcillon élettartamának skálázását mutatjuk három különböző rezonancia környezetében [28]. Ahelyett, hogy csak $C = 2$ -höz tartozó rezonanciákat vizsgáltunk



2.8. ábra. Az oszcillon τ élettartamának $-\ln|r_0 - r_0^*|$ -től való függése három különböző rezonancia esetén. Az alsó szaggatott vonalak $r_0 < r_0^*$ szubkritikus megoldásoknak, míg a felső vonalak $r_0 > r_0^*$ szuperkritikus megoldásoknak felelnek meg.

volna, három *első csúchoz tartozó* majdnem-periodikus állapotot választottunk különböző C értékek mellett. Ezt a választást az motiválta, hogy az általános, nem hangolt oszcillónak megfelelő lassan sugárzó kezdeti állapot az első csúcs környezetében a legrövidebb. Ekkor legfeljebb egy moduláció után már a majdnem-periodikus állapot következik, és így a rendelkezésre álló számítástechnikai kapacitást arra tudjuk koncentrálni.

Annak érdekében, hogy világosabbá tegyük, hogy mit értünk az r_0 paraméter 16 vagy 32 jegyre való finomhangolásán, valamint hogy mi a valódi hibája a használt mennyiségeknek, a 2.1 táblázatban megadjuk az első csúcs helyét a $C = 2$ esetben, öt különböző numerikus felbontás esetén. Mindegyik numerikus felbontásnál az oszcillon élettartama $\tau = 1100$ körülire

i	n_i	$r_0^{*(i)}$	δ_i	c_i
8	2^8	2.281990488596033	$6.2 \cdot 10^{-4}$	
9	2^9	2.281392051715203	$2.1 \cdot 10^{-5}$	
10	2^{10}	2.281371382459355	$7.9 \cdot 10^{-7}$	4.86
11	2^{11}	2.281370625452998	$3.1 \cdot 10^{-8}$	4.77
12	2^{12}	2.281370594875569		4.63

2.1. táblázat. Az első csúcs $r_0^{*(i)}$ pozíciója $C = 2$ esetén, különböző numerikus felbontások mellett. Az i -vel jelölt felbontás esetén a térbeli pontok száma $n_i = 2^i$ volt a finomhangolás során. A hibát $\delta_i = |r_0^{*(i)} - r_0^{*(12)}|$ megadásával becsültük. A konvergencia faktort a $c_i = \log_2 |(r_0^{*(i-2)} - r_0^{*(i-1)}) / (r_0^{*(i-1)} - r_0^{*(i)})|$ kifejezés adja meg.

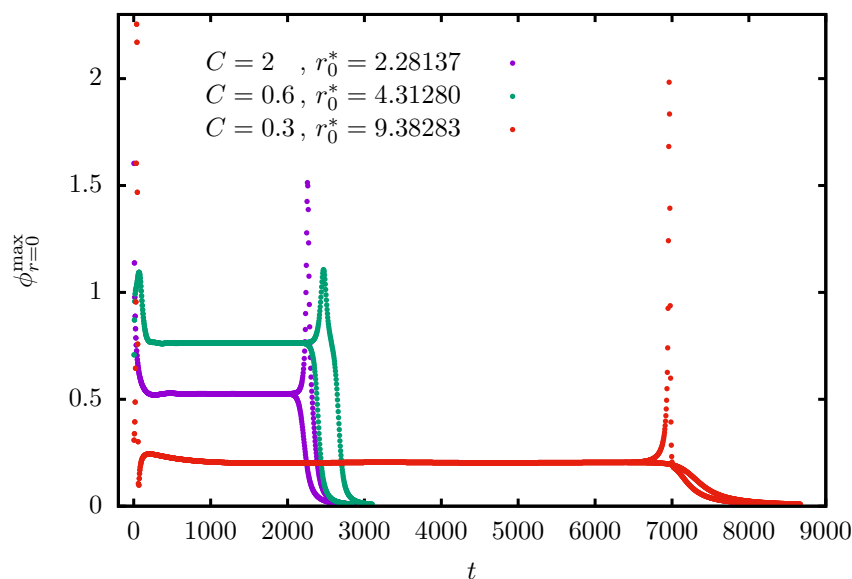
növekedett, ha az r_0 paraméter egy felbontástól függő értéket közelített 16 jegy pontosságra. Az adatok konvergenciájának vizsgálata azt mutatja, hogy $C = 2$ esetén az első csúcs valódi helye $r_0^* = 2.281370594$ -nél van, 10^{-9} abszolút hibával.

Numerikus számolásaink egyértelműen mutatják, hogy a különböző rezonancia csúcsok más és más majdnem-periodikus állapotoknak felelnek meg. A 2.8 ábrán vizsgált három első csúcsnak megfelelő finomhangolt állapotok amplitúdójának időfüggését a 2.9 ábrán mutatjuk. Az ezeknek megfelelő majdnem-periodikus állapotok frekvenciájának időfejlődését a 2.10 ábrán adjuk meg. Az ω frekvencia meghatározásához a numerikus futási eredményeinkből számolt

$$\int_{t-t_0}^{t+t_0} [\phi(t, \bar{r}) - \phi(t+T, \bar{r})]^2 dt \quad (2.34)$$

integrál értékét minimalizáltuk a rezgési periódus $T = 2\pi/\omega$ értékére, egy bizonyos $r = \bar{r}$ radiális koordináta értéknél, megfelelően választott t_0 integrációs intervallum választás mellett. Az \bar{r} értékénél az a lényeges, hogy az oszcillon magjának tartományában legyen, a t_0 értékét pedig a T -vel azonos nagyságrendűnek célszerű választani. Ez az eljárás, polinomiális interpoláció alkalmazásával, lényegesen nagyobb pontosságot ad mint amit a gyors Fourier-transzformáció (FFT) módszerével elérhetnénk.

A 2.10 ábrán mindhárom majdnem-periodikus állapotnál látható egy alacsonyabb frekvenciás moduláció, ami egy stabil alak-módusnak felel meg. Hasonló hullámmódus lenne látható a 2.9 ábrán is, ha az amplitúdókat az egyes állapotokra külön kinagyítva mutatnánk a

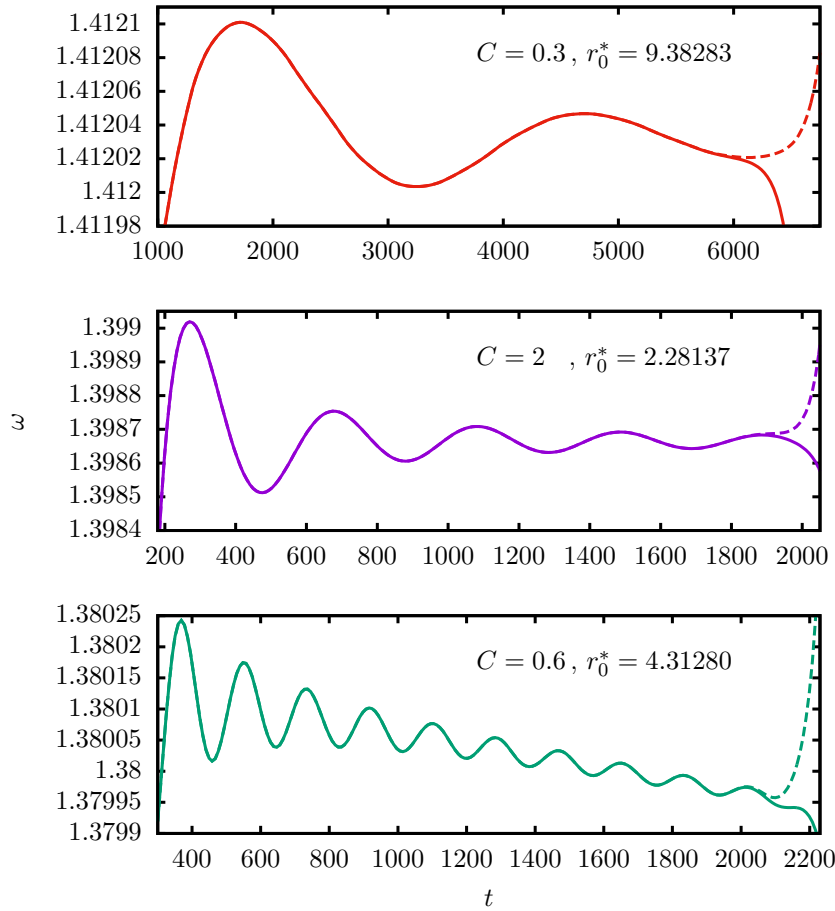


2.9. ábra. A skalármező középpontbeli értékének felső burkológörbáját alkotó pontok három finoman hangolt első csúcs esetén. Mindhárom esetben egy szubkritikus és egy szuperkritikus állapotot is mutatunk, 32 jegyre való hangolás mellett.

majdnem-periodikus tartományban. Ezen a stabil alacsony frekvenciás rezgésen kívül létezik még egy instabil alak-módus is, amit a finomhangolással semlegesítettünk.

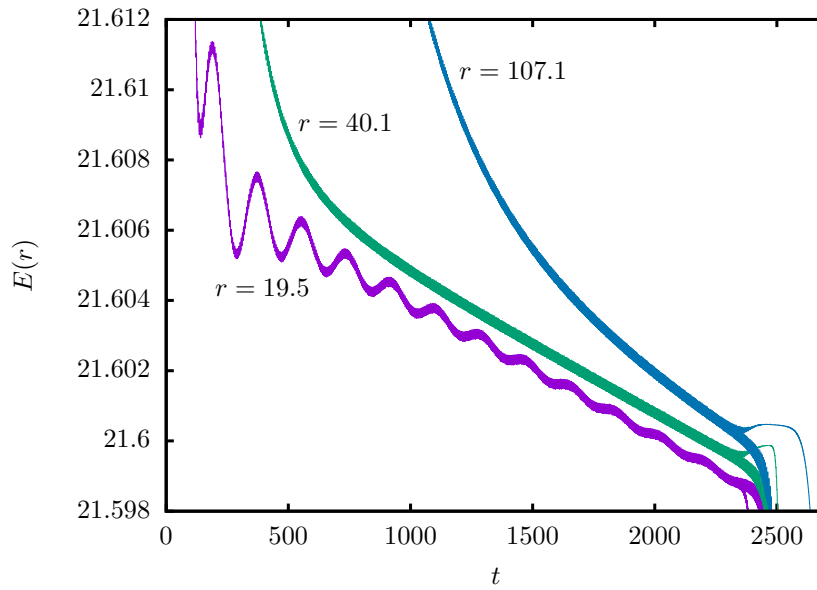
A numerikus kódunkkal talált összes majdnem-periodikus állapot, a 125 darab $C = 2$ csúcstól is beleértve, nagyon hasonló a most részletesebben tárgyalt három állapothoz. A frekvenciája mindegyiknek a $C = 0.6$ és a $C = 0.3$ első csúcs által meghatározott $[1.379, 1.413]$ intervallumba esik.

A 2.10 ábra legalsó rajzán, a $C = 0.6$ esetben, egyértelműen látható egy lassú de egyenletes frekvencia csökkenés. A másik két állapotnál, amelyek közelebb vannak a $\sqrt{2}$ frekvenciához, nem érzékelhető ez a csökkenő tendencia annyi idő alatt amit numerikusan követni tudtunk. Ennek megfelelően a $C = 0.6$ majdnem-periodikus állapot energiájában is megjelenik egy lassú csökkenés. Adott sugarú gömbökben a (2.10) azonosság felhasználásával számolt $E(r)$ energia időfüggését a 2.11 ábrán mutatjuk. Az energia határozott csökkenése mutatja, hogy a majdnem-periodikus állapot nem lehet egzaktul időben periodikus. A megfigyelt sugárzási ráta alapján, arra az időtartamra amely alatt az energia a felére csökken, a $\tau_e = 2.6 \cdot 10^6$ becslést adhatjuk. A többi majdnem-periodikus állapot is szükségképpen energiát veszít skalármező kisugárzásával, de a sugárzási ráta egyre gyengébbé válik, ahogy a frekvencia közelít a $\sqrt{2}$ értékhez. Később meg fogjuk mutatni, hogy ez a csökkenés exponenciális.



2.10. ábra. Az előző ábrán mutatott három majdnem-periodikus állapot frekvenciájának időfüggése. A szaggatott vonalak a szubkritikus állapotoknak felelnek meg.

A 2.11 ábrán a különböző végződésű szubkritikus és szuperkritikus fejlődéseknek felelnek meg. A szubkritikus bomlás esetén a mező hirtelen kisugárzódik, úgy hogy az energia lényegében csak kifelé áramlik. A szuperkritikus esetben az energia először egy kisebb sugárú gömbben koncentrálódik, majd utána sugárzódik ki a végtelenbe. Ez ugyan hasonlít egy instabil gömbhéj viselkedésére, de nem figyelhető meg gömbhéj struktúra az energia sűrűség ábrázolásakor. A legnagyobb energiasűrűség mindig a középpontban van. A majdnem-periodikus állapot kétféle bomlási mechanizmusa kvalitatív magyarázatot ad arra, hogy miért lehet hosszú élettartamokat elérni a finomhangolással.



2.11. ábra. Az energia időfüggése $r = 19.5$, $r = 40.1$ és $r = 107.1$ sugarú gömbökben a $C = 0.6$ első csúcshoz tartozó majdnem-periodikus állapot esetén.

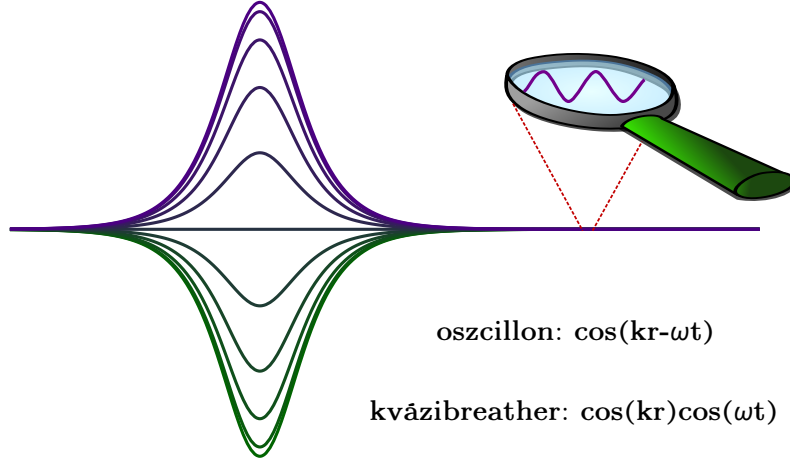
2.7. Kvázibreatherek és nanopterok

2.7.1. Időperiodikus állapotok

Valós skalármező esetén, az $1 + 1$ dimenziós sine-Gordon breatheren kívül nincs egzaktul idő-periodikusan rezgő, véges energiájú, térben lokalizált skalár konfiguráció. Minden oszcillon állapot lassan energiát veszít, a skalármező gömbszimmetrikus módon való kisugárzásával. Emiatt szükségképpen az oszcillonok amplitúdója és frekvenciája is lassan változik. A kimenő sugárzás amplitúdója általában nagyon kicsi a skalármező központi tartományban való rezgésének amplitúdójához képest. Ha a kimenő sugárzást pontosan ugyanolyan amplitúdójú befelé irányuló sugárzással kompenzáljuk, akkor létrejön egy időben egzaktul periodikus állapot. A bejövő sugárzás hatására a távoli tartományban egy gömbszimmetrikus állóhullám alakul ki, amit *farok*nak hívunk, míg a belső *mag* tartományban a jóval nagyobb amplitúdójú rezgések lényegében változatlanok maradnak. A hullámzó faroknak a mag tartománybeli amplitúdóhoz képest nagyon kicsi amplitúdója miatt az ilyen megoldásokat John P. Boyd elnevezését követve *gyengén nemlokális* állapotoknak hívjuk [115, 116].

Az egzaktul idő-periodikus gyengén nemlokális megoldások vizsgálata, analitikus és numerikus módszerekkel egyaránt, lényegesen könnyebb mint a lassan változó frekvenciájú oszcillonok közvetlen tanulmányozása. Rögzített frekvencia esetén még sokféle gyengén nemlok-

ális megoldás létezik, különféle amplitúdójú és fázisú állóhullám farokkal. Az oszcillonokat nyilvánvalóan az a gyengén nemlokális megoldás közelíti legjobban, amelynek minimális a farok amplitúdója. Ezt az adott frekvencia esetén egyértelmű megoldást *kvázibreather*nek nevezzük.



A magtól nagy távolságra a skalár m tömegű Klein-Gordon mezőként viselkedik. Ennek $\omega > m$ frekvenciájú gömbszimmetrikus állóhullám megoldásai a gyengén nemlokális esetben nagy r távolságokra

$$\phi \approx \frac{1}{r^{\frac{d-1}{2}}} \cos[\lambda_f(r - r_0)] \cos[\omega_f(t - t_0)] \quad (2.35)$$

alakúak, tetszőleges r_0 és t_0 fázis mellett, ahol $\omega_f^2 = m^2 + \lambda_f^2$. Az ebből (2.10) alapján számolt r sugarú gömbben lévő $E(r)$ energia nagy távolságokra r -rel arányosan növekszik. Ez mutatja, hogy a gyengén nemlokális megoldások, így a kvázibreatherek is, mindig végtelen nagy energiával rendelkeznek. Ennek ellenére, az oszcilláló farok tartomány amplitúdója általában olyan alacsony, hogy az ott lévő energiasűrűség nagyságrendekkel kisebb a magtartományban lévőnél. Egy közepesen nagy méretű gömb alakú tartományt tekintve az energia nagy része még mindig a jóval kisebb központi mag részben található, és így az objektum „kvázi” lokalizált breather-nek tekinthető. Oszcillon esetén az aszimptotikus tartományban a skalármező $r^{(1-d)/2} \cos(\lambda_f r - \omega_f t)$ alakú kimenő hullám. Ennek $E(r)$ energiája, ha a sugárzás végtelen idővel ezelőtt kezdődött, szintén divergál. Ez a feltétel nyilván nem teljesül, mivel az oszcillonok véges energiájú kezdőadatokból fejlődnek ki. A jövőt tekintve, az oszcillonok bizonyos esetekben végtelen ideig fennmaradhatnak, mivel a sugárzás az idő múltával nagymértékben gyengül. Az oszcillonok sohasem bomlanak el $d = 1$ és $d = 2$ térbeli dimenzió esetén, mivel ekkor az energia kisugárzásával létrejövő kis-amplitúdós állapotok stabilak.

A kvázibreather elnevezést a [28] cikkünkben vezettük be, és azóta elterjedt az oszcillonokkal foglalkozó irodalomban [110, 26, 117, 111, 99]. A kvázibreatherekhez szorosan kapcsolódó fogalom a John P. Boyd által bevezetett *nanopteron* fogalma [115, 118, 119, 120, 116]. Az elnevezés a görög „törpe szárny” kifejezésből ered. Nanopteron megoldások különböző hidrodinamikai, meteorológiai, oceanográfiai, plazmafizikai és részecskefizikai modellekben jelennek meg. Boyd definíciója szerint a nanopteronok olyan gyengén nemlokális állapotok, amelyekre a mag amplitúdóját csökkentve a szárny amplitúdója exponenciálisan csökken. Ez mint látni fogjuk, az oszcillonokhoz kapcsolódó kvázibreathereknél mindig teljesül. Arra az esetre, amikor a szárny amplitúdója csak hatványfüggvény szerint csökken, Boyd a mikropteron elnevezést vezette be. A kvázibreatherekhez hasonlóan, a nanopteronok is nagy amplitúdójú mag tartománnyal és nagyon kis amplitúdójú állóhullám farkokkal, azaz szárnyal rendelkeznek. A nanopteronok sem egyértelműek, többféle megoldás létezik a szárny fázisától függően. A kvázibreather megoldás a minimális fark-amplitúdóval rendelkező nanopteronnak tekinthető.

Az ω frekvenciájú kvázibreather megoldásokat a

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n \cos(n\omega t) \quad (2.36)$$

Fourier-sor alakban kereshetjük, ahol a Φ_n függvények már időfüggetlenek. A kvázibreather magjának ω frekvenciája általában az m tömegküszöb alatt van, és csak a magasabb rendű módusoknak lehet állóhullám farkuk. A 2.36 alakban előállított ϕ skalármező a $t = 0$ pillanatban időtükrözésre szimmetrikus. Az hogy ilyen alakú megoldások léteznek, a rendszer időtükrözéssel szembeni invarianciájából következik. A választást az is motiválja, hogy a numerikus számolások szerint a gyengén sugárzó oszcillonok is nagyon jó közelítéssel rendelkeznek ezzel a szimmetriával. A (2.36) kifejtést először kis amplitúdójú megoldások keresésének kiindulópontjául használták [33, 25, 36]. Megjegyezzük, hogy a [25] cikkben használt

$$\phi = \Phi_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \{\Phi_{2n+1} \sin[(2n+1)\omega t] + \Phi_{2n+2} \cos[(2n+2)\omega t]\} \quad (2.37)$$

kifejezéssel előállított skalár szintén időtükrözésre szimmetrikus a $t = \pi/(2\omega)$ időpillanatban, és ezért (2.37) a (2.36) kifejtéssel ekvivalens. Később a (2.36) felbontást az exponenciálisan lokalizált breather megoldások létezésének a cáfolására használták [64, 65]. Olyan potenciálokra, amelyek a minimumuk körül tükrözésre szimmetrikusak, mint például az $U(\phi) = 1 - \cos \phi$ sine-Gordon potenciál, a (2.36) kifejtésben csak páratlan indexű tagok szerepelnek, ami jelentősen egyszerűsíti a számolásokat.

A (2.36) kifejtést a (2.5) téregyenletbe helyettesítve a Φ_n függvényekre a

$$\Delta\Phi_n + (n^2\omega^2 - m^2)\Phi_n = F_n \quad (2.38)$$

csatolt differenciálegyenleteket kapjuk, ahol az F_n tagok $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots$ nemlineáris függvényei, és m a skalármező tömege.

A kölcsönhatást leíró potenciál minimuma körüli kifejtését az

$$U(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k+1}g_k\phi^{k+1} \quad (2.39)$$

alakban írjuk fel, a g_k kifejtési együtthatók segítségével. A potenciálnak a téregyenletben szereplő ϕ szerint differenciált alakja ekkor a következőképpen írható:

$$U'(\phi) = m^2\phi + \sum_{k=2}^{\infty} g_k\phi^k. \quad (2.40)$$

A (2.38) egyenlet jobboldalán lévő nemlineáris tagok az alábbi módon kaphatóak,

$$\begin{aligned} F_n = \left(1 - \frac{1}{2}\delta_{n,0}\right) & \left[\frac{g_2}{2} \sum_{p,q=0}^{\infty} \Phi_p\Phi_q\delta_{n,\pm p\pm q} + \frac{g_3}{4} \sum_{p,q,r=0}^{\infty} \Phi_p\Phi_q\Phi_r\delta_{n,\pm p\pm q\pm r} \right. \\ & + \frac{g_4}{8} \sum_{p,q,r,s=0}^{\infty} \Phi_p\Phi_q\Phi_r\Phi_s\delta_{n,\pm p\pm q\pm r\pm s} \\ & \left. + \frac{g_5}{16} \sum_{p,q,r,s,t=0}^{\infty} \Phi_p\Phi_q\Phi_r\Phi_s\Phi_t\delta_{n,\pm p\pm q\pm r\pm s\pm t} + \dots \right], \quad (2.41) \end{aligned}$$

ahol

$$\delta_{n,\pm p\pm q} = \delta_{n,p+q} + \delta_{n,p-q} + \delta_{n,-p+q} + \delta_{n,-p-q}, \quad (2.42)$$

és hasonlóan összegzünk a többi δ kifejezés esetén is az előjelek összes lehetséges variációjára. Megjegyezzük, hogy a 2.42 kifejezésben a p és q nulla értékei kétszeres súllyal szerepelnek a nem nulla értékekhez képest, mivel ekkor több tag is nemeltűnő az összegben. Ha a potenciálnak a szimmetrikus ϕ^4 potenciált választjuk a (2.19) alakban, akkor a skalármező tömege $m = \sqrt{2}$, és a nemeltűnő kifejtési konstansok $g_2 = -3$ és $g_3 = 1$.

Elsőnek John P. Boyd használta a (2.38) egyenleteket minimális amplitúdójú farokkal rendelkező nanopteronek (azaz kvázibreatherek) numerikus módszerrel történő megkonstruálására, 1 + 1 térdimenziós ϕ^4 elmélet esetén. Gömbszimmetrikus, 3 + 1 dimenziós, farokkal rendelkező kvázibreathereket szimmetrikus ϕ^4 potenciálra először Richard Watkins vizsgált numerikusan, de sajnos a munkájáról szóló rövid, kevés részletet tartalmazó beszámoló csak preprint formában jelent meg, és az interneten nem megtalálható [121]. Alfimov,

Evans, és Vázquez gömbszimmetrikus kvázibreather konfigurációkat számolt $n + 1$ dimenziós sine-Gordon elmélet esetén [77]. Honda és Choquet, az általuk megfigyelt periodikusnak tűnő állapotok leírása érdekében, szintén numerikusan keresték a (2.38) rendszer megoldásait [100, 32], de a függvények állóhullám farok részeit nem figyelték meg, azok nagyon kicsi amplitúdója miatt.

A dolgozatban csak gömbszimmetrikus konfigurációkat vizsgálunk részletesen. Ekkor a Laplace-operátor a (2.8) alakban írható, és a (2.38) egyenletek alakja

$$\frac{d^2\Phi_n}{dr^2} + \frac{d-1}{r} \frac{d\Phi_n}{dr} + (n^2\omega^2 - m^2)\Phi_n = F_n, \quad (2.43)$$

ahol a jobboldali F_n kifejezéseket (2.41) adja meg. A megoldások középpont közelében való vezető rendű viselkedése a térbeli dimenziók számától függően a következő két komponensből áll:

$$d = 1 \quad \text{esetén} \quad \Phi_n \approx \gamma_n r + \delta_n, \quad (2.44)$$

$$d = 2 \quad \text{esetén} \quad \Phi_n \approx \gamma_n \ln r + \delta_n, \quad (2.45)$$

$$d \geq 3 \quad \text{esetén} \quad \Phi_n \approx \frac{\gamma_n}{r^{d-2}} + \delta_n, \quad (2.46)$$

ahol γ_n és δ_n konstansok. $d \geq 2$ térdimenzió esetén a középpont regularitásának feltétele, hogy minden n -re $\gamma_n = 0$ legyen. Egy térdimenzió esetén olyan megoldásokat keresünk, amelyek $r = 0$ körül tükrözésre szimmetrikusak, aminek a feltétele szintén $\gamma_n = 0$. A regularitás feltétele miatt a Φ_n függvények bármilyen dimenzió esetén tükrözésre szimmetrikusak, és deriváltjuk nulla az $r = 0$ helyen. A középpontbeli megfelelő viselkedés módusonként egy-egy feltételt jelent a függvényekre.

A kvázibreather magjától nagy távolságra a Φ_n módusfüggvények kicsivé válnak, és emiatt szétcsatolódnak, és a (2.43) egyenletek baloldali lineáris részét elégítik ki. A nagy távolságban lévő aszimptotikus viselkedés az $n^2\omega^2 - m^2$ szorzó előjelétől függ. Ha n egy bizonyos érték alatt van, akkor $n^2\omega^2 - m^2 < 0$, és a homogén egyenlet megoldásai aszimptotikusan a

$$\Phi_n \approx \frac{1}{r^{(d-1)/2}} \left[\alpha_n \exp(-\hat{\lambda}_n r) + \beta_n \exp(\hat{\lambda}_n r) \right] \quad (2.47)$$

alakúak, ahol $\hat{\lambda}_n = \sqrt{m^2 - n^2\omega^2}$. Legalább gyengén lokalizált megoldás létezésének feltétele, hogy $\beta_n = 0$ legyen, tetszőleges $\alpha_n = 0$ mellett. Ekkor az exponenciális lecsengés miatt a Φ_n módus (2.10) alapján számolt járuléka a rendszer energiájához véges nagyságú. Az $n^2\omega^2 - m^2 < 0$ feltételt teljesítő módusoknál egy-egy feltételünk van az origóban és a végtelenben, ami másodrendű egyenlet lévén mindig teljesíthető.

Kivételes esetben valamelyik Φ_n módusra előfordulhat, hogy $n^2\omega^2 - m^2 = 0$. Ekkor az aszimptotikus megoldások alakja

$$d = 2 \quad \text{esetén} \quad \Phi_n \approx \alpha_n \ln r + \beta_n, \quad (2.48)$$

$$d \neq 2 \quad \text{esetén} \quad \Phi_n \approx \alpha_n r^{2-d} + \beta_n. \quad (2.49)$$

A véges energiához szükséges, hogy nullához tartson a megoldás, ezért $\beta_n = 0$ kell legyen, és $d \leq 2$ esetén $\alpha_n = 0$ -nak is teljesülni kell. Az energia végességéből következik, hogy $d \leq 4$ esetén is szükséges hogy $\alpha_n = 0$ legyen, de ennél nagyobb dimenzióknál α_n tetszőleges lehet. Látható, hogy $d \leq 4$ térbeli dimenzió esetén a középpontbeli regularitási feltétellel együtt három feltétel van a Φ_n módusra, ami általában túl sok. Az általunk továbbiakban vizsgált kvázibreatherek esetén nem lesz olyan módus és frekvencia amire $n^2\omega^2 - m^2 = 0$ fennállna, így nem fontos ennek az esetnek a további vizsgálata.

Általános esetben bármely frekvenciához létezik egy olyan n_ω egész, hogy $n \geq n_\omega$ esetén $n^2\omega^2 - m^2 > 0$ legyen. Bevezetve ekkor a $\lambda_n = \sqrt{n^2\omega^2 - m^2}$ jelölést, a módusok aszimptotikus viselkedése a következő alakban írható:

$$\Phi_n \approx \frac{1}{r^{(d-1)/2}} [\alpha_n \sin(\lambda_n r) + \beta_n \cos(\lambda_n r)]. \quad (2.50)$$

A Φ_n függvény ugyan $d \geq 2$ esetén bármilyen α_n és β_n konstansok mellett nullához tart, de az r sugarú gömbben lévő $E(r)$ energia bármely d esetén lineárisan növekedve divergál amikor α_n és β_n valamelyike nem nulla. Valóban lokalizált, véges energiájú, időben periodikus breather megoldás csak akkor létezhet, ha minden $n \geq n_\omega$ módusra $\alpha_n = \beta_n = 0$, és a $\gamma_n = 0$ középpontbeli feltétel is teljesül. Módusonként három feltétel másodrendű egyenletekkel leírt függvényekre általában túl sok. Ez az érvelés azt mutatja, hogy igazi breather megoldások csak nagyon kivételes esetekben létezhetnek, mint például az $1 + 1$ dimenziós sine-Gordon potenciál esetén, amikor is a rendszer integrálható. Más esetekben lokalizált megoldáshoz legjobban hasonlító konfigurációt úgy találhatunk, hogy a minimális farok-amplitúdójú (energiasűrűségű) gyengén nemlokális állapotot, azaz a kvázibreathert keressük.

2.7.2. Kvázibreatherek numerikus vizsgálata

A 2.7 fejezet hátralévő részében a kvázibreatherekkel kapcsolatos numerikus eredményeinket ismertetjük, $d = 3$ térdimenzió esetén. A minimális nagyságú állóhullám farokkal rendelkező, egzaktul idő-periodikus kvázibreatherek numerikus megkonstruálásához a Meudon-ban kidolgozott LORENE numerikus könyvtárat [122] használtuk, Philippe Grandclement francia

kutatóval együttműködve [28]. A LORENE program spektrális módszert alkalmaz, és a számolási teret több tartományra bontja (multi-domain). A spektrális eljárásról és a LORENE könyvtár használatáról nagyon hasznos ismertetőt találhatunk a 2005-ben Meudonban megtartott spektrális módszerek iskola előadásainak interneten elérhető anyagában [123]. A teret gömbszimmetrikus tartományokra bontjuk, és a radiális függésre Csebisev-polinomok szerinti kifejtést alkalmazunk. A módszer segítségével a differenciálegyenletek megoldását minden egyes tartományban az együttható-mátrixok invertálására vezethetjük vissza. A gyengén nemlokális állapotok számolásához a [124] cikkben részletesen leírt eljárást alkalmazzuk, a $\Delta + \lambda_n^2$ Helmholtz operátor esetére általánosítva. A nemlineáris egyenletrendszer iterációs módszerrel oldjuk meg, a baloldalon lévő lineáris Helmholtz operátor numerikus invertálásával és relaxációs módszer segítségével. Külön figyelmet kell fordítani arra, hogy a kód elkerülje a vákuum állapotoknak megfelelő $\Phi_0 = 0, 1, 2, \Phi_n = 0$ triviális megoldásokat [28].

Lokalizált maggal rendelkező oszcillonok és kvázibreatherek frekvenciája az $\omega < m$ tartományba esik. Megjegyezzük, hogy az ebben a fejezetben használt ϕ^4 potenciál alak esetén a skalármező tömege $m = \sqrt{2}$, de később a kis-amplitúdós kifejtéses irodalommal való könnyebb összehasonlítás érdekében az $m = 1$ választást is használni fogjuk. A kvázibreather farkának amplitúdója m -nél csak egy kicsit kisebb frekvenciákra elenyészően kicsi lehet, de a frekvenciát csökkentve gyorsan növekedni kezd. Mikor ω az $m/2$ érték közelébe csökken, a fark amplitúdója általában annyira megnövekszik, hogy már nem beszélhetünk közelítőleg lokalizált állapotról. Ezért a továbbiakban az

$$\frac{m}{2} < \omega < m \quad (2.51)$$

frekvenciatartományba eső kvázibreathereket vizsgálunk, amelyekre a Φ_0 és a Φ_1 módus linearizált viselkedése exponenciálisan lecsengő, a (2.47) egyenlet második tagjának megfelelően. A többi Φ_n módus $n \geq 2$ -re viszont (2.50) szerinti állóhullám farkokkal rendelkezik.

A LORENE program a nagyon távoli tartományt általában az $u = 1/r$ változó bevezetésével véges tartományba képezi le. Ez az $n \geq 2$ módusokra az állóhullám fark miatt nem járható út. A spektrális módszer, az általánosan használt többi numerikus eljáráshoz hasonlóan, nem képes olyan függvényeket leírni, amelyeknek egy véges tartományban végtelen sok zérushelye van. Az $n \geq 2$ módusokra a Φ_n függvény értékét az r koordináta egy nagy R_{lim} értékénél illesztjük a $d = 3$ dimenzió esetén a (2.50) alakkal ekvivalens

$$\Phi_n \approx \frac{1}{r} A_n \sin(\lambda_n r + \varphi_n) \quad (2.52)$$

függvényhez, ahol A_n az aszimptotikus fark amplitúdója, és φ_n a fázisa. Az első két módus esetén, amelyeknek a linearizált viselkedése nagy távolságokra exponenciálisan lecsengő,

használunk egy kompaktifikált tartományt $r > R_{\text{lim}}$ esetére, és ebben a tartományban a módusokat meghatározó (2.38) differenciálegyenletek jobb oldalán csak a Φ_0 és Φ_1 függvényeket tartjuk meg, a többit nullának vesszük. Mivel a választott potenciálra $m = \sqrt{2}$, $g_2 = -3$ és $g_3 = 1$, a (2.41) kifejtés alapján a külső tartományban a következő egyenleteket oldjuk meg:

$$(\Delta - 2)\Phi_0 = \frac{3}{2}(\Phi_0 - 1)\Phi_1^2 + \Phi_0^2(\Phi_0 - 3), \quad (2.53)$$

$$(\Delta + \omega^2 - 2)\Phi_1 = 3\Phi_0(\Phi_0 - 2)\Phi_1 + \frac{3}{4}\Phi_1^3. \quad (2.54)$$

Ez a közelítés nyilvánvalóan csak közepesen nagy távolságokra kielégítő, mert nagyon nagy r esetén az $n \geq 2$ módusokat tartalmazó nemlineáris forrástagok fogják meghatározni Φ_0 és Φ_1 viselkedését is, és így ezek is oszcillálóvá válnak az exponenciális lecsengés helyett. Azonban ez csak az általunk használt R_{lim} értékeknél jóval nagyobb távolságokra következik be, és az ott indukált rezgések amplitúdója annyira csekély, hogy nem befolyásolja számításaink pontosságát. Alapos tesztekkel ellenőriztük, hogy a mag-tartományban a függvények és az oszcilláló módusok farok-amplitúdói nem függenek R_{lim} értékének megválasztásától.

Az időben periodikus megoldásokat meghatározó (2.38) differenciálegyenleteknek az állóhullám farok megengedése után már nem egyértelmű a megoldása. Tetszőleges rögzített φ_n , $n \geq 2$ fázisok mellett találhatunk a numerikus eljárásunkkal gyengén nemlokális megoldást a határfeltételek előbb leírt kezelése mellett. A módusok A_n aszimptotikus amplitúdói a számolás eredményeképp adódnak. A lassan energiát kisugárzó oszcillon megoldások közelítéséhez nyilvánvalóan a minimális farokkal rendelkező kvázibreather megoldás a legmegfelelőbb. Emiatt a φ_n fázisok változtatásával azt az egyértelmű megoldást kerestük, amelyre az A_2 amplitúdó minimális értéket vesz fel valamilyen rögzített ω frekvencia esetén. Az A_2 amplitúdó minimalizálása helyett elméletileg megfelelőbb lenne a farok-tartományban lévő átlagolt energiasűrűség minimalizálása, az összes $n \geq 2$ módust figyelembe véve [110]. Azonban mivel az egyes módusok járuléka az energiasűrűséghez az amplitúdójuk négyzetével arányos, és a vizsgált esetekben a magasabb módusok amplitúdója sokkal kisebb az $n = 2$ módusénál, mindkét eljárás jó közelítéssel ugyanarra az eredményre vezet.

Az A_2 amplitúdó minimumának keresését a GSL tudományos numerikus könyvtár többdimenziós minimalizáló programjának segítségével végeztük [125]. Kezdetben az összes fázist $\pi/2$ értékre állítottuk, és addig iteráltunk, amíg egy bizonyos pontossággal el nem értük A_2 minimum értékét, és így megtaláltuk a kvázibreathert a gyengén nemlokális megoldások között. A fázisokat a $0 \leq \varphi_n < \pi$ intervallumban kerestük, az ezen kívül eső fázisokat az A_n amplitúdók előjelének megváltoztatásával értük el. A program rendkívül gyorsan konvergál az A_2 sima viselkedése miatt.

A számolás során a teret gömbszimmetrikus tartományokra bontjuk az r radiális koordináta értéke szerint. Az első három tartomány határai $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,4]$, ezután az összes többi méretét 4-nek választjuk, egészen az $r = R_{\text{lim}}$ értékig. A tartományok számának növelésével R_{lim} is egyre nagyobbá válik. A számolás során a tartományok számát tipikusan 13-nak választottuk, ami $R_{\text{lim}} = 44$ -nek felel meg, de ellenőriztük, hogy $R_{\text{lim}} = 60$ -ig felmenve sem változik lényegesen a módusok rezgő farkának A_n amplitúdója. A spektrális koefficiensek számának értéke általában tartományonként $N_r = 33$ volt. A (2.36) Fourier felbontásban 6 darab Φ_n módust elegendőnek bizonyult figyelembe venni, de ha a vizsgáltaknál még alacsonyabb frekvenciák esetére akarunk számolni, akkor ezt növelni szükséges.

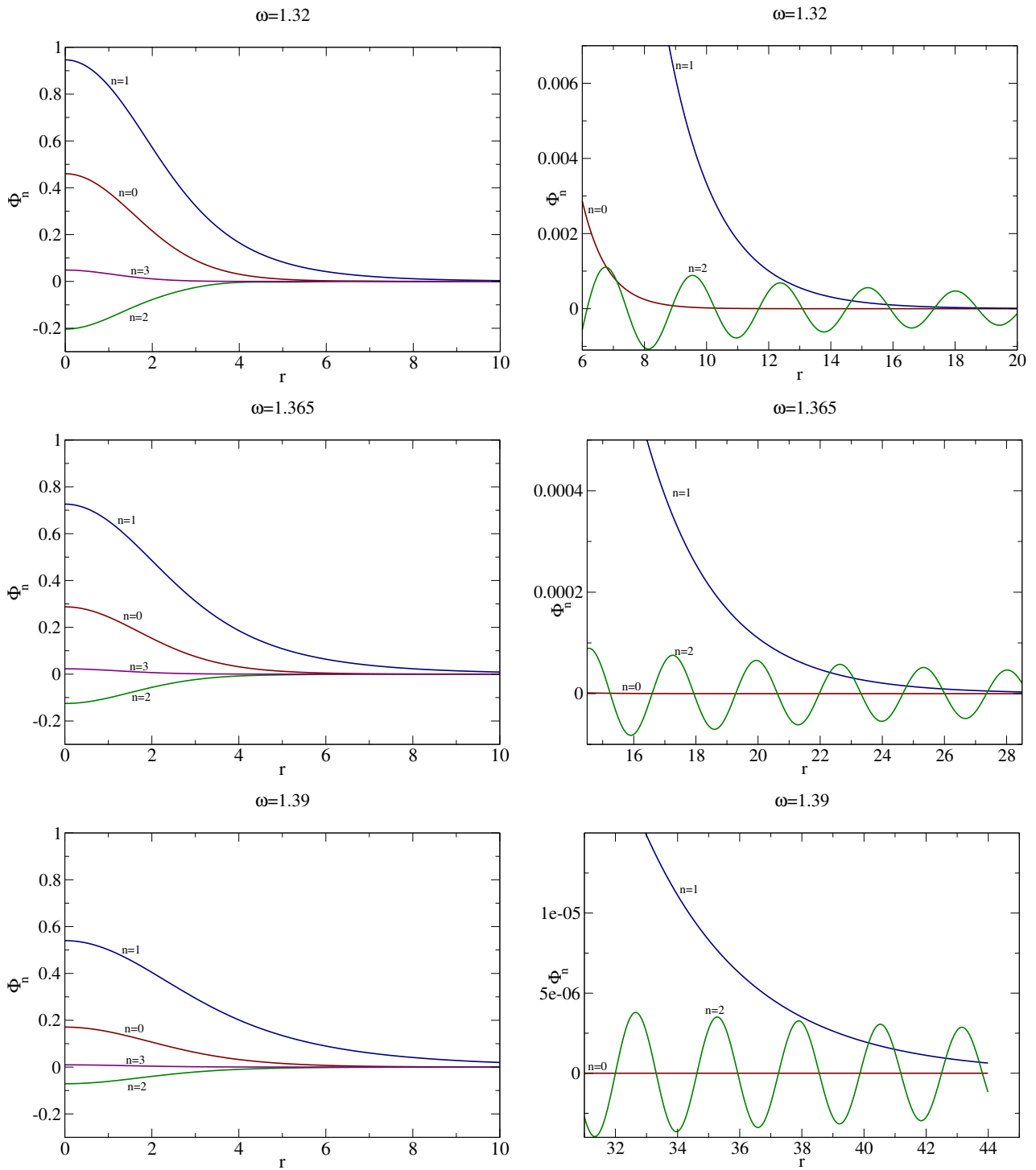
A 2.12 ábrán három tipikus frekvencia választása esetén mutatjuk a minimalizált fark-amplitúdóval rendelkező kvázibreather első néhány Φ_n módusának radiális viselkedését. A baloldali ábrákon a középső mag-tartományt, a jobb oldalon pedig a rezgő fark megjelenési helyének környékét mutatjuk. Látható, hogy a frekvencia növekedésével a központi amplitúdó csökken, és egyúttal a mag-tartomány mérete növekszik. A központi amplitúdó csökkenésével az állóhullám fark amplitúdója is kisebbé válik, és a fark amplitúdójának ez a csökkenése a középpontnál sokkal gyorsabb. Mint később látni fogjuk, a kinti és benti amplitúdó közötti összefüggés exponenciális függvénnyel írható le.

A 2.13 ábrán a kvázibreather első három Φ_n módusának középpontbeli értékét láthatjuk a frekvencia függvényében.

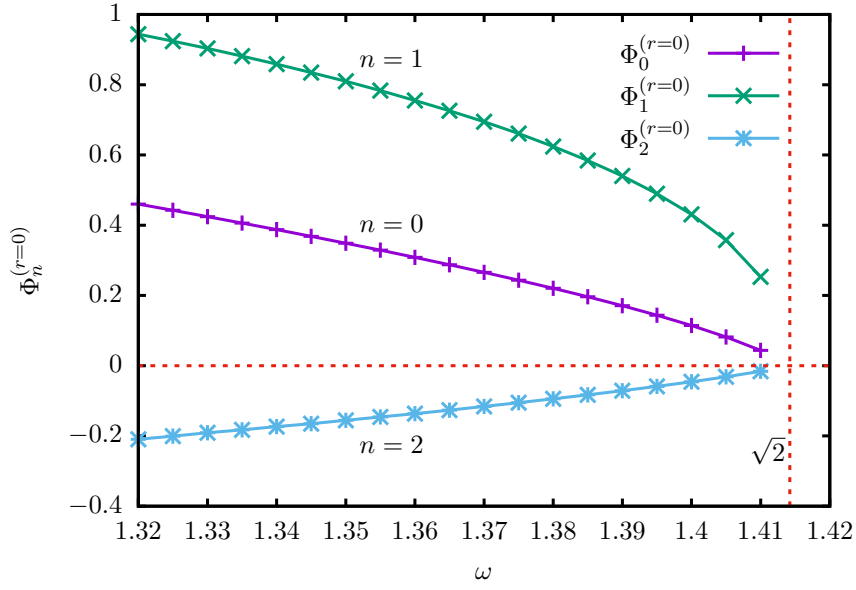
A 2.14 ábrán a minimalizált fark-amplitúdójú Φ_2 módus fázisát mutatjuk a frekvencia függvényeként.

Az oszcilláló módusok minimalizálás utáni fark-amplitúdójának az n index szerinti gyors csökkenését a 2.15 ábrán láthatjuk. Az ábráról az is látható, hogy a vizsgált frekvencia tartományban nincs olyan ω , ahol az amplitúdók nullához tartanak, vagyis nem létezik lokalizált, véges energiájú breather megoldása a rendszernek. Az $\omega \rightarrow m$ határesetben az amplitúdó a középső mag-tartományban is nullához tart, és a megoldás a triviális vákuum megoldáshoz közelít.

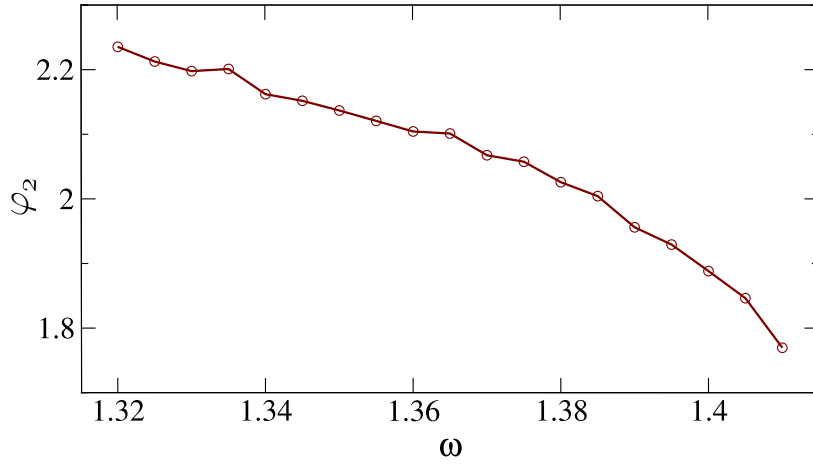
A kvázibreatherek szerkezetének jobb megértése érdekében, különböző frekvenciájú állapotok (2.9) alapján számolt \mathcal{E} energiasűrűségének radiális függését mutatjuk a 2.16 és a 2.17 ábrákon, a központi és egy távolabbi tartományban. Adott frekvenciára, a fark-tartományban az energiasűrűség kimenő irányban történő csökkenésének tendenciája az $1/r^2$ lecsengésnek megfelelő, amiből következik, hogy az r sugarú gömbben lévő $E(r)$ energia lineárisan divergál az r növekedésével. A kvázibreatherek ugyan nem véges energiájú állapotok, de egy nagy tartományban mégis nagy pontossággal közelítik a véges energiájú, de energiát vesztő oszcillon állapotokat. Az ábrákról az is látható, hogy a mag-tartomány külső részében



2.12. ábra. A kvázibreather Φ_n Fourier módus függvényeinek r függése a középpont környékén és az átmeneti tartományban, $\omega = 1.32, 1.365$ és 1.39 esetén.

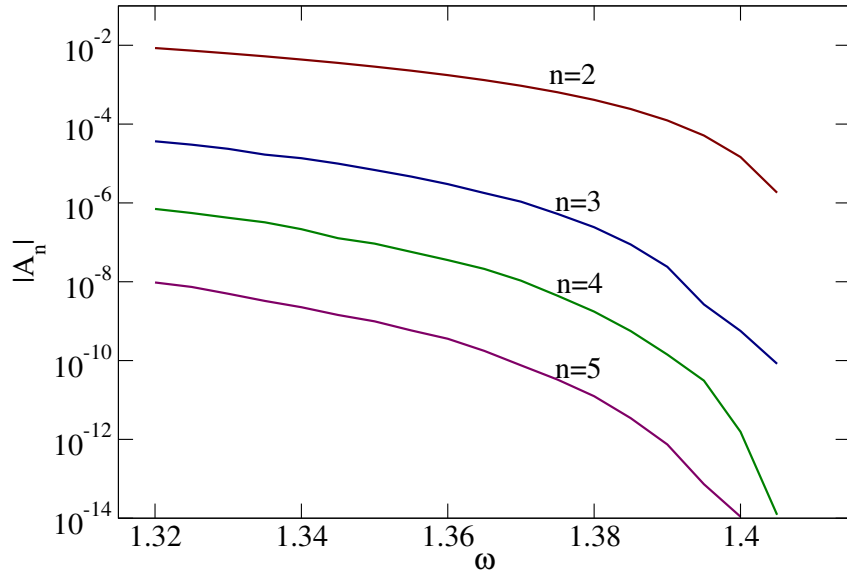


2.13. ábra. A Φ_0 , Φ_1 és Φ_2 függvények középpontbeli értékének a frekvencia függése.

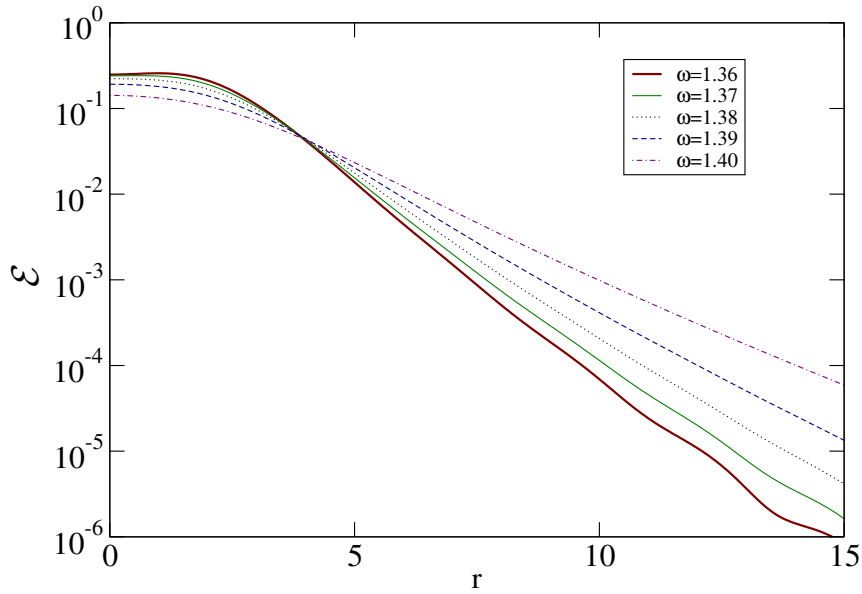


2.14. ábra. A kvázibreather Φ_2 vezető oszcilláló módusának φ_2 fázisa a frekvencia függvényében.

az energiasűrűség jó közelítéssel exponenciálisan csökken, amíg el nem éri a farok energiasűrűségének értékét. A farok energiasűrűsége lényegében az A_2 amplitúdó négyzetével arányos, a többi módus relatív kicsisége miatt. A mag-tartomány sugarának azt az $r = R_{\text{trans}}$ értéket definiáljuk, ahol a magban domináns Φ_1 módus értéke először lecsökken a Φ_2 oszcilláló



2.15. ábra. Az első négy oszcilláló módus amplitúdójának frekvencia függése.

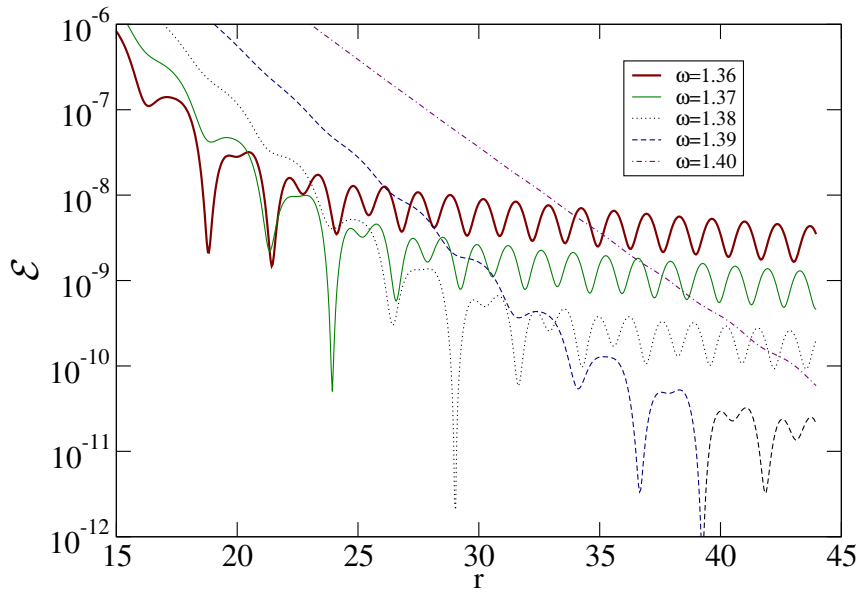


2.16. ábra. Az energiasűrűség r koordinátától való függése a kvázibreather magjának tartományában.

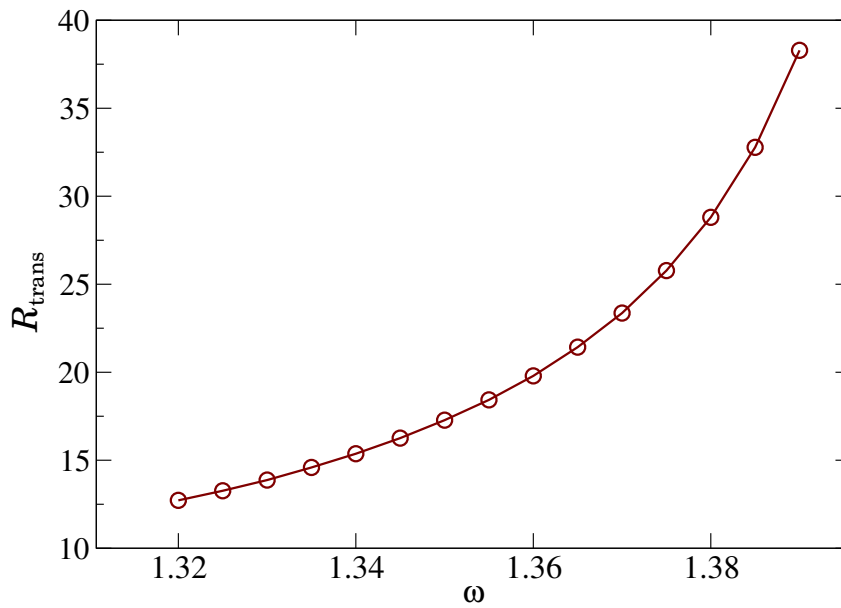
módus farkának ottani amplitúdójára,

$$\Phi_1 \Big|_{r=R_{\text{trans}}} = \frac{|A_2|}{R_{\text{trans}}} . \quad (2.55)$$

Ez az a távolság, ahonnan az oszcilláló állóhullám fark dominánsá válik. A (2.18) ábrán a mag-tartomány sugarának változását mutatjuk ω függvényében. A mag-tartomány sugará-



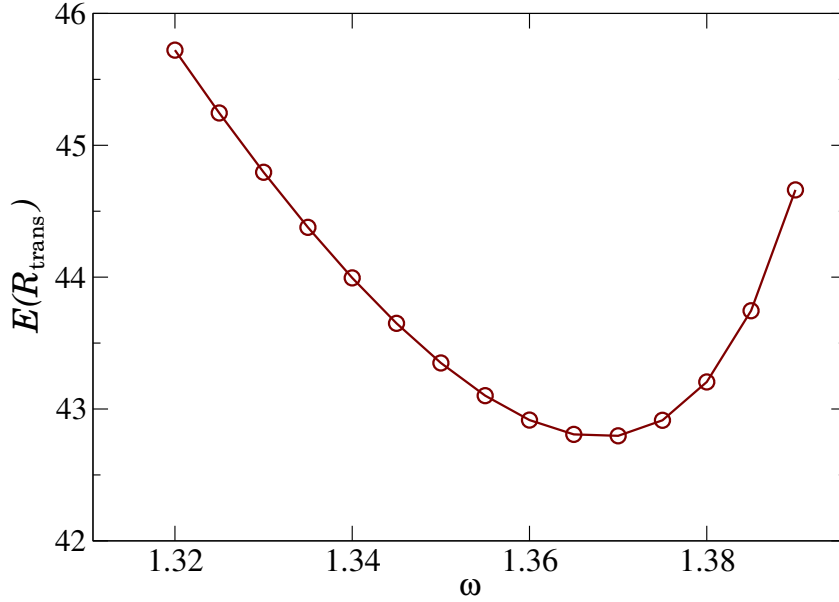
2.17. ábra. Kvázibreather energiasűrűsége az állóhullám tartományban.



2.18. ábra. A kvázibreather magjának R_{trans} sugara a frekvencia függvényében.

nek értékét nem számoltuk ki az $\omega > 1.39$ frekvenciákra, mivel akkor az nagyobbá válik mint az általunk használt $R_{\text{lim}} = 44$ érték, amelynél a külső határfeltételt megadtuk. Magasabb ω esetén a farok meghatározásához R_{lim} értékének növelése szükséges. Ennek ellenére, a magtartomány viselkedésére ekkor is megbízható eredményeket kapunk. Később látni fogjuk, hogy a kvázibreatherek magjának mérete fordítottan arányos az amplitúdójukkal.

A kvázibreather magjának teljes energiáján az R_{trans} sugáron belüli $E(R_{\text{trans}})$ energiát értjük. Ennek ω függését a (2.19) ábrán láthatjuk. A mag-tartomány sugarával ellentétben



2.19. ábra. A kvázibreather magjának $E(R_{\text{trans}})$ energiája a frekvencia függvényeként.

az energia nem egy monoton függvény, a minimum értékét $\omega_c = 1.368$ kritikus frekvencia közelében veszi fel. A nemtriviális viselkedés két egymással versenyző hatásnak köszönhető. A frekvencia növelésével a mag amplitúdója csökken, de a térbeli mérete növekszik. Későbbi analitikus számolásainkból következzni fog, hogy a mag energiája végtelenhez tart amikor a frekvencia az $m = \sqrt{2}$ értéket alulról közelíti.

Az ω_c kritikus frekvencia azért jelentős, mert numerikus szimulációk azt mutatják, hogy az $\omega < \omega_c$ frekvenciával rezgő oszcillonok stabilak, míg $\omega > \omega_c$ esetén instabilak. Ez a stabilitás váltás annak az általános érvényű asztrofizikai tapasztalatnak felel meg, hogy ha egy lokalizált csillaghoz hasonló objektumnál a középponti sűrűség növelésével a teljes tömeg (energia) növekszik akkor az állapot rendszerint stabil, míg az ellenkező esetben instabil. Oszcillonok és kvázibreatherek esetén a középponti amplitúdó és energiasűrűség a frekvencia csökkenésével monoton növekszik.

2.7.3. Oszcillonok és kvázibreatherek kapcsolata

Az oszcillonok és a kvázibreatherek kvantitatív összehasonlítása érdekében az oszcillon fejlődésének egy bizonyos időszakában, amikor a frekvencia közelítőleg ω , a numerikus megoldás felhasználásával kiszámoljuk az oszcillon időfüggésének Fourier kifejtését egy bizonyos

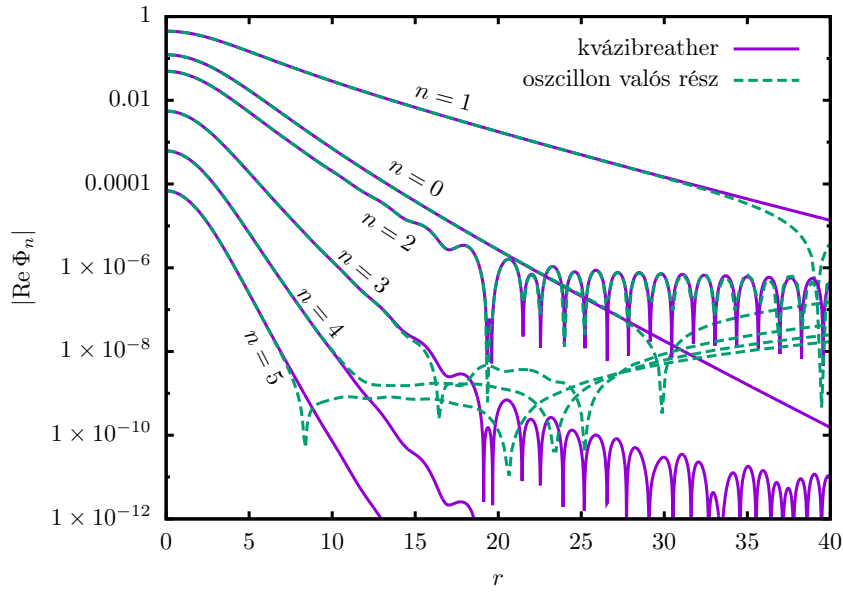
r sugár értékénél, és a kapott kifejtési együtthatókat összehasonlítjuk az ω frekvenciájú kvázibreather módusainak r -beli értékeivel.

Mivel a gyors Fourier-transzformáció (FFT) nagyon érzékeny arra, hogy milyen időlépésben lettek kiírva a numerikus adatok, helyette egy közvetlen numerikus integráláson alapuló módszert alkalmazunk, amely jóval pontosabbnak bizonyul az oszcillon frekvenciájának és Fourier együtthatóinak kiszámolására. Első lépésben meghatározzuk a rezgési periódust, két közvetlenül egymás utáni maximum t_1 és t_2 időpontjának megkeresésével az $r = 0$ pontban. Mivel t_1 és t_2 általában a numerikus kód által kiírt két időszelvény közé esik, az időpontok pontosabb értékét a numerikus adatokra illesztett másodfokú polinomok segítségével határozzuk meg. A numerikus eredményeinkből jól látható, hogy a t_1 és t_2 időpontokban a fejlődés igen jó közelítéssel időtükrözésre szimmetrikus, nem csak a középpontban, hanem annak egy nagy környezetében. A rezgési frekvenciát az $\omega = 2\pi/(t_2 - t_1)$ képlettel határozzuk meg. Ezután az n -edik Fourier együtthatót az r sugárnál az evolúciós kód által kiírt $\phi(t, r)$ függvényből a következő integrál numerikus számolásával kapjuk,

$$\Phi_n(r) = \int_{t_1}^{t_2} \phi(t, r) \exp(in\omega t) dt . \quad (2.56)$$

Megjegyezzük, hogy a numerikus integrálás első és utolsó, a többinél kisebb méretű időlépése külön figyelmet igényel. Ha a $\phi(t, r)$ függvény egzaktul periodikus, és a t_1 és t_2 időpontokban valóban időtükrözésre szimmetrikus lenne, akkor ennek az integrálnak a képzetes része eltűnne minden n -re. Az integrál képzetes részét is kiszámoljuk, és láthatjuk, hogy a magtartományban valóban kicsi a valós részhez képest.

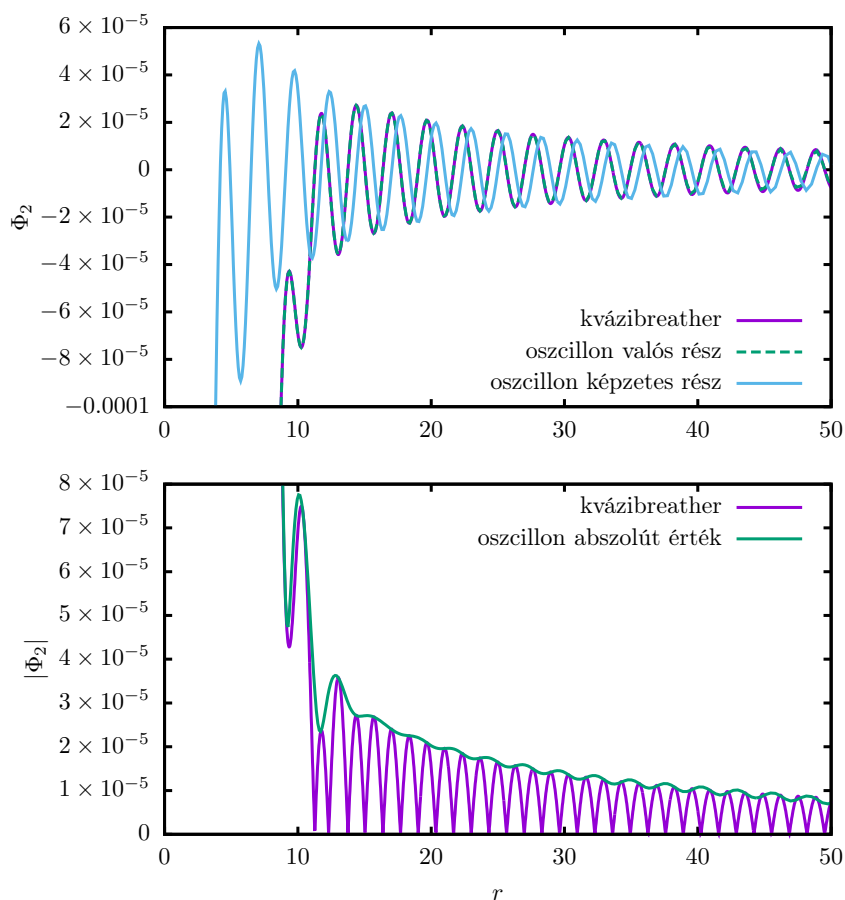
Először különféle majdnem-periodikus oszcillon állapotok Fourier kifejtését vizsgáljuk meg, mert ezek a 2.6.5 alfejezetben az r_0 paraméter finomhangolásával kapott állapotok nagyon nagy pontossággal periodikusnak és időtükrözésre szimmetrikusnak bizonyulnak. Első konkrét példaként a $C = 2$ amplitúdóval indított (2.20) kezdőadat első finomhangolt csúcsához tartozó majdnem-periodikus oszcillon állapotot tanulmányozzuk, amelynek a frekvencia függése a 2.10 ábra középső rajzán látható. A Fourier kifejtést a $t_1 = 1592.29$ és $t_2 = 1596.78$ időpontokban lévő egymás utáni maximumok között végezzük. A 2.20 ábrán ennek a kifejtésnek a valós részét hasonlítjuk össze az $\omega = 1.398665$ frekvenciájú kvázibreather komponenseivel, amelyeket a (2.38) egyenletek numerikus megoldásával kaptunk. Az ábrán az első hat komponens abszolút értékét mutatjuk a radiális koordináta függvényében, logaritmikus skálát alkalmazva. A Φ_0 és a páratlan indexű komponensek középponti értéke pozitív, a többi negatív. A lefelé mutató csúcsok a függvények zérushelyeinek felelnek meg. A középső mag-tartományban az egyezés annyira jó, hogy a két módszerrel kapott értékek relatív eltérése az első négy módusnál kisebb mint 10^{-5} . Figyelemre méltó módon, az egyezés



2.20. ábra. A $C = 2$ kezdőadathoz tartozó első majdnem-periodikus állapot Fourier kifejtésének összehasonlítása az $\omega = 1.398665$ frekvenciájú kvázibreather módusaival.

a Φ_2 módusnál még a rezgő farok tartományban is meglepően jó. Ahol a rezgő farok Φ_2 -nél megjelenik, Φ_2 amplitúdója 10^{-6} körüli, és a két módszerrel kapott görbe abszolút eltérése 10^{-8} nagyságrendű. Ennél a frekvenciánál a kvázibreather magjának sugara $r = 55.4$, és így a 2.20 ábrán a Φ_1 módus még jóval nagyobb mint a rezgő Φ_2 módus. Az ábrán mutatott r tartományban a kvázibreather rezgő farka a teljes ϕ skalárfüggvényen még nem lenne látható.

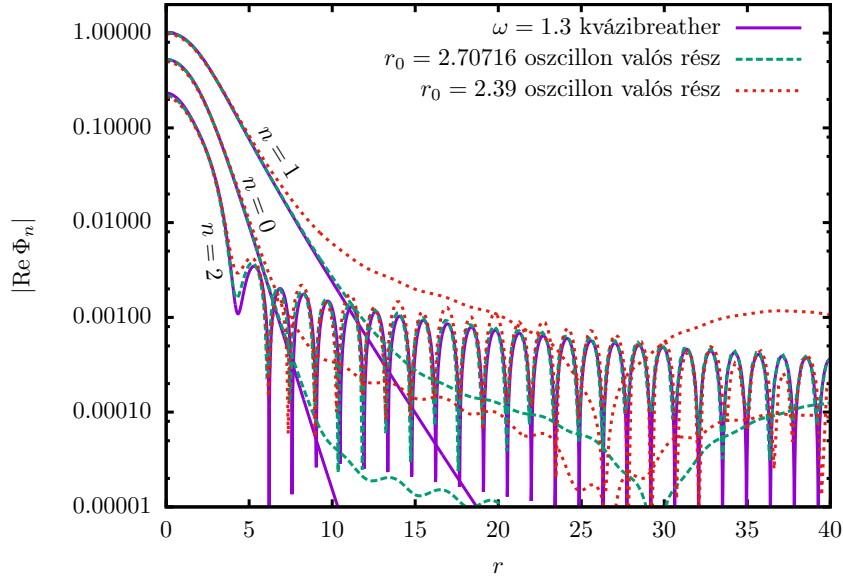
Alacsonyabb frekvenciák esetén a mag sugara kisebbé válik, és a kvázibreather és az oszcillon közötti egyezés a valódi farok-tartományban is könnyebben ellenőrizhető. Következő példaként a 2.10 ábra alsó rajzán látható $C = 0.6$ kezdőadat fejlődését vizsgáljuk a $t_1 = 1400.85$ középponti maximummal kezdődő rezgési periódusban. A következő maximum helyéből számolt frekvencia ekkor $\omega = 1.3800002$, ezért az $\omega = 1.38$ frekvenciához számolt kvázibreatherrel hasonlítjuk össze. A 2.21 ábrán a Φ_2 Fourier módus viselkedését mutatjuk a külső tartományban. Az ábra felső részén jól látható, hogy az oszcillon Fourier komponensének valós része nagy pontossággal megegyezik a megfelelő kvázibreather módusával, az eltérés 10^{-7} nagyságrendű. Azonban, éppen azon r sugárnál ahol a rezgő farok megjelenik, az oszcillon Φ_2 Fourier komponensének képzetes része azonos nagyságrendűvé válik a valós részével, és ezért az időtükrözési szimmetria már nem teljesül. Az oszcillon farka itt energiát szállító kimenő hullámnak tekinthető, de az amplitúdója nagyon jó pontossággal megegyezik a megfelelő kvázibreather állóhullám farkának amplitúdójával. Ezt jól mutatja a 2.21 ábra alsó része, ahol a komplex Φ_2 amplitúdója a kvázibreatherhez tartozó valós Φ_2 abszolút érté-



2.21. ábra. Az $\omega = 1.38$ frekvenciájú kvázibreather Φ_2 komponensének összehasonlítása egy azonos frekvenciájú majdnem-periodikus oszcillon állapot Fourier kifejtésével kapott komplex Φ_2 értékekkel. A felső ábrán a valós és a képzetes részt mutatjuk a radiális koordináta függvényeként, az alsón a komponens abszolút értékét.

kének burkológörbéként viselkedik. Ennél a frekvenciánál a kvázibreather magjának sugara $r = 28.8$, és így az amplitúdók egyezése a teljes ϕ skalárfüggvény fark-tartományában is megfigyelhető. Az egyezés lehetővé teszi, hogy az oszcillon energiaveszteségének rátáját a megfelelő frekvenciájú kvázibreather farkának amplitúdója segítségével határozzhassuk meg.

Az összehasonlítást általános nem finomhangolt oszcillonok esetén is elvégezhetjük. A 2.6 ábrán mutatott mind a kétféle Gauss típusú kezdőadat a fejlődése során eljut egy olyan állapotba, amikor a frekvenciája közelítőleg $\omega = 1.3$. A 2.22 ábrán az első három Φ_n módus valós részét hasonlítjuk össze az ugyanilyen frekvenciájú kvázibreather módusaival. Az első oszcillon állapot a $C = 2$, $r_0 = 2.70716$ kezdőadathoz tartozik, és a Fourier kifejtést a $t_1 = 471.47$ és az aztán következő maximum között végeztük, ahol a frekvencia $\omega = 1.2995$ -nek adódott. A másik oszcillon kezdő paraméterei $C = 2$, $r_0 = 2.39$, az első maximum időpontja



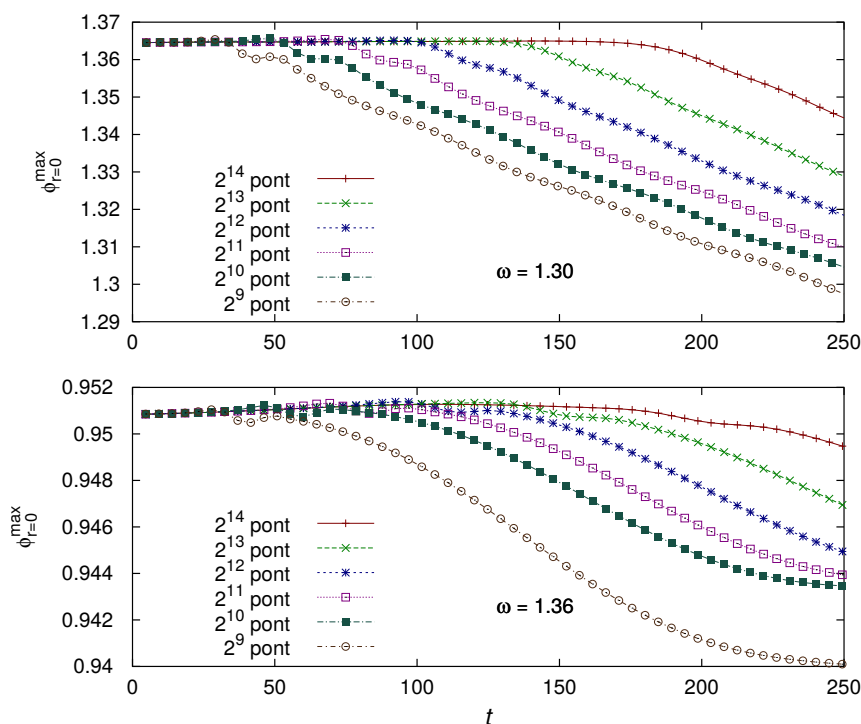
2.22. ábra. Két különböző $C = 2$ Gauss kezdőadatból kifejlődő oszcillon állapot Fourier módusainak összehasonlítása az $\omega = 1.3$ frekvenciájú kvázibreather módusaival.

$t_1 = 298.72$, és frekvenciája $\omega = 1.3011$. A kvázibreather komponenseivel való hasonlóság a mag tartományban és az első oszcilláló módusnál itt is szembetűnő, de az egyezés mértéke már nem annyira jó. A Φ_2 oszcilláló részénél a függvények alakja hasonló, de a relatív eltérés 30 százalék körülire is felnő. Ilyen alacsony frekvenciáknál az oszcillon az erős sugárzás miatt már viszonylag gyorsan változtatja frekvenciáját. További tényező ami az egyezést rontja, a 2.6 ábrán is jól látható alacsony frekvenciás modulációként megjelenő alak-módusok jelenléte. Minél nagyobb ezeknek az alak-módusoknak az amplitúdója, megfigyeléseink szerint annál rosszabb az egyezés a kvázibreather módusaival. Az oszcillon rezgő módusainak az amplitúdója általában nagyobb, így az azonos frekvenciájú kvázibreatherrel való összehasonlítással kapott eredmény alábecsüli a sugárzási rátát. Későbbi időpont körül vizsgálva az oszcillont, amikor a frekvencia már nagyobb, de az alak-módusok is erősebbé válnak, a sugárzási amplitúdó akár a duplája is lehet a kvázibreather modell segítségével számoltnak. Azt hogy az alak-módusok ilyen szerepet játszanak onnan tudhatjuk, hogy olyan oszcillonok esetén amikor ezek jóval kisebbek, az egyezés is sokkal jobb. Az alak-módusokat a tapasztalatunk szerint a Gauss típusú kezdőadat formája és az ideális oszcillon alakja közötti eltérés teszi különösen nagygyá. Minimálisan gerjesztett alak-módusokkal rendelkező oszcillont úgy kaphatunk, ha a spektrális módszerrel kiszámolt kvázibreathert használjuk kezdőadatként a numerikus időfejlesztő kódban.

2.7.4. Kvázibreather kezdőadat időfelődése

Az oszcillonok és kvázibreatherek kapcsolatát legtermészetesebb módon úgy vizsgálhatjuk, hogy a spektrális kóddal kapott nagy pontosságú kvázibreathert helyettesítjük kezdőadatként az időfejlődést számoló numerikus kódunkba, a korábban használt Gauss típusú kezdőadat helyett. A ϕ skalár értékét a $t = 0$ időpontban adjuk meg, amikor a kvázibreather időtükrözésre szimmetrikus, és ϕ időderiváltja nulla. A kezdőadat időfejlődését számoló numerikus kódunk rácspontjai a (2.24) egyenletben definiált kompaktifikált R radiális koordináta szerint egyenletesen helyezkednek el. Az eljárásunkkal kapcsolatban elvi problémaként merülhet fel az, hogy a kvázibreather a lassan lecsengő állóhullám farka miatt egy végtelen energiájú állapot, míg az időfelődési kód csak véges energiájú lokalizált rendszereket képes leírni. Ez azonban mégsem jelent komoly akadályt, mert az R -ben egyenletesen elosztott rácspontok közötti fizikai távolság a központi tartománytól távolodva egyre növekszik, amíg végül már nem képes reprezentálni az adott hullámhosszú állóhullám farkat. Ilyen módon a gyakorlatban egy nagy távolságnál levágott farkú véges energiás állapot időfejlődését vizsgáljuk, ahol a levágás helye a numerikus felbontással növekedésével egyre kijebb kerül. A 2.23 ábrán két különböző frekvenciájú kvázibreather időfejlődését láthatjuk az időfejlődési kódban alkalmazott különféle numerikus felbontások esetén. Látható, hogy minél nagyobb a felbontás, annál hosszabb a kezdeti majdnem állandó amplitúdós rész. Ez abból adódik, hogy a felbontás növelésével egyre nagyobb részt veszünk figyelembe az állóhullám farokból. Ha a farkat egy bizonyos sugárnál levágjuk, akkor az onnan gyakorlatilag fénysebességgel bejövő zavar megakadályozza azt, hogy periodikus maradjon a megoldás. Egy bizonyos sugáron kívül a numerikus kód nem tudja helyesen reprezentálni a kvázibreather kezdőadatban még meglévő bejövő hullámot, ami az oszcillon energiaveszteségét kompenzálná. Hangsúlyozzuk, hogy az ábrán látható erős felbontás-függés csak a kezdőadat nem megfelelő reprezentációjából adódik. Amikor konkrét véges energiájú lokalizált állapot időfejlődését vizsgáljuk a kód az itt tanulmányozottnál nagyságrendekkel hosszabb időtartamokra is konvergens eredményt ad.

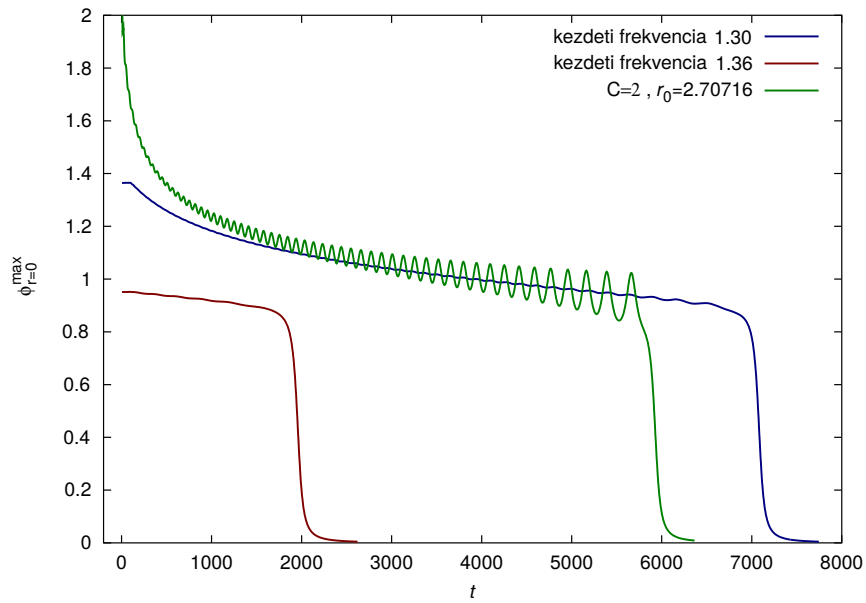
Amikor már annyi idő eltelt, hogy a kezdőadatnak az időfejlődési kód által jól reprezentált farok-tartományában jelen lévő bejövő sugárzás már nem tudja kompenzálni a később is szükségképpen jelenlévő kimenő sugárzást, a rezgési amplitúdó csökkenni kezd, nagyon hasonlóan ahhoz, ahogy azt a Gauss kezdőadattól származó oszcillonoknál láttuk. Egy bizonyos numerikus felbontás felett ennek az amplitúdó csökkenésnek a menete felbontás függetlenné válik. A különböző felbontású görbék időben való eltolással egymásba vihetők, csak a kezdeti rövid konstans szakasz hosszában különböznek. A 2.24 ábrán az előbb tárgyalt két kvázib-



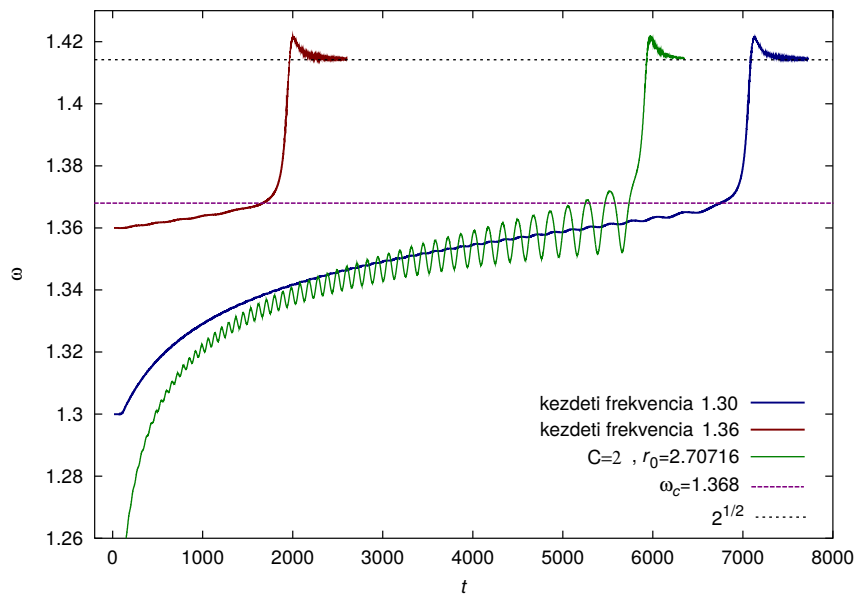
2.23. ábra. A középponti rezgések felső burkológörbéje $\omega = 1.3$ és $\omega = 1.36$ frekvenciájú kvázibreather kezdőadat esetén, az időfejlődési kódban alkalmazott különféle számú numerikus rácspont használata mellett. A görbékre rajzolt jelek ϕ valódi maximumait jelölik minden egyes rezgési periódusban.

reather kezdőadat hosszú idejű fejlődését láthatjuk egy rögzített felbontás esetén. A tipikus Gauss kezdőadattal való könnyebb összehasonlítás érdekében a 2.4-2.6 ábrákon már mutatott oszcillon fejlődését is újra megadjuk. A Gauss kezdőadatból kapott oszcillon fejlődése hasonló a kvázibreather kezdőadathoz, de a görbéken megjelenő alacsony frekvenciás alakmódusok ekkor sokkal nagyobb amplitúdóval rendelkeznek. Az alakmódusok jelenléte nagy valószínűséggel összefügg azzal, hogy a Gauss kezdőadatból kifejlődött oszcillon állapotok erősebben sugároznak, és élettartamuk rövidebb.

A 2.25 ábrán az előbb bemutatott három oszcillon állapot frekvenciájának időfüggését mutatjuk. Az oszcillonok fejlődése során az amplitúdó lassú csökkenése a frekvencia növekedésével jár együtt. Ez addig tart, amíg a frekvencia alulról meg nem közelíti az energia 2.19 ábra szerinti minimumának megfelelő $\omega_c = 1.368$ kritikus értéket. Az ennél nagyobb frekvenciájú oszcillonok instabilnak bizonyulnak. Az $\omega_c < \omega < m$ tartományba tartozó majdnem-periodikus állapotokat a kezdeti paraméterek finomhangolásával kaphattunk a 2.6.5 alfejezetben.



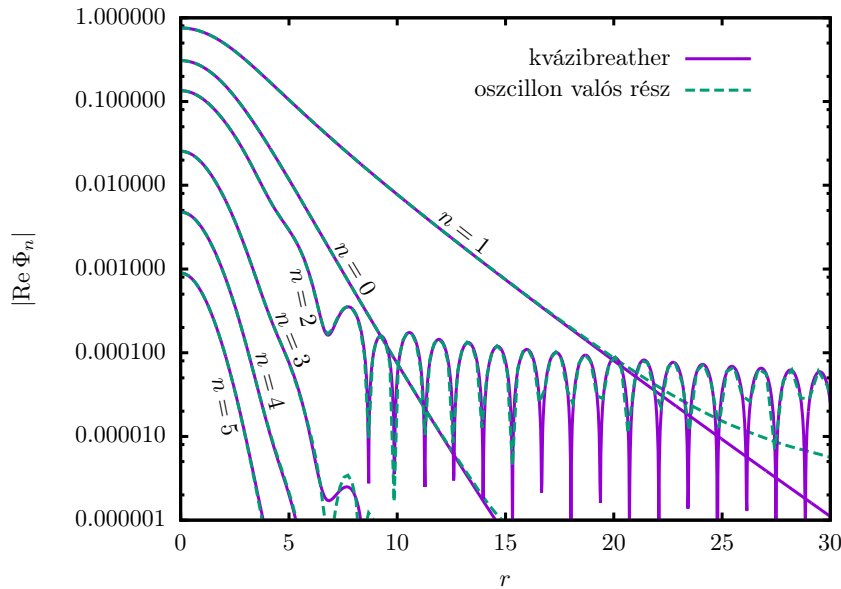
2.24. ábra. A kialakuló oszcillon állapot középponti rezgésének felső burkológörbéje az $\omega = 1.3$ és $\omega = 1.36$ frekvenciájú kvázibreather kezdőadat, valamint a $C = 2$, $r_0 = 2.70716$ Gauss kezdőadat esetén.



2.25. ábra. Az előző ábrán szereplő három oszcillon állapot frekvenciája az idő függvényében.

Annak megmutatására, hogy az oszcillonok fejlődésük során a megfelelő frekvenciájú kvázibreatherrel közelíthetők, az $\omega = 1.3$ frekvenciájú kvázibreather kezdőadatból kifejle-

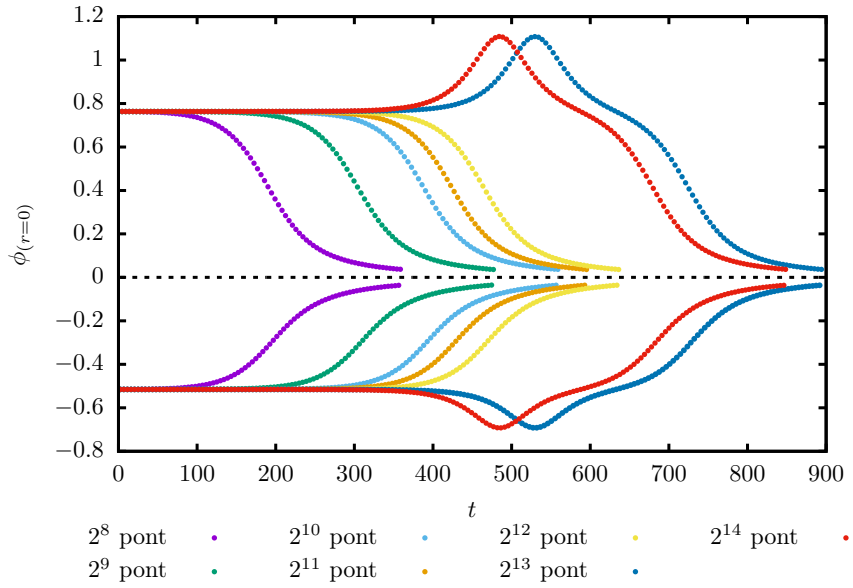
dött oszcillon Fourier kifejtését elvégeztük a $t_1 = 5257.45$ -höz tartozó maximummal kezdődő rezgési periódusban, amikor a frekvenciája $\omega = 1.35997$ értékűre növekedett. A 2.26 ábrán a spektrális kóddal számolt $\omega = 1.36$ frekvenciájú kvázibreather módusaival való rend-



2.26. ábra. Az $\omega = 1.3$ frekvenciájú kvázibreather kezdőadatból kifejlődött oszcillon módusainak összehasonlítása az $\omega = 1.36$ frekvenciájú kvázibreatherrel, abban az időszakban amikor az oszcillon frekvenciája erre az értékre növekedett.

kívül jó egyezést láthatjuk. Az hogy az egyezés sokkal jobb mint a 2.22 ábrán mutatott Gauss kezdőadatból kifejlődő oszcillonok esetén, jól érzékelteti, hogy a Gauss kezdőadatból kifejlődő oszcillonoknak a kvázibreathertől való nagyobb eltérése az alacsony frekvenciás alak-módusoknak köszönhető. A nagy amplitúdójú alak-módusok megjelenése pedig a Gauss kezdőadat és az ideális oszcillon alakjának nagymértékű eltérése miatt van.

Érdekes kérdés, hogy mi történik, ha az $\omega_c = 1.368$ kritikus frekvenciánál nagyobb frekvenciájú kvázibreathert használunk kezdőadatként az időfejlesztési kódunkban. A 2.27 ábrán az $\omega = 1.38$ kvázibreather időfejlődését láthatjuk különböző felbontások esetén. Látható, hogy minél nagyobb a felbontás, általában annál hosszabb ideig tart a kezdeti majdnem-periodikus állapot. Ez a 2.23-2.24 ábrákon mutatott stabil esethez hasonlóan szintén azért van, mert nagyobb felbontásoknál a kezdőadat farkának állóhullám tartományát nagyobb távolságokig tudja megfelelően reprezentálni az időfejlődési kódunkban alkalmazott rács. Furcsa módon a legnagyobb felbontásnál már megint rövidebbé válik az élettartam. Ez úgy véljük azért van, mert a spektrális kóddal előállított kezdeti adat is tartalmaz egy csekély numerikus hibát. A kezdeti majdnem-periodikus állapot után az oszcillon viszonylag gyorsan



2.27. ábra. Az instabil tartományba tartozó $\omega = 1.38$ kvázibreather kezdőadat alsó és felső burkológörbéje az időfejlődési kódban alkalmazott különféle számú rácspontok esetén.

elbomlik, a 2.7 ábrán mutatott és a 2.6.5 fejezetben tanulmányozott finomhangolt esetekhez hasonlóan. A bomlás módja kétféle lehet, szuperkritikus vagy szubkritikus, attól függően, hogy kialakul-e egy alak-módusnak megfelelő alacsony frekvenciás rezgés a bomlás előtt vagy nem. A spektrális módszerrel számolt kezdeti állapot annyira közel van az ideálshoz, hogy még a numerikus felbontástól is függ, hogy szubkritikus vagy szuperkritikus módon történik a bomlás.

Az $\omega > \omega_c$ frekvenciájú kvázibreatherekből kifejlődő majdnem-periodikus állapot ugyan az oszcillon rezgésének periódusidejéhez képest nagyon hosszú, de mégis rövidebb mint a 2.6.5 alfejezetben finomhangolással kapott állapotok $\tau \approx 2000$ élettartama. Tulajdonképpen nem meglepő, hogy egy numerikusan kiszámolt kezdőadatból kapott instabil állapot élettartama nem lehet olyan hosszú, mint egy 32 jegyre hangolt oszcilloné. A kezdőadat 1-hez közeli kis paraméterrel való mesterséges átskálázásával, és a paraméter finomhangolásával ekkor is hosszabb ideig élő majdnem-periodikus állapotokat kaphatunk, az eredetihez nagyon közeli frekvenciával.

Az eddigi eredményeink azt mutatják, hogy az oszcillonok időfejlődése jó közelítéssel $\omega(t)$ frekvenciájú kvázibreather állapotok sorozatán keresztül való adiabatikus fejlődésnek tekinthető. A megfelelő frekvenciájú kvázibreather mag tartománya nagyon nagy pontossággal megegyezik az oszcillon magjával. Ezenkívül, az oszcillon energiaveszteségéért felelős sugárzó farkának amplitúdója is jól közelíthető a kvázibreather állóhullám farkának amp-

litúdójával. A farok-amplitúdóban való egyezés annál jobb, minél kisebb amplitúdójúak a rezgések burkológörbén és a frekvencia görbéken megjelenő alak-módusok, vagyis ha minél kevésbé „zajos” kezdőadatból fejlődik ki az oszcillon. Az oszcillonok alacsony frekvencás rezgésének megfelelő alak-módusok lényegesen növelhetik az energia kisugárzási rátáját, és így jelentősen csökkenthetik az oszcillon élettartamát.

2.8. Kis-amplitúdós kifejtés

2.8.1. A módszer leírása

Ebben a fejezetben az oszcillonok amplitúdóját leíró ε paraméter hatványai szerinti kifejtést mutatjuk be részletesen, ami nagyon jó leírást ad az oszcillonok és kvázibreathek mag tartományára. Kezdetben az amplitúdó szerinti kifejtést t szerinti Fourier kifejtéssel együtt alkalmazták időben periodikus megoldások keresésére, egy térdimenzió esetén [33, 25, 64, 34, 119, 120]. A módszer könnyen általánosítható magasabb dimenziókra is. Tetszőleges alakú lokalizált megoldásokra működik az általánosítás, de a gyakorlatban csak gömbszimmetrikus állapotok esetére lett alkalmazva [35, 36, 68, 121]. Kichenassamy [2] észrevette, hogy nem szükséges a kis-amplitúdós kifejtéssel egyidejűleg Fourier kifejtést is alkalmazni. A periodikusság szükségszerűen következik abból a gyengébb feltevésből, hogy a megoldás amplitúdója nem növekedhet minden határon túl az idő múlásával. Oszcillonok kifejtésével foglalkozó cikkünkben ezt az eljárást általánosítottuk és dolgoztuk ki részletesen $d + 1$ dimenziós téridők esetére [29].

A ϕ skalármezőt az ε paraméter hatványai szerint a következő alakban fejtjük ki:

$$\phi = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \phi_k . \quad (2.57)$$

A (2.5) téregyenletet oldjuk meg gömbszimmetria feltételezésével, amikor a Laplace-operátor (2.8) alakban írható. Egy térdimenzió esetén feltesszük, hogy a ϕ skalár tükrözésre szimmetrikus $r = 0$ -ban, így a tömegközéppontal együtt mozgó rendszerben vizsgáljuk. A kifejtés nem gömbszimmetrikus állapotokra is nagyon hasonlóan elvégezhető [29], de mivel úgyis csak gömbszimmetriával rendelkező oszcillonokat fogunk tanulmányozni, a jobb áttekinthetőség végett csak ennek a szimmetriának a feltételezésével mutatjuk be az eljárást. A kölcsönhatást leíró $U(\phi)$ potenciált a (2.39) egyenletben szereplő g_k sorfejtési együttthatói segítségével adjuk meg. A képletek egyszerűbbé tétele érdekében a t és r koordinátákat átskálázzuk úgy, hogy a skalármező tömege $m = 1$ legyen. A ϕ^4 potenciál alakja ekkor (2.19) helyett a következő

alakú lesz:

$$U(\phi) = \frac{1}{8}\phi^2(\phi - 2)^2 \quad , \quad U'(\phi) = \frac{1}{2}\phi(\phi - 1)(\phi - 2) \quad , \quad (2.58)$$

és a nemeltűnő kifejtési együtthatók $g_2 = -3/2$ és $g_3 = 1/2$. Az ebben a fejezetben leírtak tetszőleges potenciál esetén érvényesek, konkrét potenciált csak a numerikus eredményekkel való összehasonlításokor fogunk használni.

A skalármező viselkedését leíró (2.5) téregyenletnek a kis-amplitúdós kifejtéses módszerrel csak akkor kaphatunk hosszú élettartamú lokalizált megoldásait, ha a megoldások jellemző méretét is ε függőnek választjuk. Az oszcillonok mérete a numerikus tapasztalatok alapján növekszik az ε amplitúdó csökkenésével. Emiatt célszerű egy új átskálázott ρ radiális koordinátát bevezetni, a

$$\rho = \varepsilon r \quad (2.59)$$

összefüggéssel. Ezt a választást a lokalizált megoldások (2.47) alakú exponenciális lecsengése is motiválhatja. Az új koordináta használatának következményeképp a kapott megoldások térbeli változása sokkal lassabb lesz az időbeli változásoknál. Ez a kvázibreatherek mag tartományában teljesül is, de a farok-tartományban a t és az r deriváltak nagyságrendje azonos, és a formalizmus nem képes leírni az állóhullám tartományt. Ez itt azért nem jelent problémát, mert mint a numerikus számolásokból, és a későbbi analitikus vizsgálatokból is kiderül, a farok amplitúdója $e^{-1/\varepsilon}$ rendűen kicsi, és így az ebben a fejezetben alkalmazott hatvány kifejtés szerint nullának tekinthető.

Az oszcillonok rezgési frekvenciája lassan növekszik az amplitúdójuk csökkenésével. Ha az oszcillonok, illetve kvázibreatherek ε amplitúdója nullához közelít, akkor a frekvenciájuk az $\omega_0 = m = 1$ értékhez tart. Az időskála megváltozását technikailag legkönnyebben úgy vehetjük figyelembe, hogy bevezetünk egy átskálázott időkoordinátát

$$\tau = \omega t \quad , \quad (2.60)$$

ahol ω függvénye ε -nak. Mivel az eljárás során az állapot rezgési frekvenciáját a τ időkoordináta szerint konstans 1 értéken tartjuk, az ω függvény az oszcillon fizikai frekvenciáját adja meg. Az ε függésről feltesszük, hogy analitikus, és a függvény négyzetét a következő formában fejtjük ki:

$$\omega^2 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \omega_k \quad . \quad (2.61)$$

A frekvenciának ehhez hasonló általános kifejtése először Boyd [116] könyvének 12. fejezetében található, egy térdimenzió esetén. Korábbi cikkekben az $\omega^2 = 1 - \varepsilon^2$ összefüggésből indulnak ki, ami, mint hamarosan be fogjuk látni, megfelelő paraméterezéssel mindig elérhető.

Az átskálázott radiális koordináta szerinti

$$\tilde{\Delta}\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} + \frac{d-1}{\rho} \frac{\partial\phi}{\partial\rho} = \frac{1}{\rho^{d-1}} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho^{d-1} \frac{\partial\phi}{\partial\rho} \right) , \quad (2.62)$$

Laplace-operátort használva, a (2.5) téregyenlet a következő alakba írható:

$$-\omega^2 \frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2} + \varepsilon^2 \tilde{\Delta}\phi = \phi + \sum_{k=2}^{\infty} g_k \phi^k . \quad (2.63)$$

Behelyettesítve ϕ és ω^2 kifejtését, az azonos ε hatványokat tartalmazó tagok külön-külön teljesítendő egyenleteket határoznak meg. Az egyenletek általános alakja

$$\frac{\partial^2\phi_k}{\partial\tau^2} + \phi_k = f_k , \quad (2.64)$$

ahol a jobboldali homogén rész szerkezete mindig ugyanaz, valamint az f_k inhomogén forrástagok nemlineáris függvényei az alacsonyabb rendű ϕ_l komponenseknek, amelyekre $l < k$. Az f_k kifejezésében szerepelnek a potenciál alakját meghatározó g_l konstansok $l \leq k$ -ra, és a frekvenciát leíró, egyelőre nem meghatározott, ω_k konstansok $l < k$ esetén. Az első egyenletben nyilvánvalóan $f_1 = 0$, és a következő két forrástag alakja:

$$f_2 = -g_2\phi_1^2 - \omega_1 \frac{\partial^2\phi_1}{\partial\tau^2} , \quad (2.65)$$

$$f_3 = \ddot{\phi}_1 + \tilde{\Delta}\phi_1 - 2g_2\phi_1\phi_2 - g_3\phi_1^3 - \omega_1 \frac{\partial^2\phi_2}{\partial\tau^2} - \omega_2 \frac{\partial^2\phi_1}{\partial\tau^2} . \quad (2.66)$$

A homogén rész mindig a hamonikus oszcillátort leíró kifejezés, így első ránézésre a (2.64) egyenletek a ϕ_k függvényeknek csak az időfüggését határozzák meg. Azonban, mint látni fogjuk, az a követelmény, hogy a megoldások ne növekedjenek az idő múlásával korlátlanul nagyra, megadja a ϕ_k függvények helyfüggését is.

A $k = 1$ esetén felírt (2.64) egyenlet általános megoldása

$$\phi_1 = p_1 \cos(\tau + \alpha) \quad (2.67)$$

alakú, ahol a p_1 amplitúdó és az α fázis a ρ radiális koordináta tetszőleges függvényei. A ϕ_k -ra vonatkozó további (2.64) egyenletek mindegyike gerjesztett oszcillátor egyenlet $\omega = 1$ alap-frekvenciával. A jobboldali inhomogén f_k forrás mindig $\cos(n(\tau + \alpha))$ illetve $\sin(n(\tau + \alpha))$ időfüggéssel rendelkező tagok összegéből áll, ahol $n \geq 0$ egész szám. Amikor $n \neq 1$, a generált megoldás mindig időben periodikus, és így korlátos. Azonban, ha vannak $\cos(\tau + \alpha)$ vagy $\sin(\tau + \alpha)$ -val arányos rezonáns forrástagok, akkor azok $\tau \sin(\tau + \alpha)$ illetve $\tau \cos(\tau + \alpha)$ szerint minden határon túl lineárisan növekvő amplitúdójú megoldásokat generálnak. Mivel

olyan megoldásokat keresünk amelyek hosszú ideig regulárisak és lokalizáltak maradnak, meg kell követelnünk, hogy az összes egyenlet jobb oldalán lévő f_k kifejezésekben a $\cos(\tau + \alpha)$ és $\sin(\tau + \alpha)$ időfüggéssel rendelkező tagok együtthatója nulla legyen. Ilyen módon, az f_2 alakját megadó (2.65) egyenletből láthatjuk, hogy szükségképpen $\omega_1 = 0$ kell legyen. Ez azt mutatja, hogy bár az $U(\phi)$ potenciál általában nem szimmetrikus a minimuma körül, vezető rendben a frekvencia függetlennek adódik ε előjelétől, vagyis a rezgés kezdeti irányától.

A $k = 2$ esetén felírt (2.64) egyenlet megoldása $\omega_1 = 0$ teljesülése esetén már korlátos és időben periodikus:

$$\phi_2 = p_2 \cos(\tau + \alpha) + q_2 \sin(\tau + \alpha) + \frac{g_2}{6} p_1^2 [\cos(2(\tau + \alpha)) - 3] , \quad (2.68)$$

ahol p_2 és q_2 újabb tetszőleges függvényei ρ -nak. A ϕ_1 és ϕ_2 -re kapott megoldásokat f_3 (2.66)-ban megadott alakjába helyettesítve a következő kifejezést kapjuk,

$$\begin{aligned} f_3 = & -\frac{1}{\rho^{d-1} p_1} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^{d-1} p_1^2 \frac{d\alpha}{d\rho} \right) \sin(\tau + \alpha) + \left[\tilde{\Delta} p_1 + \omega_2 p_1 + \lambda p_1^3 - p_1 \left(\frac{d\alpha}{d\rho} \right)^2 \right] \cos(\tau + \alpha) \\ & - \frac{1}{12} p_1^3 (2g_2^2 + 3g_3) \cos(3(\tau + \alpha)) - g_2 p_1 [q_2 \sin(2(\tau + \alpha)) + p_2 \cos(2(\tau + \alpha)) + p_2] , \quad (2.69) \end{aligned}$$

ahol bevezettük a

$$\lambda = \frac{5}{6} g_2^2 - \frac{3}{4} g_3 \quad (2.70)$$

jelölést. A (2.58) alakú ϕ^4 potenciál esetén $\lambda = 3/2$. Az $U(\phi) = 1 - \cos \phi$ sine-Gordon potenciálra $\lambda = 1/8$. Mint hamarosan látni fogjuk, kis amplitúdójú oszcillonok csak olyan kölcsönhatási potenciálok esetén létezhetnek, amelyekre $\lambda > 0$.

A ϕ_3 függvényre csak akkor kaphatunk időben korlátlanul nem növekvő értéket, ha f_3 -nak a (2.69) egyenletben felírt alakjában a $\sin(\tau + \alpha)$ együtthatója nulla, vagyis

$$\frac{d\alpha}{d\rho} = \frac{C_\alpha}{\rho^{d-1} p_1^2} , \quad (2.71)$$

ahol C_α egy konstans. Értelemszerűen, olyan megoldásokat keresünk, amelyre p_1 és α is sima és korlátos az origóban. Mivel p_1 véges, $d \geq 2$ térbeli dimenzió esetén α deriváltja, és így maga a függvény is szinguláris $C_\alpha \neq 0$ esetén. A $d = 1$ esetben ha $C_\alpha \neq 0$, akkor a megkövetelt tükrözési szimmetria miatt α -nak törése van $\rho = 0$ -ban, vagyis nem differenciálható. Ilyen módon, tetszőleges d dimenzióra szükségképpen $C_\alpha = 0$, és emiatt α konstans kell legyen. Ezzel beláttuk, hogy a kifejtéssel leírható lokalizált állapotok szükségképpen időtükrözésre szimmetrikusak. Ez az eredmény először a [29] cikkünkben került leközlésre. Az időkoordináta eltolásával az α konstans értékét nullának állíthatjuk be, így a továbbiakban az $\alpha = 0$ értéket használunk. A korábbi irodalomban ez a megszorítás bizonyítás nélkül szerepelt.

A ϕ_3 függvény korlátosságának további feltétele, hogy a (2.69) egyenletben a $\cos(\tau + \alpha)$ együtthatója is nulla legyen, vagyis

$$\tilde{\Delta}p_1 + \omega_2 p_1 + \lambda p_1^3 = 0 . \quad (2.72)$$

Mivel lokalizált, nullához tartó megoldásokat keresünk, nagy távolságokra a köbös tag elhanyagolható. A (2.38) egyenlet homogén részéhez hasonlóan, pozitív ω_2 esetén csak a (2.50)-nek megfelelően oszcillálva lassan lecsengő megoldások léteznek. Ezek csak akkor nem végtelen energiájúak, ha a szinusz és a koszinusz komponens együtthatója is egyszerre eltűnik, ami viszont már túl sok feltétel reguláris középpont mellett. Egyetlen ilyen megoldás a triviális $p_1 = 0$. Hasonlóan, (2.48)-(2.49)-nek megfelelően, $\omega_2 = 0$ esetén sincs nemtriviális lokalizált megoldás. Következésképpen, $\omega_2 < 0$, és ekkor az egyik aszimptotikus megoldás (2.47) szerint exponenciálisan lecseng nagy távolságokra. Az ω rezgési frekvencia (2.61) kifejtése szerint ez azt jelenti, hogy kis amplitúdós oszcillonok csak a tömegküszöb által megadott $m \equiv 1$ frekvencia alatt létezhetnek [29]. Ez fizikailag is érthető, mivel ha az ω alap-frekvencia 1 felett van, akkor ahhoz (2.50) szerint oszcillálva lecsengő farok, és így nagy sugárzási energiaveszteség tartozik. Hosszú élettartamú lokalizált állapotokra akkor számíthatunk, ha csak a 2ω , 3ω és további felharmonikusokhoz tartozó módusok képesek sugározni.

Azt, hogy egy adott amplitúdójú és frekvenciájú fizikai állapotot milyen ε paraméterrel jellemzünk még nem rögzítettük le. A paraméterről csak annyit tettünk fel, hogy kis ε értékekre arányos az oszcillonok amplitúdójával. Ezt a feltevést nem sértő bármilyen $\varepsilon \rightarrow \bar{\varepsilon}(\varepsilon)$ átparaméterezés megengedett. Ha a paramétert $\varepsilon \rightarrow \bar{\varepsilon} = a\varepsilon$ szerint egy a konstanssal lineárisan átskálázzuk, akkor a radiális koordináta változása $\bar{\rho} = a\rho$, a Fourier komponenseké $\bar{\phi}_k = \phi_k/a^k$, így $\bar{p}_1 = p_1/a$, valamint a frekvencia változást leíró konstansok transzformációja $\bar{\omega}_k = \omega_k/a^k$. A potenciál kifejtését megadó g_k és λ konstansok változatlanok maradnak. Ekkor a (2.72) egyenlet minden tagja csupán egy a^3 szorzóval módosul, és mivel $\omega_2 < 0$, az $\bar{\omega}_2 = \omega_2/a^2$ segítségével mindig beállítható, hogy $\bar{\omega}_2 = -1$ legyen. Innentől fogva feltesszük, hogy kezdettől fogva olyan paraméterezést választottunk, hogy $\omega_2 = -1$ már eleve fennáll.

A (2.72) egyenletet $\rho^{d-1}p_1$ -el szorozva, az

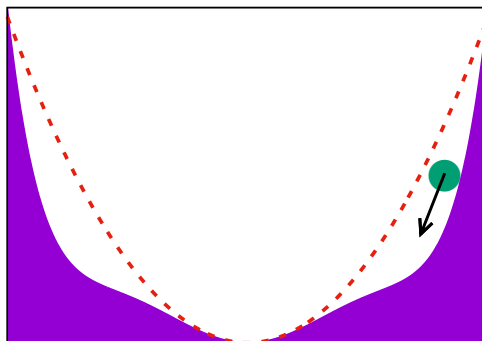
$$p_1 \frac{d}{d\rho} \left(\rho^{d-1} \frac{dp_1}{d\rho} \right) - \rho^{d-1} p_1^2 + \lambda \rho^{d-1} p_1^4 = 0 \quad (2.73)$$

alakot kapjuk. Ezt $\rho = 0$ és végtelen között integrálva, az első tagban parciálisan integrálva, könnyen látható, hogy $\lambda \leq 0$ esetén csak a triviális $p_1 = 0$ lokalizált megoldás létezik. Ezzel beláttuk, hogy kis-amplitúdójú megoldások csak olyan potenciálokra létezhetnek amelyeknek a g_k kifejtési együtthatóiból (2.70) szerint definiált $\lambda = \frac{5}{6}g_2^2 - \frac{3}{4}g_3$ skalár pozitív. A

továbbiakban feltesszük, hogy

$$\lambda > 0 . \quad (2.74)$$

A g_2 együttható az $U(\phi)$ potenciált aszimmetrikussá teszi, és bármilyen értéke elősegíti a nemlinearitást, és így az oszcillonok megjelenését. A minimumuk körül szimmetrikus potenciálok esetén $g_2 = 0$, és ekkor $g_3 < 0$ szükséges feltétele az kis amplitúdós oszcillonok létezésének. A szimmetrikus esetben ez a negatív tag a potenciált a minimuma körül lapo-



sabbá teszi a harmonikus Klein-Gordon potenciálnál, és a rezgésidőt ahhoz képest csökkenti.

2.8.2. Az alapegyenlet

Bevezetve az

$$S = \sqrt{\lambda} p_1 \quad (2.75)$$

függvényt, a paraméterektől független egyenletet kapunk,

$$\tilde{\Delta} S - S + S^3 = 0 . \quad (2.76)$$

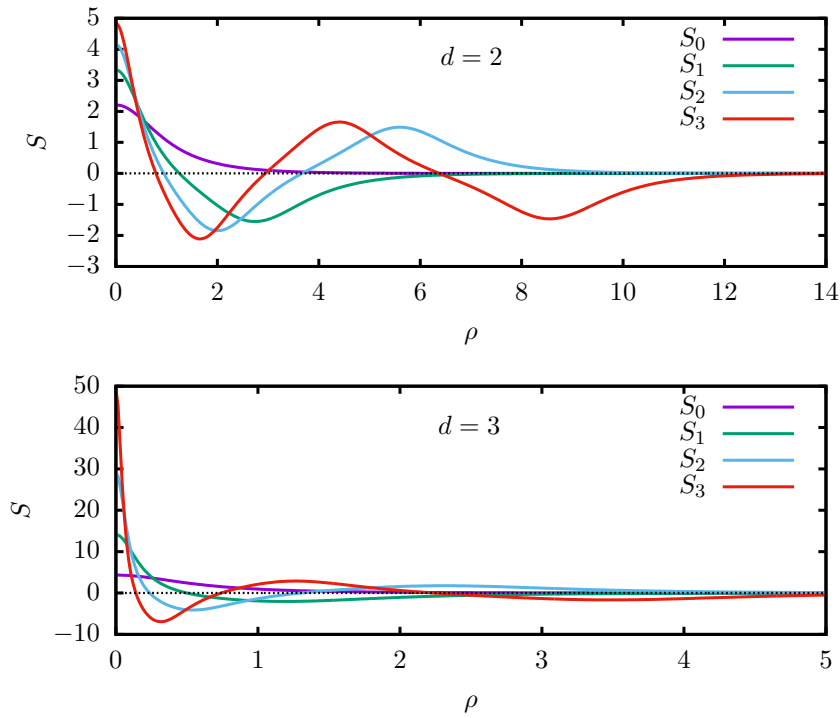
Mivel gömbszimmetrikus megoldásokat keresünk, S csak az átskálázott ρ radiális koordináta függvénye, és a Laplace operátor alakja a (2.62) egyenletben van megadva. Látható, hogy a λ paraméter nagysága szoros kapcsolatban áll azzal, hogy a rendszer mennyire nemlineáris. Minél nagyobb λ , annál kisebb amplitúdójú oszcillon szükséges a frekvencia adott mértékű csökkenéséhez. Mivel (2.76) bármilyen potenciál esetén alkalmas a kis-amplitúdós oszcillonok leírására, Buslaev [35] elnevezését követve alapegyenletként (base equation) hivatkozunk rá.

Egy térbeli dimenzió esetén a (2.76) alapegyenlet $\rho = 0$ körül szimmetrikus megoldásai felírhatók elliptikus függvények segítségével [116], és általában térben periodikusak. A kivétel ez alól csak az a lokalizált megoldás amelynél a periódus végtelenné válik, amely az alábbi egyszerű alakban írható,

$$S = \sqrt{2} \operatorname{sech} \rho . \quad (2.77)$$

Nyilvánvalóan ennek -1 -szerese is megoldja az egyenletet, de ezzel külön nem foglalkozunk, mert még a minimuma körül aszimmetrikus potenciál esetén is ugyanarra az oszcillon megoldásra vezet, csak egy fél rezgési periódussal eltolva. Egy térdimenzióánál az ε szerinti kifejtés magasabb rendjeiben megjelenő függvények is kifejezhetők (2.77) különböző hatványai segítségével, így a kifejtés technikailag lényegesen könnyebben kivitelezhető mint magasabb dimenziók esetén [34, 2, 116]. A dolgozatban a bármilyen dimenzióra működő általános eljárást ismertetjük részletesebben.

Magasabb dimenzió esetén csak numerikus formában ismertek a megoldások. A közép-pontbeli regularitás feltétele, hogy $\rho = 0$ -nál S értéke véges legyen és deriváltja eltűnjön. A lokalizált reguláris megoldások $d = 2$ és $d = 3$ térbeli dimenzió esetén egy $n \geq 0$ egész paraméterrel jellemezhető családot alkotnak. Az n paraméter az $S \equiv S_n$ megoldás zérushelyeinek számát határozza meg. A 2.28 ábrán az első néhány ilyen függvényt láthatjuk. Fizikai



2.28. ábra. A (2.76) egyenlet lokalizált megoldásai $d = 2$ és $d = 3$ térdimenzió esetén.

megfontolás alapján ésszerűnek tűnik, hogy a zérushellyel nem rendelkező S_0 alapmegoldás a legfontosabb. Belátható, hogy a zérushellyel rendelkező megoldásokhoz tartozó oszcillon állapotok energiája jóval nagyobb, kevésbé stabilak, és így élettartamuk is lényegesen kisebb [29]. A továbbiakban leginkább az S_0 -hoz tartozó oszcillonokkal foglalkozunk, bár a kifejtési

formalizmus általában is érvényes. Az S_0 középponti értéke, kilenc jegy pontossággal,

$$S_0^{(\rho=0)} = \begin{cases} 2.20620086 & \text{ha } d = 2 , \\ 4.33738768 & \text{ha } d = 3 . \end{cases} \quad (2.78)$$

Ebben a bekezdésben megmutatjuk, hogy a (2.76) alapegyenletnek nincsenek reguláris lokalizált megoldásai $d \geq 4$ térbeli dimenzió esetén [29]. A lokalizált megoldások szükségképpen exponenciálisan tartanak a nullához a végtelenben. Az egyenletet $\rho^{d-1}S$ -el szorozva és integrálva, a (2.73) egyenletnél követett eljáráshoz hasonlóan, a következő viriál azonosságot kapjuk,

$$\left\langle \left(\frac{dS}{d\rho} \right)^2 \right\rangle + \langle S^2 \rangle - \langle S^4 \rangle = 0 , \quad (2.79)$$

ahol bármilyen f függvényére a ρ koordinátának

$$\langle f \rangle := \int_0^\infty f \rho^{d-1} d\rho . \quad (2.80)$$

Egy második viriál azonosság is kapható, kihasználva, hogy az alapegyenlet az

$$\mathcal{S} = \int_0^\infty \left[\left(\frac{dS}{d\rho} \right)^2 + S^2 - \frac{S^4}{2} \right] \rho^{d-1} d\rho \quad (2.81)$$

hatásintegrálból származtatható. Ha $S(\rho)$ egy adott konfiguráció, akkor annak μ konstans szorzóval megnyújtottjára, az $\tilde{S}(\rho) = S(\rho/\mu)$ konfigurációra is kiszámolható a hatásintegrál. Bevezetve a $\tilde{\rho} = \rho/\mu$ átskálázott radiális koordinátát,

$$\tilde{\mathcal{S}} = \int_0^\infty \left[\mu^{d-2} \left(\frac{dS(\tilde{\rho})}{d\tilde{\rho}} \right)^2 + \mu^d S(\tilde{\rho})^2 - \mu^d \frac{S(\tilde{\rho})^4}{2} \right] \tilde{\rho}^{d-1} d\tilde{\rho} . \quad (2.82)$$

Ha $S(\rho)$ az alapegyenlet megoldása, akkor a hatás μ szerinti deriváltja nulla kell legyen, amiből a második viriál azonosság következik,

$$(d-2) \left\langle \left(\frac{dS}{d\rho} \right)^2 \right\rangle + d \langle S^2 \rangle - \frac{d}{2} \langle S^4 \rangle = 0 . \quad (2.83)$$

A (2.79) és (2.83) egyenletekből következik, hogy

$$2 \langle S^2 \rangle + \frac{1}{2} (d-4) \langle S^4 \rangle = 0 , \quad (2.84)$$

amely nem azonosan nulla S függvény esetén csak $d < 4$ dimenzió esetén teljesülhet. Ezzel beláttuk, hogy $d \geq 4$ térbeli dimenzió esetén nem létezhetnek olyan alacsony amplitúdójú oszcillonok, amelyeknek az amplitúdója, a feltevéseink szerint, az ε paraméterrel arányos, míg a méretük $1/\varepsilon$ szerint skálázódik. Érdekes módon, ennek ellenére numerikus módszerekkel $d \geq 4$ esetén is lehet viszonylag hosszú élettartamú oszcillonokat találni [76, 126, 110, 99]. Annak eldöntése, hogy ezen magasabb dimenziós oszcillonok között vannak-e kis amplitúdójú állapotok, és hogy mik a skálázási tulajdonságaik, még további vizsgálatokat igényel.

2.8.3. Magasabb rendek a kifejtésben

Ahhoz, hogy a vezető ε rendben meg tudjuk határozni az oszcillon térbeli alakját, a kifejtésben ε^3 rendig el kellett menni, és az ottani rezonáns tagok hiányára vonatkozó feltételeket megoldani. Magasabb rendekben is mindig hasonlóan, kettővel magasabb rendig kell számolni, hogy az adott rend teljesen meghatározott legyen. A ϕ_3 -ra vonatkozó (2.64) egyenlet megoldása a (2.69)-ban található rezonáns tagok eltűnése után,

$$\begin{aligned} \phi_3 = & q_3 \sin \tau + p_3 \cos \tau \\ & + \frac{p_1}{3} \left\{ \frac{1}{8} \left(\frac{4}{3} g_2^2 - \lambda \right) p_1^2 \cos(3\tau) + g_2 [q_2 \sin(2\tau) + p_2 (\cos(2\tau) - 3)] \right\}, \end{aligned} \quad (2.85)$$

ahol p_3 és q_3 két új, egyenlőre ismeretlen, függvénye ρ -nak. Magasabb rendekben is ehhez hasonlóan, a ϕ_k komponensre vonatkozó egyenlet megoldásakor két új függvény jelenik meg, p_k és q_k , amelyeket a két renddel későbbi rezonancia feltételek, valamint az ε paraméterezés és az időkoordináta origójának konkrét választása határoz majd meg egyértelműen.

A rezonancia feltételek ε -ban negyed rendben két differenciálegyenletet adnak. Felhasználva, hogy $S = \sqrt{\lambda} p_1$, az f_4 forrástagban a $\sin \tau$ -val arányos tagok miatt

$$\tilde{\Delta} q_2 - q_2 + S^2 q_2 = 0, \quad (2.86)$$

valamint a $\cos \tau$ tagok miatt

$$\tilde{\Delta} p_2 - p_2 + \frac{\omega_3}{\sqrt{\lambda}} S + 3S^2 p_2 = 0. \quad (2.87)$$

A (2.76) alapegyenlettel való összehasonlításból könnyen látható, hogy a q_2 -re vonatkozó (2.86) egyenletet megoldja a $q_2 = aS$ függvény, tetszőleges a konstans mellett. Ez a szabadsági fok az időkoordináta ε^2 rendű eltolásának felel meg. A kézenfekvő $q_2 = 0$ választással azt érjük el, hogy a $\tau = 0$ időpillanatban a rendszer magasabb rendekben is időtükrözésre szimmetrikus marad. Hasonlóan, az összes q_k nullának választható $k \geq 2$ esetén is. Az, hogy (2.86)-nak nincs más origóban reguláris térben korlátos gömbszimmetrikus megoldása, a $q_2 = fS$ helyettesítéssel látható, ahol f egy tetszőleges függvénye ρ -nak. Ekkor az egyenlet az

$$\frac{1}{r^{d-1} S} \frac{d}{d\rho} \left(r^{d-1} S^2 \frac{df}{d\rho} \right) = 0 \quad (2.88)$$

alakba írható, amiből következik, hogy $r^{d-1} S^2 \frac{df}{d\rho}$ értéke egy konstans. Ha ez a konstans nem nulla, akkor S exponenciális lecsengése miatt q_2 nem lehet korlátos, így szükséges, hogy $f = a$ konstans legyen.

Bevezetve a \bar{p}_2 függvényt a

$$p_2 = \bar{p}_2 - \frac{\omega_3}{2\sqrt{\lambda}} \frac{d}{d\rho} (\rho S) \quad (2.89)$$

helyettesítéssel, a (2.87) egyenlet homogén alakra hozható

$$\tilde{\Delta} \bar{p}_2 - \bar{p}_2 + 3S^2 \bar{p}_2 = 0 . \quad (2.90)$$

Ez az egyenlet a (2.76) alapegyenlet S megoldása körüli linearizálásának felel meg. Mivel az alapegyenletnek a gömbszimmetrikus esetben csak diszkrét megoldásai vannak, nem számíthatunk reguláris korlátos \bar{p}_2 megoldásra. Arra, hogy tényleg $\bar{p}_2 = 0$ az egyetlen ilyen megoldás, Buslaev cikkében található bizonyítást [35]. Nem gömbszimmetrikus esetben az S megoldás térbeli eltolásai és forgatásai generálják a (2.90) egyenlet megoldásait.

Az ε paraméterezés $\varepsilon \rightarrow \bar{\varepsilon} = \varepsilon(1 + a\varepsilon)$ megváltoztatásával, ahol a egy konstans, a (2.61) definíció alapján mindig elérhető, hogy $\omega_3 = 0$ legyen. Ehhez hasonlóan, a kifejtés magasabb rendjeiben is beállítjuk, hogy $\omega_k = 0$ legyen $k \geq 3$ esetén. Ezzel teljesen lerögzítjük az ε paraméterezésben lévő szabadságot, és az ω és ε közötti összefüggés ezentúl az alábbi egyszerű alakú lesz,

$$\omega^2 = 1 - \varepsilon^2 . \quad (2.91)$$

Az $\omega_3 = 0$ beállítása után (2.89)-nek megfelelően csak a $p_2 = 0$ reguláris korlátos gömbszimmetrikus megoldás marad. Páros magasabb rendekben ugyanez az egyszerű egyenlet határozza meg a szabad függvényeket, így $p_{2k} = 0$ egész k esetén. A páratlan indexű $p_{2k+1} = 0$ függvények másodrendű differenciálegyenleteket elégítenek ki. Megjegyezzük, hogy az $\varepsilon \rightarrow \bar{\varepsilon} = \varepsilon(1 + a\varepsilon)$ átparaméterezéskor a p_2 függvény (2.89) szerinti megváltozása abból adódik, hogy az S függvény $\rho = \varepsilon r$ argumentuma is ε függő.

A p_3 függvény ρ függése az ε^5 rendben határozódik meg, a $\cos \tau$ időfüggésű tagok eltűnéséből. Vezessük be a Z függvényt a

$$p_3 = \frac{1}{\lambda^2 \sqrt{\lambda}} \left[\sigma Z - \frac{1}{54} \lambda g_2^2 S (32 + 19S^2) \right] \quad (2.92)$$

összefüggéssel, ahol

$$\sigma = \frac{1}{24} \lambda^2 - \frac{1}{6} \lambda g_2^2 + \frac{5}{8} g_5 - \frac{7}{4} g_2 g_4 + \frac{35}{27} g_2^4 . \quad (2.93)$$

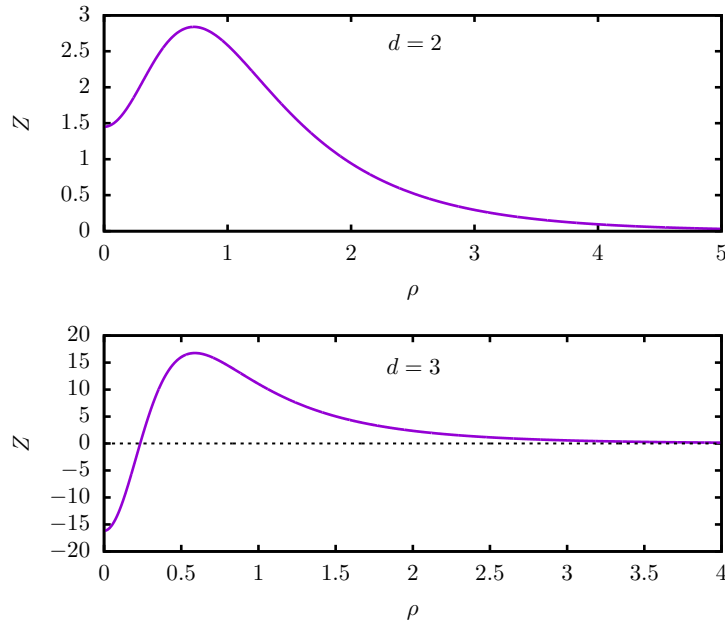
Ekkor a p_3 -ra vonatkozó feltétel a következő, jóval egyszerűbb, az $U(\phi)$ potenciáltól független, lineáris inhomogén alakba írható,

$$\Delta Z - Z + 3S^2 Z - S^5 = 0 . \quad (2.94)$$

Az egyenlet Z -ben lineáris, és adott S esetén egyértelmű reguláris korlátos megoldása van. $d = 1$ térdimenzió esetén a megoldás

$$Z = S(4 - S^2)/3 , \quad (2.95)$$

ahol S a (2.77) egyenletben megadott alakú. $d = 2$ vagy $d = 3$ dimenzió esetén a Z függvényt numerikusan határozhatjuk meg. A zérushely nélküli S_0 alapmegoldáshoz tartozó Z függvényeket a 2.29 ábrán láthatjuk. A Z függvény értéke a középpontban



2.29. ábra. A (2.94) egyenlet S_0 alapmegoldáshoz tartozó megoldásai $d = 2$ és $d = 3$ térdimenzió esetén.

$$Z_0^{(\rho=0)} = \begin{cases} 1.4507606 & \text{ha } d = 2 , \\ -16.174027 & \text{ha } d = 3 . \end{cases} \quad (2.96)$$

Két renddel később, a ϕ_5 -re vonatkozó egyenlet megoldása során egy új p_5 függvény jelenik meg, ami további két renddel később határozódik meg.

Összefoglalva az eddigi eredményeket, a (2.5) téregyenlet megoldásának ε kifejtését megkonstruáltuk negyed rendig. Minden tagnak harmonikus időfüggése van, és a radiális függést két univerzális elliptikus parciális differenciálegyenlet határozza meg, (2.76) és (2.94). A kifejtés még magasabb rendekig való folytatása nem ütközik elvi akadályba, de az adódó

kifejezések egyre bonyolultabbá válnak. Negyed rendig a kifejtés, általános $U(\phi)$ potenciálra,

$$\phi_1 = p_1 \cos \tau, \quad (2.97)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{6} g_2 p_1^2 [\cos(2\tau) - 3], \quad (2.98)$$

$$\phi_3 = p_3 \cos \tau + \frac{1}{72} (4g_2^2 - 3\lambda) p_1^3 \cos(3\tau), \quad (2.99)$$

$$\begin{aligned} \phi_4 = & \frac{1}{360} p_1^4 (3g_4 - 5g_2\lambda + 5g_2^3) \cos(4\tau) \\ & - \frac{1}{72} \left[8g_2 \left(\frac{dp_1}{d\rho} \right)^2 - 12g_4 p_1^4 + 16g_2^3 p_1^4 - 24g_2 p_1 p_3 - 23g_2 \lambda p_1^4 - 8g_2 p_1^2 \right] \cos(2\tau) \\ & - g_2 p_1^2 - g_2 p_1 p_3 + \frac{1}{6} g_2 \lambda p_1^4 - g_2 \left(\frac{dp_1}{d\rho} \right)^2 + \frac{31}{72} g_2^3 p_1^4 - \frac{3}{8} g_4 p_1^4. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Az állapot rezgési frekvenciáját a $\tau = \omega t$ összefüggésén keresztül az $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ kifejezés adja meg.

A minimuma körül szimmetrikus $U(\phi)$ potenciálra $g_{2k} = 0$, így jelentősen egyszerűsödnek a kifejezések, és ekkor könnyebb magasabb rendig elmenni a számolással. Ebben az esetben a páros indexű tagok eltűnnek az ε kifejtésben, vagyis $\phi_{2k} = 0$. Mivel az általános esetben ϕ_{2n} csak $\cos(2k\tau)$ tagokat tartalmaz, és ϕ_{2n+1} csak $\cos((2k+1)\tau)$ tagokat, ahol $k = 0 \dots n$, ebből az is következik, hogy szimmetrikus potenciálknál a (2.36) idő szerinti Fourier kifejtésben sem jelennek meg páros indexű Φ_n tagok. Ebben az esetben, (2.92) szerint, p_3 arányos Z -vel és a p_5 függvényt meghatározó egyenlet viszonylag egyszerűvé válik,

$$\begin{aligned} \Delta p_5 - p_5 + 3S^2 p_5 + \frac{SZ}{576\sqrt{\lambda}} (3Z - 5S^3) \left(\frac{15g_5}{\lambda^2} + 1 \right)^2 \\ + \frac{S^3}{32\sqrt{\lambda}} \left[\left(\frac{dS}{d\rho} \right)^2 - S^2 \right] - \frac{S^7}{576\sqrt{\lambda}} \left(\frac{315g_7}{\lambda^3} - \frac{60g_5}{\lambda^2} + 1 \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Így szimmetrikus pontenciál esetén a kifejtés ötödrendje:

$$\begin{aligned} \phi_5 = p_5 \cos \tau + \frac{S^5}{1152\sqrt{\lambda}} \left(\frac{3g_5}{\lambda^2} + 2 \right) \cos(5\tau) \\ - \frac{S}{384\sqrt{\lambda}} \left[\left(\frac{30g_5}{\lambda^2} + 2 \right) SZ + 12S^2 - 12 \left(\frac{dS}{d\rho} \right)^2 - \left(\frac{15g_5}{\lambda^2} - 2 \right) S^4 \right] \cos(3\tau). \end{aligned} \quad (2.102)$$

$d = 1$ térbeli dimenzió esetén (2.101) megoldása

$$\begin{aligned} p_5 = \frac{5S}{648\sqrt{\lambda}} \left(7 - 6 \frac{g_5}{\lambda^2} + 225 \frac{g_5^2}{\lambda^4} + 189 \frac{g_7}{\lambda^3} \right) - \frac{S^3}{2592\sqrt{\lambda}} \left(38 + 60 \frac{g_5}{\lambda^2} + 1800 \frac{g_5^2}{\lambda^4} + 945 \frac{g_7}{\lambda^3} \right) \\ - \frac{S^5}{6912\sqrt{\lambda}} \left(8 - 120 \frac{g_5}{\lambda^2} - 450 \frac{g_5^2}{\lambda^4} + 315 \frac{g_7}{\lambda^3} \right). \end{aligned} \quad (2.103)$$

2.8.4. Az energia

Mivel az ε kifejtés nem képes leírni az exponenciálisan kicsi amplitúdójú farok-tartományt, így a számolás eredményeként szükségképpen a mag-tartomány energiáját kapjuk. Az energiasűrűség (2.9)-ben felírt alakja az átskálázott koordináták használatával,

$$\mathcal{E} = \frac{\omega^2}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right)^2 + U(\phi) . \quad (2.104)$$

A mag tartomány teljes energiája, (2.10) alapján,

$$E = \frac{1}{\varepsilon^d} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int_0^\infty \rho^{d-1} \mathcal{E} d\rho . \quad (2.105)$$

Az időben periodikusság miatt az energiasűrűség és az energia egy rezgési periódusra való átlagolását fogjuk megadni,

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{E} d\tau \quad , \quad \bar{E} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E d\tau . \quad (2.106)$$

Az ε kifejtéssel kapott (2.97) - (2.99) kifejezéseket használva, az időátlagolt energiasűrűség az $\bar{\mathcal{E}} = \varepsilon^2 \bar{\mathcal{E}}_2 + \varepsilon^4 \bar{\mathcal{E}}_4 + \mathcal{O}(\varepsilon^6)$ alakba fejthető ki, ahol

$$\bar{\mathcal{E}}_2 = \frac{S^2}{2\lambda} , \quad (2.107)$$

$$\bar{\mathcal{E}}_4 = \frac{1}{4\lambda} \left(\frac{dS}{d\rho} \right)^2 - \frac{S^2}{216\lambda^2} (64g_2^2 + 27\lambda)(S^2 + 2) + \frac{\sigma}{\lambda^3} SZ , \quad (2.108)$$

és a σ állandó definíciója (2.93)-ban adott.

Az eddigiek alapján, a mag tartomány időátlagolt \bar{E} teljes energiájának ε kifejtése d dimenzióban

$$\bar{E} = \varepsilon^{2-d} \bar{E}_2 + \varepsilon^{4-d} \bar{E}_4 + \mathcal{O}(\varepsilon^{6-d}) , \quad (2.109)$$

ahol

$$\bar{E}_k = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int_0^\infty \rho^{d-1} \bar{\mathcal{E}}_k d\rho . \quad (2.110)$$

Egy térdimenzió esetén S alakja egyértelműen adott (2.77) által, így $\bar{E}_2 = 2/\lambda$. A zérushely nélküli S_0 alapmegoldásnál a numerikusan számolt értékek, $d = 2$ esetén $\bar{E}_2 = 5.85045/\lambda$, és $d = 3$ esetén $\bar{E}_2 = 9.44863/\lambda$. Az \bar{E}_4 együttható függése az $U(\phi)$ potenciáltól bonyolultabb, ezért annak numerikus értékét csak a ϕ^4 esetben adjuk meg majd a következő alfejezetben.

Ahogy (2.109)-ből látható, az időátlagolt teljes energia a vezető rendű viselkedése $\bar{E} \sim \sim \varepsilon^{2-d}$. Ebből következőleg, az energia kis ε amplitúdók esetén való viselkedése drasztikusan megváltozik $d = 2$ térbeli dimenzióánál. $d > 2$ dimenzió esetén az energia minden határon

túl növekszik amikor ε nullához tart. $d = 2$ esetén \bar{E} egy pozitív állandóhoz tart, míg $d < 2$ esetén nullához tart $\varepsilon \rightarrow 0$ esetén. Ez azt is mutatja, hogy a kvázibreatherek (oszcillonok) magjának energiája $d > 2$ esetén felvesz egy minimum értéket egy bizonyos ε_m amplitúdónál és a hozzá tartozó $\omega_m = \sqrt{1 - \varepsilon_m^2}$ rezgési frekvenciánál. A (2.109) kifejtésből kapható, hogy első közelítésben a minimum amplitúdója, $d = 3$ esetén, feltéve hogy \bar{E}_4 pozitív,

$$\varepsilon_m = \sqrt{\frac{\bar{E}_2}{\bar{E}_4}}. \quad (2.111)$$

2.8.5. Kifejtés a ϕ^4 potenciál esetére

Ebben az alfejezetben részletesebben megvizsgáljuk az oszcillonok ε kifejtését a (2.58) alakban felírt ϕ^4 potenciál esetén. Ekkor a potenciál nemnulla kifejtési együtthatói $g_2 = -3/2$ és $g_3 = 1/2$. Emiatt $\lambda = 3/2$, és így $p_1 = S\sqrt{2/3}$. A Z függvény (2.92) definíciójának alakja

$$p_3 = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \left(\frac{65}{8}Z - \frac{8}{3}S - \frac{19}{12}S^3 \right). \quad (2.112)$$

A (2.97)-(2.100) általános egyenletek ekkor is érvényesek, de ilyenkor könnyebb továbbmenni a kifejtésben. Ötödrendben, a ϕ_5 -re vonatkozó megoldás felírásakor megjelenő p_5 függvény alternatívájaként definiálunk egy Y függvényt a

$$p_5 = \frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} \left(Y - \frac{1235}{32}S^2Z + \frac{1503}{16}Z - 24S - \frac{17}{3}S^3 + \frac{11525}{384}S^5 \right) \quad (2.113)$$

összefüggéssel. Az ezt meghatározó egyenlet

$$\begin{aligned} \frac{d^2Y}{d\rho^2} + \frac{d-1}{\rho} \frac{dY}{d\rho} - Y + 3S^2Y + \frac{4225}{64}SZ(3Z - 5S^3) \\ + \frac{53d(d-1)}{\rho^2}S \left(\frac{dS}{d\rho} \right)^2 + \frac{106(d-1)}{\rho}S^2(S^2 - 1) \frac{dS}{d\rho} + \frac{8287}{48}S^7 = 0. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Az S_0 alapmegoldáshoz tartozó, középpontban reguláris és végtelenben nullához tartó Y középponti értéke $d = 2$ esetén -87.78183 , és $d = 3$ -ra 60356.38 .

A következő egyenletekben megadjuk a ϕ skalármező ε szerinti kifejtésének ϕ_k együttható

függvényeit hatod rendig, a $\tau = 0$ időpillanatban, amikor a mező időtükrözésre szimmetrikus:

$$\phi_1^{(\tau=0)} = \sqrt{\frac{2}{3}} S, \quad (2.115)$$

$$\phi_2^{(\tau=0)} = \frac{1}{3} S^2, \quad (2.116)$$

$$\phi_3^{(\tau=0)} = \frac{1}{9} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{195}{8} Z - 8S - \frac{35}{8} S^3 \right), \quad (2.117)$$

$$\phi_4^{(\tau=0)} = \frac{1}{9} \left[\frac{65}{4} SZ + 10 \left(\frac{dS}{d\rho} \right)^2 + \frac{8}{3} S^2 - \frac{125}{12} S^4 \right], \quad (2.118)$$

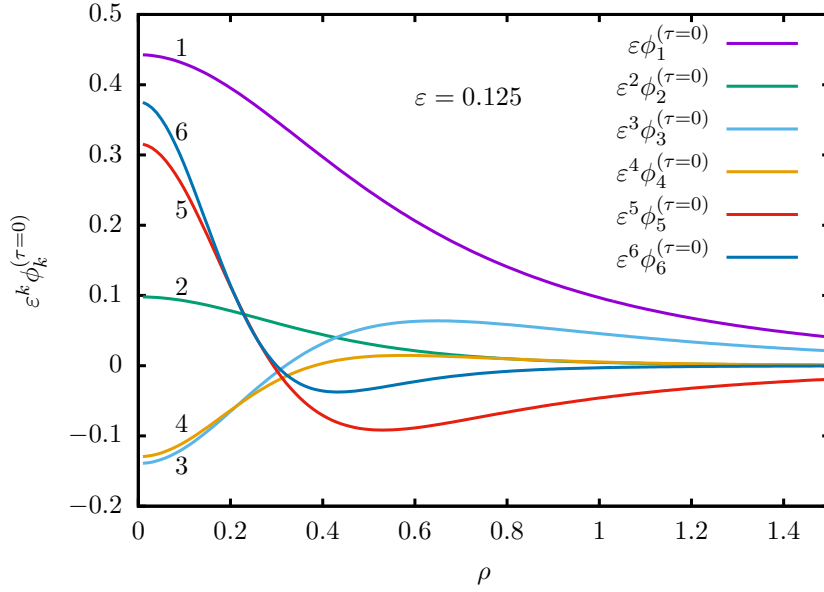
$$\phi_5^{(\tau=0)} = \frac{1}{9} \sqrt{\frac{2}{3}} \left[Y - \frac{2275}{64} S^2 Z + \frac{1503}{16} Z - \frac{15}{32} S \left(\frac{dS}{d\rho} \right)^2 - 24S - \frac{595}{96} S^3 + \frac{11285}{384} S^5 \right], \quad (2.119)$$

$$\begin{aligned} \phi_6^{(\tau=0)} = & \frac{2}{27} \left[SY + \frac{325}{4} \frac{dS}{d\rho} \frac{dZ}{d\rho} + \frac{4225}{128} Z^2 - \frac{8125}{48} S^3 Z + \frac{6589}{48} SZ \right. \\ & - \frac{9223}{32} S^2 \left(\frac{dS}{d\rho} \right)^2 + \frac{88}{3} \left(\frac{dS}{d\rho} \right)^2 + \frac{26d(d-1)}{\rho^2} \left(\frac{dS}{d\rho} \right)^2 \\ & \left. + \frac{52(d-1)}{\rho} S(S^2-1) \frac{dS}{d\rho} + \frac{92}{9} S^2 - \frac{35417}{288} S^4 + \frac{21467}{144} S^6 \right]. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Ezek a kifejezések azért hasznosak, mert segítségükkel adhatunk meg kezdőadatokat a numerikus időfejlődési kódhoz.

Mivel a ϕ_k függvények értéke a k index növelésével gyorsan növekszik, a 2.30 ábrán az $\varepsilon^k \phi_k$ szerint átskálázott (2.115)-(2.120) függvényeket adjuk meg egy önkényesen választott ε mellett, $d = 3$ dimenziónál. Az ε paraméternek azon értéke, amely az alacsonyabb rendeket egy bizonyos renddel azonos nagyságrendre hozza, egy felső korlátnak tekinthető, amelynél kisebb ε értékekre a kifejtés az adott rendig még hasznos közelítést ad. Az ε kifejtés aszimptotikus, és mint az aszimptotikus kifejtéseknél általában, egy rögzített kis ε érték mellett a kifejtés rendjének növelésével egy bizonyos rendig egyre javuló közelítést kapunk. Magasabb rendű tagokat hozzávéve viszont egyre távolabb kerülünk a valódi megoldástól, amely megoldás esetünkben az azonos frekvenciájú kvázibreathert jelenti. Elég kis ε -t választva, kifejtés rendjét növelve az egyes rendek járuléka egy bizonyos rendig egyre kisebbé válnak, de aztán növekedni kezdenek. A tapasztalatok alapján ideális közelítést általában akkor kaphatunk, ha éppen akkor hagyjuk abba a kifejtést amikor a járulékok növekedni kezdenek. Így ha nem is ismerjük a pontos megoldást, akkor is tudhatjuk, hogy milyen rendig érdemes elmenni a kifejtéssel.

A 2.7.2 alfejezetben alkalmazott spektrális numerikus módszer segítségével nagyon pon-



2.30. ábra. Különböző rendű tagok járuléakai a ϕ skalárfüggvényhez, $\varepsilon = 0.125$ választása mellett, $d = 3$ térbeli dimenzió esetén, $\tau = 0$ -ban.

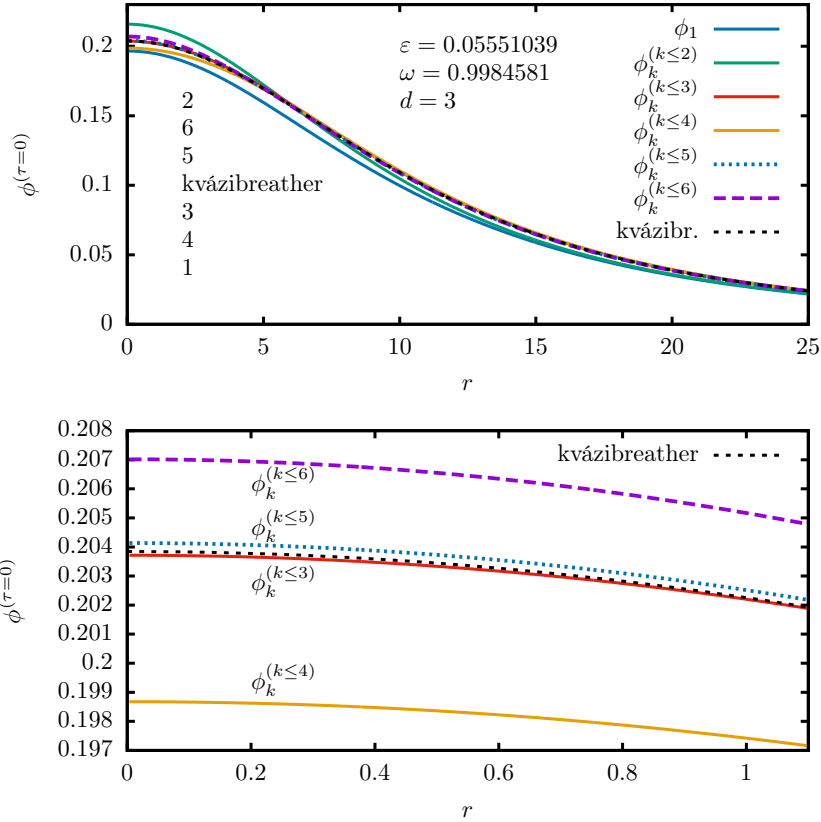
tosan megkonstruálhatjuk a kvázibreather állapotokat. A (2.31) ábrán az $\omega = 0.9984581$ frekvenciájú kvázibreather esetére a ϕ skalármező $\tau = 0$ időpontbeli numerikus értékét hasonlítjuk össze különböző rendű ε kifejtési eredményekkel, $d = 3$ dimenziónál. Az ehhez a frekvenciához tartozó amplitúdó paraméter $\varepsilon = \sqrt{1 - \omega^2} = 0.05551039$. Megjegyezzük, hogy a 2.7.2 alfejezetben eltérő normálást alkalmaztunk a ϕ^4 potenciálra, így az ottani konvenciók szerint ennek az állapotnak a frekvenciája 1.412033 lenne, a τ és r koordináták $\sqrt{2}$ -vel való átskálázása miatt. Az ábráról látható, hogy ebben az esetben a kifejtés első három tagjának figyelembe vétele adja a legpontosabb eredményt. Magasabb rendű járulékok használata csak távolabb visz a pontos értékektől.

Az alfejezet hátra lévő részében az állapot energiájának ε függését vizsgáljuk meg a ϕ^4 elmélet esetében. A ϕ^4 potenciál (2.58) alakja esetén az időátlagolt energiasűrűség (2.107)-(2.108) kifejtési együtthatói

$$\bar{\mathcal{E}}_2 = \frac{S^2}{3} \quad , \quad \bar{\mathcal{E}}_4 = \left[\frac{1}{6} \left(\frac{dS}{d\rho} \right)^2 - \frac{41}{108} S^2 (S^2 + 2) + \frac{65}{36} SZ \right] S^4 . \quad (2.121)$$

Numerikus integrálással kaphatjuk, hogy a mag tartomány energiájának (2.109) szerinti kifejtése, $d = 2$ térdimenzió esetén

$$\bar{E} \approx 3.9003 + 26.9618 \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) , \quad (2.122)$$



2.31. ábra. A ϕ skalármező $\tau = 0$ időpontban való radiális függésére kapott nagy pontosságú numerikus eredmény összehasonlítása különböző rendű kifejtéssel kapott értékekkel, $\omega = 0.9984581$ frekvenciájú kvázibreather esetén. Az alsó ábra a középpont körüli kis tartományt mutatja kinagyítva.

valamint $d = 3$ esetén

$$\bar{E} \approx 6.29908/\varepsilon + 264.262\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (2.123)$$

Ennek felhasználásával, $d = 3$ térbeli dimenziónál, (2.111) szerint az energia-minimum helyére az $\varepsilon_m = 0.154$ becslést kaphatjuk, ami $\omega_m = 0.988$ frekvenciának felel meg. A 2.7.2 alfejezetben bemutatott numerikus eredményeinkkel összehasonlítva látható, hogy ez csak egy nagyságrendi becslésnek tekinthető. Az energia frekvencia függését a 2.19 ábrán adtuk meg. Az ott használt időkoordináta $\sqrt{2}$ -vel való átskálázását figyelembe véve, a minimum helye az $\omega_c = 0.967$ kritikus frekvenciának felel meg, ami lényegesen alacsonyabb az $\omega_m = 0.988$ becslésnél. Az ω_c -hez tartozó amplitúdó paraméter $\varepsilon_c = 0.254$ lenne, ami a $\varepsilon_m = 0.154$ becslésnél jóval nagyobb.

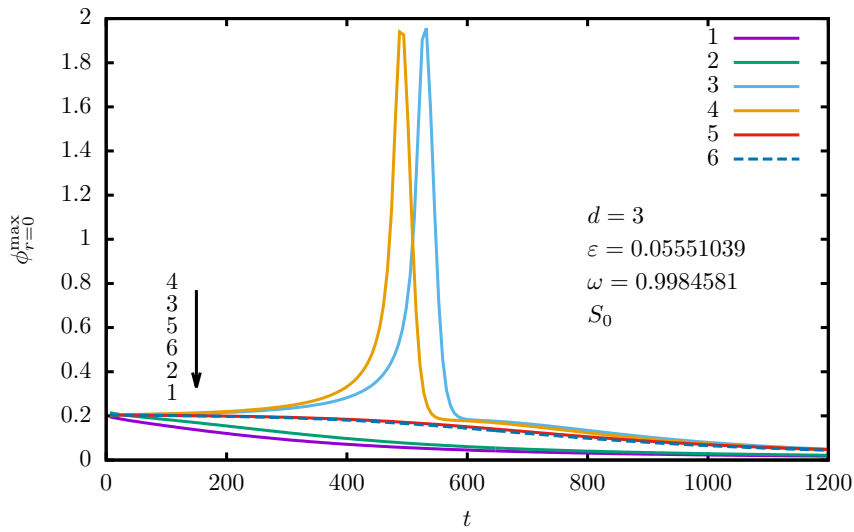
2.8.6. Kezdőadat numerikus időfejlődése

A 2.6.3 alfejezetben bemutatott numerikus időfejlődést szimuláló kódunkat használhatjuk a kis-amplitúdós kifejtés segítségével előállított kezdőadat fejlődésének tanulmányozására. Mivel kis ε esetén a kvázibreather és oszcillon állapotok jellemző mérete ε -nal fordítottan arányos, a számolásaink során a kompaktifikált R radiális koordináta (2.24) szerinti bevezetésekor használt κ együttható értékét a $\kappa = 5\varepsilon$ összefüggésnek megfelelően választottuk. A ϕ kezdőadatot a $t = \tau = 0$ időpontban a (2.57) kifejtés valamilyen rendjének megfelelően, a (2.115)-(2.120) egyenletek alapján konstruáljuk meg. Mivel a kifejtéssel leírt mag tartomány $\tau = 0$ -ban időtükrözésre szimmetrikus, ϕ időderiváltját a kezdeti időpillanatban nullának választjuk.

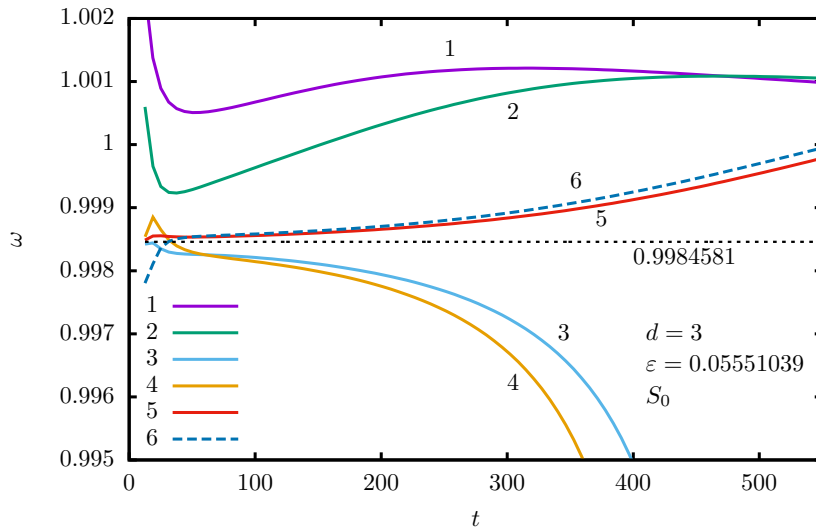
Időfejlődés $d = 3$ térbeli dimenzió esetén

Három térdimenzióánál a ϕ^4 oszcillonok az $1 > \omega > \omega_c = 0.967$ frekvenciák esetén instabilak. Ennek a frekvenciatartománynak a $0 < \varepsilon < \varepsilon_c = 0.254$ paraméter tartomány felel meg, ami azt mutatja, hogy az oszcillonok ebben az esetben csak egy viszonylag nagy amplitúdó érték felett válnak stabillá. Ekkor viszont már legfeljebb csak a kis-amplitúdós kifejtés első rendje használható közelítésként, és az is akkora mértékben eltér az egzakt kvázibreather alaktól, hogy nem fejlődik belőle oszcillon állapot a kívánthoz közeli frekvenciával. Azok a kis-amplitúdós kifejtés használatával előállított kezdőadatok, amelyekből hosszabb élettartamú oszcillon képes kifejlődni, viszonylag kicsi ε értékekkel kaphatók, és emiatt a kifejlődő állapotok az instabil tartományba esnek. Ennek ellenére ezek az oszcillon állapotok ε csökkentésekor nagyon hosszú élettartamúvá válhatnak, mert kis ε értékeknél a kifejtés magasabb rendjei már nagyon jól közelítik a kvázibreather alakját.

A 2.32 ábrán az $\varepsilon = 0.05551039$ paraméter használatával előállított különböző rendű kezdőadatokból kifejlődő oszcillonok középpontbeli felső burkológörbéjét adjuk meg. A 2.10 ábrán mutatott majdnem periodikus állapotokhoz, és a 2.27 ábrán lévő kvázibreather kezdőadathoz hasonlóan, az instabil oszcillonnak ekkor is kétféle bomlási módja lehet. Az egyik az oszcillon méretének egyenletes növekedésével, a másik pedig először egy kisebb középpont körüli tartományba való ideiglenes összeomlással. Amint az ábrán is látható, az hogy melyik bomlási mechanizmus valósul meg, a kezdőadat rendjétől is függ. A kezdő tartományban a kifejlődő állapotok frekvenciájának időfüggését a 2.33 ábrán mutatjuk. Látható, hogy a kifejtés első két rendje a kívánt oszcillontól lényegesen eltérő rövidebb élettartamú állapotokat ad. A harmadik és az ötödik rend viszont lényegesen javít az alacsonyabb rendű közelítéseken.



2.32. ábra. Az $\epsilon = 0.05551039$ paraméterhez tartozó egytől hatodrendű kezdőadatok időfejlődése $d = 3$ dimenziónál.

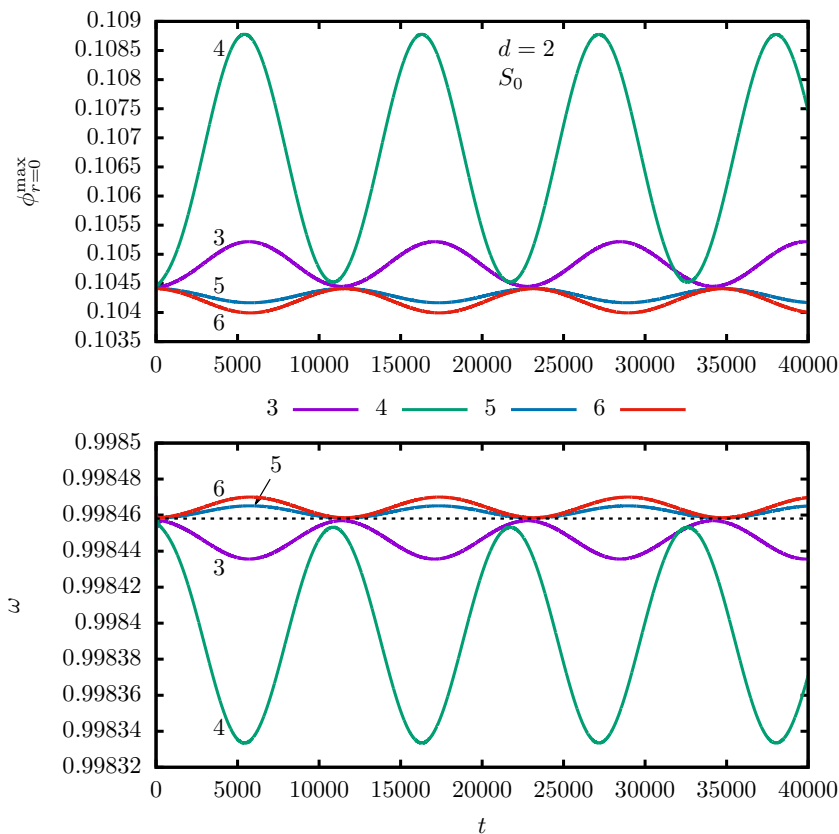


2.33. ábra. Az előző ábrán mutatott állapotok frekvenciájának időfüggése.

Időfejlődés $d = 2$ térbeli dimenzió esetén

Két térdimenzió esetén kis és közepes amplitúdójú oszcillonok stabilnak bizonyulnak. Ha valamilyen kezdőadatokból létrejön egy oszcillon állapot, akkor az nem bomlik el hirtelen, viszont az amplitúdó és frekvencia viselkedésén megfigyelhető egy alacsony frekvenciás periodikus változás. Valószínűleg $d = 1$ és $d = 2$ esetén is létezik egy olyan amplitúdó, ahol az energia maximálissá válik, és amely felett az oszcillonok instabillá válnak, de ennek ér-

téke jelenleg nem ismert. A 2.34 ábrán $\varepsilon = 0.05551039$ paraméter használatával előállított



2.34. ábra. Különböző rendű $\varepsilon = 0.05551039$ paraméterhez tartozó kezdőadatok időfejlődése $d = 2$ dimenzió esetén. A felső ábrán a rezgések felső burkológörbéje, míg az alsón a frekvencia látható az idő függvényeként. A szaggatott fekete vonal az elméletileg jóslott $\omega = 0.9984581$ frekvenciát mutatja.

kezdőadatok időfejlődését mutatjuk, a harmadiktól a hatodik rendig. Az első és másodrendű közelítéssel előállított kezdőadat viszonylag gyorsan bomló állapotokat ad, a kívánttól távoli frekvenciával, így azokat nem mutatjuk. Mint az ábrán látható, ennél az aránylag alacsony amplitúdónál a harmad és ötöd rendű korrekció közelebb visz a periodikus kvázibreather állapothoz, míg a negyed és hatod rend újra eltávolít tőle.

2.9. A sugárzási amplitúdó analitikus meghatározása

2.9.1. Oszcillonok és kvázibreatherek kapcsolata

Mint azt a 2.7.3 alfejezetben bemutatott numerikusan kiszámolt állapotok összehasonlítása is mutatja, az oszcillonok kimenő hullám sugárzási farkának amplitúdója nagyon jó közelítéssel megegyezik az azonos frekvenciájú kvázibreather állóhullám farkának amplitúdójával. A kvázibreather farok ω_f frekvenciájú részének aszimptotikus alakja $d + 1$ dimenziós téridő esetén

$$\phi = \frac{\alpha}{r^{\frac{d-1}{2}}} \cos(\lambda_f r + \delta) \cos(\omega_f t) , \quad (2.124)$$

ahol $\lambda_f = \sqrt{\omega_f^2 - m^2}$, és δ a fázist megadó konstans. További $\frac{1}{r^{(d-1)/2}} \cos(\lambda_f r + \delta) \cos(\omega_f t)$ aszimptotikájú járulékok hozzáadása, azaz α megváltoztatása, elrontaná a középpont regularitását (tükrözési szimmetriáját). Viszont szabadon hozzáadhatunk a linearizált egyenleteket megoldó $\frac{1}{r^{(d-1)/2}} \sin(\lambda_f r + \delta) \cos(\omega_f t)$ tagot bármilyen együtthatóval, így a kvázibreatherhez hasonló periodikus megoldásokat kapunk, lényegében ugyanolyan mag-tartománnyal, de a minimálisnál nagyobb farok-amplitúdóval. Az időtükrözési szimmetriát megsértve, $\frac{\alpha}{r^{(d-1)/2}} \sin(\lambda_f r + \delta) \sin(\omega_f t)$ aszimptotikájú függvényt hozzáadva, energiát kifelé szállító hullám alakot kapunk, az eredeti kvázibreatherrel azonos α amplitúdóval,

$$\phi = \frac{\alpha}{r^{\frac{d-1}{2}}} \cos(\lambda_f r + \delta - \omega_f t) . \quad (2.125)$$

Az ilyen aszimptotikájú skalármező által nagy r sugarú gömbön kimenő energiaáram $2\pi/\omega_f$ rezgési periódusra átlagolt értéke, (2.12) alapján,

$$\bar{S} = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \lambda_f \omega_f \alpha^2 . \quad (2.126)$$

Az oszcillonok energiaveszteségi rátájának meghatározásához a kvázibreatherek farkának α amplitúdóját fogjuk kiszámolni a továbbiakban.

A farok létezésének megmutatása és amplitúdójának analitikus meghatározása Segur és Kruskal nevéhez fűződik [34]. A komplex tartományba való kiterjesztés és aszimptotikus illesztés módszerét használták egy térdimenziós ϕ^4 elmélet esetén. A komplex kiterjesztés módszerét először Pokrovskii és Khalatnikov alkalmazta alacsony potenciálgátról történő visszaszóródás amplitúdójának számolására [127]. A kvázibreatherek mag-tartománya az ε paraméter szerinti kifejtéssel nagyon jól leírható. A mag amplitúdója ε -nal arányos, míg a mérete $1/\varepsilon$ rendű. Kis ε értékeknél ehhez a maghoz kell meghatározni egy távoli, ε -ban exponenciálisan kicsi korrekcióként megjelenő állóhullám farok járulékokot. Az időperiodikus

skalármezőket leíró egyenletek és megoldásaik komplex r radiális koordinátára való kiterjesztésének fontos előnye az, hogy a komplex síkon megjelenő szingularitás közelében a mag és a farok járulékaiknak kiterjesztése egyaránt $\mathcal{O}(1)$ rendűvé válik. Mivel a szingularitás környezetében a függvények még az $\varepsilon \rightarrow 0$ határesetben sem tűnnek el, a valós tengelyen exponenciálisan kicsi korrekció itt lényegesen könnyebben számolható.

Segur és Kruskal a szingularitás közelében a differenciálegyenleteket numerikus módszerrel oldotta meg. A [30] cikkünkben a minimuma körül szimmetrikus $U(\phi)$ potenciál esetén Borel összegzés segítségével analitikusan meghatároztuk a rezgő faroknak megfelelő járulék amplitúdóját a szingularitás közelében. Ezt a módszert először Pomeau, Ramani és Grammaticos alkalmazta az ötödrendű taggal kiegészített Korteweg-de Vries (KdV) egyenlet által leírt kvázi-lokalizált megoldások farok-amplitúdójának a kiszámolására [128]. Analitikus eredményeinket összehasonlítottuk numerikusan kiszámolt kvázibreatherekkel, és az oszcillonok numerikus időfejlődésekor létrejövő majdnem-periodikus állapotokkal, különböző potenciálok esetén [30]. Következőnek megjelent cikkünkben a sugárzási amplitúdó kiszámolására kidolgozott módszert általánosítottuk d térdimenziós gömbszimmetrikus oszcillon állapotok esetére [31].

Az oszcillonok számolásakor használt módszer alkalmazható az ötödrendű Korteweg-de Vries (KdV) egyenlet kvázibreather (más néven nanopteron) megoldásai aszimptotikus farkának meghatározására is [128]. Ez a probléma annyival egyszerűbb a jelen dolgozatban bemutatott skalár oszcillonoknál, hogy az ötödrendű KdV egyenletnek időfüggetlen megoldásait keressük, így nem szükséges az időben történő Fourier kifejtés, és végtelen sok Fourier komponens helyett egy függvény vizsgálata elegendő. A KdV rendszer részletes és pedagógikus tárgyalása Boyd könyvében található [116]. Boyd arra is rámutat, hogy a nemlinearitás nem döntő tényező a rezgő farokkal rendelkező kvázibreather megoldások létrejöttében. Könyvében részletesen áttekinti az $u(x)$ függvényre vonatkozó

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u = f(\varepsilon x) \quad (2.127)$$

egyenlettel leírt mintaproblémát, ahol ε egy kis állandó, és $f(x)$ egy adott lokalizált függvény, például $\text{sech } x$. Az egyenletnek léteznek lokalizált maggal és ε -ban exponenciálisan kicsi farokkal rendelkező megoldásai. A farok nagysága ε szerinti kifejtéssel, majd komplex x síkra történő kiterjesztéssel és Borel összegzés alkalmazásával is számolható, jól illusztrálva és motiválva a nemlineáris problémák esetére is alkalmazható, elsőre nehezen áttekinthető eljárást [116].

2.9.2. Egydimenziós tér szimmetrikus potenciállal

A módszer technikai bonyolultsága miatt az eljárást először egy olyan konkrét esetben mutatjuk be, ahol a sugárzás kiszámolása a lehető legegyszerűbb. Minimuma körül szimmetrikus $U(\phi)$ potenciál esetén a (2.36) Fourier kifejtésben csak páratlan indexű Φ_n komponensek fordulnak elő, és a megoldandó egyenletek is könnyebben áttekinthetőek. Mint később látni fogjuk, $d > 1$ térdimenzió esetén gömbszimmetrikus kvázibreatherek farok-amplitúdója vezető ε rendben megegyezik a $d = 1$ dimenziós állapotokéval. Emiatt először az egydimenziós eset részletes bemutatása szükséges. Az ehhez járuló dimenziós korrekciót később számoljuk.

A (2.39) kifejtés jelöléseit alkalmazva, a legegyszerűbb minimuma körül szimmetrikus kölcsönhatási potenciál $U(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{g_3}{4}\phi^4$. Ebben a fejezetben a skalármező tömegét a koordináták átskálázásával továbbra is az $m = 1$ értéken tartjuk. Kis amplitúdós oszcillók csak akkor létezhetnek, ha a (2.70) egyenletben definiált $\lambda = \frac{5}{6}g_2^2 - \frac{3}{4}g_3$ pozitív. Mivel most $g_2 = 0$, szükségképpen $g_3 < 0$ kell legyen. Emiatt, a ϕ skalármező átskálázásával tetszőleges szimmetrikus potenciál esetén elérhető, hogy $g_3 = -1$ legyen, amikor is $\lambda = 3/4$. Mivel a rendszer stabilitása érdekében a potenciált alulról korlátosnak kívánjuk tartani, a potenciálhoz hozzáveszünk egy hatodfokú tagot,

$$U(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2 - \frac{1}{4}\phi^4 + \frac{g_5}{6}\phi^6, \quad (2.128)$$

ahol feltesszük, hogy $g_5 > 0$. A következő számolásoknál ezt az általános hatodrendű potenciált fogjuk használni. Látni fogjuk, hogy a farok amplitúdója erősen függ g_5 értékétől.

A $t = 0$ pillanatban időtükrözésre szimmetrikus, ω alapfrekvenciával rezgő megoldásokat keresünk. A skalármezőt (2.36) szerint Fourier kifejtjük, bevezetve a Φ_n függvényeket. Mivel a potenciál szimmetrikus, a páros indexű Φ_n komponenseket nullának választjuk. Ez a választás konzisztens a Φ_n komponensekre vonatkozó (2.43) egyenletekkel és azok (2.41) alakú F_n forrástagjaival. Ebben az esetben az F_n kifejezésében szereplő összegzések nyilvánvalóan csak páratlan egészekre vonatkoznak.

A (2.43) egyenletek numerikus megoldásával elvileg nagy pontossággal megkapható a kvázibreatherek mag és farok része is, azonban egydimenziós esetben csak a nem szimmetrikus ϕ^4 potenciál esetén ismertek ilyen numerikus eredmények [119]. A mag-tartományt mérsékelten kis ε értékek mellett is nagyon jól leírja a kis-amplitúdós kifejtés, azonban a lassú térbeli változás feltételezése miatt a farok-tartományról semmilyen információt nem ad. A probléma megoldásához az ε hatványai szerinti aszimptotikus sorral reprezentált közelítéshez kell kiszámolnunk egy ε -ban exponenciálisan kicsi korrekciót. Ehhez először az ε kifejtéssel kapott eredményeket kell részletesebben megvizsgálnunk.

Az amplitúdót leíró ε paraméter szerinti kifejtést a 2.8 fejezetben azzal a gyengébb feltételezéssel vezettük le, hogy a megoldás ne növekedhessen az idő múlásával minden határon túl. Ebből következett ε -ban minden rendben az időben periodikusság és az időtükrözési szimmetria. Ugyanezt a kifejtést megkaphatjuk a periodikusság és tükrözési szimmetria feltételezésével, és a (2.43) Fourier módusegyenletek ε hatványai szerinti kifejtésével is. Ehhez még azt a konzisztens nagyságrendi feltevést kell tennünk, hogy Φ_n kifejtése ε^n hatvánnyal kezdődik. Mindegyik Φ_n kifejtése ezután kettesével növekvő kitevőjű ε hatványokból áll. Ez alól csak a Φ_0 kifejtése kivétel nem szimmetrikus potenciál esetén, ami ekkor ε^0 helyett ε^2 taggal kezdődik. Ez a viselkedés a kifejtés első néhány rendjét megadó (2.97) - (2.100) és (2.102) egyenletekből is jól látható. A kifejtéshez természetesen az átskálázott $\rho = \varepsilon r$ radiális koordinátát kell használni, ahol $\varepsilon^2 = 1 - \omega^2$. Bármelyik módszerrel is kapjuk a kis-amplitúdós kifejtési eredményeket, a lényeges dolog az, hogy az ε kifejtés a Fourier módusegyenletek megoldását közelíti, egy nem konvergens, de aszimptotikus sor formájában.

A $d = 1$ dimenziós esetben az ε kifejtés annyival egyszerűbbé válik, hogy ekkor analitikusan megoldhatók a p_{2k+1} függvényekre vonatkozó differenciálegyenletek. A megoldások $S = \sqrt{2} \operatorname{sech} \rho$ hatványainak véges számú tagból álló összegeként kereshetők (lásd (2.95), (2.103)). A (2.128) alakú szimmetrikus potenciál esetén a Fourier komponensek ε szerinti kifejtése a (2.97) - (2.100) és (2.102) egyenletekből adódóan,

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & \varepsilon \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \operatorname{sech} \rho + \varepsilon^3 \frac{1}{27\sqrt{6}} (80g_5 + 3)(2 \operatorname{sech} \rho - \operatorname{sech}^3 \rho) \\ & + \varepsilon^5 \frac{1}{1458\sqrt{6}} \left[5(6400g_5^2 - 96g_5 + 63) \operatorname{sech} \rho - (25600g_5^2 + 480g_5 + 171) \operatorname{sech}^3 \rho \right. \\ & \left. + 3(1600g_5^2 + 240g_5 - 9) \operatorname{sech}^5 \rho \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^7) , \end{aligned} \quad (2.129)$$

$$\begin{aligned} \Phi_3 = & -\varepsilon^3 \frac{1}{3\sqrt{6}} \operatorname{sech}^3 \rho \\ & + \varepsilon^5 \frac{1}{108\sqrt{6}} \left[-2(80g_5 + 3) \operatorname{sech}^3 \rho + (200g_5 - 33) \operatorname{sech}^5 \rho \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^7) , \end{aligned} \quad (2.130)$$

$$\Phi_5 = \varepsilon^5 \frac{1}{108\sqrt{6}} (8g_5 + 3) \operatorname{sech}^5 \rho + \mathcal{O}(\varepsilon^7) . \quad (2.131)$$

Magasabb rendekben is fennáll, hogy páratlan k -ra Φ_k kifejtésének első tagja $\varepsilon^k \operatorname{sech}^k \rho$ -val arányos. A Fourier komponensek kezdő tagjai általános szimmetrikus potenciál esetén is ugyanilyen alakúak. A potenciál kifejtésének g_7 együtthatója csak (2.129) harmadik, ε^5 -el arányos tagjában jelenik meg. A (2.129)-(2.131) egyenletekben megadott többi tag $g_3 = -1$ beállítása esetén változatlan marad.

A (2.129)-(2.131) egyenletek ugyan nem képesek információt szolgáltatni az állóhullám fark amplitúdójáról, de mégis nagyon hasznosak, mert kis amplitúdók esetén nagyon jó kö-

zelítéssel megadják a Fourier módusok viselkedését a teljes mag tartományban. Az eljáráshoz amit alkalmazni fogunk, a magot és a farkat is tartalmazó Φ_k megoldás-függvények és a rájuk vonatkozó (2.43) egyenletek komplex r síkra való analitikus kiterjesztésére lesz szükség. Mivel az ε kifejtéssel kapott kifejezések az átskálázott $\rho = \varepsilon r$ változót tartalmazzák, a kis-amplitúdós kifejtést is a komplex ρ síkon kell vizsgálnunk. Az általunk használt kiterjesztett függvények komplex differenciálhatóak a sík minden olyan pontjában, ahol értelmezni lehet őket, más szóval holomorf függvények. Mivel ezek nyílt halmazokon felvett értékeik alapján egyértelműen analitikusan folytathatók, a differenciálegyenletek valós tengelyen való megoldása helyett választhatjuk a probléma megoldását a komplex sík egy tartományában, majd a valós tengelyre való vissza-folytatást.

A (2.129)-(2.131) egyenletekből látható, hogy kis amplitúdókra a módus függvények komplex síkon való viselkedését a $\operatorname{sech} \rho$ függvény határozza meg. A $\operatorname{sech} \rho$ függvénynek elsőrendű pólusai vannak a képzetes tengelyen a $\rho = i\frac{\pi}{2} + ik\pi$ pontokban, ahol k tetszőleges egész. A sugárzási rátát a valós tengelyhez legközelebbi, $\rho = \pm i\frac{\pi}{2}$ helyeken lévő szingularitások körüli viselkedés fogja meghatározni. Mivel a függvényeink a valós tengelyen valós értéket vesznek fel, a szimmetria miatt elegendő a $\rho = i\frac{\pi}{2}$ körüli viselkedést tanulmányozni. A magasabb dimenziókra való későbbi általánosítás könnyebb áttekinthetősége érdekében, a szingularitás valós tengelytől való távolságára bevezetjük a P jelölést. A most tárgyalt egy térdimenziós esetben $P = \frac{\pi}{2}$. Bevezetve az R változót a $\rho = iP + R$ összefüggéssel, a $\operatorname{sech} \rho$ függvény $\rho = iP$ körüli Laurent-sora

$$\operatorname{sech} \rho = -\frac{i}{R} + \frac{iR}{6} - \frac{7iR^3}{360} + \frac{31iR^5}{15120} + \mathcal{O}(R^7) . \quad (2.132)$$

A kifejtés minden tagjában az R hatvány együttthatója tisztán képzetes.

A Φ_k módusoknak, mint az $r = \rho/\varepsilon$ radiális koordináta függvényeinek, a valós tengelyhez legközelebbi szingularitásai az $r = \pm i\frac{P}{\varepsilon}$ pontokban vannak, vagyis az ε amplitúdó csökkenésével egyre távolabb kerülnek. Vezessük be a szingularitástól való távolságot az eredeti r skálának megfelelő módon mérő y változót az alábbi kifejezéssel,

$$r = i\frac{P}{\varepsilon} + y . \quad (2.133)$$

Természetesen ekkor $R = \varepsilon y$. A fontos megfigyelés az, hogy ekkor a módusfüggvényekre vonatkozó (2.129)-(2.131) egyenletekben több helyen is megjelenő $\varepsilon \operatorname{sech} \rho$ kifejezésnek van egy nemeltűnő, ε független része,

$$\varepsilon \operatorname{sech} \rho = -\frac{i}{y} + \frac{iy}{6}\varepsilon^2 - \frac{7iy^3}{360}\varepsilon^4 + \frac{31iy^5}{15120}\varepsilon^6 + \mathcal{O}(\varepsilon^8) . \quad (2.134)$$

Ennek alapján, a (2.128) alakú szimmetrikus potenciál esetén, a Fourier módusok szingularitás közeli viselkedése

$$\Phi_1 = -\frac{2\sqrt{2}i}{\sqrt{3}y} - \frac{i}{27\sqrt{6}y^3}(80g_5 + 3) - \frac{i}{486\sqrt{6}y^5}(1600g_5^2 + 240g_5 - 9) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (2.135)$$

$$\Phi_3 = -\frac{i}{3\sqrt{6}y^3} - \frac{i}{108\sqrt{6}y^5}(200g_5 - 33) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (2.136)$$

$$\Phi_5 = -\frac{i}{108\sqrt{6}y^5}(8g_5 + 3) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (2.137)$$

A magasabb Φ_k módusok kifejtésének első tagja is i/y^k szorzót tartalmaz. Általános szimmetrikus potenciál és $g_3 = -1$ esetén (2.135)-(2.137) csak annyit változik, hogy (2.135) harmadik tagjában megjelenik a g_7 konstans is. Mivel az ε kifejtéssel kapott függvények a valós tengelyen $r = 0$ körül tükrözésre szimmetrikusak, a kifejtés minden tagjában az y hatvány együtthatója tisztán képzetesnek adódik. Ebből következően az összes tag járuléka valós a képzetes y tengelyen.

Mivel $1/y$ pozitív kitevőjű hatványait tartalmazza, a (2.135)-(2.137) közelítés akkor alkalmazható, ha $|y|$ nagy. Ez első ránézésre ellentmondásnak tűnhet, ugyanis éppen a szingularitás közeli helyeket tanulmányoztuk. Azonban, ha ε elég kicsi, könnyen teljesíthető, hogy y nagy, míg az átskálázott $R = \varepsilon y$ kicsi legyen. Ez az $1 \ll |y| \ll 1/\varepsilon$ tartomány az alkalmazott aszimptotikus illesztés módszerének az illesztési tartománya, amely a két használt tartománynak az átfedő része. A *külső tartomány* az r komplex sík azon része, ahol a kis-amplitúdós kifejtés érvényes, és ε csökkentésével egyre javuló közelítést ad. Ebben a tartományban a (2.43) Fourier módusegyenleteket oldjuk meg valamilyen 1-nél kicsit kisebb ω frekvenciára, a konkrét példánkban $m = 1$ és $d = 1$ választása mellett,

$$\frac{d^2\Phi_n}{dr^2} + (\omega^2 n^2 - 1)\Phi_n = F_n, \quad (2.138)$$

páratlan n -re. A farok amplitúdóját akkor szándékozunk meghatározni, amikor $\varepsilon = \sqrt{1 - \omega^2}$ kicsi. A *belső tartomány* a komplex r síkon lévő $r = i\frac{P}{\varepsilon}$ szinguláris pont környezetének azon része, ahol az $\varepsilon \rightarrow 0$ esetben a függvények ε -tól, és emiatt ω -tól függetlennek tekinthetők. Itt az y koordinátát használjuk, és a (2.43)-ból $\omega = 1$ helyettesítéssel kapott

$$\frac{d^2\Phi_n}{dy^2} + (n^2 - 1)\Phi_n = F_n, \quad (2.139)$$

egyenleteket oldjuk meg. A nemlineáris tagokat megadó F_n függvényeket mindkét tartományban a (2.41) kifejezések adják. A jelenleg egyszerű példaként használt (2.128) potenciál esetén a nemeltűnő g_n együtthatók $g_3 = -1$ és g_5 . A belső tartományban értelmezett (2.139)

egyenletek használatának nagy előnye, hogy (2.138)-al szemben nem szükséges minden egyes ω frekvenciára külön megoldanunk. Az $\omega \rightarrow 1$ határeset kezelése a külső tartományban azért problémás, mert ekkor a valós tengelyen a kvázibreather magjának és farkának az amplitúdója is nullához tart.

A (2.139) egyenletekbe a

$$\Phi_{2n-1} = \sum_{k=n}^{\infty} a_{2k-1}^{(2n-1)} \frac{1}{y^{2k-1}} \quad (2.140)$$

kifejtést helyettesítve, egy globális előjeltől eltekintve egyértelműen meghatározódnak a tisztán képzetes $a_{2k-1}^{(2n-1)}$ konstansok, és így közvetlen módon eljuthatunk a (2.135)-(2.137) kifejezésekhez, illetve azok tetszőleges szimmetrikus potenciálra való általánosításához, a kisamplitúdós kifejtés elvégzése nélkül. Az előjelben lévő határozatlanság a $\phi \rightarrow -\phi$ szimmetriának felel meg, és a (2.77) egyenletben S előjelének megválasztásával függ össze. Technikailag lényegesen egyszerűbb ilyen módon a számolás, és magasabb rendekig is könnyen elvégezhető valamelyik szimbolikus számolásokra kifejlesztett programcsomag segítségével. Számolásaink során a Maple szoftvercsomagot használtuk. A hatványsor közvetlen behelyettesítésével akár $1/y^{60}$ rendig is meg lehet határozni az együtthatókat. Az $1/y$ rendet kettessel növelve, és az alacsonyabb rendű eredményeket felhasználva, több száz rendig eljuthatunk, akár ugyanannyi Φ_{2n-1} Fourier komponens használva. A tapasztalataink szerint Φ_7 -nél magasabb komponensek hozzávétele csak sokadik tizedesjegyben befolyásolja a sugárzási farok nagyságát. Az ε kifejtésből származó lényeges információ az, hogy a belső tartományban minden Φ_n Fourier komponens kifejtése $1/y^n$ taggal kezdődik. A (2.140) kifejtés fontos tulajdonsága, hogy az összes $a_{2k-1}^{(2n-1)}$ együttható tisztán képzetes.

A formalizmus megértést segítheti a sine-Gordon breather vizsgálata. Ekkor a ϕ skalármező (2.14) kifejezésének Fourier transzformálásával konkrét n értékekre kiszámolhatók a Φ_n függvények. A (2.15) egyenlet megadja az ε kifejtés első tagjait. A ϕ megoldás komplex értékekre való értelmezésével, $r = i\frac{\pi}{2} + y$ helyettesítéssel, és ε -nal nullához tartva kapjuk a skalármező belső tartományban való viselkedését:

$$\phi = 4 \arctan \left(\frac{\cos t}{iy} \right). \quad (2.141)$$

Ennek Fourier transzformálásával a Φ_n függvények belső tartománybeli viselkedése könnyen számolható. Az eredmények $1/y$ szerinti kifejtésével kaphatjuk az $a_{2k-1}^{(2n-1)}$ együtthatókat. Például, Φ_3 kifejtésénél,

$$a_{2k-1}^{(3)} = -i \frac{(2k-2)!}{4^{k-2}(k+1)!(k-2)!}. \quad (2.142)$$

2.9.3. A belső tartomány egyenleteinek numerikus megoldása

A Φ_n Fourier komponensek a belső tartományban a (2.139) egyenleteket elégítik ki. A megoldás (2.140) szerinti hatványsor alakban történő kifejtése ugyan nem konvergens, de aszimptotikus soroként $1/|y|$ kis értékeire, a megfelelő rendben levágva, nagyon jó közelítést ad. A konvergencia hiánya az $\exp(-|y|)$ szerint lecsengő járulékok létezésével függ össze, amelyeket nem lehet hatványsor alakban kifejtetni. Ezeknek az exponenciálisan nullához tartó járulékoknak a létezése szorosan összefügg a valós tengelyen a kvázibreatherek exponenciálisan kicsi farkának létezésével.

Egy minden renden túl kicsi korrekció kiszámolása egy divergens sorhoz első látásra értelmetlennek tűnhet, de Segur és Kruskal [34] eljárását követve mégis értelmet adhatunk a módszernek, egy olyan helyet keresve, ahol legalább a képzetes része a sornak konvergens. Ez a hely a $\text{Re } y = 0$ képzetes tengely, ahol (2.140) minden tagja valós, és így a sor képzetes része triviálisan konvergál az $\text{Im } \Phi_n = 0$ értékhez.

A Φ_n Fourier módus függvényeket a

$$\Phi_n = \Psi_n + i\Omega_n \quad (2.143)$$

jelölés bevezetésével felosztjuk valós és képzetes részre, és behelyettesítjük a belső megoldást leíró (2.139) egyenletekbe. Lineáris közelítésben az egyenletek szétcsatolódnak, és y helyett bevezetve a képzetes tengelyen lefelé haladva növekvő valós értéket felvevő $\tilde{y} = iy$ koordinátát,

$$-\frac{d^2\Omega_n}{d\tilde{y}^2} + (n^2 - 1)\Omega_n = 0 \quad (2.144)$$

alakúak lesznek. Az Ω_1 függvényre a megoldás $\Omega_1 = c_0 + c_1\tilde{y}$, ahol c_0 és c_1 állandó. A kis-amplitúdós kifejtéssel kapott értékhez a külső tartományban való illeszthetőség feltétele, hogy $\tilde{y} \rightarrow \infty$ esetén Ω_1 lecsengjen, vagyis $c_0 = c_1 = 0$. A többi Ω_n is nullához kell tartson, így a lineáris közelítésben a viselkedésük

$$\Omega_n = \nu_n \exp\left(-\sqrt{n^2 - 1}\tilde{y}\right) \quad , \quad n \geq 2 \quad , \quad (2.145)$$

ahol ν_n később meghatározandó állandók.

Az Ω_n függvények képzetes tengelyen való viselkedésének tanulmányozásához nem elegendő a lineáris közelítés. Mindazonáltal, nagyon pontos leírást kaphatunk, ha a (2.41) által megadott F_k nemlineáris forrástagok közül csak az Ω_k változóban lineáris tagokat tartjuk meg. Így csatolt lineáris differenciálegyenleteket kapunk az Ω_n függvényekre a képzetes tengely mentén. Az egyenletek különféle Ψ_k hatványokkal szorzott Ω_j tagokat tartalmaznak.

Mivel a képzetes részekről feltesszük hogy exponenciálisan kicsik, a Ψ_n függvények helyére a (2.140) sorfejtéssel megadott Φ_n értékeket írhatjuk.

Az F_k nemlineáris forrástagok az összes többi Ω_k függvényben is generálnak az Ω_n exponenciális viselkedésének megfelelő $\exp(-\sqrt{n^2-1}\tilde{y})/\tilde{y}^a$ tagokat, ahol a pozitív egész. Például, az Ω_5 -öt meghatározó egyenlet jobboldalán a $\Phi_1^2\Phi_3$ tagnak a $\Psi_1^2\Omega_3$ képzetes része $\exp(-\sqrt{8}\tilde{y})/\tilde{y}^2$ tagot hoz létre Ω_5 -ben is. Az ilyen tagok másrészt visszahatnak az eredeti Ω_n viselkedésére, és befolyásolják az ott is jelen lévő $\exp(\sqrt{n^2-1}\tilde{y})/\tilde{y}^a$ tagok együtthatóit.

Nagy \tilde{y} értékekre a leglassabban lecsengő exponenciális módus fog dominálni. Szimmetrikus potenciál esetén $\Phi_2 = 0$, és az általában az Ω_3 által meghatározott $\exp(-\sqrt{8}\tilde{y})/\tilde{y}^a$ exponenciális viselkedés dominál az összes Ω_k esetén. Ekkor a Φ_3 módus az első ami sugározhat, és ha ν_3 -ra nem nulla érték adódik, akkor Ω_3 adja a domináns exponenciális korrekciót, ami a valós tengelyre való kiterjesztés után meghatározza a sugárzás mértékét.

Szimmetrikus potenciál esetén az Ω_3 vezető rendű viselkedését jól leírja a (2.145) egyenlet, a többi Ω_k -nál a nemlineáris tagok által Ω_3 -ból generált viselkedés dominál. Az Ω_3 kifejezéséhez korrekciós tagokat kaphatunk, ha a képzetes részekre vonatkozó csatolt lineáris egyenletek megoldását

$$\Omega_n = \nu_3 \exp\left(-\sqrt{8}\tilde{y}\right) \left(c_0^{(n)} + c_1^{(n)}\frac{1}{\tilde{y}} + c_2^{(n)}\frac{1}{\tilde{y}^2} + c_3^{(n)}\frac{1}{\tilde{y}^3} + \dots \right) \quad (2.146)$$

alakban keressük, ahol $c_0^{(3)} = 1$, és a Ψ_n valós részek helyére a (2.140) kifejtést helyettesítjük. Az Ω_n függvényekre vonatkozó csatolt differenciálegyenletekbe helyettesítve, az $1/\tilde{y}$ hatványainak eltűnéséből számolhatók a $c_k^{(n)}$ konstansok. A (2.128) szimmetrikus hatodrendű potenciál esetén a következő eredményt kapjuk:

$$\Omega_1 = \nu_3 \exp\left(-\sqrt{8}\tilde{y}\right) \left(\frac{1}{4\tilde{y}^2} - \frac{1}{4\sqrt{2}\tilde{y}^3} - \frac{1520g_5 - 267}{864\tilde{y}^4} + \dots \right), \quad (2.147)$$

$$\Omega_3 = \nu_3 \exp\left(-\sqrt{8}\tilde{y}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}\tilde{y}} + \frac{1}{8\tilde{y}^2} - \frac{260g_5 + 3}{162\sqrt{2}\tilde{y}^3} - \frac{520g_5 + 87}{2592\tilde{y}^4} + \dots \right), \quad (2.148)$$

$$\Omega_5 = \nu_3 \exp\left(-\sqrt{8}\tilde{y}\right) \left(-\frac{1}{8\tilde{y}^2} - \frac{1}{4\sqrt{2}\tilde{y}^3} + \frac{5(128g_5 - 33)}{864\tilde{y}^4} + \dots \right), \quad (2.149)$$

$$\Omega_7 = \nu_3 \exp\left(-\sqrt{8}\tilde{y}\right) \left(\frac{80g_5 + 21}{1440\tilde{y}^4} + \dots \right). \quad (2.150)$$

Megjegyezzük, hogy a többi Ω_k módus általi visszahatás figyelembe vétele nélkül Ω_3 -ban az $1/\tilde{y}^3$ és nagyobb hatványok együtthatóira helytelen értéket kapnánk. A kifejtés $1/\tilde{y}$ -ben ugyanolyan rendig viszonylag könnyen meghatározható mint ahányadik rendig (2.140) esetén elmentünk. Arra is fel szeretnénk hívni a figyelmet, hogy az Ω_3 magasabb rendű kifejtési együtthatói változnak, ha csak az első néhány Φ_n módust vesszük figyelembe. Ha például a

ν_3 értékét első közelítésben csak Φ_1 és Φ_3 felhasználásával kívánjuk számolni, akkor (2.147) és (2.148) megfelelő módosítását célszerű használni az \tilde{y} -ban való gyors konvergenciához.

Ebben az alfejezetben a ν_3 együtthatót a Segur és Kruskal [34] által először az aszimmetrikus ϕ^4 potenciál esetén alkalmazott numerikus módszerrel számoljuk ki. A belső tartományban a komplex $\Phi_n = \Psi_n + i\Omega_n$ függvényekre vonatkozó (2.139) differenciálegyenleteket numerikusan integráljuk egy konstans $\text{Im } y = y_i$ egyenes mentén, egy nagy pozitív $\text{Re } y = y_r$ értéktől indulva, ahol $y_i < 0$ valós. Másodrendű egyenletekről lévén szó, kezdőfeltételként a (2.140) sor valamilyen $1/y^n$ rendig számolt értékét, és annak deriváltját használjuk. A $\text{Re } y = 0$ képzetes tengelyhez érve, az ottani numerikusan kapott Ω_3 értékéből (2.148) alapján számoljuk a ν_3 együtthatót. A tapasztalat azt mutatja, hogy érdemes (2.148)-at akár $1/\tilde{y}^{15}$ rendig is kiszámolni, ugyanis a kifejtés rendjének növelésével egyre pontosabb értéket kaphatunk ν_3 -ra, viszonylag kis $|y_i|$ esetén is.

Ez a módszer azt feltételezi, hogy az $y = y_r + iy_i$ kiindulási pont környezetében a (2.140) sor jó közelítést ad Φ_n -re. Mivel azonban a sor nem konvergens, a kezdőponttól távolodva a valódi megoldás egyre jobban eltér a sor által reprezentálttól. Ezt az eltérést a képzetes tengelyen találhatjuk meg legkönnyebben, mert ott a sor minden tagja valós. A belső tartományban ilyen feltételeket kielégítő megoldást a külső tartománybeli megoldáshoz illesztve még nem közvetlenül a kívánt minimális farokkal rendelkező kvázibreathert kapjuk meg. Mivel a választott kezdőfeltételnek megfelelően a $-\frac{\pi}{2} < \arg y < 0$ irányokban a megoldást a (2.140) sor jól közelíti, a külső tartományban az ε kifejtés a radiális koordináta nagy pozitív $\text{Re } r$ értékeinél is érvényes marad, és így nincs állóhullám farok a valós tengelyen az egyik Φ_n komponensben sem. Cserébe, a Φ_n függvények nem lehetnek szimmetrikusak az $r = 0$ pontban, és ha negatív r értékekre tovább terjesztjük őket, akkor ott a távoli tartományban már megjelenik az állóhullám farok, a minimálishoz képest kétszeres amplitúdóval. Az ilyen függvények által meghatározott állapotokat *aszimmetrikus breather*eknek hívjuk. A belső megoldást a képzetes y tengelyen lefelé folytatva és a külsőhöz illesztve is jól látszik az aszimmetria, ugyanis a képzetes rész létezése miatt, a Cauchy-Riemann egyenletek szerint, a valós rész deriváltja nem lehet nulla. A [34] cikkben az aszimmetrikus állapot farka az $r < 0$ irányban tűnik el, míg a jelen dolgozatban $r > 0$ esetén. A rendszer szimmetriája miatt a két választás lényegében ekvivalens, de a magasabb dimenziós gömbszimmetrikus állapotokra való általánosítás áttekinthetőbb lesz ilyen módon. Az ω frekvencia értékének választása egyértelműen meghatároz egy aszimmetrikus breather, nem szükséges az amplitúdó minimalizálása a negatív r irányban. Az aszimmetrikus breather valóban breather abban az értelemben, hogy nem sugároz a pozitív r irányban, viszont nem teljesíti a szimmetria által megkövetelt határfeltételt $r = 0$ -ban.

A differenciálegyenletek numerikus megoldását természetesen csak véges számú Φ_n függvényre lehet elvégezni. Tapasztalataink szerint a $\Phi_1, \Phi_3, \Phi_5, \Phi_7$ módusok megtartásával már rendkívül pontos eredmény kapható. A függvények és deriváltjaik kezdőadatának meghatározásához a (2.140) kifejtést könnyen kiszámolhatjuk akár $1/y^{20}$ rendig. Megfelelő eredményhez legalább $1/y^7$ rend használata szükséges, de már $1/y^{12}$ rend is nagy pontosságot ad. A konstans y_i vonal helyét a $[-5, -22]$ intervallumban választottuk, de Ω_n exponenciális lecsengése miatt $y_i < -9$ esetén a numerikus számolást 16 jegy helyett 32 jegy pontossággal kellett végezni. A vonalon a kezdőpontot megadó y_r értékére az $[50, 500]$ intervallumban lévő értékeket használtunk, de általában $y_r = 300$ megfelelő választásnak bizonyult.

A numerikus számolásoknál nem maradhat paraméter az elméletben, ezért a (2.128) hatodrendű szimmetrikus potenciálban g_5 rögzítése szükséges. Eredményeinket $g_5 = 1$ választása mellett mutatjuk be. Mint később látni fogjuk, ennek a g_5 értéknek a közelében válik az oszcillon sugárzása maximálissá. Csak a Φ_1 és Φ_3 módusokat használva $\nu_3 = -0.910189$ értéket kaptunk. Hozzávéve a Φ_5 módust, $\nu_3 = -0.909789$, a Φ_7 módust, $\nu_3 = -0.90974966$, a Φ_9 módust, $\nu_3 = -0.90974964$ adódott. Ezek alapján ν_3 valódi értéke hét tizedesjegyre

$$\nu_3 = -0.9097496 . \quad (2.151)$$

A képzetes tengelyen lévő rendkívül kicsi járulék meghatározásához extrém nagy pontossággal kell numerikusan integrálni a differenciálegyenleteket. Számolásainkat a Maple szoftvercsomag használatával végeztük.

A ν_3 értékéből a sugárzási együttható meghatározására az alfejezet hátra lévő részében bemutatott eljárás tetszőleges szimmetrikus potenciál esetén érvényes. A (2.145) egyenletben megadott alakú Ω_3 képzetes rész a kvázibreathert meghatározó Φ_3 függvényhez a képzetes y tengely negatív részén

$$\delta\Phi_3^{(+)} = i\nu_3 \exp(-i\sqrt{8}y) \quad (2.152)$$

korrekciót képez. Ez a $\delta\Phi_3^{(+)}$ a belső tartományban megoldja vezető rendben a (2.139) linearizálásával kapható egyenletet. Felhasználva az y és r koordináták közötti kapcsolatot megadó (2.133) összefüggést, a külső tartományban ez a

$$\delta\Phi_3^{(+)} = \frac{\alpha}{2} i \exp(-i\sqrt{8}r) \quad (2.153)$$

alakú járulékhoz illeszthető, ahol bevezettük az

$$\alpha = 2\nu_3 \exp\left(-\frac{\sqrt{8}P}{\varepsilon}\right) \quad (2.154)$$

jelölést, és $P = \frac{\pi}{2}$ a szingularitás valós tengelytől való távolsága. Az ε paramétert az állapot frekvenciája határozza meg az $\varepsilon = \sqrt{1 - \omega^2}$ összefüggés által. A külső tartományban a $\delta\Phi_3^{(+)}$ függvény az $\omega = 1$ melletti (2.138) egyenlet linearizáltjának a megoldása. Az $\varepsilon \rightarrow 0$ határesetben az egyenlet reguláris marad, csak a vizsgált megoldások szingularitásának helye kerül egyre távolabb a valós tengelytől. A képzetes tengely negatív részén, az $r = -iP/\varepsilon$ helyen lévő szingularitástól is származik egy hasonló korrekció,

$$\delta\Phi_3^{(-)} = -\frac{\alpha}{2}i \exp(i\sqrt{8}r) . \quad (2.155)$$

Ennek a kettőnek az összege már valós értéket vesz fel a valós r tengelyen,

$$\delta\Phi_3 = \delta\Phi_3^{(+)} + \delta\Phi_3^{(-)} = \alpha \sin(\sqrt{8}r) . \quad (2.156)$$

A kis-amplitúdós kifejtéssel kapott Φ_n Fourier módusokhoz ezt a $\delta\Phi_3$ járulékot hozzáadva az aszimmetrikus breather közelítését kapjuk, amelynek nincs állóhullám farka, de cserébe az $r = 0$ középpontban nem tükrözésre szimmetrikus. Hangsúlyozzuk, hogy a (2.156) járulék csak a kvázibreather magjának a belső tartományában érvényes. A mag-tartományon kívül az éppen vizsgált aszimmetrikus breather esetén nincs ilyen oszcilláló farok. A kicsi amplitúdóval, de cserébe nagy mérettel rendelkező mag létezése, a rendszer nemlinearitása miatt, kifelé haladva képes kompenzálni ezt az exponenciálisan kicsi járulékot. A mag tartományban ezt a kis rezgés nem lehet látni az egyébként ε rendű ϕ skalármezőn. Ha azonban az $r = 0$ pontbeli deriváltat nézzük, ez az egyetlen tag ami járulékot ad és megtöri a megoldás szimmetriáját,

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial r} \right|_{r=0} = \alpha\sqrt{8} \cos(3t) . \quad (2.157)$$

Az egy térdimenziós esetben eleve tükrözésre szimmetrikus kvázibreather megoldásokat kerestünk, több dimenzió esetén a középponti regularitás feltétele ez a szimmetria.

Ha az így előállított aszimmetrikus breather megoldás körüli kis perturbációkat tekintjük, akkor a perturbáció $\omega = 3$ frekvenciás $\delta\Phi_3^{(s)}$ komponense a (2.138) egyenlet baloldalát elégíti ki. A $\delta\Phi_3^{(s)} = -\alpha \sin(\sqrt{8}r)$ megoldás választása szükséges ahhoz, hogy kompenzáljuk a középpontbeli aszimmetriát. Cserébe megjelenik a $-\alpha$ amplitúdójú $\delta\Phi_3^{(s)}$ állóhullám farok a külső tartományban. Ilyen módon éppen a keresett kvázibreather megoldáshoz jutunk, amely minimális farok-amplitúdóval rendelkezik. Ehhez a kvázibreatherhez még hozzáadhatjuk a perturbációs egyenleteket megoldó $\delta\Phi_3^{(c)} = \beta \cos(\sqrt{8}r)$ függvényt tetszőleges β amplitúdóval, továbbra is szimmetrikus gyengén nemlokális állapotokat kapva, a minimálisnál nagyobb, $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ amplitúdójú farokkal. Összefoglalásképp megállapítható, hogy a minimális farok-amplitúdóval rendelkező kvázibreather állóhullám farkát

$$\phi = -\alpha \sin(\sqrt{8}r) \cos(3t) \quad (2.158)$$

adja meg általános szimmetrikus potenciál esetén, ahol az α amplitúdót a (2.154) kifejezés határozza meg a ν_3 konstans és a szingularitás helyét megadó P segítségével.

Az α paraméter megfelel a farok általános viselkedését leíró a (2.124) egyenletben szereplő amplitúdó paraméternek. Így a kisugárzott energiaáram rezgési periódusra átlagolt \bar{S} értéke (2.126) segítségével számolható. Az egydimenziós esetben, szimmetrikus potenciál esetén $\bar{S} = 3\sqrt{8}\alpha^2$, vagyis

$$\bar{S} = 24\sqrt{2}\nu_3^2 \exp\left(-\frac{2\sqrt{2}\pi}{\varepsilon}\right). \quad (2.159)$$

Szimmetrikus hatodrendű potenciál és $g_5 = 1$ esetén az exponenciális előtti együttható $24\sqrt{2}\nu_3^2 = 28.0913$.

2.9.4. Analitikus módszer a korrekció számolására

Minimuma körül szimmetrikus potenciál esetén a belső tartományban megoldandó (2.139) egyenletek (2.140) alakú hatványsor kifejtéséhez járuló (2.145) exponenciális korrekció ν_3 együtthatója analitikusan is számolható Borel összegzés segítségével. Az $1/y$ sor nagy hatványokra való viselkedése határozza meg képzetes y esetére a Φ_3 képzetes részét adó korrekciót. Mivel az együtthatók tisztán képzetesek, véges számú adott y hatványú tag megváltoztatása nem ad ilyen járulékot.

A könnyebb érthetőség érdekében megadjuk az első három Fourier komponensre vonatkozó (2.139) egyenletnek a számolás szempontjából lényeges tagjait:

$$\frac{d^2\Phi_1}{dy^2} = \frac{g_3}{4} (3\Phi_1^3 + 3\Phi_1^2\Phi_3 + 6\Phi_1\Phi_3^2 + 6\Phi_1\Phi_3\Phi_5 + 6\Phi_1\Phi_5^2 + 3\Phi_3^2\Phi_5) , \quad (2.160)$$

$$\frac{d^2\Phi_3}{dy^2} + 8\Phi_3 = \frac{g_3}{4} (\Phi_1^3 + 6\Phi_1^2\Phi_3 + 3\Phi_3^3 + 3\Phi_1^2\Phi_5 + 6\Phi_1\Phi_3\Phi_5 + 6\Phi_3\Phi_5^2) , \quad (2.161)$$

$$\frac{d^2\Phi_5}{dy^2} + 24\Phi_5 = \frac{g_3}{4} (3\Phi_1^2\Phi_3 + 3\Phi_1\Phi_3^2 + 6\Phi_1^2\Phi_5 + 6\Phi_3^2\Phi_5 + 3\Phi_5^3) . \quad (2.162)$$

Az egyenletek jobboldalát az F_n nemlineáris tagok (2.41)-ben megadott kifejezése alapján számoltuk. Mivel nagyobb $1/y$ hatványt tartalmaznak, elhagytuk a Φ_7 és magasabb Fourier komponenseket tartalmazó tagokat, valamint a g_5 -el arányos, a különféle Φ_k -ban ötödrendű tagokat is. Ugyanezen okból, általános szimmetrikus potenciál esetén a g_7 és magasabb rendű együtthatókat sem szükséges figyelembe venni (2.160)-(2.162)-ben. A (2.128) alakban felírt szimmetrikus hatodrendű potenciál esetén $g_3 = -1$ és $k \geq 7$ esetén $g_k = 0$.

Mivel a jelenleg vizsgált szimmetrikus potenciálok esetén csak a páratlan indexű Fourier komponensek nem nullák, a (2.140) kifejtésben szereplő tisztán képzetes konstansokra

bevezetjük az $a_{2k-1}^{(2n-1)} = iA_k^{(n)}$ jelölést, vagyis a megoldást a

$$\Phi_{2n-1} = i \sum_{k=n}^{\infty} A_k^{(n)} \frac{1}{y^{2k-1}} \quad (2.163)$$

alakban keressük, ahol most $k \geq n$ tetszőleges pozitív egészek. A (2.135) kifejtésből látható, hogy $g_3 = -1$ esetén $A_1^{(1)} = -2\sqrt{2/3}$. A (2.139) egyenletekben szereplő n most $2n - 1$ -nek felel meg. Csak a jobboldali lineáris tagokat figyelembe véve, mivel $(2n - 1)^2 - 1 = 4n(n - 1)$, a

$$(2k - 3)(2k - 2)A_{k-1}^{(n)} + 4n(n - 1)A_k^{(n)} = 0 \quad (2.164)$$

egyenletekhez jutunk, amelyeknek $n \geq 3$ esetén a megoldása

$$A_k^{(n)} = K_n (-1)^k \frac{(2k - 2)!}{[4n(n - 1)]^{k-1/2}}, \quad (2.165)$$

valamilyen K_n konstansok mellett. A nevezőben lévő $[4n(n - 1)]^{-1/2}$ szorzót a később kiszámolásra kerülő kifejezések egyszerűbbé tétele érdekében nem olvasztottuk bele a K_n konstansba. Látható, hogy k növelésével leggyorsabban a Φ_3 -hoz tartozó $A_k^{(2)}$ együtthatók növekednek, ezért a nemlineáris tagokon keresztül ezek fogják meghatározni a többi együttható aszimptotikus viselkedését is.

Φ_1 együtthatóit vezető rendben a

$$(2k - 3)(2k - 2)A_{k-1}^{(1)} = -\frac{3g_3}{4} \left(A_1^{(1)}\right)^2 A_{k-1}^{(2)} \quad (2.166)$$

egyenlet határozza meg, ahol a jobboldali kifejezés (2.160) második nemlineáris tagjából származik. Minden egyéb tag legalább $1/k^2$ -el kisebb járulékot ad. Ennek nagy k -ra érvényes megoldása

$$A_k^{(1)} = \frac{1}{2k^2} A_k^{(2)}. \quad (2.167)$$

Ellenőrizhető, hogy ez az összefüggés az $A_k^{(n)}$ együtthatók nagy k -ra kiszámolt értékeivel is összhangban van. A számolás rendjét fokozatosan növelve, az együtthatók akár $1/y^{300}$ rendig is meghatározhatók algebrai manipulációk végzésére alkalmas program segítségével.

A Φ_5 komponens együtthatóit vezető rendben meghatározó egyenlet

$$(2k - 3)(2k - 2)A_{k-1}^{(3)} + 24A_k^{(3)} = -\frac{3g_3}{4} \left(A_1^{(1)}\right)^2 A_{k-1}^{(2)}, \quad (2.168)$$

ahol a jobboldali kifejezés (2.162) első nemlineáris tagjából származik. Ennek aszimptotikus megoldása

$$A_k^{(3)} = -\frac{1}{4k^2} A_k^{(2)}. \quad (2.169)$$

Magasabb Φ_{2n-1} Fourier komponensek együtthatóira is igaz, hogy $n \geq 3$ esetén $A_k^{(n)}$ nagy k esetén arányosan növekszik $A_k^{(2)}/k^{2n-4}$ értékével.

A domináns $A_k^{(2)}$ aszimptotikus viselkedését pontosabban meghatározhatjuk, ha figyelembe vesszük az első nemlineáris korrekciós tagot,

$$(2k-3)(2k-2)A_{k-1}^{(2)} + 8A_k^{(2)} = -\frac{3g_3}{2} \left(A_1^{(1)}\right)^2 A_{k-1}^{(2)}. \quad (2.170)$$

Ebből következően

$$A_k^{(2)} = K_2(-1)^k \frac{(2k-2)!}{8^{k-1/2}} \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{5}{4k^2}\right), \quad (2.171)$$

$1/k^3$ és magasabb rendű korrekciótól eltekintve. Ennek az azonosságnak segítségével pontosabban számolhatjuk a K_2 konstans értékét viszonylag nem túl magas rendű $A_k^{(2)}$ koefficiensekből is. Például, a (2.128) alakú szimmetrikus hatodrendű potenciálra $g_5 = 1$ esetén

$$K_2 = 0.5791646. \quad (2.172)$$

A K_2 konstans értéke azért fontos, mert mint hamarosan látni fogjuk, az egyszerű $\nu_3 = -K_2\pi/2$ összefüggés köti össze az előző alfejezetben definiált ν_3 együtthatóval, ami (2.159) szerint meghatározza a sugárzási veszteséget.

A domináns sugárzási farkat adó Φ_3 komponensre felírt

$$\Phi_3(y) = i \sum_{k=2}^{\infty} A_k^{(2)} \frac{1}{y^{2k-1}} \quad (2.173)$$

nem konvergens hatványsort szeretnénk Borel összegezni. Feltesszük, hogy a kifejtési együtthatók az

$$A_k^{(2)} = K_2(-1)^k \frac{(2k-2)!}{8^{k-1/2}} \quad (2.174)$$

összefüggéssel definiáltak, ahol K_2 valós konstans. A kiszámolandó exponenciális korrekció csak az együtthatók nagy k -ra történő viselkedésétől függ, ugyanis a kifejtés minden egyes tagja csak valós járulékot ad a képzetes y tengelyen. A $\Phi_3(y)$ együtthatói $(2k-2)!$ szerint divergálnak. Definiáljuk a transzformált $\widehat{\Phi}_3(z)$ függvényt az alábbi összegzéssel,

$$\widehat{\Phi}_3(z) = i \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_k^{(2)}}{(2k-1)!} z^{2k-1}. \quad (2.175)$$

A faktoriális függvény integrál reprezentációját használva,

$$\begin{aligned} \Phi_3(y) &= i \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_k^{(2)}}{y^{2k-1}(2k-1)!} \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{2k-1} \\ &= \int_0^{\infty} dt e^{-t} i \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_k^{(2)}}{(2k-1)!} \left(\frac{t}{y}\right)^{2k-1} = \int_0^{\infty} dt e^{-t} \widehat{\Phi}_3\left(\frac{t}{y}\right). \end{aligned} \quad (2.176)$$

Ha az összegzések és integrálok megfelelően értelmezhetők, akkor a Borel összegzett $\Phi_3(y)$ függvény ezen a módon számolható. Így bizonyos esetekben akkor is konkrét eredményt kaphatunk $\Phi_3(y)$ -ra, ha az eredeti (2.173) sor nem konvergens. Ha az $A_k^{(2)}$ koeficiensek (2.174) által adottak, akkor a $\widehat{\Phi}_3(z)$ sor felösszegezhető,

$$\widehat{\Phi}_3(z) = i \sum_{k=2}^{\infty} K_2 \frac{(-1)^k}{2k-1} \left(\frac{z}{\sqrt{8}} \right)^{2k-1} = \frac{K_2}{2} \left[\ln \left(1 - \frac{iz}{\sqrt{8}} \right) - \ln \left(1 + \frac{iz}{\sqrt{8}} \right) \right]. \quad (2.177)$$

Bevezetve az $y = -i\tilde{y}$ jelölést,

$$\Phi_3(y) = \frac{K_2}{2} \int_0^{\infty} dt e^{-t} \left[\ln \left(1 + \frac{t}{\sqrt{8}\tilde{y}} \right) - \ln \left(1 - \frac{t}{\sqrt{8}\tilde{y}} \right) \right]. \quad (2.178)$$

A képzetes tengely negatív részén $\tilde{y} > 0$ valós, és ekkor az első logaritmus argumentuma pozitív, így az első tag integrálja valós. A második tagnak $t = \sqrt{8}\tilde{y}$ helyen szingularitása van, és $t > \sqrt{8}\tilde{y}$ esetén a logaritmus értéke már képzetessé válik. A külső és belső tartományok illesztését a $-\frac{\pi}{2} < \arg y < 0$ irányokban végezzük. Ha $y = a - ib$ alakú, akkor $\tilde{y} = iy = b + ia$, és így a $t = \sqrt{8}\tilde{y}$ szingularitás a valós t tengely felett helyezkedik el. Ha b -vel tartunk a nullához, akkor a szingularitás a valós tengelyre kerül, és ezért a (2.178) második tagjánál a szingularitást alulról kell megkerülni. Mivel a szingularitás csak logaritmikus, az elkerülő félkör sugarát nullához tartva az integrálhoz való járulék is nullához tart. A logaritmus argumentumában $-t$ szerepel, ezért a szingularitás alulról történő megkerülésével a logaritmus negatív valós tengelyen való vágását felülről közelítjük. Így $t > \sqrt{8}\tilde{y}$ esetén a logaritmus képzetes része π . Következésképpen, $\operatorname{Re} y = 0$ és $\operatorname{Im} y < 0$ esetén

$$\operatorname{Im} \Phi_3(y) = -\frac{K_2\pi}{2} \int_{\sqrt{8}\tilde{y}}^{\infty} dt e^{-t} = -\frac{K_2\pi}{2} \exp(-\sqrt{8}\tilde{y}) = -\frac{K_2\pi}{2} \exp(-i\sqrt{8}y). \quad (2.179)$$

A [30] cikkünkhöz képesti előjel eltérés oka az, hogy ott az illesztési tartományt $-\pi < \arg y < -\frac{\pi}{2}$ irányokban választottuk.

A (2.178) kifejezésben elvégzendő integrálok parciális integrálás után felírhatók az E_1 exponenciális integrál függvény segítségével [129],

$$\int dt e^{-t} \ln(1 + \alpha t) = -e^{-t} \ln(1 + \alpha t) - e^{\frac{1}{\alpha}} E_1 \left(t + \frac{1}{\alpha} \right). \quad (2.180)$$

Az E_1 függvény kifejezhető az egész komplex síkon holomorf Ein exponenciális integrál függvény segítségével,

$$E_1(z) = \operatorname{Ein}(z) - \ln(z) - \gamma, \quad (2.181)$$

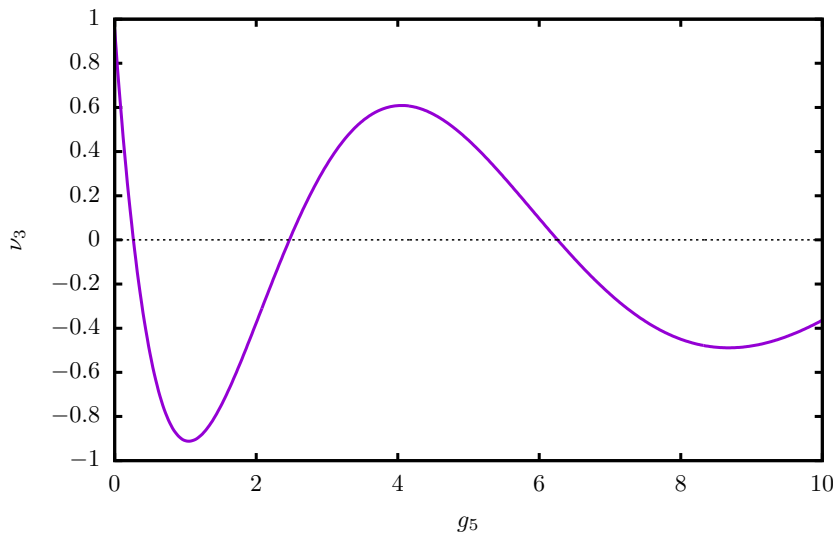
ahol $\gamma \approx 0.57721$, az Euler–Mascheroni-állandó. Mivel az Ein egészfüggvény a valós tengelyen valós értékeket vesz fel, az E_1 függvény negatív valós tengelyen való vágását a komplex

logaritmus függvény viselkedése határozza meg. A $\Phi_3(y)$ függvény negatív képzetes tengelyen való képzetes részére ilyen módon is könnyen kapható a (2.179) összefüggés, de a teljes függvény is megadható exponenciális integrálok segítségével. Ennek a jelentőségét azonban korlátozza, hogy az $A_k^{(2)}$ együtthatókat megadó (2.174) összefüggés csak aszimptotikusan áll fenn.

A Φ_3 képzetes részére kapott (2.179) kifejezést (2.152)-el összehasonlítva láthatjuk, hogy az exponenciálisan lecsengő képzetes rész amplitúdója

$$\nu_3 = -\frac{K_2\pi}{2}. \quad (2.182)$$

Ez az összefüggés bármely szimmetrikus potenciál esetén érvényes. A (2.128) alakú hatodrendű szimmetrikus potenciál és $g_5 = 1$ választása esetén a (2.172)-ben megadott K_2 értéknek $\nu_3 = -0.9097496$ felel meg, ami a megadott tizedesjegyekre megegyezik a numerikus integrálással kapott (2.151)-ben felírt értékkel. A sugárzási együttható értéke nyilván nem fontos ennyi tizedesjegyre, de a két független módszerrel kapott eredmény ilyen mértékű egyezése nagyon jól megerősíti az alkalmazott eljárások helyességét. A K_2 értékéből való számolás technikailag egyszerűbb, ezért az egyéb g_5 értékekhez tartozó ν_3 együtthatókat is így állítottuk elő. A 2.35 ábrán ν_3 függését mutatjuk a g_5 paramétertől. A függvény első minimuma



2.35. ábra. A ν_3 együttható g_5 paramétertől való függése a (2.128) alakú hatodrendű szimmetrikus potenciál esetén.

$g_5 = 1.0479$ -nél van, $\nu_3 = -0.91202$ értékkel.

Az első zérushely $g_5 = 0.26495$, viszonylag közel van a sine-Gordon potenciálhoz tartozó $g_5 = 3/10$ értékhez, de nem egyezik meg vele. Az $U(\phi) = 1 - \cos \phi$ alakú sine-Gordon poten-

ciál (2.13) kifejtéséből látszik, hogy ilyen alakú potenciálra $g_3 = -1/6$. A koordináták és a ϕ skalár átskálázásával beállítható, hogy $g_3 = -1$ legyen, amikor is $U(\phi) = [1 - \cos(\sqrt{6}\phi)]/6$, és $g_5 = 3/10$. A 2.35 ábrán lévő görbe értéke $g_5 = 3/10$ -nél $\nu_3 = -0.0944$. Ha figyelembe vesszük, hogy a sine-Gordon potenciálnál g_7 és a többi kifejtési együttható sem nulla, akkor a kifejtési rend növelésével ν_3 -ra a 2.2 táblázat szerint egyre kisebb értéket kaphatunk,

N_U	ν_3
6	$-9.4 \cdot 10^{-2}$
8	$3.4 \cdot 10^{-3}$
10	$-4.7 \cdot 10^{-5}$
12	$3.0 \cdot 10^{-7}$
14	$-1.0 \cdot 10^{-9}$
16	$2.0 \cdot 10^{-12}$
18	$-2.5 \cdot 10^{-15}$

2.2. táblázat. A ν_3 együttható értéke az $U(\phi) = [1 - \cos(\sqrt{6}\phi)]/6$ sine-Gordon potenciál ϕ szerinti kifejtésének ϕ^{N_U} rendig való figyelembe vételével, a Borel összegzéses módszer alkalmazásával. A Φ_n Fourier komponenseket legalább $N_U - 2$ rendig kell használni, hogy a táblázatban lévő értékeket kapjuk.

konzisztensen azzal, hogy az $1 + 1$ dimenziós sine-Gordon breather esetén egyáltalán nincs sugárzási veszteség.

2.9.5. Nem szimmetrikus potenciálok

Ha az $U(\phi)$ potenciál nem szimmetrikus a minimuma körül, akkor is az eddig ismertetthez hasonlóan számolhatjuk a sugárzási farok nagyságát. A skalármező (2.36) szerinti Fourier kifejtésében ekkor páros indexű Φ_n tagok is szerepelnek. A függvényeket és az egyenleteket kiterjesztjük a komplex r síkra, és bevezetjük a valós tengelyhez legközelebbi szingularitás közelében az y koordinátát a (2.133) összefüggéssel. A külső tartományban továbbra is a (2.138), míg a belső tartományban a (2.139) egyenleteket oldjuk meg, ahol F_n a (2.41) kifejezéssel adott.

A kis-amplitúdós kifejtés eredményei alapján a belső egyenletek megoldását

$$\Phi_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+2k}^{(n)} \frac{1}{y^{n+2k}} \quad (2.183)$$

alakban kereshetjük. Az ε kifejtésből az is következik, hogy $a_0^{(0)} = 0$, vagyis Φ_0 kifejtése $1/y^2$ taggal, míg az összes többi Φ_n kifejtése $1/y^n$ taggal kezdődik. Az y hatványok kettesével növekednek. Az $a_k^{(n)}$ együtthatók egyértelműen következnek az ε kifejtésből, de technikailag sokkal egyszerűbb az együtthatók meghatározása a (2.183) kifejtésnek a (2.139) belső egyenletekbe történő közvetlen behelyettesítésével, és az y hatványokra kapott egyenletek $a_k^{(n)}$ együtthatókra való megoldásával. A számoláshoz algebrai manipulációk végzésére képes programcsomagot célszerű használni. A megoldás az $a_1^{(1)}$ előjelétől eltekintve egyértelmű. Az S változó (2.77)-beli előjel választásával összhangban lévő együttható $a_1^{(1)} = -i\sqrt{2/\lambda}$, ahol λ a (2.70)-ben definiált pozitív konstans. A páros indexű Φ_{2n} Fourier komponensekhez tartozó $a_{2k}^{(2n)}$ együtthatók mindig tisztán valósak, a páratlan indexű Φ_{2n+1} -ekhez tartozó $a_{2k+1}^{(2n+1)}$ együtthatók pedig tisztán képzetesek. Érdekesképpen megjegyezzük, hogy ha (2.183)-ban az összes Φ_n -nél bármilyen negatív kitevőjű y hatványt megengedünk, akkor is következik a belső egyenletek megoldásából, hogy Φ_0 első tagja $1/y^2$, az összes többi Φ_n pedig $1/y^n$ taggal kezdődik. Továbbá, ha Φ_1 -ben az $1/y^2$ együtthatóját nullának választjuk, akkor az összes Φ_n kifejtésében kettesével növekednek az y hatványok.

Általános potenciál esetén a belső egyenleteket kielégítő (2.183) kifejtés első néhány tagja:

$$\begin{aligned}
\Phi_0 &= \frac{g_2}{\lambda} \frac{1}{y^2} + \frac{169g_2^3\lambda + 144g_2\lambda^2 + 72g_2\sigma - 81g_4\lambda}{54\lambda^3} \frac{1}{y^4} + \dots, \\
\Phi_1 &= -\frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{y} - \frac{i\sqrt{2}(19g_2^2\lambda + 18\sigma)}{27\lambda^2\sqrt{\lambda}} \frac{1}{y^3} + \dots, \\
\Phi_2 &= -\frac{g_2}{3\lambda} \frac{1}{y^2} - \frac{220g_2^3\lambda - 243g_2\lambda^2 + 72g_2\sigma - 108g_4\lambda}{162\lambda^3} \frac{1}{y^4} + \dots, \\
\Phi_3 &= \frac{i\sqrt{2}(4g_2^2 - 3\lambda)}{36\lambda\sqrt{\lambda}} \frac{1}{y^3} + \dots, \\
\Phi_4 &= \frac{5g_2^3 - 5g_2\lambda + 3g_4}{90\lambda^2} \frac{1}{y^4} + \dots,
\end{aligned} \tag{2.184}$$

ahol a λ konstans definíciója (2.70), és a σ konstansé (2.93).

A Fourier komponenseket (2.143)-nak megfelelően továbbra is felbontjuk valós és képzetes részekre, $\Phi_n = \Psi_n + i\Omega_n$. A nemlineáris tagokat elhanyagolva, a képzetes részek a (2.144) differenciálegyenleteket elégítik ki, ahol $\tilde{y} = iy$. A nulladik komponensre a megoldás $\Omega_0 = c_0 \exp(\pm i\tilde{y})$, ami csak akkor tart a nullához a képzetes tengelyen lefelé haladva, ha $c_0 = 0$. Megfelelő megoldások $n \geq 2$ esetén léteznek, és ezeket továbbra is a (2.145) alakban írhatjuk fel. A (2.41) által megadott F_n nemlineáris forrástagok közül csak az Ω_k változóknál lineáris tagokat tartjuk meg. A Ψ_n függvények helyére a (2.184) kifejtéssel megadott Φ_n értékeket helyettesítjük, amelyek valósak a képzetes tengelyen. Az Ω_n függvények aszimptotikus viselkedését a leglassabban lecsengő exponenciális járulék határozza meg, amelyet nem

szimmetrikus potenciálok esetén általában Ω_2 generál, és így a sugárzást is ez határozza meg. A csatolt lineáris rendszert megoldva, a $\tilde{y} = iy$ koordináta használatával,

$$\Omega_0 = \nu_2 \exp\left(-\sqrt{3}\tilde{y}\right) \left(-\frac{2g_2^2 - 3\lambda}{6\lambda\tilde{y}^2} + \frac{\sqrt{3}(16g_2^4 - 24g_2^2\lambda - 45\lambda^2)}{270\lambda^2\tilde{y}^3} + \dots\right), \quad (2.185)$$

$$\Omega_1 = \nu_2 \exp\left(-\sqrt{3}\tilde{y}\right) \left(-\frac{\sqrt{2}g_2}{3\sqrt{\lambda}\tilde{y}} + \frac{8\sqrt{6}g_2^3}{135\sqrt{\lambda^3}\tilde{y}^2} + \dots\right), \quad (2.186)$$

$$\Omega_2 = \nu_2 \exp\left(-\sqrt{3}\tilde{y}\right) \left(1 - \frac{2\sqrt{3}(4g_2^2 - 15\lambda)}{45\lambda\tilde{y}} + \frac{32g_2^4 - 282g_2^2\lambda + 255\lambda^2}{675\lambda^2\tilde{y}^2} + \dots\right), \quad (2.187)$$

$$\Omega_3 = \nu_2 \exp\left(-\sqrt{3}\tilde{y}\right) \left(\frac{\sqrt{2}g_2}{5\sqrt{\lambda}\tilde{y}} - \frac{8\sqrt{6}g_2(g_2^2 - 6\lambda)}{225\sqrt{\lambda^3}\tilde{y}^2} + \dots\right), \quad (2.188)$$

$$\Omega_4 = \nu_2 \exp\left(-\sqrt{3}\tilde{y}\right) \left(\frac{6g_2^2 - 5\lambda}{30\lambda\tilde{y}^2} + \dots\right). \quad (2.189)$$

Az Ω_2 vezető rendje által Ω_1 és Ω_3 -ban generált $1/\tilde{y}$ tagok visszahatása módosítja Ω_2 második tagját is. A [30] cikkünkben közölt eredmények ennek a visszahatásnak a figyelembe vétele nélkül lettek számolva.

A szimmetrikus potenciálnál bemutatott eljárást követve, az Ω_2 által megadott

$$\delta\Phi_2^{(+)} = i\nu_2 \exp(-i\sqrt{3}y) \quad (2.190)$$

korrekciót a képzetes tengelyen a külső tartományban lévő korrekcióhoz illesztjük, majd a valós tengely másik oldalán lévő szingularitástól származó korrekcióval összeadjuk. A valós tengelyen, a mag tartományban, (2.156)-hoz hasonló módon,

$$\delta\Phi_2 = \alpha \sin(\sqrt{3}r) \quad (2.191)$$

járulékot kapunk, ahol

$$\alpha = 2\nu_2 \exp\left(-\frac{\sqrt{3}P}{\varepsilon}\right), \quad (2.192)$$

$\varepsilon = \sqrt{1 - \omega^2}$, és most az egydimenziós esetben $P = \frac{\pi}{2}$. Ilyen módon az aszimmetrikus kvázibreatherhez jutunk, amelynek a pozitív r irányban nincs állóhullám farka. Az $r = 0$ középpont aszimmetriájának kompenzálása érdekében ehhez a linearizált egyenletek $\delta\Phi_2^{(s)} = -\alpha \sin(\sqrt{3}r)$ megoldását kell hozzáadni, ami egyúttal meghatározza a középponti tükrözésre szimmetrikus kvázibreather $\cos(2t)$ szerint rezgő farkát is. A (2.192) egyenletben definiált α paraméter megfelel a fark általános viselkedését leíró (2.124) egyenletben szereplő amplitúdó paraméternek. Így a kisugárzott energiaáram rezgési periódusra átlagolt \bar{S} értéke

(2.126) segítségével számolható. Az egydimenziós esetben, nem szimmetrikus potenciál esetén $\bar{S} = 2\sqrt{3}\alpha^2$, vagyis

$$\bar{S} = 8\sqrt{3}\nu_2^2 \exp\left(-\frac{\sqrt{3}\pi}{\varepsilon}\right). \quad (2.193)$$

A sugárzás mértékét meghatározó ν_2 együtthatót először Segur és Kruskal [34] számolta ki numerikus módszerrel az aszimmetrikus ϕ^4 potenciál esetén. A számolást több Fourier komponens figyelembe vételével, nagyobb pontossággal megismételtük a [30] cikkünkben. A potenciált a (2.58) alakban vesszük fel, amely esetben $m = 1$ és a nemeltűnő kifejtési együtthatók $g_2 = -3/2$ és $g_3 = 1/2$. A (2.184) kifejtés kezdő tagjai $1/y^8$ rendig:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= -\frac{1}{y^2} - \frac{395}{36y^4} - \frac{19357}{72y^6} - \frac{2862666359}{233280y^8} + \dots, \\ \Phi_1 &= -\frac{i}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{y} + \frac{103}{18y^3} + \frac{19661}{324y^5} + \frac{169114187}{116640y^7} + \dots \right), \\ \Phi_2 &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{y^2} + \frac{47}{9y^4} + \frac{26765}{432y^6} + \frac{21535799}{14580y^8} + \dots \right), \\ \Phi_3 &= \frac{i}{6\sqrt{3}} \left(\frac{1}{y^3} + \frac{91}{12y^5} + \frac{42767}{432y^7} + \dots \right), \\ \Phi_4 &= -\frac{1}{36} \left(\frac{1}{y^4} + \frac{179}{18y^6} + \frac{45883}{324y^8} + \dots \right), \\ \Phi_5 &= -\frac{i}{72\sqrt{3}} \left(\frac{1}{y^5} + \frac{443}{36y^7} + \dots \right), \\ \Phi_6 &= \frac{1}{434} \left(\frac{1}{y^6} + \frac{44}{3y^8} + \dots \right), \\ \Phi_7 &= \frac{i}{864\sqrt{3}} \left(\frac{1}{y^7} + \dots \right), \\ \Phi_8 &= -\frac{1}{5184} \left(\frac{1}{y^8} + \dots \right). \end{aligned} \quad (2.194)$$

A Φ_2 képzetes részeként megjelenő (2.187) korrekció kifejtésének tagjai a ϕ^4 potenciálra:

$$\begin{aligned} \Omega_2 = \nu_2 \exp\left(-\sqrt{3}\tilde{y}\right) &\left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{5\tilde{y}} - \frac{14}{75\tilde{y}^2} - \frac{43\sqrt{3}}{25\tilde{y}^3} + \frac{4747}{2700\tilde{y}^4} + \frac{3493741}{45000\sqrt{3}\tilde{y}^5} - \frac{29006059}{675000\tilde{y}^6} \right. \\ &\left. - \frac{1072856045789}{425250000\sqrt{3}\tilde{y}^7} + \frac{15835359963361}{7654500000\tilde{y}^8} + \dots \right). \end{aligned} \quad (2.195)$$

A ν_2 sugárzási együttható numerikus meghatározásához használt módszer egy technikai problémától eltekintve megegyezik a szimmetrikus potenciálok esetén a (2.150) egyenlet utáni bekezdésekben részletesen bemutatott eljárással. A komplex $\Phi_n = \Psi_n + i\Omega_n$ függvényekre vonatkozó (2.139) differenciálegyenleteket oldjuk meg numerikusan egy konstans $\text{Im } y = y_i$

egyenes mentén, egy nagy pozitív $\operatorname{Re} y = y_r$ értéktől indulva, a $\operatorname{Re} y = 0$ képzetes tengelyig. Kezdőfeltételként, az $y = y_r + iy_i$ pontban, a (2.194) sor valamilyen $1/y^n$ rendig számolt értékét, és annak deriváltját szeretnénk használni. A $\operatorname{Re} y = 0$ képzetes tengelyhez érve, az $y = iy_i$ pontban, az ottani numerikusan kapott Ω_2 értékéből (2.195) alapján fogjuk számolni a ν_2 együtthatót. Sajnos a numerikus megoldás ilyen módon, az $y = y_r + iy_i$ pontból induló kezdetiérték-feladatként való meghatározása problémába ütközik a Φ_0 módus exponenciális viselkedése miatt. A numerikus integrálást nem tudtuk a képzetes tengelyig stabil és konvergens módon elvégezni. Emiatt, Segur és Kruskal [34] eljárását követve, a Φ_0 valós és képzetes részére vonatkozó egyenletet két végpontban meghatározott peremérték-problémaként kezeljük. Az $y = y_r + iy_i$ pontban $\Phi_0 = \Psi_0 + i\Omega_0$ -nak csak az értékét rögzítjük a (2.194) sor segítségével, deriváltját nem. A hiányzó két adatot a képzetes tengelyen levő $y = y_r$ pontbeli $\Omega_0 = 0$ és $\frac{d}{dy}\Psi_0 = 0$ határfeltételekkel helyettesítjük. A többi Φ_n komponensre továbbra is a függvények értékét és deriváltjukat is megadjuk az $y = y_r + iy_i$ pontban. A megoldás numerikus meghatározása után ellenőrizzük, hogy Φ_0 valós és képzetes részének deriváltja az $y = y_r + iy_i$ pontban tényleg nagyon nagy pontossággal megegyezik a (2.194) sor által meghatározott értékkel. Az, hogy a keresett megoldásnál a képzetes tengelyen Ω_0 értéke nagyon nagy pontossággal nulla kell legyen, következik abból, hogy a linearizált (2.144) differenciálegyenlet $\Omega_0 = c_0 \exp(\pm i\tilde{y})$ megoldása csak akkor tarthat a nullához a képzetes tengelyen lefelé haladva, ha $c_0 = 0$. Megjegyezzük, hogy a ϕ^4 potenciál esetén Ω_0 -nak a (2.185) egyenletben bemutatott kifejezésében a vezető $1/\tilde{y}^2$ tag eltűnik.

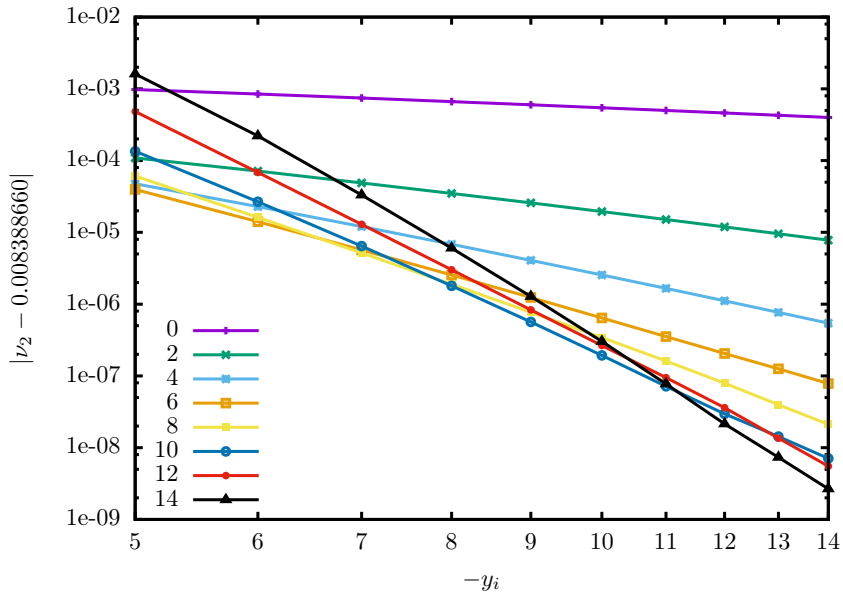
Numerikus számolásainkhoz a Maple szoftvercsomagnak a differenciálegyenleteket peremérték-problémaként megoldó programját használtuk. A konstans $\operatorname{Im} y = y_i$ egyenes helye a $[-5, -22]$ intervallumban, míg az y_r indulási pont az $[50, 500]$ intervallumban volt. Ha a konstans y_i vonalat -13 -nál lejjebb választottuk, akkor 16 jegynél pontosabban numerikus értékekkel kellett számolni, ami jelentős lassulást okozott. Az $y_r = 300$ választás általában megfelelőnek bizonyult. Az $y = y_r + iy_i$ kezdőpontban a határfeltételeket a (2.194) kifejtés $1/y^{15}$ rendig történő számolásával adtuk meg, de már $1/y^9$ rend is három jegyre pontos értéket ad. A 2.3 táblázatban a ν_2 sugárzási együttható értékének változását mutatjuk a használt Φ_n Fourier módusok számának növelésével. A 2.36 ábrán ν_2 értékének konvergenciáját mutatjuk az integráláshoz használt egyenes y_i helyének függvényében, a (2.195) egyenlet különböző rendű közelítéseinek használatával, 8 Fourier módus esetén. Összefoglalásképp, a ϕ^4 potenciál esetén a ν_2 sugárzási együttható értéke

$$\nu_2 = 8.38866 \cdot 10^{-3} \pm 1 \cdot 10^{-7} . \quad (2.196)$$

Az itt közölt numerikus értékek lényegesen pontosabbak a [30] cikkünkben közölt értékek-

n	ν_2
2	$-8.27 \cdot 10^{-3}$
3	$7.061 \cdot 10^{-3}$
4	$8.365 \cdot 10^{-3}$
5	$8.3885 \cdot 10^{-3}$
6	$8.3886 \cdot 10^{-3}$
7	$8.38866 \cdot 10^{-3}$

2.3. táblázat. A ν_2 együttható értéke $n + 1$ Fourier módus, $\Phi_0 \dots \Phi_n$ használatával.



2.36. ábra. Logaritmus ábra, ami mutatja, hogy ν_2 hogyan tart a $8.388660 \cdot 10^{-3}$ értékhez az $|y_i|$ növelésével, a $\Phi_0 \dots \Phi_7$ módusok használata esetén. Az n számmal jelölt pontok esetén a ν_2 számolásához használt (2.195) kifejezésben $1/\tilde{y}^n$ rendig vettük figyelembe a tagokat.

nél, az Ω_2 képzetes rész számolásakor a többi Ω_k -ban generált ugyanolyan exponenciális lecsengésű járulék visszahatásának figyelembe vétele miatt. A mínusz előjel eltérés amiatt adódik, hogy a jelen dolgozatban a pozitív r irányban nincs sugárzása az aszimmetrikus kvázibreathernek. A Segur és Kruskal [34] cikkben közölt érték egy kettes szorzóban eltér, a Fourier módusok komplex függvényként való kezelése miatt. Az általunk használt jelölésben az eredményük $(9.0 \pm 2.0) \cdot 10^{-3}$.

2.9.6. Gömbszimmetrikus oszcillonok sugárzása

Az egynél több térbeli dimenzió esetén létrejövő gömbszimmetrikus oszcillon állapotok sugárzási rátája az egydimenziós esethez hasonlóan számolható, de technikailag bonyolultabbá válik az eljárás. A következőkben a [31] cikkünkben közölt eredményeket ismertetjük. Időben periodikus, ω frekvenciájú, gömbszimmetrikus kvázibreather megoldásokat keresünk, amelyeknek a farok-amplitúdóját kívánjuk meghatározni. A (2.36) Fourier kifejtés Φ_n komponensei a (2.43) egyenleteket elégték ki, amelynek alakja $m = 1$ tömegű skalármező esetén

$$\frac{d^2\Phi_n}{dr^2} + \frac{d-1}{r} \frac{d\Phi_n}{dr} + (n^2\omega^2 - 1)\Phi_n = F_n . \quad (2.197)$$

A különböző rendű Φ_n szorzatokból álló jobboldali F_n kifejezéseket (2.41) adja meg. A frekvenciát az ε amplitúdó paraméterrel továbbra is az $\varepsilon^2 = 1 - \omega^2$ összefüggés köti össze. A (2.197) egyenleteket kiterjesztjük a komplex r síkra, és a Φ_n megoldások valós tengelyhez legközelebbi szingularitása közelében vizsgáljuk a kicsi ε paraméter esetén való viselkedést. Ehhez a 2.8 fejezetben bemutatott kis-amplitúdós kifejtéssel kapott eredményeket szükséges tanulmányoznunk tetszőleges dimenzió esetén.

Az ε kifejtés első négy rendjének eredményét összefoglaló (2.97)-(2.98) összefüggések alapján a Fourier komponensek kezdő tagjai

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= -\varepsilon^2 \frac{1}{2} g_2 p_1^2 + \varepsilon^4 \left[-g_2 p_1^2 - g_2 p_1 p_3 + \frac{1}{6} g_2 \lambda p_1^4 - g_2 \left(\frac{dp_1}{d\rho} \right)^2 + \frac{31}{72} g_2^3 p_1^4 - \frac{3}{8} g_4 p_1^4 \right] + \dots , \\ \Phi_1 &= \varepsilon p_1 + \varepsilon^3 p_3 + \dots , \\ \Phi_2 &= \varepsilon^2 \frac{1}{6} g_2 p_1^2 - \varepsilon^4 \frac{1}{72} \left[8g_2 \left(\frac{dp_1}{d\rho} \right)^2 - 12g_4 p_1^4 + 16g_2^3 p_1^4 - 24g_2 p_1 p_3 - 23g_2 \lambda p_1^4 - 8g_2 p_1^2 \right] + \dots , \\ \Phi_3 &= \varepsilon^3 \frac{1}{72} (4g_2^2 - 3\lambda) p_1^3 + \dots , \\ \Phi_4 &= \varepsilon^4 \frac{1}{360} p_1^4 (3g_4 - 5g_2 \lambda + 5g_2^3) + \dots . \end{aligned} \quad (2.198)$$

A p_1 függvényt, az $S = \sqrt{\lambda} p_1$ összefüggés köti össze az S függvénnyel, amit a (2.76) alap-egyenlet határoz meg, amelyben $\tilde{\Delta}$ a (2.62) által megadott, $\rho = \varepsilon r$ radiális koordinátához tartozó Laplace-operátor. Az S megoldás ismerete megadja a Φ_n Fourier komponenseket ε^2 rendig.

Az egydimenziós esethez képest való lényeges eltérés az, hogy magasabb dimenzió esetén az aszimptotikusan lecsengő, zérushely nélküli S megoldás csak numerikus formában ismert. Egy dimenziónál, mint láttuk, $S = \sqrt{2} \operatorname{sech} \rho$. Az alapegyenlet tanulmányozásából az is következik, hogy alacsony amplitúdójú oszcillonok csak $d \leq 3$ térbeli dimenzió esetén léteznek.

Az S megoldás középponti numerikus értékét $d = 2$ és $d = 3$ esetén (2.78)-ban adtuk meg. A $\bar{\rho} = -i\rho$ koordinátát bevezetve, az

$$-\frac{d^2 S}{d\bar{\rho}^2} - \frac{d-1}{\bar{\rho}} \frac{dS}{d\bar{\rho}} - S + S^3 = 0 \quad (2.199)$$

egyenlet numerikus integrálásával meghatározhatjuk S képzetes tengelyen való viselkedését. Az egydimenziós esethez hasonlóan ekkor is szingularitás jelenik meg szimmetrikusan a $\rho = \pm iP$ helyeken, ahol $P > 0$ valós. A szingularitás helye egy dimenzióban $\frac{\pi}{2}$, egyébként numerikus integrálással kapható,

$$P = \begin{cases} 1.5707963 & \text{ha } d = 1, \\ 1.0925562 & \text{ha } d = 2, \\ 0.6021836 & \text{ha } d = 3. \end{cases} \quad (2.200)$$

P értéke a (2.76) alapegyenlet $\rho = 0$ körüli sorfejtésével, és a sor Padé közelítésével is nagy pontossággal számolható. Azonban, az egynél több dimenziós esetben a szingularitás nem egyszerű pólus, mint (2.132) esetén, hanem a kifejtésben megjelenő logaritmus tagok miatt elágazási pont. Bevezetve a szingularitástól mért távolságot megadó R változót a $\rho = iP + R$ összefüggéssel, az S függvény kifejtésében az alábbi tagok szerepelnek:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=4k-1}^{\infty} S_{j,k} R^j \ln^k(iR). \quad (2.201)$$

Az $S_{j,k}$ konstansok valósak páros j esetén, és tisztán képzetesek páratlan j -re, így S valós értékeket vesz fel a képzetes tengelyen. A kifejtés első hat rendje:

$$\begin{aligned} S = & -\frac{i\sqrt{2}}{R} + \frac{\sqrt{2}(d-1)}{6P} - \frac{i\sqrt{2}(d^2 - 6P^2 - 8d + 7)}{36P^2} R \\ & - \frac{\sqrt{2}(d-1)(4d^2 - 18P^2 - 35d + 85)}{216P^3} R^2 \\ & - \frac{i\sqrt{2}(d-1)(2d^3 - 9dP^2 - 21d^2 + 18P^2 + 72d - 80)}{135P^4} R^3 \ln(iR) + S_{3,0} R^3 + \dots \end{aligned} \quad (2.202)$$

A kifejtésben egyetlen szabad együttható marad. $S_{3,0}$ értéke bármely tisztán képzetes szám lehet, az összes többi $S_{j,k}$ ennek rögzítése után egyértelműen meghatározott. Az $S_{3,0}$ együttható konkrét értékét az rögzíti le, hogy a középpontban reguláris, zérushely mentes, aszimptotikusan lecsengő S megoldás komplex kiterjesztését tanulmányozzuk, amelynek középponti értékét (2.78)-ban adtuk meg. Ennek a (2.200) által megadott helyen van a szingularitása. Az $S_{3,0}$ együttható olyan magas rendben jelenik meg, hogy nem fogja befolyásolni a sugárzási ráta meghatározására irányuló további számolásainkat. Közelítő numerikus értéke $d = 2$

esetén $S_{3,0} = -0.0726 i$, valamint $d = 3$ esetén $S_{3,0} = -0.19 i$. $d = 1$ térbeli dimenziónál, (2.132) alapján, $S_{3,0} = -7\sqrt{2}/360 = -0.0275 i$.

Ahhoz, hogy a Φ_n Fourier komponenseket ε^4 rendig számolhassuk a (2.198) egyenletek segítségével, a p_3 függvény ismerete szükséges. Ezt a (2.92) összefüggés köti össze a potenciál független Z függvénnyel, amelyet a (2.94) egyenlet megoldásával kaphatunk. Egy térbeli dimenziónál Z a (2.95) és (2.77) összefüggések segítségével kapható. A Z függvény képzetes tengelyen való viselkedése $d \geq 2$ esetén a (2.96) középponti értékek felhasználásával, a differenciálegyenlet numerikus megoldásával tanulmányozható. Az S függvénynek a $\rho = iP$ helyen lévő szingularitása $1/R^3$ szerinti szingularitást generál Z -ben is. Z -nek a szingularitás körüli kifejtése az alábbi tagokból áll:

$$Z = \sum_{j=-3}^{\infty} Z_{j,0} R^j + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=4k-6}^{\infty} Z_{j,k} R^j \ln^k(iR) . \quad (2.203)$$

A kifejtés első öt tagja:

$$\begin{aligned} Z = & -\frac{i2\sqrt{2}}{3R^3} - \frac{8\sqrt{2}(d-1)}{15P} \frac{\ln(iR)}{R^2} + Z_{-2,0} \frac{1}{R^2} + \frac{i\sqrt{2}(d^2 - 45P^2 - 32d + 31)}{45P^2} \frac{1}{R} \\ & + \frac{2\sqrt{2}(d-1)(d^2 - 6P^2 + 2d + 1)}{135P^3} \ln(iR) + \dots . \end{aligned} \quad (2.204)$$

Ellentétben S -el, Z -ben a logaritmusos függés mindjárt a vezető tag utáni rendben megjelenik. A kifejtésben $\ln(iR)/R$ tag nem jelenik meg. Két szabad paraméter van, $Z_{-2,0}$ és $Z_{3,0}$. Több dimenzió esetén a $Z_{-2,0}$ konstans numerikus integrálással számolható, megkövetelve, hogy Z a $\rho = 0$ középpontban reguláris legyen, és hogy a középponti értékét (2.96) adja meg,

$$Z_{-2,0} = \begin{cases} 0 & \text{ha } d = 1 , \\ 0.49483 & \text{ha } d = 2 , \\ 3.65482 & \text{ha } d = 3 . \end{cases} \quad (2.205)$$

A $Z_{3,0}$ konstans nem fog megjelenni a további számolásainkban, és a sugárzási ráta mértéke $Z_{-2,0}$ -tól is függetlennek fog adódni.

A (2.198) összefüggésekben p_1 mindig legalább egy ε szorzóval szerepel, ezért az εS függvényre lesz szükségünk. Hasonlóan, p_3 mellett legalább ε^3 szorzó található és így a $\varepsilon^3 Z$ szorzat jelenik meg. A (2.133) összefüggésnek megfelelően, az egynél több dimenziós esetben is bevezetjük a szingularitás közelében az $y = R/\varepsilon$ belső koordinátát. Így ε rendig

$$\varepsilon S = \frac{-i\sqrt{2}}{y} + \varepsilon \frac{\sqrt{2}(d-1)}{6P} , \quad (2.206)$$

$$\varepsilon^3 Z = -\frac{i2\sqrt{2}}{3} \frac{1}{y^3} - \varepsilon \ln \varepsilon \frac{8\sqrt{2}(d-1)}{15P} \frac{1}{y^2} - \varepsilon \frac{8\sqrt{2}(d-1)}{15P} \frac{\ln(iy)}{y^2} + \varepsilon Z_{-2,0} \frac{1}{y^2} . \quad (2.207)$$

Az S függvény deriváltja legalább ε^2 szorzóval jelenik meg,

$$\varepsilon^2 \frac{dS}{d\rho} = \varepsilon^2 \frac{dS}{dR} = \frac{d(\varepsilon S)}{dy} = \frac{i\sqrt{2}}{y^2} . \quad (2.208)$$

Ezek alapján, (2.198)-ba helyettesítve, a Φ_n Fourier komponensek szingularitás közeli viselkedése kis ε -ra az alábbi módon fejthető ki,

$$\Phi_n = \Phi_n^{(0)} + \varepsilon \ln \varepsilon \Phi_n^{(1)} + \varepsilon \Phi_n^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2 \ln \varepsilon) , \quad (2.209)$$

ahol a $\Phi_n^{(k)}$ függvények már függetlenek ε -tól. Az eredeti r skálának megfelelő y koordinátát használva, a (2.206), (2.207) és (2.208) kifejezések első, ε független tagjai nem függenek a d dimenziótól. Mivel (2.198)-ban sem jelenik meg a d paraméter, a $\Phi_n^{(0)}$ függvények ugyanazok lesznek mint a korábban tárgyalt egy térdimenziós esetben, vagyis $\Phi_n^{(0)}$ kifejtésének első tagjai (2.184) által adóttak.

A $\Phi_n^{(1)}$ függvények (2.198) felhasználásával kapható tagjai

$$\begin{aligned} \Phi_0^{(1)} &= -\frac{16ig_2(d-1)\sigma}{15\lambda^3 P} \frac{1}{y^3} + \dots , \\ \Phi_1^{(1)} &= -\frac{8\sqrt{2}(d-1)\sigma}{15\lambda^2\sqrt{\lambda} P} \frac{1}{y^2} + \dots , \\ \Phi_2^{(1)} &= \frac{16ig_2(d-1)\sigma}{45\lambda^3 P} \frac{1}{y^3} + \dots , \end{aligned} \quad (2.210)$$

ahol a σ konstans definíciója (2.93)-ban adott. Ezek és $\Phi_n^{(0)}$ -nak (2.184) által adott értékei konzisztensek a

$$\Phi_n^{(1)} = C \frac{d}{dy} \Phi_n^{(0)} \quad (2.211)$$

összefüggéssel, ahol a C konstans

$$C = \frac{8i(d-1)\sigma}{15\lambda^2 P} . \quad (2.212)$$

Mint hamarosan látni fogjuk, az hogy (2.211) valóban megoldás, következik a Fourier módusok által a belső tartományban kielégítendő egyenletekből.

A belső koordinátát definiáló $r = i\frac{P}{\varepsilon} + y$ összefüggés alapján,

$$\frac{1}{r} = \varepsilon \frac{1}{iP} + \varepsilon^2 \frac{y}{P^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) . \quad (2.213)$$

Felhasználva, hogy $\omega^2 = 1 - \varepsilon^2$, és elhagyva az ε^2 és magasabb ε rendű tagokat, a (2.197) külső egyenletekből az alábbi belső tartományban megoldandó egyenleteket kapjuk:

$$\frac{d^2\Phi_n}{dy^2} + \varepsilon \frac{d-1}{iP} \frac{d\Phi_n}{dy} + (n^2 - 1)\Phi_n = F_n . \quad (2.214)$$

A Φ_n megoldást az (2.209) szerinti ε kifejtés alakban keresve láthatjuk, hogy a vezető rendű $\Phi_n^{(0)}$ függvényre az egydimenziós esetben tárgyalt (2.139)-el azonos alakú egyenletet kapunk,

$$\frac{d^2\Phi_n^{(0)}}{dy^2} + (n^2 - 1)\Phi_n^{(0)} = F_n \Big|_{\Phi_k = \Phi_k^{(0)}} . \quad (2.215)$$

Az $\varepsilon \ln \varepsilon$ tagra vonatkozó egyenlet

$$\frac{d^2\Phi_n^{(1)}}{dy^2} + (n^2 - 1)\Phi_n^{(1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial F_n}{\partial \Phi_m} \Big|_{\Phi_k = \Phi_k^{(0)}} \Phi_m^{(1)} . \quad (2.216)$$

Ezt nyilvánvalóan megoldja $\Phi_n^{(1)} = C \frac{d}{dy} \Phi_n^{(0)}$, tetszőleges C konstans esetén. Ahhoz viszont, hogy a konstans (2.212)-ben megadott értékét megkaphassuk, feltétlenül szükséges a kisamplitúdós kifejtés kezdő rendjeinek kiszámolása.

Továbbra is igaz, hogy a (2.215) belső egyenletek $1/y$ hatványai szerinti (2.183) kifejtésével könnyebben eljuthatunk a megoldás szingularitás környéki (2.184) viselkedéséhez, mint az ε kifejtés segítségével, és sokkal magasabb rendig is számolhatunk. Mint láttuk, ez a kifejtés nem konvergens, hanem aszimptotikus sor, ami abban nyilvánul meg, hogy a képzetes tengelyen megjelenik egy exponenciálisan kicsi korrekció. Feltesszük, hogy a $-\frac{\pi}{2} < \arg y < 0$ irányokban a megoldást a (2.184) sor jól közelíti. A minimuma körül nem szimmetrikus $U(\phi)$ potenciál esetén a képzetes y tengelyen a sugárzást meghatározó domináns korrekció a második módusban jelenik meg, és $\Phi_2^{(0)}$ képzetes részét továbbra is (2.190) adja. Szimmetrikus potenciál esetén a harmadik módusban jelenik meg a domináns korrekció, és $\Phi_3^{(0)}$ képzetes része (2.152) által adott. A két esetre vonatkozó összefüggést együttesen a következő módon írhatjuk fel,

$$\delta\Phi_k^{(0,+)} = i\nu_k \exp(-i\sqrt{k^2 - 1} y) , \quad (2.217)$$

ahol most és az alfejezet hátra lévő részében szimmetrikus potenciálra $k = 3$, nem szimmetrikus potenciál esetén pedig $k = 2$.

A $\Phi_k^{(1)}$ függvényekre, mivel a $-\frac{\pi}{2} < \arg y < 0$ irányokban az ε kifejtésből adódóan érvényes a (2.211) összefüggés, a képzetes tengelyen megjelenő korrekciót is pontosan (2.211) határozza meg, a (2.212)-ben adott C konstans mellett,

$$\delta\Phi_k^{(1,+)} = \sqrt{k^2 - 1} C \nu_k \exp(-i\sqrt{k^2 - 1} y) . \quad (2.218)$$

Definiálunk egy átskálázott $\tilde{C} = -i\sqrt{k^2 - 1} C$ konstanst,

$$\tilde{C} = \sqrt{k^2 - 1} \frac{8(d-1)\sigma}{15\lambda^2 P} . \quad (2.219)$$

Ilyen módon, az $\varepsilon \ln \varepsilon$ rendű járulék figyelembe vételével, de ε és magasabb rendű tagok elhagyásával, a képzetes tengelyen lévő korrekció a következő alakba írható:

$$\delta\Phi_k^{(+)} = i\nu_k \left(1 + \tilde{C} \varepsilon \ln \varepsilon\right) \exp(-i\sqrt{k^2 - 1} y) . \quad (2.220)$$

A valós r tengely alatt, az $-i\frac{P}{\varepsilon}$ pontban lévő szingularitás környékén is megjelenik egy lényegében ugyanilyen korrekció

$$\delta\Phi_k^{(-)} = -i\nu_k \left(1 + \tilde{C} \varepsilon \ln \varepsilon\right) \exp(i\sqrt{k^2 - 1} y) , \quad (2.221)$$

ahol most $r = -i\frac{P}{\varepsilon} + y$.

Az y koordinátával leírt belső tartományban kiszámolt korrekció az r koordinátával jellemzett külső tartományban is generál egy korrekciót, amely az ε kifejtéssel kapott Φ_n módusfüggvényekhez adódik hozzá. Mivel feltesszük, hogy ε kicsi, a külső tartományban a $\delta\Phi_k$ korrekció a (2.197) egyenlet $\Phi_n = 0$ körüli linearizáltját elégíti ki, amit a jobboldalon lévő nemlineáris tagok elhagyásával és $\omega = 1$ helyettesítésével kaphatunk. Ennek általános megoldása Bessel függvények segítségével írható fel,

$$\delta\Phi_k = \sqrt[4]{k^2 - 1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} r^{1-\frac{d}{2}} \left[\alpha Y_{\frac{d}{2}-1} \left(\sqrt{k^2 - 1} r\right) + \beta J_{\frac{d}{2}-1} \left(\sqrt{k^2 - 1} r\right) \right] , \quad (2.222)$$

ahol α és β konstansok. A Bessel függvények $x \rightarrow \infty$ aszimptotikus viselkedése[129]

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) , \quad (2.223)$$

$$Y_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) . \quad (2.224)$$

Ennek alapján, nagy $|r|$ esetén

$$\delta\Phi_k = \frac{1}{r^{\frac{d-1}{2}}} \left\{ \alpha \sin \left[\sqrt{k^2 - 1} r - \frac{\pi}{4}(d-1)\right] + \beta \cos \left[\sqrt{k^2 - 1} r - \frac{\pi}{4}(d-1)\right] \right\} . \quad (2.225)$$

Exponenciális függvényekkel felírva,

$$\delta\Phi_k = \frac{1}{2r^{\frac{d-1}{2}}} \left[i^{\frac{d-1}{2}} (\beta + i\alpha) \exp(-i\sqrt{k^2 - 1} r) + (-i)^{\frac{d-1}{2}} (\beta - i\alpha) \exp(i\sqrt{k^2 - 1} r) \right] . \quad (2.226)$$

A képzetes tengely feletti szingularitás környékén, $r = i\frac{P}{\varepsilon} + y$ helyettesítéssel, az $\exp(-P/\varepsilon)$ szorzó miatt (2.226) második tagja elhanyagolhatóvá válik, és mivel az illesztési tartományban $|y| \ll P/\varepsilon$,

$$\delta\Phi_k = \frac{1}{2} (\beta + i\alpha) \left(\frac{\varepsilon}{P}\right)^{\frac{d-1}{2}} \exp \left(\sqrt{k^2 - 1} \frac{P}{\varepsilon}\right) \exp(-i\sqrt{k^2 - 1} y) . \quad (2.227)$$

A belső tartományban a korrekciót megadó (2.220) kifejezéssel összehasonlítva,

$$\alpha - i\beta = 2\nu_k \left(1 + \tilde{C} \varepsilon \ln \varepsilon\right) \left(\frac{P}{\varepsilon}\right)^{\frac{d-1}{2}} \exp\left(-\sqrt{k^2 - 1} \frac{P}{\varepsilon}\right). \quad (2.228)$$

A képzetes tengely alatt szimmetrikusan elhelyezkedő szingularitás környezetében (2.226)-ba $r = -i\frac{P}{\varepsilon} + y$ helyettesítéssel, és (2.221)-el összehasonlítva kaphatjuk, hogy $\alpha + i\beta$ értéke megegyezik az $\alpha - i\beta$ értékére (2.228)-ban felírt kifejezéssel. Következésképp, $\beta = 0$ és α értéke valós,

$$\alpha = 2\nu_k \left(1 + \tilde{C} \varepsilon \ln \varepsilon\right) \left(\frac{P}{\varepsilon}\right)^{\frac{d-1}{2}} \exp\left(-\sqrt{k^2 - 1} \frac{P}{\varepsilon}\right). \quad (2.229)$$

A (2.225) egyenlet alapján, az oszcillon mag tartományában a valós r tengelyen is érvényes korrekció

$$\delta\Phi_k = \frac{\alpha}{r^{\frac{d-1}{2}}} \sin\left[\sqrt{k^2 - 1} r - \frac{\pi}{4}(d - 1)\right]. \quad (2.230)$$

Ez természetesen $d > 1$ esetén az $r = 0$ origó közvetlen közelében érvénytelenné válik, de mivel az oszcillon magjának mérete $1/\varepsilon$ rendű, egy nagy tartományban jó közelítést ad. Mivel a felső szingularitás környékén a $-\frac{\pi}{2} < \arg y < 0$ irányokban illesztettünk az ε kifejtéssel kapott függvényekhez, a mag tartományon kívül nincs ilyen korrekció nagy valós értékű r koordináta esetén. Ilyen módon a 2.9.3 alfejezetben bemutatott aszimmetrikus breather megoldás magasabb dimenziós általánosításához jutunk, amelynél pozitív r esetén nincs állóhullám farok, de a megoldást az origó komplex síkon való megkerülésével negatív r értékekre kiterjeszve, a túloldalon megjelenik egy állóhullám farok, a minimálisához képest kétszeres amplitúdóval. Mivel jobban jellemzi a lényeges tulajdonságokat, $d \geq 2$ térdimenzió esetén erre a megoldásra a *szinguláris breather* elnevezést használjuk.

Az így megkonstruált szinguláris breather megoldás körüli kis perturbációk vezető rendben megint csak (2.197) baloldalát elégítik ki. A nyilvánvaló megoldás, ami kiejti a középponti szingularitást, és így megszünteti az aszimmetriát, $\delta\Phi_k^{(s)} = -\delta\Phi_k$, ahol $\delta\Phi_k$ (2.230) által adott. Emlékeztetőül megjegyezzük, hogy szimmetrikus potenciál esetén a $k = 3$ módus adja a domináns sugárzást, egyébként pedig a $k = 2$ módus. A szingularitás eltűnéséért cserébe, a mag tartományon kívül, pozitív r irányban megjelenik a $\delta\Phi_k^{(s)}$ állóhullám farok, $\omega = k$ frekvenciával,

$$\phi = -\frac{\alpha}{r^{\frac{d-1}{2}}} \sin\left[\sqrt{k^2 - 1} r - \frac{\pi}{4}(d - 1)\right] \cos(kt), \quad (2.231)$$

ahol α értéke (2.229) által adott.

Az α sugárzási amplitúdót megadó (2.229) kifejezésben ν_k értéke dimenzió független, így az egy térdimenzió esetén korábban részletesen leírt módokon számolható. Szimmetrikus

potenciál esetén a 2.9.4 alfejezetben ismertetett Borel összegzéses módszert célszerű alkalmazni, a $\nu_3 = -K_2\pi/2$ összefüggés használatával. Nem szimmetrikus potenciál esetén csak a 2.9.3 alfejezetben bemutatott numerikus intergrálásos eljárás működik. Ugyan ν_k megegyezik, de (2.229) több ponton is eltér az egydimenziós alaktól, ami miatt a magasabb dimenziós esetekben általában nagyobb a sugárzási amplitúdót eredményez. A komplex síkon lévő szingularitás valós tengelytől való P távolsága a d térdimenzió növelésével (2.200) szerint egyre kisebb lesz, ami (2.229)-ben az exponenciális tag csökkenéséhez vezet. A nevezőben lévő $\varepsilon^{(d-1)/2}$ szorzó is növeli az α sugárzási amplitúdót $d > 1$ esetén. Mivel $\varepsilon \ln \varepsilon$ negatív ha $0 < \varepsilon < 1$, a szögletes zárójelben lévő korrekció $\sigma > 0$ esetén csökkenti, $\sigma < 0$ esetén pedig növeli a sugárzást a vezető rendű eredményhez képest. A σ konstans (2.93) definiálja a potenciál minimum körüli kifejtését meghatározó g_k konstansok segítségével.

Az α paraméter megfelel a farok általános viselkedését leíró (2.124) egyenletben szereplő amplitúdó paraméternek. Így a kisugárzott energiaáram rezgési periódusra átlagolt \bar{S} értéke (2.126) segítségével számolható, ahol $\omega_f = k$ és $\lambda_f = \sqrt{k^2 - 1}$,

$$\bar{S} = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} 4\nu_k^2 k \sqrt{k^2 - 1} \left(1 + \tilde{C} \varepsilon \ln \varepsilon\right)^2 \left(\frac{P}{\varepsilon}\right)^{d-1} \exp\left(-2\sqrt{k^2 - 1} \frac{P}{\varepsilon}\right). \quad (2.232)$$

Szimmetrikus potenciálra $k = 3$, egyébként $k = 2$. A \tilde{C} konstans (2.219)-ben definiált. A dimenzió függő szorzó:

$$\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} = \begin{cases} 1 & \text{ha } d = 1, \\ \pi & \text{ha } d = 2, \\ 2\pi & \text{ha } d = 3. \end{cases} \quad (2.233)$$

2.9.7. ε rendű korrekció magasabb dimenziónál

Az eddigiekben a Φ_n módusfüggvényekre vonatkozó (2.214) belső egyenletek (2.209) szerinti kifejtésének ε független, és $\varepsilon \ln \varepsilon$ -al arányos részét határoztuk meg. Az ε -ban lineáris korrekciót adó $\Phi_n^{(2)}$ függvényekre adódó egyenlet:

$$\frac{d^2\Phi_n^{(2)}}{dy^2} + \frac{d-1}{iP} \frac{d\Phi_n^{(0)}}{dy} + (n^2 - 1)\Phi_n^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial F_n}{\partial \Phi_m} \Big|_{\Phi_k = \Phi_k^{(0)}} \Phi_m^{(2)}. \quad (2.234)$$

A kis-amplitúdós kifejtés alkalmazásával a Φ_n módusfüggvényekre kapott (2.198) egyenleteket használva korábban beláttuk, hogy az ε független rész, $\Phi_n^{(0)}$, ugyanaz mint egy térdimenzió esetén, vagyis (2.184) által adott. Az $\varepsilon \ln \varepsilon$ -al arányos rész kifejtésének első tagjait (2.210)-ben írtuk fel. Az ezután következő ε -ban lineáris rendű részére a megoldásnak

(2.198)-ből a következőt kaphatjuk:

$$\begin{aligned}
\Phi_0^{(2)} &= \frac{i(d-1)g_2}{3\lambda P} \frac{1}{y} - \frac{16i(d-1)g_2\sigma}{15\lambda^3 P} \frac{\ln(iy)}{y^3} + \frac{i\sqrt{2}g_2\sigma Z_{-2,0}}{\lambda^3} \frac{1}{y^3} \\
&\quad + \frac{i(d-1)(169g_2^3\lambda + 36g_2\lambda^2 + 18g_2\sigma - 81g_4\lambda)}{81\lambda^3 P} \frac{1}{y^3} + \dots, \\
\Phi_1^{(2)} &= \frac{\sqrt{2}(d-1)}{6\sqrt{\lambda}P} - \frac{8\sqrt{2}(d-1)\sigma}{15\lambda^2\sqrt{\lambda}P} \frac{\ln(iy)}{y^2} + \frac{\sigma Z_{-2,0}}{\lambda^2\sqrt{\lambda}} \frac{1}{y^2} + \frac{19\sqrt{2}(d-1)g_2^2}{54\lambda\sqrt{\lambda}P} \frac{1}{y^2} + \dots, \\
\Phi_2^{(2)} &= -\frac{i(d-1)g_2}{9\lambda P} \frac{1}{y} + \frac{16i(d-1)g_2\sigma}{45\lambda^3 P} \frac{\ln(iy)}{y^3} - \frac{i\sqrt{2}g_2\sigma Z_{-2,0}}{3\lambda^3} \frac{1}{y^3} \\
&\quad - \frac{i(d-1)(220g_2^3\lambda - 207g_2\lambda^2 + 18g_2\sigma - 108g_4\lambda)}{243\lambda^3 P} \frac{1}{y^3} + \dots, \\
\Phi_3^{(2)} &= -\frac{\sqrt{2}(d-1)(4g_2^2 - 3\lambda)}{72\lambda\sqrt{\lambda}P} \frac{1}{y^2} + \dots, \\
\Phi_4^{(2)} &= \frac{i(d-1)(5g_2^3 - 5g_2\lambda + 3g_4)}{135\lambda^2 P} \frac{1}{y^3} + \dots.
\end{aligned} \tag{2.235}$$

Ha $\Phi_n^{(2)}$ megoldása a (2.234) egyenletnek, akkor $\Phi_n^{(2)} + C_2 \frac{d}{dy} \Phi_n^{(0)}$ is megoldás bármely C_2 konstans esetén. A (2.184) kifejezések első tagjainak deriváltjaival való összehasonlításból látható, hogy a $Z_{-2,0}$ megváltoztatása felel meg ennek a szabadsági foknak. Másrészt, $Z_{-2,0}$ értéke egyértelműen meghatározott az ε kifejtés által, (2.205) szerint.

A (2.235) kifejezések $\ln(iy)$ -nal arányos tagokat is tartalmaznak, amelyeknek együtthatója pontosan megegyezik a (2.210)-ben $\Phi_0^{(1)}$ -re felírt kifejezésekkel. Mivel az összes logaritmus tag a (2.202) és (2.204)-ben szereplő $\ln(iR)$ -ekből származik, az $R = \varepsilon y$ helyettesítés eredményeképp az $\ln \varepsilon$ és az $\ln(iy)$ tagok szükségképpen párban jelennek meg. Új változót bevezetve

$$\Phi_n^{(2)} = \Phi_n^{(1)} \ln(iy) + \tilde{\Phi}_n^{(2)} \tag{2.236}$$

helyettesítéssel, $\tilde{\Phi}_n^{(2)}$ már nem fog tartalmazni logaritmus tagokat. A (2.234) egyenletbe helyettesítve, felhasználva hogy $\Phi_n^{(1)}$ kielégíti (2.216)-ot, és utána a $\Phi_n^{(1)}$ -et a $\Phi_n^{(0)}$ deriváltjával összekötő (2.211) azonosságot, kaphatjuk hogy

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2 \tilde{\Phi}_n^{(2)}}{dy^2} + (n^2 - 1) \tilde{\Phi}_n^{(2)} + \frac{d-1}{iP} \frac{d\Phi_n^{(0)}}{dy} \\
&\quad + C \left(\frac{2}{y} \frac{d^2 \Phi_n^{(0)}}{dy^2} - \frac{1}{y^2} \frac{d\Phi_n^{(0)}}{dy} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial F_n}{\partial \Phi_m} \Big|_{\Phi_k = \Phi_k^{(0)}} \tilde{\Phi}_m^{(2)}.
\end{aligned} \tag{2.237}$$

Ennek az egyenletnek a megoldását

$$\tilde{\Phi}_n^{(2)} = \sum_{k=0}^{\infty} b_{n+2k-1}^{(n)} \frac{1}{y^{n+2k-1}} \tag{2.238}$$

alakban keresve, ahol $b_{-1}^{(0)} = 0$, és felhasználva a korábban kiszámolt (2.183) kifejtést $\Phi_n^{(0)}$ -ra, az ε kifejtésnél lényegesen könnyebben megkapható (2.235), és jóval magasabb rendekig is számolható. A (2.238) alakban keresett megoldásban egyetlen szabad paraméter marad, $b_2^{(1)}$, amelyet (2.235) szerint a $Z_{-2,0}$ paraméter határoz meg egyértelműen.

Az ε hatványai szerinti kis-amplitúdós kifejtés nem képes leírni a kvázibreatherek exponenciálisan kicsi állóhullám farkát. Ennek megfelelően, a belső egyenletek $\Phi_n^{(j)}$ megoldásainak $1/y$ szerinti kifejtése minden rendben valós a képzetes tengelyen. Mivel feltételezzük, hogy a $-\frac{\pi}{2} < \arg y < 0$ irányokban a kifejtés jó közelítést ad, a képzetes tengelyen megjelenik a (2.217) által megadott vezető rendű, ε -tól független korrekció, és az annak deriváltjával arányos $\varepsilon \ln \varepsilon$ rendű (2.218) járulékok. Mindkettő arányos a ν_k paraméterrel, amit vagy numerikus integrálással, vagy Borel összegzéssel határozhatunk meg. Következő rendben, az ε -ban lineáris rendű $\delta\Phi_k^{(2,+)}$ korrekció a (2.234) egyenlet baloldali lineáris részét elégíti ki. A $\Phi_k^{(0)}$ deriváltját tartalmazó forrástag $\Phi_k^{(2)}$ -ban $y \exp(-i\sqrt{k^2 - 1}y)$ -nal arányos tagot generál. A (2.236) szerint definiált $\tilde{\Phi}_k^{(2)}$ függvényben $\ln(iy)$ is megjelenik. Ilyen módon, az ε rendű korrekció meghatározása az általános esetben meglehetősen bonyolulttá válik. Szerencsére, ez a számolás általában nem is annyira fontos, mivel csak egy másodrendű korrekciót ad a vezető rendű eredményhez képest. Ha viszont a vezető rendű számolásnál meghatározott ν_k együttható nullának adódik, akkor a vezető és az $\varepsilon \ln \varepsilon$ rendben egyáltalán nincs exponenciálisan kicsi járulékok, és így az ε -ban lineáris rend fogja meghatározni a sugárzást. Ez nem csak a sine-Gordon potenciál esetén fordul elő, hanem például a szimmetrikus hatodrendű potenciálnál is, amikor a g_5 paraméter a 2.35 ábra valamelyik zérushelyének megfelelő értéket vesz fel.

A minimuma körül szimmetrikus $U(\phi)$ potenciál esetén a domináns sugárzást a $k = 3$ módus adja. Ha $\nu_3 = 0$, akkor a (2.237) egyenletben a képzetes tengelyen a $\Phi_n^{(0)}$ tagok csak valós járulékokat adnak. Emiatt, a képzetes tengelyen megjelenő korrekció vezető rendben

$$\delta\Phi_3^{(+)} = \varepsilon\delta\Phi_3^{(2,+)} = \varepsilon\delta\tilde{\Phi}_3^{(2,+)} = i\varepsilon\nu_3^{(2)} \exp(-i\sqrt{8}y) . \quad (2.239)$$

A $\nu_3^{(2)}$ együttható meghatározásához a 2.9.4 alfejezetben részletesen bemutatott Borel összegzéses eljárást fogjuk alkalmazni. Ehhez a $\Phi_3^{(2)}$ függvény $1/y$ szerinti kifejtési együtthatóit szükséges tanulmányozni $1/y$ nagy hatványai esetére. A kifejtési együtthatókra a [31] cikkünkben használt jelölést alkalmazva,

$$\tilde{\Phi}_3^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \frac{1}{y^{2k}} , \quad (2.240)$$

amit (2.238)-al összehasonlítva látható, hogy $\beta_k = b_{2k}^{(3)}$. A korábban elvégzett egydimenziós számolással megegyezően, az ε -ban vezető rendű $\Phi_n^{(0)}$ függvények kifejtése (2.163) alakú. Az

általános esetben a nagy k -ra vonatkozó aszimptotikus viselkedést a $\Phi_3^{(0)}$ -hoz tartozó $A_k^{(2)}$ együtthatók határozzák meg, amelyek (2.174) szerint növekednek. A többi $\Phi_n^{(0)}$ -hoz tartozó $A_k^{(n)}$ az $A_k^{(2)}$ együtthatóhoz képest legalább $1/k^2$ rendben kicsi, (lásd (2.167) és (2.169)). Mivel az $A_k^{(2)}$ együttható általában $(2k-2)!$ szerint növekszik, a (2.237) egyenletben a C -vel arányos és a nemlineáris tagok legfeljebb $1/k^2$ rendű járulékot adhatnak. Ilyen módon, vezető rendben a következő összefüggést kapjuk:

$$(2k-2)(2k-1)\beta_{k-1} + 8\beta_k - (2k-1)\frac{d-1}{P}A_k^{(2)} = 0. \quad (2.241)$$

A β_k együtthatók nagy k -ra való viselkedését az alábbi alakban keressük:

$$\beta_k = L(-1)^k \frac{(2k)!}{8^k} + M(-1)^k \frac{(2k-1)!}{8^k}, \quad (2.242)$$

ahol L és M konstansok. A (2.241) egyenletbe helyettesítve, L értéke meghatározódik a (2.174)-ben definiált K_2 konstans segítségével,

$$L = \frac{\sqrt{2}(d-1)}{8P} K_2. \quad (2.243)$$

A (2.182) összefüggés szerint $\nu_3 = -K_2\pi/2$, és mivel éppen a $\nu_3 = 0$ esetet tanulmányozzuk, következik hogy $L = 0$. Ilyen módon (2.242)-ben csak a második tag marad. Nagy k -ra pontosabb közelítést kaphatunk β_k -ra, ha (2.237) jobboldaláról figyelembe vesszük a $\frac{3}{2}g_3 \left(\Phi_1^{(0)}\right)^2 \tilde{\Phi}_3^{(2)}$ tagot is (lásd (2.161)). Az $U(\phi) = 1 - \cos \phi$ alakú sine-Gordon potenciál esetén $\Phi_1^{(0)}$ kezdő tagja $-4i/y$, és így a jobboldali tag vezető rendekben fontos része $4\tilde{\Phi}_3^{(2)}/y^2$. Így a β_k -ra megoldandó egyenlet

$$(2k-2)(2k-1)\beta_{k-1} + 8\beta_k = 4\beta_{k-1}. \quad (2.244)$$

A (2.237) egyenlet baloldalán lévő $\Phi_3^{(0)}$ tagokat nem szükséges figyelembe venni, mert a $\nu_3 = 0$ esetet vizsgáljuk. A sine-Gordon potenciál esetén $\Phi_3^{(0)}$ egzakt módon kiszámolt (2.142) kifejtési együtthatóiról látható, hogy sokkal lassabban növekednek mint a β_k konstansok. A (2.244) összefüggésből következően, $1/k^2$ rendig,

$$\beta_k = M(-1)^k \frac{(2k-1)!}{8^k} \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{3}{4k^2}\right). \quad (2.245)$$

Az M konstans értékét jó közelítéssel megkaphatjuk, ha a (2.237) egyenlet (2.238) alakban keresett megoldásának kifejtési együtthatóit algebrai számolásokra kifejlesztett programcsomag segítségével kiszámoljuk mérsékelt nagy $1/y$ rendekig. Ugyan csak véges számú Fourier módussal dolgozhatunk, és a sine-Gordon potenciál kifejtését is csak bizonyos rendig

vehetjük figyelembe, igen pontos eredményt kaphatunk, ha a Fourier komponenseket Φ_9 -ig, a potenciál kifejtését pedig ϕ^{13} rendig használjuk, és a kifejtési együtthatókat $1/y^{33}$ rendig számoljuk ki. Az ilyen módon meghatározott $\beta_k = b_{2k}^{(3)}$ konstansoknak van egy $b_2^{(1)}$ -el arányos része, amely sokkal lassabban növekszik k növelésével mint a többi tag, ezért nem szükséges figyelembe venni, és így az M értéke a $Z_{-2,0}$ paramétertől függetlenül adódik. Az összes többi tag tartalmaz egy $(d-1)/P$ szorzót, amit kiemelhetünk,

$$M = \frac{d-1}{P} \widetilde{M} . \quad (2.246)$$

A (2.245) aszimptotikus formula felhasználásával, a bizonyos rendig kiszámolt β_k konstansokból a dimenzió független \widetilde{M} -re négy jegy pontossággal a következőt kaphatjuk:

$$\widetilde{M} = 0.6011 . \quad (2.247)$$

Mint hamarosan belátjuk, az M konstans és a képzetes tengelyen megjelenő (2.239) korrekciót meghatározó $\nu_3^{(2)}$ értékét összekötő összefüggés

$$\nu_3^{(2)} = -\frac{M\pi}{2} . \quad (2.248)$$

Ezt (2.182) bizonyításához nagyon hasonló módon, Borel összegzéssel láthatjuk be. A

$$\widetilde{\Phi}_3^{(2)}(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \frac{1}{y^{2k}} \quad , \quad \beta_k = M(-1)^k \frac{(2k-1)!}{8^k} , \quad (2.249)$$

sort szeretnénk Borel összegezni. A transzformált függvényt a

$$\widehat{\Phi}_3^{(2)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{(2k)!} z^{2k} \quad (2.250)$$

összefüggéssel definiáljuk. A (2.176) egyenletnél bemutatott módon,

$$\widetilde{\Phi}_3^{(2)}(y) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} \widehat{\Phi}_3^{(2)}\left(\frac{t}{y}\right) . \quad (2.251)$$

(2.177)-hez hasonlóan, $\widehat{\Phi}_3^{(2)}(z)$ is felösszegezhető,

$$\widehat{\Phi}_3^{(2)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} M \frac{(-1)^k}{2k} \left(\frac{z}{\sqrt{8}}\right)^{2k} = -\frac{M}{2} \left[\ln\left(1 - \frac{iz}{\sqrt{8}}\right) + \ln\left(1 + \frac{iz}{\sqrt{8}}\right) \right] . \quad (2.252)$$

Ebben az esetben is csak a második tag ad az integrálhoz képzetes járulékot $\operatorname{Re} y = 0$ esetén, és (2.179) levezetéséhez hasonlóan, a képzetes y tengelyen

$$\operatorname{Im} \widetilde{\Phi}_3^{(2)}(y) = -\frac{M\pi}{2} \exp\left(-i\sqrt{8}y\right) . \quad (2.253)$$

A (2.239) egyenlettel összehasonlítva kaphatjuk a keresett (2.248) összefüggést $\nu_3^{(2)}$ és M között. A korrekciót a valós tengely mag tartományban lévő részére folytatva, és a kvázibreather aszimmetriáját kompenzálva, a (2.231) egyenlet levezetésével megegyező módon kaphatjuk, hogy $d = 2$ és $d = 3$ dimenzió esetén a sine-Gordon kvázibreather farok-tartományában a skalármező alakja

$$\phi = -\frac{\alpha^{(2)}}{r^{\frac{d-1}{2}}} \sin \left[\sqrt{8} r - \frac{\pi}{4}(d-1) \right] \cos(3t) , \quad (2.254)$$

ahol most

$$\alpha^{(2)} = -\pi(d-1)\widetilde{M} \left(\frac{P}{\varepsilon} \right)^{\frac{d-3}{2}} \exp \left(-\sqrt{8} \frac{P}{\varepsilon} \right) . \quad (2.255)$$

A kisugárzott energiaáram rezgési periódusra átlagolt értéke a (2.232) levezetésénél bemutatott módon kapható,

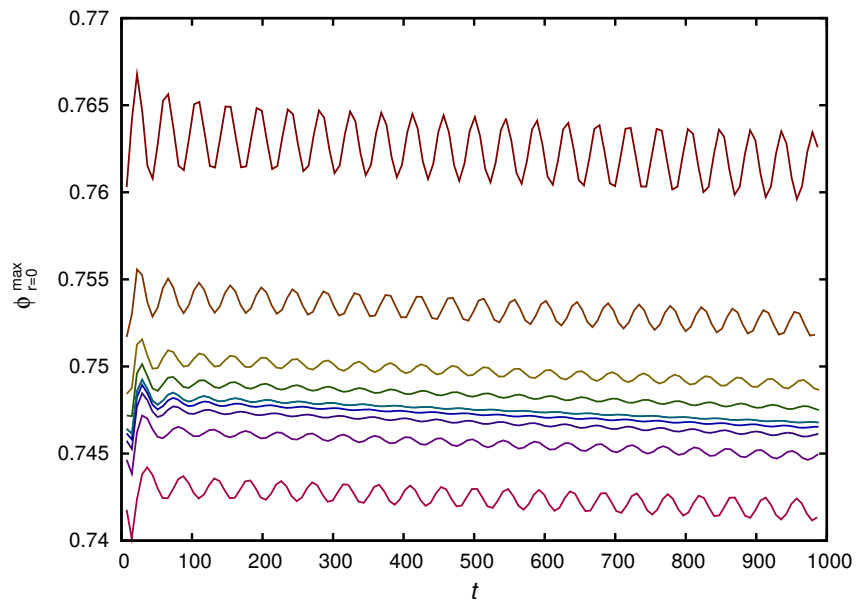
$$\bar{S} = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} 6\sqrt{2} \pi^2 (d-1)^2 \widetilde{M}^2 \left(\frac{P}{\varepsilon} \right)^{d-3} \exp \left(-4\sqrt{2} \frac{P}{\varepsilon} \right) . \quad (2.256)$$

2.10. Oszcillonok sugárzásának numerikus vizsgálata

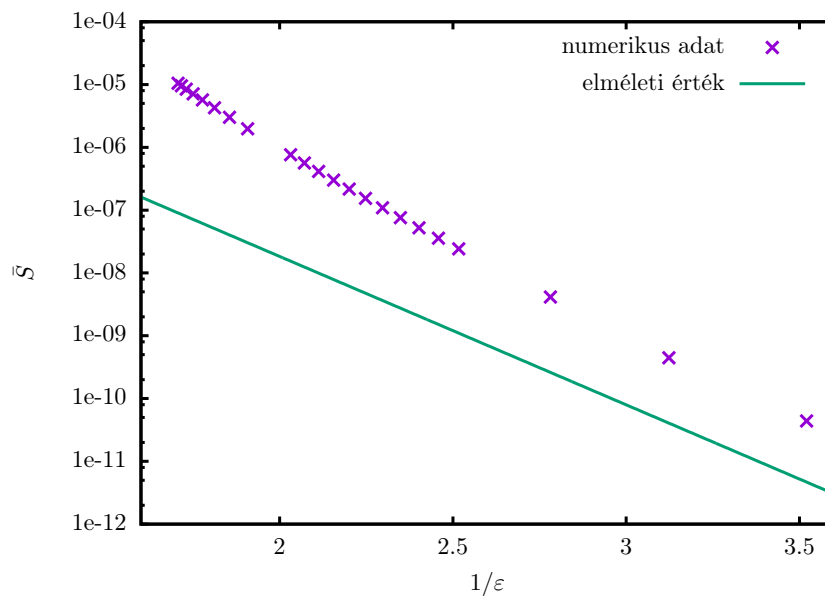
A következőkben a 2.6.3 fejezetben ismertetett időfejlődési kódunkat alkalmazzuk az oszcillonok sugárzási rátájának meghatározására, és a kapott numerikus értékeket összehasonlítjuk az előző fejezetben levezetett analitikus eredményeinkkel. A skalármező által létrehozott lokalizált állapotok két nagy osztályba sorolhatók, vannak stabil és instabil oszcillonok. Az instabil állapotoknak van egy bomlási módusa, amelyet a kezdőadatban szereplő paraméter sok tizedesjegyre történő finomhangolásával semlegesíthetünk, és a 2.6.5 fejezetben ismertetett módon majdnem-periodikus állapotokhoz juthatunk. Ezek az állapotok általában olyan jó közelítéssel periodikusak, hogy az általuk kibocsátott sugárzás az adott frekvenciához tartozó minimális energiaveszteségi ráta közelében van, és így az analitikus módszerrel számolt eredményekkel közvetlenül összehasonlítható. Stabil állapotok egy és két térbeli dimenzió esetén végtelen sokáig rezegnek, anélkül hogy valaha is elbomlanának. Három térdimenzió esetén, amikor a lassú sugárzás miatt energiájuk a 2.19 ábra minimuma által meghatározott határ alá csökken, az instabil tartományba kerülnek és hirtelen elbomlanak. A 2.6 ábrán ennek tipikus példáit láthatjuk. Az ábrán a stabil oszcillonok egy másik fontos tulajdonságát is megfigyelhetjük. Bármely dimenzió esetén, az oszcillon rezgésének burkológörbájén egy alacsony frekvenciás moduláció figyelhető meg. Ezt az alak-módust az oszcillon amplitúdójának és térbeli méretének alacsony frekvenciás rezgése okozza. Az alacsony frekvenciás módusok jelentős energiát tárolhatnak, és mivel viszonylag gyorsan bomlanak, az általuk adott idő alatt kisugárzott energia jóval nagyobb is lehet mint az ideálisan periodikusan

rezgő oszcillon által kisugárzott energia. Azonban, a numerikus kezdőadatot meghatározó valamelyik paraméter hangolásával ezek az alak-módusok nagyon kicsivé tehetők, és így az ideális oszcillonok sugárzási rátája is tanulmányozhatóvá válik, és az elméleti értékekkel összehasonlítható.

Ahhoz, hogy minél periodikusabb oszcillon állapotokat kaphassunk, célszerű hogy már a hangolás előtti kezdőadat is minél pontosabb legyen. Nagy számú különféle kezdőadatot legkönnyebben a 2.8 fejezetben bemutatott kis-amplitúdós kifejtés segítségével állíthatunk elő. Tapasztalataink szerint, abban az amplitúdó tartományban, ahol az oszcillonok sugárzása már numerikusan kimutatható, az ε^3 rendű kezdőadat adja a leginkább periodikus időfejlődést. A $\phi^{(t=0)}$ kezdőadatot a (2.57) kifejtés első három tagját használva, a (2.115)-(2.117) egyenletek alapján konstruáljuk meg. Ezt a kezdőadatot megszorozzuk egy egyhez közeli α konstanssal, amit hangolni fogunk. A numerikus időfejlődés során általában egy viszonylag rövid kezdeti időszakban kisugárzódik az energia egy kisebb része, és utána egy alak-módussal gerjesztett oszcillon állapot alakul ki. A skalármező középponti értéke rezgési periódusonkénti maximumának megfelelő pontokra illesztünk egy egyenest a legkisebb négyzetek módszerével, egy olyan viszonylag hosszabb idő-intervallumra, ami alatt több alak-módus rezgés is lezajlik. Ettől az egyenestől való négyzetes eltérések összegét használjuk az alak-módus amplitúdójának jellemzésére. Az α konstans függvényében minimalizáljuk az alak-módus amplitúdóját az aranymetszés módszere segítségével. Arra, hogy milyen hatékony a módszer, példaként a (2.58) alakban felírt ϕ^4 potenciál esetét mutatjuk a 2.37 ábrán, különféle α konstansokkal átskálázott $\varepsilon = 0.5$ kezdőadatok esetén. Az alak-módus amplitúdója $\alpha = 1.00263$ esetén minimális, amely esetben az állapot rezgési frekvenciájából az $\varepsilon = \sqrt{1 - \omega^2}$ összefüggéssel számolt ε értéke 0.513 közelében lassan változik. Az ilyen módon numerikusan előállított egydimenziós ϕ^4 oszcillonok által kisugárzott energiaáram rezgési periódusra átlagolt értékét a 2.38 ábrán mutatjuk, ahol össze is hasonlítjuk a (2.193) és (2.196) felhasználásával kapott elméleti eredménnyel. Az energiaáramot logaritmikusan ábrázoljuk $1/\varepsilon$ függvényeként, mert így az elméleti úton számolt összefüggés az ábrán egy egyenest határoz meg. Látható, hogy azoknál a viszonylag nagy amplitúdós oszcillonoknál ahol az energiaveszteséget numerikusan is ki tudtuk mutatni, a sugárzás egy-két nagyságrenddel is nagyobb az elméletileg megjósoltnál. Ennek nyilvánvaló oka, hogy az analitikus eredményünk csak vezető rendben érvényes, elegendően kicsi ε esetén. További rendeket figyelembe véve $1/\varepsilon$ hatványait tartalmazó korrekciós tagok jelennének meg a sugárzást megadó (2.193) összefüggésben. Az mindenesetre látható, hogy az oszcillon amplitúdóját megadó ε paraméter csökkenésével a numerikus adatok egyre közelebb kerülnek az elméleti értékhez. A ϕ^4 elmélet esetén a sugárzási együttható értéke nagyon kicsi, $\nu_2 = 8.38866 \cdot 10^{-3}$, ami különösen nehézzé teszi az analitikus eredmény



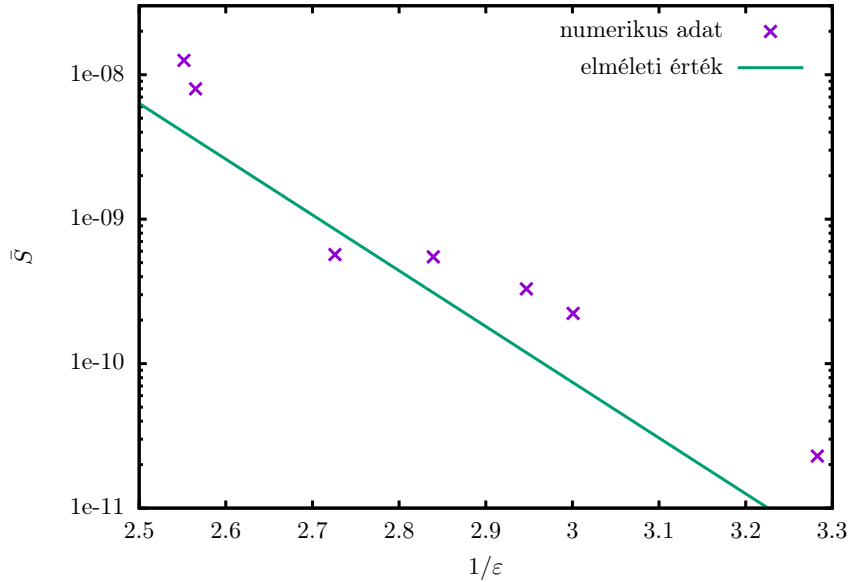
2.37. ábra. A középponti rezgések felső burkológörbájének időfejlődése $d = 1$ dimenzió és ϕ^4 potenciál esetén, különböző α konstansokkal átskálázott $\varepsilon = 0.5$ kezdőadatok választásánál. Az α konstans az $[0,9978, 1,0169]$ intervallumban vesz fel értékeket, és a legsimább fejlődést $\alpha = 1.00263$ esetén kapjuk.



2.38. ábra. Egydimenziós ϕ^4 oszcillon által kisugárzott időátlagolt \bar{S} energiaáram értéke az állapot frekvenciája alapján számolt ε paraméter reciprokának függvényeként.

numerikus ellenőrzését.

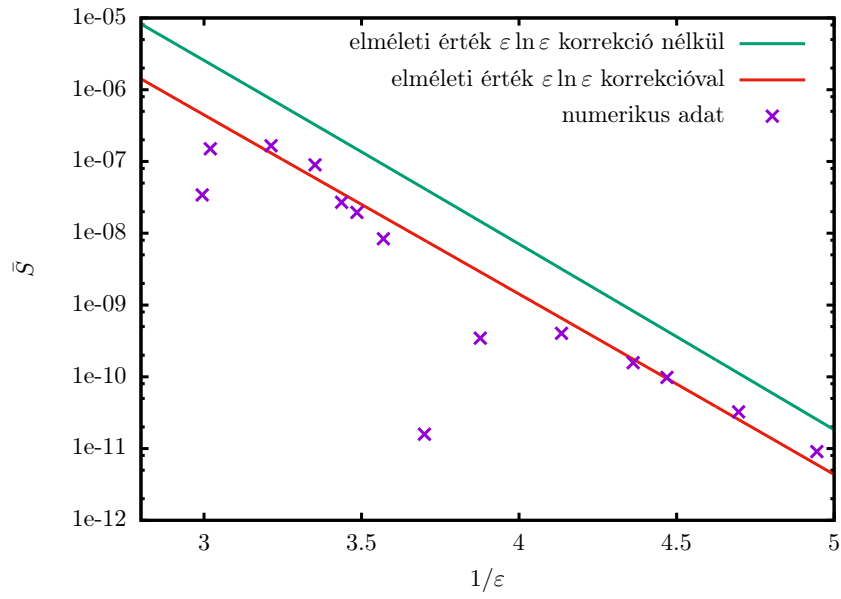
A 2.39 ábrán, továbbra is egy térdimenziónál, a (2.128) alakban felírható szimmetrikus ϕ^6



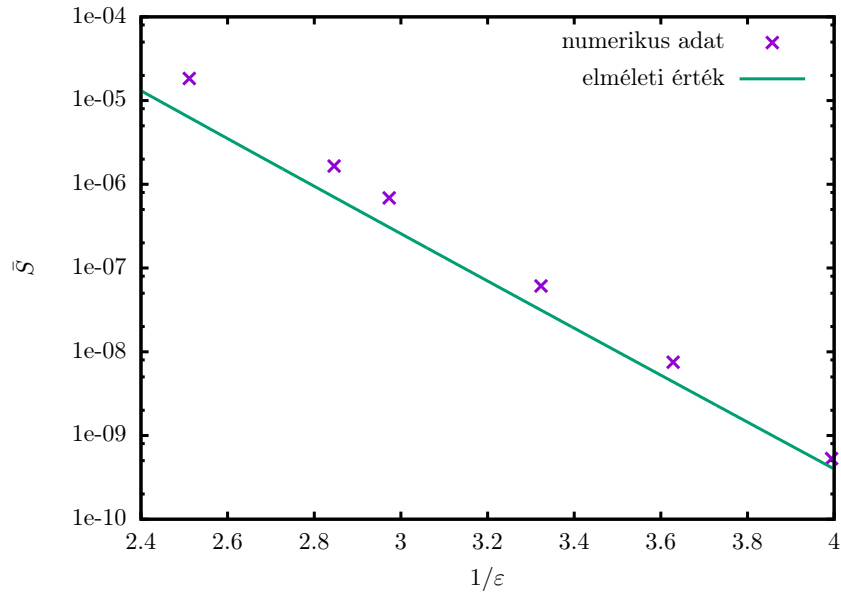
2.39. ábra. Egydimenziós szimmetrikus ϕ^6 potenciál és $g_5 = 1$ esetén az oszcillon által kisugárzott időátlagolt \bar{S} energiaáram értéke $1/\varepsilon$ függvényeként.

potenciál és $g_5 = 1$ választása esetén mutatjuk a sugárzás erősségét. Az időátlagolt energiaáramra kapott analitikus eredményt ekkor (2.159) adja, ahol (2.151) szerint $\nu_3 = -0.9097496$. Ebben az esetben lényegesen kisebb a vezető rendű elméleti jóslattól való eltérés mint a ϕ^4 elméletnél. A 2.40 ábrán ugyanilyen ϕ^6 potenciál, de $d = 2$ térbeli dimenzió esetén mutatjuk a sugárzás mértékét. Ekkor az analitikus eredményt (2.232) alkalmazásával számolhatjuk. Feltüntettük az $\varepsilon \ln \varepsilon$ rendű korrekció elhagyásával kapható vezető rendű eredményt is. Az $\varepsilon \ln \varepsilon$ korrekció közelebb visz a numerikusan kapható értékekhez, de azért ilyen nagy amplitúdóknál óvatosságnak kell lennünk a közelítés érvényességét illetően. A (2.232) egyenletben a $\tilde{C} \varepsilon \ln \varepsilon$ korrekciós tag értéke ekkor már nagyon közel kerül 1-hez. Az $(1 + \tilde{C} \varepsilon \ln \varepsilon)^2$ kifejtésével és az $(\varepsilon \ln \varepsilon)^2$ tag elhagyásával kapható analitikus közelítés már érvénytelennek adódik.

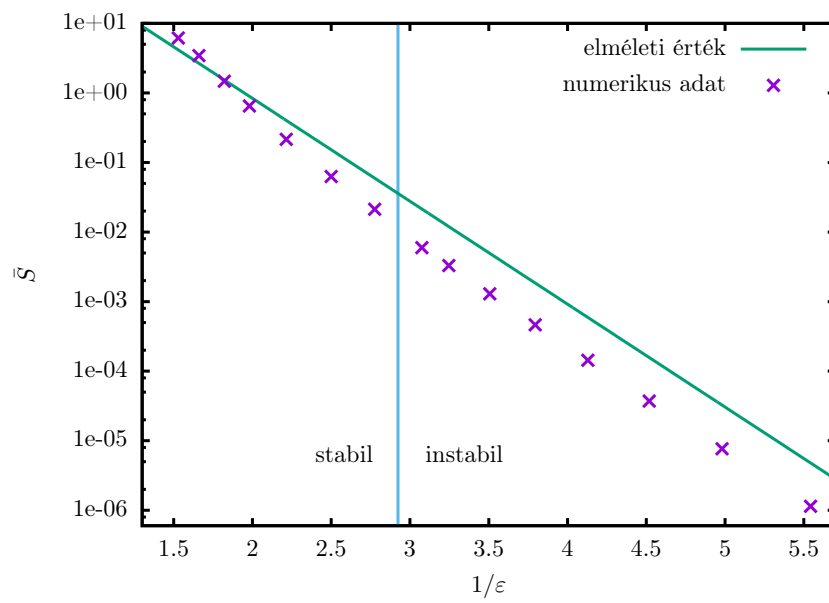
A 2.41 és 2.42 ábrán a két és háromdimenziós sine-Gordon oszcillon numerikusan meghatározott sugárzását hasonlítjuk össze az elméleti eredményeinkkel.



2.40. ábra. \bar{S} energiaáram $d = 2$ térdimenzióánál, szimmetrikus ϕ^6 potenciál és $g_5 = 1$ esetén.



2.41. ábra. Időátlagolt energiaáram $d = 2$ térdimenziós sine-Gordon oszcillon esetén.



2.42. ábra. Időátlagolt energiaáram $d = 3$ térdimenziós sine-Gordon oszcillon állapotokra, a stabil és az instabil tartományban.

3. fejezet

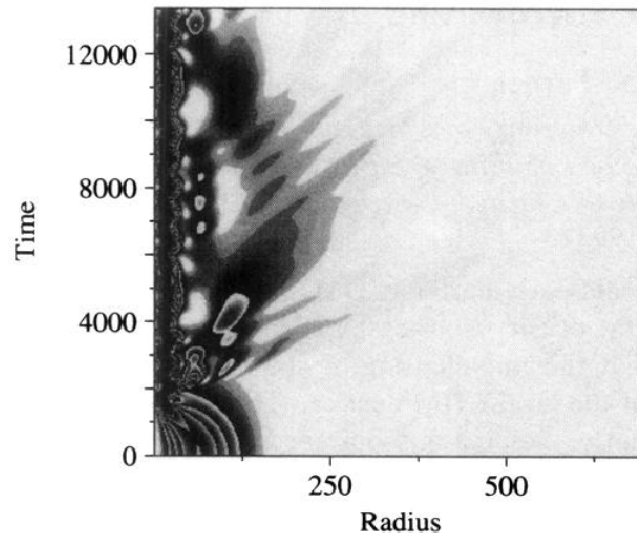
Relativisztikus öngravitáló skalármezők: oszcillatonok

3.1. Az oszcillatonok története

Mivel a valós nemlineáris skalármezők által sík Minkowski háttéren létrehozott pulzon, más néven oszcillon megoldások létezése 1977 óta ismert [3, 4, 68], természetes lett volna annak vizsgálata, hogy ezek az objektumok hogyan módosulnak az Einstein féle gravitációval való kölcsönhatás hatására. Ennek ellenére, a gravitációval kölcsönható valós skalármezők által létrehozott lokalizált állapotok felfedezése az oszcillonoktól teljesen függetlenül történt. Ennek részben az is magyarázata lehet, hogy a gravitációs esetben, az egyenletek nemlinearitása miatt, már önkölcsönhatás mentes tömeges Klein-Gordon mező is képes hosszú élettartamú lokalizált állapotot létrehozni, míg sík háttér esetén ehhez egy nemtriviális $U(\phi)$ skalárpotenciál szükséges. Seidel és Suen 1991-ben mutatta meg [37], hogy az Einstein egyenleteket valós Klein-Gordon mezőhöz csatolva időben periodikusnak tűnő lokalizált állapotok jöhetnek létre. Első cikkükben ezeket az objektumokat rezgő szoliton-csillagoknak nevezték. Időben periodikus megoldásokat keresve, numerikusan megoldották az első néhány Fourier módusra vonatkozó differenciálegyenlet rendszert, és az alkalmazott pontosság erejéig lokalizált megoldásokat találtak. Ezeket egy gömbszimmetrikus esetre kidolgozott numerikus kódban kezdeti értéként használva, tényleg nagyon jó közelítéssel periodikusan fejlődő állapotokra jutottak, ami a rezgő szoliton-csillagok stabilitását is jól mutatta. Azt is belátták, hogy általános gömbszimmetrikus Gauss típusú kezdőadatból is hasonló hosszú élettartamú megoldások fejlődhetnek ki, ami a megoldások fizikai jelentőségét valószínűsítette. Az alkalmazott numerikus pontossággal a megoldások teljesen idő-periodikusnak mutatkoztak, de a

szerzők megemlítették, hogy lehetséges hogy mégis van egy nagyon lassú változás az amplitúdóban és frekvenciában, ahhoz hasonlóan, ahogy két egymás körül keringő fekete lyuk állapota is lassan változik a gravitációs hullámok kisugárzása miatt.

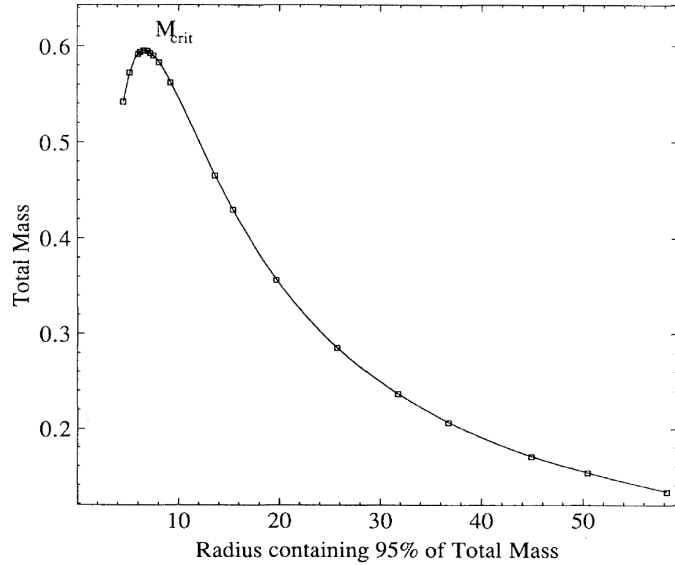
Komplex és valós skalármezők is létrehozhatnak szoliton-csillagokat. Komplex mező esetén a létrejövő objektumok bozoncsillag néven ismertek [130, 131, 132, 133, 134]. Bozoncsillagok esetén csak a ϕ skalármező argumentuma függ az időtől, $e^{i\omega t}$ alakban, és ennek köszönhetően a téridő metrikája időfüggetlen marad. Valós mező által létrehozott szoliton-csillag esetén a skalár és a metrika is időben oszcillál, így technikailag is lényegesen bonyolultabb ennek az esetnek a vizsgálata. Seidel és Suen egy következő publikációban [38] tanulmányozták a kiterjedt komplex és valós skalár állapotok kis tartományokba való összeomlását (lásd 3.1 ábra). A szoliton-csillagok létrejöttét az teszi lehetővé, hogy a skalármező



3.1. ábra. Az r radiális koordináta négyzetével szorzott ρ energiasűrűség időfejlődése r függvényeként gömbszimmetrikus öngravitáló valós skalármező esetén. Forrás: Seidel és Suen [38].

egy része nagy távolságokra kilökődik, és így magával viszi a felesleges kinetikus energiát. A valós skalármezőből kialakuló rezgő szoliton-csillagokra ebben a második cikkben Seidel és Suen az *oszcillaton* elnevezést vezették be, amelynek használata általánossá vált az irodalomban. A rezgő szoliton-csillagokról szóló első, rövid levél formátumú cikkükben már nagyon sok fontos információ található ezekről az objektumokról [37]. A sík háttéren létező skalár oszcillonokhoz, és a komplex öngravitáló skalármezők által létrehozott bozoncsillagokhoz hasonlóan, az oszcillaton megoldásoknak is egyparaméteres serege létezik. A középponti amplitúdó növelésével a megoldások térbeli mérete csökken, és frekvenciájuk is kisebbé válik.

A 3.2 ábrán az oszcillaton tömegének változását láthatjuk a méret függvényében. A neut-



3.2. ábra. Oszcillatonok teljes tömege a méretük függvényeként. A méret alatt itt annak a gömbnek sugarát értjük, ami a teljes tömeg 95 százalékát tartalmazza. Forrás: Seidel és Suen [37].

roncsillagoknál és hasonló asztrofizikailag jelentős lokalizált állapotoknál tapasztalt általános törvényszerűségnek megfelelően, a méret csökkenésével és a középponti energiasűrűség növekedésével eljutunk egy M_{crit} maximális tömegű kritikus állapothoz, amely után a méretet tovább csökkentve az oszcillaton instabillá válik. Mivel adott tömeghez kétféle oszcillaton is tartozik, a bozoncsillagoknál elterjedt jelölést átvéve, az ábrán a maximumtól jobbra lévő stabil állapotokat az S-ágon lévőknek szokás nevezni, míg a baloldali instabilak az U-ágot alkotják.

A különféle kozmológiai modellekben szereplő skalármezőkből létrejövő oszcillatonok a galaxisokban lévő sötét anyag modellezésére is alkalmasak lehetnek [43, 44]. Ha az idő szerinti Fourier kifejtésnek csak az első tagját vesszük figyelembe, vagyis feltesszük hogy a ϕ skalármező időfüggése pontosan $\cos(\omega t)$ alakú, már akkor eljuthatunk az oszcillatonok főbb tulajdonságainak megértéséhez [135]. Minél kisebb az oszcillaton amplitúdója, annál kevésbé fontosak a magasabb rendű Fourier komponensek, és annál inkább hasonlónak válik az oszcillaton az azonos tömegű bozoncsillaghoz. A Fourier kifejtés tizedik rendjéig elvégzett numerikus számolással kapott részletes eredményeket Ureña-López, Matos és Becerril [136] cikkében találhatjuk. Azonban, az alkalmazott numerikus pontosság nem tette lehetővé, hogy észlelhetővé váljon az időperiodikus megoldásoknál szükségképpen megjelenő állóhullám fa-

rok, amely sok nagyságrenddel kisebb a belső tartományban jellemző amplitúdónál. Ugyan-
 ebben a cikkben mutatták meg, hogy kis amplitúdó, vagyis nagy méret és gyenge gravitáció
 esetén, az időben periodikus oszcillatonok és bozoncsillagok ugyanazzal a két egyenletből
 álló közös másodrendű differenciálegyenlet rendszerrel írhatók le. Ezek az irodalomban
 Schrödinger-Newton egyenletek néven ismertek. Az időperiodikusság feltételezése nélkül, a
 kis amplitúdós esetben a Schrödinger-Newton egyenletek időfüggő komplex mezőre vonat-
 kozó általánosításához jutunk, amelyek Schrödinger-Poisson, vagy Gross-Pitaevskii-Poisson
 egyenletek néven ismertek. Segítségükkel könnyebben vizsgálható a közel newtoni oszcillato-
 nok és bozoncsillagok stabilitása és kialakulása [137, 138, 139].

Tetszőleges amplitúdó esetén, gömbszimmetrikus relativisztikus valós skalármező időben
 való fejlődését számoló numerikus kód segítségével, Alcubierre és szerzőtársai [140] részlete-
 sen tanulmányozták a deformált oszcillatonok viselkedését. Az S-ágon lévő oszcillatonok kis
 perturbáció hatására egy csökkenő amplitúdójú alacsony frekvenciás kvázi-normális rezgés
 keretében tartanak egy közeli másik S-oszcillaton állapothoz. A Fourier eljárással számolt
 oszcillaton kezdőadathoz nem túl nagy amplitúdójú Gauss formájú deformációt hozzáadva
 általában továbbra is valamelyik S-ágon lévő oszcillatonhoz tart a rendszer. Ha azonban a
 deformáció hatására az oszcillatonok maximális M_{crit} tömegénél jelentősen nagyobbá válik a
 rendszer tömege, akkor a végső állapot fekete lyuk lehet. Ezek a vizsgálatok nem csak azt
 mutatják, hogy az S-ágon lévő oszcillatonok stabilak, de azt is hogy a rendszer egyik általá-
 nos végállapotának felelnek meg. Az U-ágon lévő oszcillatonoknak megfelelő kezdőadatokon
 szükségképpen jelen lévő kis numerikus perturbáció az időfejlődés során gyorsan tovább nö-
 vekszik, és a rendszer nagy amplitúdójú kvázi-normális rezgés közben tart egy S-ágon lévő
 oszcillatonhoz. Az U-ágon lévő oszcillaton nagyobb mértékű perturbációja esetén, ha az nö-
 veli a rendszer tömegét akkor a végállapot fekete lyuk lesz. Ha viszont a perturbáció csökkenti
 a tömeget, akkor a végállapot az S-ágon lévő valamelyik stabil oszcillaton. Érdekes módon,
 ezen folyamatok során az alacsony frekvenciás kvázi-normális rezgés frekvenciája időben nem
 változik, még olyan esetekben sem, amikor a rendszer tömege a kisugárzott skalármező miatt
 lényegesen csökken. Az U-ágon lévő instabil oszcillatonok a tömeges skalármezők összeom-
 lásának vizsgálatokor megfigyelt kritikus állapotoknak felelnek meg, amelyek éppen a fekete
 lyukká való összeomlás határán vannak [141, 142].

Az oszcillatonok nagy d térdimenzió esetén való viselkedését a [143] cikkben tanulmá-
 nyozták. Mivel az $f(R)$ gravitáció ekvivalens a normál Einstein-féle gravitációhoz csatolt
 valós skalármezővel, ezekben az alternatív elméletekben már vákuum esetén is létrejöhetnek
 az oszcillatonoknak megfelelő lokalizált objektumok [144].

Az oszcillatonokkal kapcsolatos legtöbb vizsgálat az $U(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ önkölcsönhatás men-

tes tömeges Klein-Gordon potenciál esetére korlátozódott. Nemcsak azért mert ez a legegyszerűbb és legtermészetesebb választás, hanem azért mert belátható, hogy kis amplitúdók és nagy méretek esetén a gravitációs kölcsönhatás dominál a skalár önkölcsönhatása felett. Ureña-López, Valdez-Alvarado és Becerril [145] a Klein-Gordon esethez hasonló részletes módon tanulmányozták azt az esetet, amikor a potenciálhoz hozzáadódik egy $\frac{1}{16}\lambda\phi^4$ önkölcsönhatási tag, ahol $\lambda \geq 0$ hogy a potenciál alulról korlátos maradjon. A megoldások ekkor is S és U ágra osztályozhatók, a Klein-Gordon esethez hasonló stabilitási tulajdonságokkal még nagy deformációk esetén is. Lényeges változás, hogy az M_{crit} maximális tömeg λ növelésével egyre nagyobbá válik, a bozoncsillagoknál is tapasztalt módon.

Időben periodikus oszcillaton megoldásoknak végtelen sok egyparaméteres serege létezik, amelyek a skalármező radiális koordináta szerinti zérushelyeinek számával (nódusaival) vannak indexelve [135, 136]. Az alapállapotnak megfelelő egyparaméteres család oszcillatonjainál ϕ -nek nincs zérushelye az időtükrözési szimmetriának megfelelő $t = 0$ időpontban. Az n -edik gerjesztett állapotú oszcillatonoknál a skalármezőnek n zérushelye van. Természetes fizikai intuíció, hogy a gerjesztett állapotú oszcillatonok nagyobb energiájúak és valószínűleg instabilak, így a megjelent cikkek szinte mindegyike csak az alapállapotban lévővel foglalkozik. Balakrishna és szerzőtársai [146] a Fourier kifejtés segítségével konstruáltak időben periodikus gerjesztett állapotokat, és időfejlődési kód segítségével demonstrálták hogy valóban instabilak. Viszonylag kis amplitúdójú gerjesztett oszcillatonok alapállapotú oszcillatonná, a nagy amplitúdójúak pedig fekete lyukká omlanak össze. Ugyanebben a cikkben található az első eredmények nem gömbszimmetrikus oszcillatonok viselkedéséről, 3 + 1 dimenziós időfejlesztési kód segítségével. A szimulációk szerint, nem gömbszimmetrikus perturbációk gravitációs sugárzás kibocsátásával gyorsan lecsengenek.

Az oszcillatonok kialakulásához szükséges valós skalármezőt a legtermészetesebb módon az axionok és hasonló alacsony tömegű gyengén kölcsönható hipotetikus bozon részecskék adhatják [147, 45, 148, 46, 149, 47, 150, 48]. Ha az önkölcsönhatás mentes $U(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ Klein-Gordon potenciál helyett a skalármező önkölcsönhatását az axionokra jellemző $U(\phi)$ potenciál határozza meg, akkor az irodalom egy részében a kialakuló oszcillatonokat axioncsillagoknak nevezik [49, 50, 51]. Ezen cikkek közül némelyikben oszcillaton helyett oszcillaton elnevezést használnak. Axion-szerű mezők fejlődését vizsgáló kozmológiai szimulációk azt mutatják, hogy a formálódó diffúz sötét anyagcsomók középső részén oszcillatonoknak megfelelő szoliton magok jönnek létre [52, 53]. Axion-csillagok vagy fekete lyukak kialakulásának kezdeti feltételektől való függését a [142, 151, 152, 153, 154] cikkekben tanulmányozták. Axion-csillag és neutroncsillag ütközésekor erős gravitációs és elektromágneses sugárzás bocsátódik ki [155, 156]. Általános 3 + 1 dimenziós numerikus kód segítségével megmutatták,

hogy axion-csillag és neutroncsillag ütközése eredményeként axion felhővel körülvevett fekete lyuk vagy neutroncsillag jön létre [157]. Nagyon alacsony tömegű axion-szerű részecskék által alkotott elmosódott (fuzzy) sötét anyag magyarázatot adhat arra, hogy miért nem figyelhetünk meg bizonyos méret alatti sötét anyag csomókat törpegalaxisokban [54, 55, 56, 57]. Az összeomlást tulajdonképpen a Heisenberg féle határozatlansági reláció akadályozza meg. Az ultra kis tömegű skalár sötét anyagból formálódó oszcillatonokat számos cikkben egyszerűen csak szolitonoknak nevezik. A kis amplitúdós nagyméretű sötét anyag struktúrák kialakulásához a teljes Einstein egyenletek helyett megfelelő a gyenge gravitációs esetet leíró Schrödinger-Poisson (Gross-Pitaevskii-Poisson) egyenletek tanulmányozása [158, 159].

Mivel az oszcillatonok akár galaktikus méretűek is lehetnek, fontos megvizsgálni, hogy az időben periodikusan változó metrika hogyan befolyásolja a belső tartományban lévő csillagok vagy egyéb kompakt objektumok geodetikus mozgását [160, 161]. A skalár sötét anyag csillagok belsejében is összegyűlhet, és ott oszcillaton-szerű magot hozhat létre. A kezdeti várakozásokkal ellentétben, a sötét anyag elnyelése általában nem segíti elő a csillagok fekete lyukká való összeomlását [58, 59]. Tömeges vektormező is létrehozhat lokalizált állapotokat, komplex vektormező esetén a bozoncsillagokhoz hasonlóan sztatikus metrikával [162], míg valós vektormező esetén pedig oszcillatonokhoz hasonlóan időben periodikusan rezgő metrikával [60, 59]. Ezekre az objektumokra a Proca-csillag elnevezés terjedt el. Általános numerikus kóddal történő relativisztikus szimuláció azt mutatja, hogy egymással ütköző oszcillatonok csak akkor hoznak létre fekete lyukat, ha kezdetben a rendszerben lévő összes tömeg sokkal nagyobb mint az oszcillatonok M_{crit} maximális tömege [58, 59]. Az ütközéskor kibocsátódó gravitációs hullámok jellege lényegesen eltérhet a fekete lyukak ütközésekor létrejövőktől [163].

Bozoncsillagok esetén a $\phi = p \exp(i\omega t)$ időfüggésű skalármező valós és képzetes része tekinthető két külön valós skalárnak is [164]. Feltételezve, hogy a két valós skalármező $\phi_1 = p_1 \cos(\omega t)$ és $\phi_2 = p_2 \cos(\omega t + \delta)$ alakú, a $p_1 = p_2 = p$ és $\delta = -\pi/2$ választással bozoncsillagokhoz jutunk. A $p_1 = p_2 = p/2$ és $\delta = 0$ választással $\phi = p \cos(\omega t)$, vagyis az oszcillatonok vezető rendű közelítését kapjuk. Hawley és Choptuik [165] cikkében bozoncsillagoknak megfelelő $p_1 = p_2 = p$ és tetszőleges δ fáziskülönbségű kezdőadatokat időfejlődését tanulmányozták. Eredményként minden esetben hosszú élettartamú lokalizált közel periodikus oszcillaton-szerű állapot adódik, a rezgés amplitúdójában egy alacsony frekvenciás modulációval. Érdekes módon a kezdeti adatban választott δ fáziskülönbség ϕ_1 és ϕ_2 között az időfejlődés során is nagy pontossággal megmarad. A numerikus eredmények azt valószínűsítik, hogy megoldások két-paraméteres serege létezik amelyek között oszcillatonok és bozoncsillagok egyaránt szerepelnek. Hasonló eredmények kaphatók komplex és valós Proca-

csillagok esetén is [166].

Bár az oszcillatonok létezését megmutató, 1991-ben megjelent cikkükben Seidel és Suen [37] rámutattak, hogy lehetséges hogy az oszcillatonok skalármező kisugárzásával nagyon lassan energiát veszítenek, ezt követően számos cikkben nem találtak erre utaló jelet a numerikus számolásokban. Általában hallgatólagosan feltételezték, hogy az oszcillatonok valóban exponenciálisan lokalizáltak és időben periodikusak. Az hogy számos cikkben nem találtak az oszcillatonok energiavesztésére utaló jeleket, érthető annak fényében, hogy mennyivel kisebb a sugárzásért felelős rezgő farok amplitúdója a mag amplitúdójánál. A megfigyeléshez legmegfelelőbb esetben, a legnagyobb tömegű oszcillatonnál, a középponti amplitúdó 0.5 körüli, ami kifelé haladva exponenciálisan csökken, és a rezgő farok megjelenésekor annak nagysága 10^{-8} nagyságrendű. Kisebb amplitúdójú oszcillatonoknál az arány ennél is rosszabbá válik, mert a farok nagysága a központi amplitúdó függvényeként exponenciálisan csökken.

3.2. Relativisztikus skalármezők

3.2.1. A rendszert leíró egyenletek

Gravitációhoz csatolt ϕ valós skalármezőt vizsgálunk az általános relativitáselmélet keretében. A skalár önkölcsönhatását az $U(\phi)$ potenciál határozza meg. Feltesszük, hogy a görbült téridő $d+1$ dimenziós, x^a koordinátákkal, és a g_{ab} metrika szignatúrája $(-+++ \dots)$. A dolgozatban $G = c = \hbar = 1$ Planck-egységeket használunk, és ahol szükséges az eredményeket átkonvertáljuk hétköznapi egységekre. A Lagrange-sűrűségfüggvény a skalármezőt (2.1) szerint meghatározó \mathcal{L}_M és a gravitácót leíró \mathcal{L}_G tagok összegéből áll,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi} \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_M . \quad (3.1)$$

Az Einstein-féle gravitációt leíró Lagrange-sűrűség Λ kozmológiai állandó esetén

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{-g}(R - 2\Lambda) , \quad (3.2)$$

ahol a g_{ab} metrika determinánsa g , és a hozzá tartozó skalár görbület R . A (3.1) szerinti \mathcal{L} -ből definiált hatásintegrálnak a g^{ab} szerinti variálásával kaphatjuk az Einstein egyenleteket,

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab} , \quad (3.3)$$

ahol a skalármező T_{ab} energia-impulzus tenzora az általános esetben is (2.4) szerint adott. A $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R$ Einstein-tenzor $d = 1$ térdimenzió esetén nyom-mentes, és így az Einstein egyenlet nyomát véve következik, hogy $U(\phi)$ állandó. Emiatt a továbbiakban feltesszük,

hogy $d \geq 2$. A ϕ skalármező szerinti variálás az általános esetben is a (2.3) általánosított Klein-Gordon egyenlethez vezet. Ez a hullámegyenlet nem független, ugyanis a (3.3) Einstein egyenletek divergenciáját véve is megkapható, a $\nabla^a G_{ab} = 0$ kétszer kontrahált Bianchi azonosság felhasználásával.

Az x^c koordináták függvényeként tekintve, ha a skalár $\phi(x^c)$ és a $g_{ab}(x^c)$ metrika megoldja az Einstein egyenleteket U potenciál és Λ kozmológiai állandó mellett, akkor tetszőleges γ pozitív konstans esetén

$$\hat{\phi}(x^c) = \phi(\gamma x^c) , \quad \hat{g}_{ab}(x^c) = g_{ab}(\gamma x^c) \quad (3.4)$$

szintén megoldás, átskálázott $\gamma^2 U$ potenciál és $\gamma^2 \Lambda$ kozmológiai állandó mellett. Ezt a skálázási szabadságot felhasználhatjuk arra, hogy a skalármező tömegét tetszőleges értékre állítsuk be. Gömbszimmetria és gömbi koordináták esetén természetesen nem szükséges a szögkoordináták átskálázása, csak a t idő és r radiális koordinátáé. Kozmológiai konstans hiánya esetén a rendszer egyetlen természetes hosszúság skáláját a skalármező m tömege adja, így természetes az $m = 1$ választás, amit $\Lambda = 0$ eset tanulmányozásakor a továbbiakban fel is teszünk. A fizikailag érdekes végeredmények alkalmazásakor a skálázással vissza fogjuk állítani az m függést, és természetes egységeket fogunk használni a Planck egységek helyett.

Feltesszük, hogy az $U(\phi)$ potenciálnak minimuma van a $\phi = 0$ helyen, és ott az értéke $U(\phi) = 0$. A potenciálmínimum körüli kifejtést továbbra is a (2.39) egyenletnek megfelelően írjuk fel, a skalármező m tömege és a g_k kifejtési együtthatók segítségével. A skalármező fejlődésére vonatkozó (2.3) hullámegyenletben a potenciál $U'(\phi)$ deriváltját a (2.40) alakú kifejtés adja.

Hogy elkerülhessük az egyenletekben a skalármezőt tartalmazó tagoknál megjelenő 8π szorzókat, bevezetünk egy átskálázott skalármezőt és átskálázott potenciált,

$$\bar{\phi} = \sqrt{8\pi} \phi , \quad \bar{U}(\bar{\phi}) = 8\pi U(\phi) . \quad (3.5)$$

Ekkor (2.4) szerint az Einstein egyenletek jobboldala

$$8\pi T_{ab} = \nabla_a \bar{\phi} \nabla_b \bar{\phi} - g_{ab} \left[\frac{1}{2} \nabla^c \bar{\phi} \nabla_c \bar{\phi} + \bar{U}(\bar{\phi}) \right] . \quad (3.6)$$

Az átskálázott potenciál kifejtése

$$\bar{U}(\bar{\phi}) = \frac{1}{2} m^2 \bar{\phi}^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k+1} \bar{g}_k \bar{\phi}^{k+1} , \quad (3.7)$$

ahol kifejtést megadó konstansok transzformálódása

$$\bar{g}_k = \frac{g_k}{(8\pi)^{(k-1)/2}} . \quad (3.8)$$

Mivel $\bar{U}'(\bar{\phi}) = \sqrt{8\pi} U'(\phi)$, a hullámegyenlet (2.3) alakja változatlan,

$$\nabla^a \nabla_a \bar{\phi} = \bar{U}'(\bar{\phi}) . \quad (3.9)$$

3.2.2. Tömeg gömbszimmetria esetén

A dolgozatban $d+1$ dimenziós gömbszimmetrikus téridőt vizsgálunk, $x^a = (t, r, \theta_1, \dots, \theta_{d-1})$ koordináták használatával. A metrikát diagonálisnak választhatjuk, és a komponenseket az alábbi módon nevezzük el,

$$g_{tt} = -A , \quad g_{rr} = B , \quad g_{\theta_1 \theta_1} = C , \quad g_{\theta_n \theta_n} = C \prod_{k=1}^{n-1} \sin^2 \theta_k , \quad (3.10)$$

ahol A , B és C a t idő és r radiális koordináta függvénye, és $2 \leq n \leq d-1$.

A $d-1$ dimenziós szimmetria-gömbökön indukált metrikát, és ezzel egyúttal azok felületének nagyságát, a C függvény határozza meg. A felület geometriája ugyanolyan mint sík háttéren egy

$$\hat{r} = \sqrt{C} \quad (3.11)$$

sugarú gömbnek. Tetszőleges időfüggés és gömbszimmetria esetén ez az \hat{r} függvény teljesen koordináta-rendszer független módon is definiálható. A téridő bármelyik pontjában \hat{r} értékét az határozza meg, hogy milyen felületű gömbön helyezkedik el, vagyis hogy az ugyanilyen geometriájú gömbnek a sík térben mekkora lenne a sugara. Az \hat{r} függvény segítségével, tetszőleges Λ kozmológiai állandó mellett, koordináta-rendszer független módon definiálhatjuk az \hat{m} Misner-Sharp energiafüggvényt [167, 168]

$$\hat{m} = \frac{(d-1)\pi^{\frac{d}{2}}}{8\pi\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \hat{r}^{d-2} \left(1 - g^{ab} \hat{r}_{,a} \hat{r}_{,b} - \frac{2\Lambda}{d(d-1)} \hat{r}^2 \right) . \quad (3.12)$$

A függvény lokális módon számolható a metrika komponenseiből és deriváltjaikból. Mint hamarosan látni fogjuk, \hat{m} értéke az \hat{r} sugarú gömbön belül elhelyezkedő tömeg nagyságát adja meg. Időderiváltja az adott gömbön a skalármező által kisugárzott energiaárammal egyezik meg. Aszimptotikus értéke a téridő teljes M tömegét határozza meg. Az $\hat{r} = 0$ középpontban bármely t esetén $\hat{m} = 0$. Ezt legkönnyebben $r = \hat{r} = \sqrt{C}$ Schwarzschild koordináta-rendszert használva láthatjuk be, ugyanis ekkor a középpontban $g^{rr} = 1$ és a (3.12) kifejezés zárójeles része eltűnik $r = 0$ esetén.

Azt hogy \hat{m} a gömbön belül elhelyezkedő tömeg nagyságát adja meg, legtermészetesebben úgy látható be, hogy egy megmaradó mennyiség integrálja segítségével definiálunk egy E

energiafüggvényt, és belátjuk, hogy $E = \hat{m}$. Az \hat{r} függvény felhasználásával definiálhatjuk a Kodama vektort [169, 170]

$$K^a = \epsilon^{ab} \nabla_b \hat{r} , \quad (3.13)$$

ahol az ϵ_{ab} antiszimmetrikus tenzor a térfogati forma a (t, r) síkban. Olyan irányítottságot választva, hogy $\epsilon_{rt} = \sqrt{AB}$, a Kodama vektor a jövőbe mutat, és a nemnulla komponensei

$$K^t = \frac{\hat{r}_{,r}}{\sqrt{AB}} , \quad K^r = -\frac{\hat{r}_{,t}}{\sqrt{AB}} , \quad (3.14)$$

ahol a t és r koordináták szerinti parciális deriválást vesszővel jelöljük. A (3.13) definícióból következően a Kodama vektor divergenciamentes, $\nabla_a K^a = 0$. A metrika (3.10) alakját használva, közvetlen számolással belátható, hogy $G^{ab} \nabla_a K_b = 0$. Az Einstein egyenletekből következik hogy a

$$J_a = T_{ab} K^b \quad (3.15)$$

energiaáram szintén divergenciamentes, $\nabla_a J^a = 0$, és így egy megmaradó töltést definiál. Egy n^a jövőbe mutató normálvektorú konstans t hiperfelületre integrálva, a megmaradó töltés

$$E = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^r \hat{r}^{d-1} \sqrt{B} n^a J_a dr = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^r \frac{\hat{r}^{d-1}}{A} (T_{tt} \hat{r}_{,r} - T_{tr} \hat{r}_{,t}) dr . \quad (3.16)$$

Hosszadalmasabb számolással ellenőrizhető, hogy a Misner-Sharp energiafüggvény deriváltja

$$\nabla_a \hat{m} = -\frac{2\pi^{\frac{d}{2}} \hat{r}^{d-1}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \epsilon_{ab} J^b . \quad (3.17)$$

A sugár irányú deriváltra következik, hogy

$$\hat{m}_{,r} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}} \hat{r}^{d-1}}{\Gamma(\frac{d}{2}) A} (T_{tt} \hat{r}_{,r} - T_{tr} \hat{r}_{,t}) , \quad (3.18)$$

amit (3.16)-al összehasonlítva kapható a kívánt azonosság, $E = \hat{m}$. A Misner-Sharp energiafüggvény időderiváltja

$$\hat{m}_{,t} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}} \hat{r}^{d-1}}{\Gamma(\frac{d}{2}) B} (T_{rt} \hat{r}_{,r} - T_{rr} \hat{r}_{,t}) . \quad (3.19)$$

Ha $\Lambda = 0$, a metrika nagy távolságokra aszimptotikusan síkká válik, $A = B = 1$, $C = r^2$ és $\hat{r} = r$. Ekkor (2.4) és (3.5) felhasználásával,

$$\hat{m}_{,t} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}} r^{d-1}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \phi_{,t} \phi_{,r} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}} r^{d-1}}{8\pi \Gamma(\frac{d}{2})} \bar{\phi}_{,t} \bar{\phi}_{,r} , \quad (3.20)$$

amely kifejezést az oszcillatonok energiavesztésének számolásakor fogjuk használni. Az eredmény konzisztens a sík háttéren az energia kisugárzására felírt (2.11) és (2.12) kifejezésekkel.

Mivel az oszcillatonoknál a skalármező exponenciálisan lecseng a végtelenben, a téridő geometriája nagy távolságokban a vákuum Schwarzschild-Tangherlini [171] metrikához kell tartson. Schwarzschild koordináták használatával, amikor $C = r^2$, ennek a metrikának az alakja

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_0^{d-2}}{r^{d-2}} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_0^{d-2}}{r^{d-2}} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2, \quad (3.21)$$

ahol r_0 a tömegtől függő konstans. A térben konformisan sík rendszerben, amikor $C = r^2 B$, a metrika a következő formába írható,

$$ds^2 = - \left(\frac{4r^{d-2} - r_0^{d-2}}{4r^{d-2} + r_0^{d-2}} \right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{r_0^{d-2}}{4r^{d-2}} \right)^{\frac{4}{d-2}} (dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2). \quad (3.22)$$

Bármelyik koordináta rendszerben is számolva, a (3.12) által definiált \hat{m} Misner-Sharp energiafüggvény térben és időben is állandónak adódik, így a rendszer M teljes tömegét adja,

$$M = \hat{m} = \frac{(d-1)\pi^{\frac{d}{2}}}{8\pi\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} r_0^{d-2}. \quad (3.23)$$

$d = 3$ térdimenzió esetén $M = r_0/2$.

Lokalizált rendszerekre létezik egy további tömeg fogalom, a saját tömeg M_p (proper mass), amelyet az anyag energiasűrűségének egy állandó t hiperfelületre való integrálásával kaphatunk. Az energiasűrűség $\mu = T_{ab}u^a u^b$, ahol a jövőbe mutató u^a egységvektor komponensei $(1/\sqrt{A}, 0, \dots, 0)$. Gömbszimmetria esetén, az átskálázott skalármezővel felírva,

$$\mu = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{1}{2A} (\bar{\phi}_{,t})^2 + \frac{1}{2B} (\bar{\phi}_{,r})^2 + \bar{U}(\bar{\phi}) \right]. \quad (3.24)$$

A rendszer saját tömege a (3.10) metrika alak esetén a következő d dimenziós térfogati integrálként számolható:

$$M_p = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \int_0^\infty dr \mu \sqrt{BC^{d-1}}. \quad (3.25)$$

Ez a tömeg általában nagyobb mint a távoli megfigyelők által mérhető gravitációs hatást jellemző M teljes tömeg, amit az \hat{m} függvény távoli határértékeként kaphatunk. Az $E_b = M_p - M$ különbség a gravitációs kötési energiát adja meg, ami mindig pozitív.

3.2.3. Térben konformisan sík koordináták

A diagonális alakban választott és a szimmetria gömbökhöz igazodó (3.10) metrika alak még nem határozza meg egyértelműen az alkalmazott koordináta-rendszert. Az Einstein egyenletek az A , B és C függvények közül csak kettőre elegendő feltételt adnak, egy függvény

szabadon választható. A diffeomorfizmus szabadság legkézenfekvőbb és ezért leggyakrabban alkalmazott rögzítése a radiális koordináta $r = \hat{r} = \sqrt{C}$ választása, vagyis Schwarzschild koordináták használata. A diagonális metrika feltevése ekkor lerögzíti a konstans t hiperfelületeket is. Azonban, ahogy arra először Don N. Page [39] rámutatott, ésszerűbb olyan koordináták használata, ahol a d dimenziós tér konformisan sík, ami akkor teljesül, ha $g_{\theta_1\theta_1} = r^2 g_{rr}$, vagyis

$$C = r^2 B . \quad (3.26)$$

Ezt a választást az motiválja, hogy ekkor kisebb a g_{tt} metrika-komponens idő függvényeként való oszcillációja. Ezzel összefüggésben, az állandó $(r, \theta_1, \dots, \theta_{d-1})$ koordinátájú vonalakon mozgó megfigyelők által érzékelt rezgés jóval nagyobb a Schwarzschild esetben. Mint látni fogjuk, ha az oszcillaton amplitúdója ε^2 rendben kicsi, akkor ezen megfigyelők gyorsulásának időben periodikus része Schwarzschild koordinátánál ε^3 rendű, míg konform sík koordinátánál csak ε^5 rendű. Bozoncsillagok newtoni határesetben való viselkedésének tanulmányozására is megfelelőbbek lehetnek a térben konformisan sík koordináták [172]. A dolgozat hátralévő részében a (3.26) által meghatározott konformisan sík koordináta-rendszert fogjuk használni.

A térben konformisan sík koordináták használatakor az Einstein egyenletek nemtriviális egymástól lineárisan független komponensei a következő alakba írhatók:

$$\begin{aligned} (d-1) \left[\frac{d}{4B^2} (B_{,t})^2 - \frac{A}{r^{d-1} B^{(d+2)/4}} \left(\frac{r^{d-1} B_{,r}}{B^{(6-d)/4}} \right)_{,r} \right] - 2A \Lambda \\ = (\bar{\phi}_{,t})^2 + \frac{A}{B} (\bar{\phi}_{,r})^2 + 2A \bar{U}(\bar{\phi}) , \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} (d-1) \left[\frac{(d-2)(r^2 B)_{,r}}{4r^4 A^{2/(d-2)} B^2} (r^2 A^{2/(d-2)} B)_{,r} - \frac{1}{A^{1/2} B^{-1+d/4}} \left(\frac{B^{-1+d/4} B_{,t}}{A^{1/2}} \right)_{,t} - \frac{d-2}{r^2} \right] + 2B \Lambda \\ = (\bar{\phi}_{,r})^2 + \frac{B}{A} (\bar{\phi}_{,t})^2 - 2B \bar{U}(\bar{\phi}) , \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$- \frac{d-1}{2} A^{1/2} \left(\frac{B_{,t}}{A^{1/2} B} \right)_{,r} = \bar{\phi}_{,t} \bar{\phi}_{,r} , \quad (3.29)$$

$$\frac{rB}{A^{1/2}} \left(\frac{A_{,r}}{r A^{1/2} B} \right)_{,r} + (d-2) r B^{1/2} \left(\frac{B_{,r}}{r B^{3/2}} \right)_{,r} = -2 (\bar{\phi}_{,r})^2 . \quad (3.30)$$

A komponenseket úgy választottuk meg, hogy (3.27)-(3.30) jobboldalai sorban $16\pi T_{tt}$, $16\pi T_{rr}$, $8\pi T_{tr}$ és $16\pi(T_{\theta_1\theta_1}/r^2 - T_{rr})$ értékének feleljenek meg. A hullámegyenlet alakja a konformisan sík koordináta-rendszer esetén

$$\frac{\bar{\phi}_{,rr}}{B} - \frac{\bar{\phi}_{,tt}}{A} + \frac{\bar{\phi}_{,r}}{2r^{2d-2} A B^{d-1}} (r^{2d-2} A B^{d-2})_{,r} - \frac{\bar{\phi}_{,t}}{2B^d} \left(\frac{B^d}{A} \right)_{,t} - \bar{U}'(\bar{\phi}) = 0 . \quad (3.31)$$

Az általános koordináta-rendszer esetén érvényes egyenletek a [40] cikkünk függelékében találhatóak.

3.3. Oszcillatonok kis-amplitúdós kifejtése $\Lambda = 0$ esetén

A sík háttéren értelmezett kis-amplitúdós oszcillonok leírására a 2.8 fejezetben ismertett módszer általánosítható öngravitáló skalármezők esetére is. A kifejtés vezető rendje, általában kevésbe szisztematikus módszerekkel levezetve, már korábban ismert volt az irodalomban [136, 137, 39, 173], és a Schrödinger-Newton egyenletekhez vezet. Az oszcillonokra alkalmazott kifejtési módszerünket először egy sík háttéren értelmezett csatolt dilaton-skalár rendszerre általánosítottuk, ami szintén a Schrödinger-Newton egyenleteket adja vezető rendben [174], és így nagyon hasonlóan viselkedik a gravitációs rendszerhez. A fejezet hátralévő részében az aszimptotikusan sík $d + 1$ dimenziós oszcillatonok kifejtésére a [40] cikkben leközölt eredményeinket ismertetjük részletesen. Feltesszük, hogy a (3.4) skálázási szabadság segítségével már beállítottuk a skalármező tömegét az $m = 1$ értékre.

Az oszcillonok kifejtéséhez hasonlóan, a kis ε paraméter szerinti kifejtés nem konvergens, hanem aszimptotikus sor. Emiatt még közepes amplitúdóknál is nagyon jó közelítést ad az oszcillaton mag tartományára, de a sugárzásért felelős ε -ban exponenciálisan kicsi farok tartományt egyáltalán nem képes leírni. A kifejtés szerint a skalárfüggvény minden rendben exponenciálisan lokalizáltnak adódik.

3.3.1. A koordináták megválasztása

A (3.3) Einstein egyenletek és a (3.9) hullámeqyenlet lokalizált gömbszimmetrikus megoldásainak ε paraméterrel jellemzett családját keressük, amelynél $\varepsilon \rightarrow 0$ esetén $\phi \rightarrow 0$, és a metrika pedig a Minkowski téridőhöz tart. A (3.26) összefüggéssel jellemzett térben konformisan sík koordináta-rendszert használjuk. Az alkalmazott közelítésben a formalizmusból az is következik, hogy az összes olyan konfiguráció amelyben az idő múlásával ϕ nem növekszik minden határon túl, szükségképpen időben periodikusan kell rezegjen.

A sík háttéren értelmezett oszcillonokhoz hasonlóan arra számítunk, hogy minél kisebb az oszcillaton központi amplitúdója, annál nagyobb a mérete. A numerikus szimulációk egyértelműen megerősítik ezt az elvárást. Ezért bevezetünk egy új, átskálázott ρ radiális koordinátát

$$\rho = \varepsilon r , \tag{3.32}$$

ahol ε jelöli a kis paramétert. Ez egyben azt is jelenti, hogy térben lassan változó állapotokat keresünk.

A $\bar{\phi}$ skalárt és a metrikus komponenseket ε hatványai szerint fejtjük ki,

$$\bar{\phi} = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} \phi_{2k} , \quad (3.33)$$

$$A = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} A_{2k} , \quad (3.34)$$

$$B = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} B_{2k} . \quad (3.35)$$

Mivel aszimptotikusan Minkowski koordinátákat szándékozunk használni, ahol az oszcillatontól távol t a sajátidőt, és r a radiális távolságot méri, olyan ϕ_{2k} , A_{2k} és B_{2k} függvényeket keresünk, amelyek nullához tartanak ha $\rho \rightarrow \infty$.

A (3.33)-(3.35) kifejtésben a sík háttéren lévő oszcillonokhoz képesti legnagyobb eltérés az, hogy itt ε -nak csak páros hatványai szerepelnek. Ha megengedünk bármilyen ε hatványt a kifejtésben, akkor az alább leírt módszerrel belátható, hogy az összes páratlan ε hatvány együtthatója szükségképpen nulla kell legyen, kezdve az ε -ban lineáris tagokkal. A dolgot könnyebb áttekinthetősége miatt csak a szükséges páros hatványú tagokat írtuk a (3.33)-(3.35) kifejtésbe. Ha kicsi amplitúdóknál a lokalizált állapot mérete ε növelésével $1/\varepsilon$ szerint csökken, akkor sík háttérű oszcillonoknál a mag amplitúdója ε -al arányosan növekszik, míg öngravitáló oszcillatonoknál ε^2 -el arányos a növekedés. Ez alapvető különbséget jelent a két-féle objektum skálázási tulajdonságai között.

Az oszcillatonok rezgési frekvenciája is függ az amplitúdójuktól. A sík háttér esetéhez hasonlóan, minél kisebb az amplitúdó, annál közelebb kerül a frekvencia az $m = 1$ küszöbértékhez. Ezt a numerikus számolások is alátámasztják. Erre való tekintettel, bevezetünk egy átskálázott τ időkoordinátát,

$$\tau = \omega t , \quad (3.36)$$

ahol ω az ε paraméter függvénye. A τ koordinátát úgy választjuk meg, hogy azzal kifejezve az oszcillaton rezgési frekvenciája ε -tól függetlenül 1 legyen. Mivel a skalármező tömegét $m = 1$ értékre állítottuk be, az ω függvény az oszcillaton rezgési frekvenciáját adja. Az ω függvény négyzetének kifejtését az alábbi alakban keressük:

$$\omega^2 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} \omega_{2k} . \quad (3.37)$$

Ebben a kifejezésben is megengedhetnénk páratlan hatványú ε tagokat, de azok együtthatóira úgyszólván nulla jönne ki a kifejtésből adódó egyenletek alapján. Az állapotok paraméterezésében jelentős szabadsággal rendelkezünk. Ha kicsi ε -ra az amplitúdó arányos marad ε^2 -el, akkor

bármilyen $\varepsilon \rightarrow \bar{\varepsilon}(\varepsilon)$ átparaméterezés megengedett. A fizikai paraméter nem ε hanem az állapotok frekvenciája. Be fogjuk látni, hogy $3 \leq d \leq 5$ térbeli dimenzió esetén a paraméterezést lerögzíthetjük az $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ választással.

3.3.2. Vezető rendű eredmények

A téregyenletek amelyeket meg kell oldanunk a (3.27)-(3.30) Einstein egyenletek, és a (3.31) hullámgyenlet. A $C = r^2 B$ választásnak megfelelően, térben konform sík koordinátákat használunk. A kifejtés leírása a $C = r^2$ Schwarzschild koordináták használatával a [40] cikkünk függelékében található. Az új koordinátákra való áttéréskor a deriváltak a

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \omega \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial r} \rightarrow \varepsilon \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad (3.38)$$

szabály szerint transzformálódnak. Az egyenletekben az ω frekvenciának csak páros hatványai jelennek meg, amelyeket (3.37) segítségével helyettesítünk. Ezután a téregyenletek ε^n hatványokkal arányos részeit sorban oldhatjuk meg növekvő n értékek mellett.

Az első feltételeket ε^2 rendben kapjuk. Az Einstein egyenletekből következik hogy $\frac{\partial^2 B_2}{\partial \tau^2} = 0$ és $\frac{\partial^2 B_2}{\partial \tau \partial \rho} = 0$, a hullámgyenletből pedig hogy $\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \tau^2} + \phi_2 = 0$. Mivel az idő múlásával is korlátosnak maradó megoldásokat keresünk, τ szerint lineárisan növekvő tagokat nem engedhetünk meg. Így az egyenletek megoldása

$$\phi_2 = p_2 \cos(\tau + \delta), \quad B_2 = b_2, \quad (3.39)$$

ahol p_2 , δ és b_2 három új függvény amelyek csak ρ -tól függenek. Ezeknek a radiális függését az ε^4 rendű feltételek határozzák meg.

A (3.27) Einstein egyenlet ε^4 részéből következik hogy

$$\frac{d^2 b_2}{d\rho^2} + \frac{d-1}{\rho} \frac{db_2}{d\rho} = \frac{1}{d-1} p_2^2. \quad (3.40)$$

A (3.30) egyenlet ε^4 része a

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [(d-2)b_2 + A_2] \right\} = 0 \quad (3.41)$$

feltételt adja. Ennek megoldása $(d-2)b_2 + A_2 = \frac{1}{2}\rho f_1 + f_2$, ahol f_1 és f_2 két tetszőleges függvénye a τ időkoordinátának. Mivel b_2 -re és A_2 -re is olyan megoldásokat keresünk, amelyek a végtelenben nullához tartanak, szükségképpen $f_1 = f_2 = 0$, vagyis $(d-2)b_2 + A_2 = 0$. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy A_2 időfüggetlen. Hogy emlékeztessen az időfüggetlenségre, bevezetjük az

$$A_2 = a_2 \quad (3.42)$$

jelölést, ahol a_2 csak ρ függvénye. Ekkor

$$(d-2)b_2 + a_2 = 0 . \quad (3.43)$$

Ennek felhasználása után a (3.28) Einstein egyenlet ε^4 részéből adódó feltétel:

$$\frac{\partial^2 B_4}{\partial \tau^2} = \frac{p_2^2}{d-1} \cos [2(\tau + \delta)] . \quad (3.44)$$

Az időben nem korlátlanul növekvő megoldás

$$B_4 = b_4 - \frac{p_2^2}{4(d-1)} \cos [2(\tau + \delta)] , \quad (3.45)$$

ahol b_4 egy újabb tetszőleges függvénye ρ -nak. Itt elhagytunk egy τf_3 tagot, ahol f_3 függvénye ρ -nak. Mindezek után, a (3.29) egyenlet ε^4 részéből adódik, hogy $\frac{d}{d\rho}\delta = 0$. Az időkoordináta eltolásával ezután beállítjuk, hogy

$$\delta = 0 \quad (3.46)$$

legyen. Ez azt mutatja, hogy a skalármező ugyanolyan fázisban rezeg minden ρ sugárnál.

A (3.31) hullámeqyenlet ε^4 -el arányos része:

$$\frac{\partial^2 \phi_4}{\partial \tau^2} + \phi_4 + \frac{\bar{g}_2}{2} p_2^2 [1 + \cos(2\tau)] - \left[\frac{d^2 p_2}{d\rho^2} + \frac{d-1}{\rho} \frac{dp_2}{d\rho} + \omega_2 p_2 + (d-2)p_2 b_2 \right] \cos \tau = 0 . \quad (3.47)$$

Ennek az egyenletnek a szerkezete ugyanolyan mint a sík háttér esetén felírt (2.64) egyenleté. Időben korlátosnak maradó megoldás ϕ_4 -re csak akkor létezhet, ha a $\cos \tau$ rezonáns tag együtthatója eltűnik, vagyis

$$\frac{d^2 p_2}{d\rho^2} + \frac{d-1}{\rho} \frac{dp_2}{d\rho} + \omega_2 p_2 + (d-2)p_2 b_2 = 0 . \quad (3.48)$$

Ha $d \neq 2$, akkor ez az egyenlet és (3.40) egy csatolt rendszert ad a b_2 és p_2 függvényekre, amelynek lokalizált megoldásai lehetnek. A $d = 2$ térbeli dimenzió esetén az egyenletek szétcsatolódnak, (3.48) lineárisává válik, és így nyilvánvalóan nem létezhet lokalizált megoldás. Emiatt a továbbiakban feltesszük, hogy $d > 2$. Ekkor a csatolt rendszer (3.43) segítségével a következő alakba írható:

$$\frac{d^2 a_2}{d\rho^2} + \frac{d-1}{\rho} \frac{da_2}{d\rho} = \frac{d-2}{d-1} p_2^2 , \quad (3.49)$$

$$\frac{d^2 p_2}{d\rho^2} + \frac{d-1}{\rho} \frac{dp_2}{d\rho} = p_2 (a_2 - \omega_2) . \quad (3.50)$$

Ennek a rendszernek a megoldásai a (3.43)-ból származó

$$b_2 = \frac{a_2}{2-d} , \quad (3.51)$$

összefüggéssel együtt, az

$$\phi_2 = p_2 \cos \tau , \quad A_2 = a_2 , \quad B_2 = b_2 \quad (3.52)$$

egyenleteken keresztül meghatározzák a $\bar{\phi}$, A és B függvények vezető, ε^2 rendű viselkedését kis amplitúdós oszcillatonok esetére. Eddig a rendig a függvények ugyanazok bármilyen alakú skalárpotenciál esetére, feltéve hogy a skalármező tömegét $m = 1$ értékre állítottuk be. Ez azt jelenti, hogy a kis amplitúdójú és emiatt nagy méretű oszcillatonok mindig ugyanúgy viselkednek mint a Klein-Gordon esetben, vagyis ilyenkor a gravitációs kölcsönhatás dominál a skalár önkölcsönhatása felett.

A (3.48) rezonanciafeltétel teljesülése esetén (3.47) meghatározza ϕ_4 időfüggését,

$$\phi_4 = p_4 \cos \tau + \frac{\bar{b}_2}{6} p_2^2 [\cos(2\tau) - 3] , \quad (3.53)$$

ahol p_4 egy függvénye ρ -nak. A megadott ϕ_4 akkor is megoldás marad, ha hozzáadunk egy további $q_4 \sin \tau$ tagot, ahol q_4 tetszőleges függvénye ρ -nak. Azonban, az ε -ban magasabb rendű egyenletekből következik, hogy az időkoordináta kis eltolásával mindig beállítható hogy $q_4 = 0$ legyen. Hasonlóan, minden magasabb ε rendben belátható, hogy csak $\cos(k\tau)$ időfüggésű tagok jelennek meg a kifejtésben, és így az oszcillaton a $\tau = 0$ pillanatban időtükrözésre szimmetrikus kell legyen. A B_4 függvény időfüggése (3.45) által adott, míg A_4 időfüggése és a térbeli függés ε^6 rendben határozódik majd meg.

3.3.3. A Schrödinger-Newton egyenletek

Bevezetve az s és S függvényeket az

$$s = \omega_2 - a_2 , \quad S = p_2 \sqrt{\frac{d-2}{d-1}} , \quad (3.54)$$

összefüggésekkel, a (3.49) és (3.50) egyenletek a következő alakba írhatók:

$$\frac{d^2 S}{d\rho^2} + \frac{d-1}{\rho} \frac{dS}{d\rho} + sS = 0 , \quad (3.55)$$

$$\frac{d^2 s}{d\rho^2} + \frac{d-1}{\rho} \frac{ds}{d\rho} + S^2 = 0 , \quad (3.56)$$

amelyek időfüggetlen Schrödinger-Newton (SN) egyenletek néven ismertek [175, 176, 177, 178]. A kvantummechanikai állapotfüggvény gravitáció közvetítésével történő összeomlásának tanulmányozásával is ezekhez az egyenletekhez juthatunk [179, 180]. Kis amplitúdójú bozoncsillagok newtoni viselkedését is a SN egyenletek írják le [131, 172, 181]. Az SN egyenletek általánosítása Choquard egyenlet néven ismert az irodalomban [182].

Az (3.55)-(3.56) SN egyenletek egy megoldásából az

$$(S(\rho), s(\rho)) \rightarrow (\lambda^2 S(\lambda\rho), \lambda^2 s(\lambda\rho)) \quad (3.57)$$

skálázási invariancia segítségével bármely $\lambda > 0$ -ra egy másik megoldást állíthatunk elő.

Ha a tér dimenziója $3 \leq d \leq 5$, akkor az SN egyenleteknek bármely $n \geq 0$ egész szám esetén létezik olyan megoldása, amelynél S -nek n zérushelye van. Az $n = 0$ -val jellemzett zérushely nélküli megoldás a legalacsonyabb energiás és legstabilabb oszcillatónak felel meg, ezért a továbbiakban csak azzal foglalkozunk. A megoldásoknál $\rho \rightarrow \infty$ esetén S exponenciálisan tart nullához, valamint s egy $s_0 < 0$ konstanshoz tart, az alábbi módon:

$$s \approx s_0 + s_1 \rho^{2-d} . \quad (3.58)$$

A (3.57) skálázási szabadságot arra használjuk, hogy beállítjuk, hogy $s_0 = -1$ legyen. Egyúttal megváltoztatjuk a ε paraméterezést úgy, hogy $\omega_2 = -1$ legyen, ami biztosítja hogy a_2 aszimptotikusan nullához tart. Ekkor az a_2 függvény aszimptotikus viselkedése

$$a_2 \approx -s_1 \rho^{2-d} , \quad (3.59)$$

amihez már csak exponenciálisan lecsengő járulékok jönnek hozzá. Az ε kifejtés magasabb rendjeinél be lehet állítani, hogy a (3.37) kifejtésben $\omega_i = 0$ legyen minden $i > 2$ esetén, amivel lerögzítjük az ε paraméterezést az ω frekvenciához viszonyítva,

$$\omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \quad \text{ha} \quad 3 \leq d \leq 5 . \quad (3.60)$$

Ha a tér dimenzióinak száma $d = 6$, akkor az aszimptotikusan lecsengő megoldások ismertek,

$$s = \pm S = \frac{24\alpha^2}{(1 + \alpha^2 \rho^2)^2} \quad (3.61)$$

ahol α tetszőleges állandó. Ebben az esetben s és S is lecseng a végtelenben, de a megoldás nem exponenciálisan lokalizált. Továbbá, annak érdekében, hogy a φ nullához tartson a végtelenben, meg kell követelnünk, hogy $\omega_2 = 0$ legyen. A $d = 6$ esetben az egyetlen nemelűnő koefficiensnek $\omega_4 = -1$ választható. Ha a térbeli dimenziók száma $d > 6$, akkor az SN egyenleteknek nincs véges energiájú lokalizált állapotot leíró megoldása [178].

Az s függvény aszimptotikus viselkedése által motiválva, ha $d \neq 2$, hasznos bevezetni az alábbi változókat:

$$\sigma = \frac{\rho^{d-1}}{2-d} \frac{ds}{d\rho} , \quad \nu = s - \rho^{2-d} \sigma . \quad (3.62)$$

$3 \leq d \leq 5$ dimenzió esetén ezek a korábban definiált konstansokhoz tartanak,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sigma = s_1 , \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \nu = s_0 . \quad (3.63)$$

A Schrödinger-Newton egyenletek a következő ekvivalens alakba írhatók:

$$\frac{d\sigma}{d\rho} + \frac{\rho^{d-1}}{2-d} S^2 = 0, \quad (3.64)$$

$$\frac{d\nu}{d\rho} + \frac{\rho}{d-2} S^2 = 0, \quad (3.65)$$

$$\frac{d^2 S}{d\rho^2} + \frac{d-1}{\rho} \frac{dS}{d\rho} + (\nu + \rho^{2-d}\sigma) S = 0, \quad (3.66)$$

ami alkalmasabb nagy pontosságú numerikus megoldások keresésére.

Az S -ben zérushely mentes megoldás esetére a 3.1 táblázatban megadjuk az s és S kö-

	$d = 3$	$d = 4$	$d = 5$
s_c	0.938323	3.429755	13.90730
S_c	1.021493	3.542143	14.01996
s_1	3.505330	7.694895	10.40384

3.1. táblázat. Numerikus eredmények az s és S középponti értékére, valamint az s_1 konstansra $d = 3, 4$ és 5 dimenziónál.

zépponti értékét, valamint az s_1 konstans. Az s_0 konstans -1 -nek választottuk.

3.3.4. A kifejtés magasabb rendjei

A téregyenletek ε^6 rendű komponenseiből következik A_4 időfüggése,

$$A_4 = a_4^{(0)} + a_4^{(2)} \cos(2\tau), \quad (3.67)$$

ahol $a_4^{(0)}$ és $a_4^{(2)}$ a ρ radiális koordináta függvényei. A p_4 és $a_4^{(0)}$ függvényeket a következő csatolt differenciálegyenletek határozzák meg:

$$\frac{d^2 a_4^{(0)}}{d\rho^2} + \frac{d-1}{\rho} \frac{da_4^{(0)}}{d\rho} = \frac{2p_2 p_4 (d-2)}{d-1} + \left(\frac{da_2}{d\rho} \right)^2 + \omega_2 p_2^2 - \frac{2p_2^2 a_2}{d-1}, \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 p_4}{d\rho^2} + \frac{d-1}{\rho} \frac{dp_4}{d\rho} &= p_4 (a_2 - \omega_2) + \left(a_4^{(0)} - \omega_4 \right) p_2 - \frac{a_2 p_2 (d-1) (a_2 - \omega_2)}{d-2} \\ &\quad - \frac{dp_2^3}{8(d-1)} - \left(\frac{5}{6} \bar{g}_2^2 - \frac{3}{4} \bar{g}_3 \right) p_2^3. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Azt az egyértelmű megoldást keressük, amelynél $a_4^{(0)}$ és p_4 is nullához tart ha $\rho \rightarrow \infty$. Ha $3 \leq d \leq 5$, akkor a p_4 függvény exponenciálisan tart nullához, míg nagy ρ értékekre

$$a_4^{(0)} \approx \frac{1}{2} s_1^2 \rho^{4-2d} + s_2 \rho^{2-d} + s_3, \quad (3.70)$$

ahol s_1 a (3.58) egyenletben definiált konstans, valamint s_2 és s_3 újabb konstansok. Ha $a_4^{(0)}$ és p_4 a (3.68)-(3.69) megoldásai, akkor bármely c konstans esetén

$$\bar{a}_4^{(0)} = a_4^{(0)} + c \left[2(a_2 - \omega_2) + \rho \frac{da_2}{d\rho} \right], \quad (3.71)$$

$$\bar{p}_4 = p_4 + c \left(2p_2 + \rho \frac{dp_2}{d\rho} \right), \quad (3.72)$$

szintén megoldások. Ez a megoldáscsalád az SN egyenletek (3.57) skálázási szabadsága által generálódik. Ha van egy tetszőleges megoldásunk a (3.68)-(3.69) egyenletekhez, akkor c megfelelő megválasztásával egy másik megoldást kapunk, amelyre $s_3 = 0$ teljesül (3.70)-ben.

A b_4 függvényre vonatkozó egyenlet

$$\begin{aligned} \frac{db_4}{d\rho} = & \frac{1}{2-d} \frac{da_4^{(0)}}{d\rho} + \frac{1}{4(d-2)^2} \frac{da_2}{d\rho} \left[\rho \frac{da_2}{d\rho} + 4(d-1)a_2 \right] \\ & + \frac{\rho}{2(d-1)(d-2)} \left[\left(\frac{dp_2}{d\rho} \right)^2 - p_2^2(a_2 - \omega_2) \right]. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Nagy ρ értékekre b_4 úgy tart nullához, hogy

$$b_4 \approx \frac{6-d}{8(d-2)^2} s_1^2 \rho^{4-2d} + \frac{s_2}{2-d} \rho^{2-d}. \quad (3.74)$$

Az A_4 függvény $\cos(2\tau)$ részét meghatározó egyenlet

$$\frac{d^2 a_4^{(2)}}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{da_4^{(2)}}{d\rho} = \frac{(d-2)(a_2 - \omega_2)p_2^2}{2(d-1)} - \frac{d}{2(d-1)} \frac{dp_2}{d\rho} \left(\frac{dp_2}{d\rho} + \frac{d-2}{\rho} p_2 \right). \quad (3.75)$$

Emlékeztetőül megjegyezzük, hogy $3 \leq d \leq 5$ esetén $\omega_2 = -1$ a természetes választás.

Összefoglalva az eddigi eredményeket, ε^4 rendig a skalármező és a metrika komponensei

$$\bar{\phi} = \varepsilon^2 p_2 \cos \tau + \varepsilon^4 \left\{ p_4 \cos \tau + \frac{\bar{g}_2 p_2^2}{6} [\cos(2\tau) - 3] \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^6), \quad (3.76)$$

$$A = 1 + \varepsilon^2 a_2 + \varepsilon^4 \left[a_4^{(0)} + a_4^{(2)} \cos(2\tau) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^6), \quad (3.77)$$

$$B = 1 - \varepsilon^2 \frac{a_2}{d-2} + \varepsilon^4 \left[b_4 - \frac{p_2^2}{4(d-1)} \cos(2\tau) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^6). \quad (3.78)$$

Magasabb rendekre továbbmenve a kifejezések jelentősen hosszabbá és bonyolultabbá válnak. Azonban belátható, hogy szimmetrikus potenciálokra, amikor $\bar{g}_{2k} = 0$, a $\bar{\phi}$ skalármező csak $\cos(k\tau)$ tagokat tartalmaz páratlan k -val, míg A és B -nek csak páros Fourier komponensei vannak.

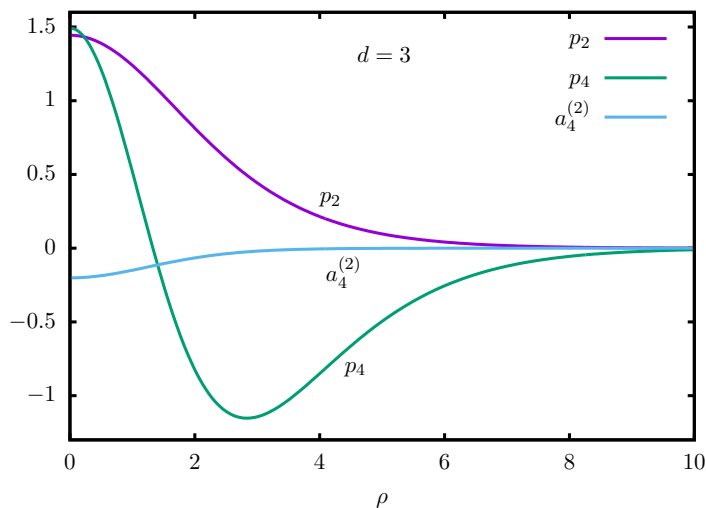
A magasabb rendű kifejezések jelentősen egyszerűsödnek szimmetrikus potenciálok esetén, amikor $\bar{g}_{2k} = 0$. Mivel $\bar{\phi}$ -ben a $\cos(3\tau)$ -val arányos első sugárzó módus ε^6 rendben

jelenik meg szimmetrikus potenciálok esetén, megadjuk a magasabb rendű kifejtését ebben az esetben,

$$\begin{aligned} \bar{\phi} = & \varepsilon^2 p_2 \cos \tau + \varepsilon^4 p_4 \cos \tau + \varepsilon^6 p_6 \cos \tau \\ & + \varepsilon^6 \left(\frac{p_2^3 d}{64(d-1)} + \frac{\bar{g}_3 p_2^3}{32} + \frac{p_2 a_4^{(2)}}{8} \right) \cos(3\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon^8), \end{aligned} \quad (3.79)$$

ahol p_6 a ρ -nak egy függvénye amit egy magasabb rendben megjelenő hosszú differenciálegyenlet határoz meg.

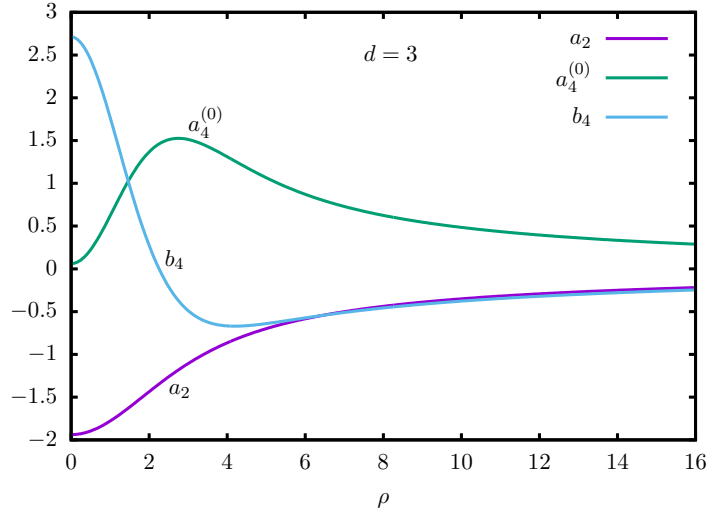
A (3.3) és 3.4 ábrán megmutatjuk a numerikusan kiszámolt p_2 , a_2 , p_4 , $a_4^{(0)}$, $a_4^{(2)}$ és b_4 függvényeket Klein-Gordon potenciál és $d = 3$ térbeli dimenzió esetén.



3.3. ábra. Az exponenciálisan lecsengő p_2 , p_4 és $a_4^{(2)}$ függvények a Klein-Gordon oszcillaton kis-amplitúdós kifejtésénél, $d = 3$ térbeli dimenziónál.

A (3.76)-(3.78) egyenletek meghatároznak egy egyparaméteres megoldáscsaládot az ε paraméter függvényeként. Ez a család ε^4 rendig megoldja a téregyenleteket $m = 1$ tömegű skalármező esetén. A t és r koordináták (3.4) szerinti átskálázásával egyparaméteres megoldáscsaládokat kaphatunk tetszőleges m esetére.

A dolgozatban használt $C = r^2 B$ választásnak megfelelő térben konformisan sík koordináta-rendszerben, (3.77)-(3.78) szerint, ε^2 rendig a metrika nem függ az időtől, vagyis sztatikus. Ellenben, a $C = r^2$ Schwarzschild koordinátákat használva a_2 -nek van egy $\cos(2\tau)$ szerint rezgő része (lásd a [40] cikkünk B függeléke). Ez a legfontosabb előnye a térben konformisan sík rendszer választásának a szélesebb körben alkalmazott Schwarzschild koordinátákkal szemben. A Schwarzschild rendszerben az állandó r megfigyelők ε^2 rendű rezgést érzékelnek a



3.4. ábra. Az a_2 , $a_4^{(0)}$ és b_4 függvények a $d = 3$ Klein-Gordon rendszerben. Ezek hatványfüggvényként tartanak a nullához $\rho \rightarrow \infty$ esetén.

metrikában. A konstans $(r, \theta_1, \theta_2, \dots)$ vonalon mozgó megfigyelő gyorsulásvektorának abszolút értéke az általános (3.10) metrikában

$$a = \frac{1}{2A\sqrt{B}} \frac{dA}{dr} . \quad (3.80)$$

Ennek van egy ε^3 rendű időben rezgő komponense a Schwarzschild rendszerben, míg a térben konformisan sík esetben a gyorsulás időben való változása ε^5 rendben kicsi.

3.3.5. Oszcillatonok tömege, frekvenciája és mérete

Az oszcillatonok térben konformisan sík rendszerben történő ε kifejtésekor az invariáns sugár függvény $\hat{r} = r\sqrt{B}$, ahová B kifejtését a (3.35) alakban kell helyettesítenünk. Az átskálázott $\rho = \varepsilon r$ radiális koordinátát használva, a (3.12)-ben definiált Misner-Sharp energiafüggvény kifejtése

$$\hat{m} = \varepsilon^{4-d} \hat{m}^{(1)} + \varepsilon^{6-d} \hat{m}^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^{8-d}) , \quad (3.81)$$

ahol

$$\hat{m}^{(1)} = -\frac{(d-1)\pi^{\frac{d}{2}}}{8\pi\Gamma(\frac{d}{2})} \rho^{d-1} \frac{dB_2}{d\rho} , \quad (3.82)$$

$$\hat{m}^{(2)} = -\frac{(d-1)\pi^{\frac{d}{2}}}{8\pi\Gamma(\frac{d}{2})} \rho^{d-1} \left[\frac{dB_4}{d\rho} + \frac{\rho}{4} \left(\frac{dB_2}{d\rho} \right)^2 + \frac{d-4}{2} B_2 \frac{dB_2}{d\rho} \right] . \quad (3.83)$$

(3.39) szerint $B_2 = b_2$, és (3.51) alapján $b_2 = a_2/(2-d)$. Az s függvény (3.54) definíciója értelmében $a_2 = -1 - s$. Az s deriváltja (3.62) alapján kifejezhető a σ függvénnyel, és így (3.82) a következő alakba írható:

$$\hat{m}^{(1)} = \frac{(d-1)\pi^{\frac{d}{2}}}{8\pi\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \sigma . \quad (3.84)$$

Az oszcillatonok teljes tömeget a $\rho \rightarrow \infty$ határérték adja,

$$M = \varepsilon^{4-d}M^{(1)} + \varepsilon^{6-d}M^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^{8-d}) . \quad (3.85)$$

A (3.63) egyenletben σ határértékét s_1 -el jelöltük, így

$$M^{(1)} = \frac{(d-1)\pi^{\frac{d}{2}}}{8\pi\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} s_1 . \quad (3.86)$$

Az s_1 konstans numerikus értékeit különböző dimenziók esetén a 3.1 táblázatban adtuk meg. A (3.73) összefüggést használva a b_4 deriváltjára,

$$M^{(2)} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{(d-1)\pi^{\frac{d}{2}}}{8\pi\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \frac{\rho^{d-1}}{d-2} \left[\frac{da_4^{(0)}}{d\rho} - \frac{\rho}{2(d-2)} \left(\frac{da_2}{d\rho} \right)^2 - \frac{3}{2} a_2 \frac{da_2}{d\rho} \right] , \quad (3.87)$$

ami numerikusan könnyen számolható, mert a kifejezés aminek a határértékét vesszük exponenciálisan tart egy konstans értékhez.

Oszcillatonok saját tömegét a (3.25) egyenlet alapján számolhatjuk. Az ε kifejtési eredményeket behelyettesítve,

$$M_p = \varepsilon^{4-d}M_p^{(1)} + \varepsilon^{6-d}M_p^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^{8-d}) , \quad (3.88)$$

ahol

$$M_p^{(1)} = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{8\pi\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \int_0^\infty d\rho \rho^{d-1} p_2^2 , \quad (3.89)$$

$$M_p^{(2)} = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{8\pi\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \int_0^\infty d\rho \rho^{d-1} \left(2p_2 p_4 - p_2^2 - \frac{3d-4}{2(d-2)} a_2 p_2^2 \right) . \quad (3.90)$$

A (3.54), (3.63) és (3.64) összefüggések használatával a vezető rendű együttható

$$M_p^{(1)} = \frac{(d-1)\pi^{\frac{d}{2}}}{8\pi\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} s_1 , \quad (3.91)$$

ami megegyezik a teljes tömeg (3.86)-ban megadott $M^{(1)}$ vezető rendű együtthatójával. Az M_p saját és M teljes tömegek koefficienseinek numerikus értékét a 3.2 táblázatban mutatjuk.

	$d = 3$	$d = 4$	$d = 5$
$M^{(1)} = M_p^{(1)}$	1.75266	9.06533	21.7897
$M^{(2)}$	-2.11742	-43.5347	-533.732
$M_p^{(2)}$	-1.53319	-39.0020	-555.521

3.2. táblázat. Az M teljes tömeg és az M_p saját tömeg ε kifejtésének koefficiensei $m = 1$ tömegű Klein-Gordon skalár esetén, $d = 3, 4, 5$ térbeli dimenzióknál.

Mint láttuk, a teljes tömeg és a saját tömeg megegyezik vezető rendben. Azonban a kifejtés következő rendjét is figyelembe véve, a fizikai elvárásnak megfelelően, az $E_b = M_p - M$ kötési energia mindig pozitív.

Az eddigi eredményeket azzal a feltevéssel kaptuk, hogy a skalármező tömegét $m = 1$ -nek állítottuk be. A tömeg meghatározására az $m \neq 1$ esetben a (3.4) skálázási szabadságot használhatjuk. A μ energiasűrűséget definiáló (3.24) kifejezésben ekkor egy m^2 szorzó jelenik meg. Mivel az integrálokban szereplő térfogatelemek m^{-d} szorzót hoznak be, a saját tömeg kifejezésében egy m^{2-d} szorzó jelenik meg minden egyes $M_p^{(k)}$ értékében. A teljes tömeg $M^{(k)}$ együtthatóiba is ugyanez az m^{2-d} faktor kerül, a (3.12) definícióban lévő \hat{r}^{d-2} miatt.

Ha természetes egységekben mérjük a mennyiségeket, akkor $d = 3$ térdimenziósnál a teljes tömeg (3.85) szerinti függése az ε paramétertől és a skalármező m tömegétől,

$$M[\text{kg}] = \varepsilon (4.657 - 5.627 \varepsilon^2) 10^{20} \frac{1}{m[\text{eV}/c^2]}, \quad (3.92)$$

ahol a mennyiségeket dimenzió nélküli számok reprezentálják, de a szögletes zárójelben lévő egységekben, az általában használt Planck egységek helyett. Mivel $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ rendű tagokat elhagytunk, az eredmény csak kis ε értékeknél lehet pontos. Azonban, mint később a numerikus eredményekkel való összehasonlítás során látható lesz, a kifejezés elfogatható becslést ad még $\varepsilon \approx 0.5$ esetén is.

Az ε paraméter továbbra is dimenziótlan marad, de ha skalármező tömege nem egységyi, akkor a (3.4) skálázási szabadság miatt az időskála, és emiatt a frekvencia is változik. Az oszcillaton rezgési frekvenciája $m \neq 1$ esetén Planck egységekben $\omega = m\sqrt{1 - \varepsilon^2}$, míg természetes egységekben

$$\omega[1/\text{s}] = 1.519 \cdot 10^{15} m[\text{eV}/c^2] \sqrt{1 - \varepsilon^2}. \quad (3.93)$$

A (3.4) átskálázás hatására a radiális koordináta is megváltozik. Ez úgy is tekinthető, hogy a (3.32) összefüggésben megjelenik az m skalártömeg, vagyis $r = \rho/(\varepsilon m)$. Habár az oszcillatonok exponenciálisan lokalizáltak, nincs egy határozott külső felületük. A méretükre

egy természetes definíció az, hogy vegyük azt az r_q sugarat, amelyen belül a tömeg q százalékáa található. Egy tipikus választás például $q = 95$. Az adott sugáron belüli tömeget az \hat{m} függvény írja le, ami a kifejtés vezető rendjében $\hat{m} = \varepsilon^{4-d}\hat{m}^{(1)}$, ahol $m^{(1)}$ értéke (3.84) szerint arányos a (3.62)-ben bevezetett σ függvénnyel. Az oszcillatonoknak a ρ radiális koordináta használatával számolt ρ_q sugarát az alábbi összefüggéssel defináljuk:

$$\frac{q}{100} = \frac{\hat{m}(\rho_q)}{\hat{m}(\infty)} \approx \frac{\sigma(\rho_q)}{\sigma(\infty)}. \quad (3.94)$$

A ρ_q sugár nagyságát különféle q értékek választásánál a 3.3 táblázatban mutatjuk. A ρ_q

	$d = 3$	$d = 4$	$d = 5$
ρ_{50}	2.240	1.778	1.317
ρ_{90}	3.900	3.013	2.284
ρ_{95}	4.471	3.455	2.652
ρ_{99}	5.675	4.410	3.478
$\rho_{99.9}$	7.239	5.692	4.634

3.3. táblázat. A ρ_q sugár amelyen belül a tömeg q százalékáa található, $d = 3, 4, 5$ térbeli dimenzió esetén.

átskálázott sugárnak megfelelő fizikai radiális méret $r_q = \rho_q/(\varepsilon m)$. A sugarat méterben, a skalártömeget elektronvoltban mérve,

$$r_q[\text{m}] = 1.973 \cdot 10^{-7} \frac{\rho_q}{\varepsilon m[\text{eV}/c^2]}. \quad (3.95)$$

Habár σ csak vezető rendben egyezik az adott sugáron belüli tömeggel, ez a kifejezés a sugárra mégis elfogatható közelítést ad akár még $\varepsilon \approx 0.5$ esetén is.

Az oszcillatonok teljes tömegének (3.85) szerinti ε függése a stabilitásukról is fontos információt nyújt. A 2. fejezetben tanulmányozott oszcillonokhoz hasonlóan, az ε paraméter növekedésével a skalármező középpontbeli rezgésének amplitúdója, és így annak energiasűrűsége is monoton növekszik. Általános érvényű elv, hogy ha a központi energiasűrűség növekedésével a rendszer M teljes tömege növekszik akkor az állapot stabil, míg ha M csökken akkor instabil. Ezt az elvárást oszcillatonok esetére a numerikus szimulációk is megerősítik [37, 140]. A fizikailag releváns $d = 3$ térdimenzió esetén, a (3.92) egyenlet által leírt módon, kicsi amplitúdóknál a tömeg ε -al arányosan növekszik, és így az oszcillaton stabil. Mivel a köbös tag együtthatója negatív, az ε növekedésével várhatóan eljutunk egy ε_c kritikus értékhez, ahol M maximálissá válik, és ezután csökkenni kezd. Az $\varepsilon > \varepsilon_c$ állapotok instabilak. A

kifejtés első két tagját tartalmazó (3.92) kifejezés alapján a kritikus amplitúdó $d = 3$ esetén

$$\varepsilon_c = \sqrt{\frac{-M^{(1)}}{3M^{(2)}}} = 0.525 , \quad (3.96)$$

ami $\omega_c = 0.851$ kritikus frekvenciának felel meg. Ugyan ez csak egy vezető rendű eredmény, mégis elég közel van a későbbi fejezetekben a Fourier módusegyenletek megoldásával meghatározott $\omega_c = 0.8608$ precíz numerikus értékhez. A kifejtés szerint a tömeg maximális értéke $M_c = \frac{2}{3}\varepsilon_c M^{(1)} = 0.614$, ami szintén közel van az $M_c = 0.60535$ numerikus értékhez. Nem egységnyi skalármező-tömeg esetén $M_c = 0.60535/m$, és természetes egységekben a maximális tömeg precíz numerikus módszerrel számolt értéke

$$M_c[\text{kg}] = 1.6085 \cdot 10^{20} \frac{1}{m[\text{eV}/c^2]} . \quad (3.97)$$

Ha például a skalármező egy $m[\text{eV}/c^2] = 10^{-5}$ tömegű axion, akkor a maximális tömeg $M_c[\text{kg}] = 1.6085 \cdot 10^{25}$, ami nagyjából a Föld tömegének háromszorosa. A (3.95) vezető rendű közelítés felhasználásával $r_{95}[\text{cm}] = 16.8$. Az összehasonlítás végett, az axion által formált oszcillaton maximális M_c tömegéhez tartozó Schwarzschild-sugár 2.42 cm.

Önkölcsönhatás mentes Klein-Gordon mező esetén, a 3.2 táblázatbeli számok alapján, $d = 4$ és $d = 5$ térbeli dimenzió esetén a tömeg monoton csökkenő függvénye ε -nak és így arra számíthatunk, hogy minden Klein-Gordon oszcillaton instabil. Numerikus vizsgálatokat még nem végeztek ennek megerősítésére. Nemtriviális $U(\phi)$ potenciállal rendelkező skalármezők esetén más lehet a helyzet. Például, $d = 3$ esetén, $\bar{g}_2 = 0$ és $\bar{g}_3 = 4$ választásánál az $M^{(2)}$ koefficiens pozitívvá válik, és nincs maximuma a teljes tömegnek. Ez azt mutatja, hogy ebben az esetben egész nagy tömegű oszcillatonok is stabilak lehetnek. Ugyanezt a potenciált használva $d = 4$ dimenziónál, kis ε értékeknél a tömeg egy monoton növekvő függvény, így arra számíthatunk, hogy a kis-amplitúdós állapotok stabilak. Ha $d = 5$, akkor ugyanilyen potenciálnál egy bizonyos amplitúdónál minimuma van a tömegnek, és nagyobb amplitúdónál az oszcillaton várhatóan stabil. A háromdimenziós oszcillonhoz hasonló módon, ha ennek az oszcillatonnak az amplitúdója a sugárzási energiaveszteség miatt a kritikus érték alá csökken, akkor valószínűleg hirtelen elbomlik.

3.4. Oszcillatonok sugárzási törvénye $\Lambda = 0$ esetén

A 2.9 fejezetben sík háttéren értelmezett oszcillonok sugárzásának meghatározására ismertett módszert általánosíthatjuk az oszcillatonok esetére is. A Fourier módusegyenletek

és a kis-amplitúdós kifejtés komplex síkra való kiterjesztését először Segur és Kruskal alkalmazta egydimenziós ϕ^4 oszcillonok sugárzására [34]. A Borel összegzéses módszert a szingularitás közelében lévő kis korrekció kiszámolására Pomeau, Ramani és Grammaticos vezette be [128]. A fejezet hátralévő részében a [40] cikkünkben közölt eredményeket ismertetem.

3.4.1. Fourier kifejtés

Mivel a (3.33)-(3.35) kis-amplitúdós kifejtés minden rendben exponenciálisan lokalizált állapotot ad, csak az oszcillatonok mag tartományára alkalmazható. Ahelyett hogy lassan változó frekvenciájú sugárzó rendszereket tanulmányoznánk, lényegesen egyszerűbb az egzaktul időperiodikus, nagy amplitúdójú maggal de kicsi állóhullám farkkal rendelkező megoldások, az úgynevezett nanopteronek[115, 116] vizsgálata. A minimális fark-amplitúdóval rendelkező nanopteron, az úgynevezett *kvázibreather* [28] farkának nagysága határozza meg a sugárzó állapot energiavesztését. Az ω frekvenciával rezgő megoldásokra a skalárfüggvényt és a metrika komponenseit az alábbi Fourier-sor alakban keressük,

$$\bar{\phi} = \sum_{n=0}^{N_F} \Phi_n \cos(n\omega t) , \quad (3.98)$$

$$A = 1 + \sum_{n=0}^{N_F} \bar{A}_n \cos(n\omega t) , \quad (3.99)$$

$$B = 1 + \sum_{n=0}^{N_F} \bar{B}_n \cos(n\omega t) , \quad (3.100)$$

ahol ϕ_n , \bar{A}_n és \bar{B}_n csak r radiális koordinátától függ, és $N_F > 0$ egész. Habár az egzakt kifejtésnek végtelen sok komponensből kell állnia, a Fourier kifejtés exponenciális konvergenciájának köszönhetően már mérsékelt nagy N_F levágási rend használatával is nagyon jó közelítést kaphatunk. Feltesszük, hogy az ω frekvencia alulról közelíti az $m = 1$ tömegküszöb értéket. A mostani számolásoknál az ε paramétert az $\varepsilon = \sqrt{1 - \omega^2}$ összefüggéssel definiáljuk. Megjegyezzük, hogy mivel a (3.98) definícióban $\bar{\phi}$ szerepel, míg a sík háttéren felírt (2.36) definícióban ϕ , a mostani és a 2. fejezetben használt Φ_n változók között van egy $\sqrt{8\pi}$ szorzó eltérés.

A középpontbeli regularitás szükséges és elégséges feltétele, hogy a Φ_n , \bar{A}_n és \bar{B}_n függvények az $r = 0$ középpontban végesek legyenek, és deriváltjuk nulla legyen. Az $r \rightarrow \infty$ aszimptotikus határfeltétel szempontjából a legtermészetesebb feltevés az, hogy a metrika aszimptotikusan sík legyen, és a t koordináta tartson a sajátidőhöz. Mint hamarosan látni fogjuk, a jelen esetben ez túlságosan korlátozó feltevés, de ha nem megyünk el extrém nagy

r értékekig, akkor mégis alkalmazható. Az aszimptotikus síkság akkor teljesül, ha $\bar{A}_n \rightarrow 0$ és $\bar{B}_n \rightarrow 0$ amikor $r \rightarrow \infty$. A (3.31) hullámegyenlet komponensei nagy távolságokra ekkor a sík háttérnek megfelelő (2.43) alakúak. Ha a skalármező nullához tart, akkor a nemlineáris F_n forrástagok eltűnnek, és a Fourier egyenletek szétcsatolódnak. Az oszcillatonok szempontjából fontos $\frac{1}{2} < \omega < 1$ frekvencia tartományban $n \geq 2$ esetére a Φ_n függvények aszimptotikus viselkedését továbbra is (2.50) írja le, az α_n és β_n amplitúdó paraméterek segítségével. A sík háttéren végzett számolásokkal megegyező módon, ennek a rezgő faroknak a (3.24) szerinti μ energiasűrűsége r^{1-d} -vel arányosan tart a nullához. Ebből az következik, hogy ha α_n vagy β_n bármelyike nem nulla akármilyen $n \geq 2$ esetén, akkor a teljes saját tömeg végtelenné válik, és a téridő nem lehet aszimptotikusan sík. Az összes α_n és β_n együttható eltűnése és minden egyes módusra a középponti regularitás nyilvánvalóan túl sok határfeltételt jelent a Φ_n -re vonatkozó másodrendű differenciálegyenleteknél. Általában, nem számíthatunk egzaktul periodikus véges tömegű és középpontban reguláris megoldások létezésére.

Ha megköveteljük, hogy $\alpha_n = \beta_n = 0$ legyen minden $n \geq 2$ esetén, akkor az összes Φ_n exponenciálisan nullához tart, és így egy véges tömegű aszimptotikusan sík megoldáshoz jutunk. Azonban az általános esetben ez a megoldás szinguláris lesz az $r = 0$ középpontban. Az ilyen megoldásokra a 2.9.6 fejezetben a *szinguláris breather* (SB) elnevezést vezettük be. A paraméterek számlálásán alapuló érvelés szerint, egy konkrét ω frekvencia választás mellett a szinguláris breather megoldás egyértelmű. Az SB megoldás a mag tartományban csak nagyon kicsit tér el a keresett minimális farok-amplitúdóval rendelkező, de a középpontban reguláris *kvázibreather* (QB) megoldástól.

Fontos tisztázni, hogy a kvázibreather leírás csak egy nagy de véges sugáron belül érvényes. Bármilyen kicsi is a rezgő farok energiasűrűsége, ha nagyon nagy sugarú gömböket tekintünk, a farok járuléka a teljes tömeghez nem lesz többé elhanyagolható. Következésképpen, az a feltevés hogy \bar{A}_n és \bar{B}_n nullához tart nem marad érvényes akármilyen nagy r értékekre, és a hullámegyenlet (2.43) alakja is megváltozik. Elég nagy r értékekre az A metrika komponens függvény lassan addig növekszik hogy az első sugárzó Fourier komponens (Φ_2 vagy Φ_3) rezgő módusból lecsengő módussá válik. Még nagyobb r sugárra távolodva, sorban egyesével az összes többi Φ_n módus rezgése is abbamarad. Ilyen módon egzaktul periodikus de végtelen tömeggel rendelkező breather megoldásokat kapunk, amelyek részletesebben Don N. Page [39] cikkének IX. fejezetében vannak tárgyalva. A jelen dolgozatban vizsgált kvázibreatherek az ilyen végtelen tömegű breatherek egy nagy sugarú gömbön belüli részének tekinthetők. A kvázibreather tartalmazza a mag-tartományt és a farok-tartomány egy olyan jelentős részét ahol az első sugárzási módus rezeg, de az adott sugáron belül a rezgő farok tömeghez való járuléka még elhanyagolható az oszcillaton magja által képviselt tömeghez

képest. Mivel a mag amplitúdója ε^2 rendű, és a fark exponenciálisan el van nyomva ε -ban, a kvázibreather kép érvényes egy elegendően nagy térfogatban.

Mivel a kvázibreather rezgő farkának amplitúdója nagyon kicsi, egy középpont körüli kis tartománytól eltekintve a QB megoldás csak nagyon kicsit tér el a szinguláris breather megoldástól. Noha az origóban végtelenhez tart, az SB megoldás szinguláris részének amplitúdója mégis ε szerint exponenciálisan el van nyomva. Ennélfogva, az azonos frekvenciájú SB és a QB megoldásoknak minden rendig ugyanaz az ε kifejtése. Az SB megoldásnál a kis-amplitúdós kifejtés érvénytelen az origó kis környezetében, míg a QB megoldás kifejtése nem tudja leírni azt a nagy távolságra lévő tartományt ahol az állóhullám fark dominál. Annak a nagyon kicsi $(0, r_{\text{diff}})$ tartománynak a mérete $r = 0$ körül, amelyben számottevő a különbség az SB megoldás és a reguláris mag között, $r_{\text{diff}} = \mathcal{O}(e^{-\delta/\varepsilon})$, ahol $\delta > 0$ konstans, míg a kvázibreather magjának teljes mérete nagyon nagy lehet, $1/\varepsilon$ -al arányos.

A minimuma körül szimmetrikus $U(\phi)$ potenciálok esetén, amikor $\bar{g}_{2k} = 0$ egész k -ra, a skalár Fourier kifejtése csak páratlan, míg a metrika csak páros indexű tagokat tartalmaz,

$$\Phi_{2k} = 0, \quad \bar{A}_{2k+1} = 0, \quad \bar{B}_{2k+1} = 0. \quad (3.101)$$

Szimmetrikus potenciálnál az első sugárzó módus Φ_3 . A továbbiakban a Klein-Gordon skalarmező esetét tanulmányozzuk részletesen, amikor is $k > 1$ esetén $\bar{g}_k = 0$. Az eredmények könnyen általánosíthatók tetszőleges szimmetrikus potenciál esetére.

Kis amplitúdójú kvázibreather vagy szinguláris breather esetén megkaphatjuk a kapcsolatot a (3.98)-(3.100) Fourier kifejtés és a (3.33)-(3.35) kis-amplitúdós kifejtés között a (3.76)-(3.79) összefüggések használatával. Szimmetrikus potenciál esetén,

$$\Phi_1 = \varepsilon^2 p_2 + \varepsilon^4 p_4 + \mathcal{O}(\varepsilon^6), \quad (3.102)$$

$$\Phi_3 = \varepsilon^6 \left(\frac{p_2^3 d}{64(d-1)} + \frac{\bar{g}_3 p_2^3}{32} + \frac{p_2 a_4^{(2)}}{8} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^8), \quad (3.103)$$

$$\bar{A}_0 = \varepsilon^2 a_2 + \varepsilon^4 a_4^{(0)} + \mathcal{O}(\varepsilon^6), \quad (3.104)$$

$$\bar{A}_2 = \varepsilon^4 a_4^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^6), \quad (3.105)$$

$$\bar{B}_0 = -\varepsilon^2 \frac{a_2}{d-2} + \varepsilon^4 b_4 + \mathcal{O}(\varepsilon^6), \quad (3.106)$$

$$\bar{B}_2 = -\varepsilon^4 \frac{p_2^2}{4(d-1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^6). \quad (3.107)$$

3.4.2. Szingularitások a komplex síkon

A sugárzási ráta meghatározásához ki kell terjesztenünk a komplex r síkra a kis-amplitúdós kifejtést és a Fourier kifejtést is, és tisztáznunk kell a kettő közötti kapcsolatot. Az ε kifejtés

esetén a ϕ_k , A_k és B_k függvényeknek szimmetrikusan elhelyezkedő szingularitásai vannak a képzetes tengelyen, a (3.55)-(3.56) Schrödinger-Newton (SN) egyenletek szingularitásainak megfelelően. Mivel a valós tengelytől való távolság növekedésével exponenciálisan csökken a sugárzásához történő járulékok, csak a legközelebbi szingularitás párral szükséges foglalkoznunk.

Az SN egyenletek képzetes tengelyen való viselkedése áttekinthetőbbé válik, ha az s és S függvények helyett bevezetjük a

$$z = \frac{1}{2}(s + S) \quad , \quad Z = \frac{1}{2}(s - S) \quad (3.108)$$

változókat. Ekkor a két SN egyenlet azonos alakúvá válik,

$$\frac{d^2 Z}{d\rho^2} + \frac{d-1}{\rho} \frac{dZ}{d\rho} + Z^2 - zZ = 0 \quad , \quad (3.109)$$

$$\frac{d^2 z}{d\rho^2} + \frac{d-1}{\rho} \frac{dz}{d\rho} + z^2 - Zz = 0 \quad . \quad (3.110)$$

A 3.1 táblázatban megadott kezdőértékeket használva, és a képzetes tengely mentén numerikusan integrálva a differenciálegyenleteket, látható hogy z szingulárisává válik a $\rho = \pm iP$ pontokban, ahol $P > 0$ valós, míg Z oszcillálva nullához tart ugyanott. A P konstans numerikus értéke azoknál a dimenzióknál ahol létezik exponenciálisan lokalizált megoldás:

$$P = \begin{cases} 3.97736 & \text{ha } d = 3 \text{ ,} \\ 2.30468 & \text{ha } d = 4 \text{ ,} \\ 1.23595 & \text{ha } d = 5 \text{ .} \end{cases} \quad (3.111)$$

Noha az SN egyenletek megoldásai csak numerikusan ismertek, a szingularitások közelében a vezető rendű viselkedés analitikusan is meghatározható. A 2.9.2 fejezetben tárgyalt sík háttérű oszcillonokhoz hasonló módon, a felső szingularitástól való távolság jellemzésére vezessük be a $\rho = iP + R$ összefüggéssel definiált komplex R koordinátát. Mivel a képzetes tengelyen a z és Z függvények valós értéket vesznek fel, és a két legközelebbi szingularitás között $z > 0$, a szingularitás közelében való vezető rendű viselkedés szükségképpen $z = -6/R^2$. Ekkor a Z által kielégítendő differenciálegyenlet vezető rendben

$$\frac{d^2 Z}{d\rho^2} + \frac{6}{R^2} Z = 0 \quad , \quad (3.112)$$

amelynek megoldása

$$Z = \alpha \sqrt{R} \sin \left(\frac{\sqrt{23}}{2} \ln R + \delta \right) \quad , \quad (3.113)$$

ahol α és δ numerikusan meghatározandó konstansok. A Z függvény csökkenő amplitúdóval és frekvenciával tart a nullához a képzetes tengelyen a $\rho = iP$ pontot közelítve. A z függvény kifejtése magasabb rendben

$$z \approx -\frac{6}{R^2} - \frac{6i(d-1)}{5PR} - \frac{(d-1)(d-51)}{50P^2}, \quad (3.114)$$

amelyhez szintén járul (3.113) alakú nullához tartó korrekció. Az s és S függvények szingularitás közeli viselkedése ugyanolyan alakú, szintén (3.114) jobboldala által jellemzett. Ha $d > 1$, akkor a nem analitikus járulékok figyelembe vétele nélkül folytatva a kifejtést logaritmikus tagok is megjelennek, amelyek közül az első $R^4 \ln R$ alakú. A (3.51) és (3.54) összefüggések szerint (3.114) meghatározza az oszcillatont jellemző ϕ , A és B függvényeknek a ε^2 rendű részét a szingularitás közelében.

Behelyettesítve a (3.68), (3.69), (3.73) és (3.75) egyenletekbe, az ε^4 rendű járulékok, vagyis $a_4^{(0)}$, p_4 , b_4 és $a_4^{(2)}$, szintén meghatározhatók a szingularitás környezetében. A Klein-Gordon esetben, amikor $\bar{g}_k = 0$ ha $k > 1$:

$$a_4^{(0)} = -\frac{9(25d+208)}{52(d-2)R^4} + \frac{324id(d-1)\ln R}{35P(d-2)R^3} + \frac{a_{-3}}{R^3} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln R}{R^2}\right), \quad (3.115)$$

$$p_4 \sqrt{\frac{d-2}{d-1}} + a_4^{(0)} = \frac{9(43d-104)}{26(d-2)R^4} + \frac{9i(d-1)(3d-8)}{5P(d-2)R^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^2}\right), \quad (3.116)$$

$$b_4 = \frac{9(333d+832)}{260(d-2)^2R^4} - \frac{324id(d-1)\ln R}{35P(d-2)^2R^3} - \frac{a_{-3}}{(d-2)R^3} + \frac{18i(d-1)}{5P(d-2)R^3} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln R}{R^2}\right), \quad (3.117)$$

$$a_4^{(2)} = -\frac{9(6-d)}{5(d-2)R^4} + \frac{6i(d-1)(d-6)}{5P(d-2)R^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^2}\right). \quad (3.118)$$

Az a_{-3} konstans értékét a függvények valós tengelyen való konkrét viselkedése szabja meg, mégpedig p_4 exponenciális lecsengésének megkövetelése nagy valós ρ esetén.

3.4.3. A Fourier módusok kifejtése a szingularitás környezetében

A $\varepsilon \rightarrow 0$ határsetben az oszcillaton összes Fourier koefficiensének amplitúdója nullához tart a valós r tengely minden pontjában. Azonban, a komplex r síkra kiterjesztve, a Fourier módusoknak szingularitásai vannak a képzetes tengelyen. Mivel az átskálázott radiális koordináta $\rho = \varepsilon r$, kis ε értékeknél a valós tengelyhez legközelebbi szingularitások az $r = \pm iP/\varepsilon$ pontokban helyezkednek el, a Schrödinger-Newton egyenletek szingularitásainak megfelelően. Ahogy ε nullához tart, a szingularitások egyre messzebb kerülnek a valós tengelytől, de a közelükben a Φ_k , \bar{A}_k és \bar{B}_k Fourier komponensek nem lesznek kicsik, van egy ε -tól független

részük. A (2.133) egyenlettel megegyező módon bevezetjük a *belső tartományban* érvényes y eltolt radiális koordinátát

$$r = \frac{iP}{\varepsilon} + y, \quad (3.119)$$

amelyre $R = \varepsilon y$. A felső szingularitás közelében a Fourier módusok vezető rendű viselkedését megkaphatjuk, ha a kis-amplitúdós kifejtés (3.114)-(3.118) eredményeit a (3.102)-(3.107) egyenletekbe helyettesítjük és az $\varepsilon \rightarrow 0$ határesetet vesszük. Klein-Gordon potenciál esetén

$$\Phi_1 = \left(-\frac{6}{y^2} + \frac{999d}{52(d-2)y^4} + \dots \right) \sqrt{\frac{d-1}{d-2}}, \quad (3.120)$$

$$\Phi_3 = \left(-\frac{27(7d-12)}{40(d-2)y^4} + \dots \right) \sqrt{\frac{d-1}{d-2}}, \quad (3.121)$$

$$\bar{A}_0 = \frac{6}{y^2} - \frac{9(25d+208)}{52(d-2)y^4} + \dots, \quad (3.122)$$

$$\bar{A}_2 = -\frac{9(6-d)}{5(d-2)y^4} + \dots, \quad (3.123)$$

$$\bar{B}_0 = -\frac{6}{(d-2)y^2} + \frac{9(333d+832)}{260(d-2)^2y^4} + \dots, \quad (3.124)$$

$$\bar{B}_2 = -\frac{9}{(d-2)y^4} + \dots. \quad (3.125)$$

Mivel ezek a kifejezések $1/y^2$ szerinti kifejtések, nagy y értékeknél érvényesek. Ezzel szemben, a (3.114)-(3.118) egyenleteket kicsi R feltételezésével kaptuk. Ha ε kicsi mindkét feltétel teljesülhet egyszerre, ugyanis $R = \varepsilon y$.

A (3.120)-(3.125) kifejtést úgy is megkaphatjuk, ha az $\varepsilon \rightarrow 0$ határesetben a Fourier módusegyenleteknek a szingularitás közeli megoldását $1/y^2$ szerinti sor alakban keressük,

$$\Phi_{2k+1} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \psi_{2k+1}^{(n)} \frac{1}{y^{2n}}, \quad (3.126)$$

$$\bar{A}_{2k} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \alpha_{2k}^{(n)} \frac{1}{y^{2n}}, \quad (3.127)$$

$$\bar{B}_{2k} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \beta_{2k}^{(n)} \frac{1}{y^{2n}}, \quad (3.128)$$

ahol $\psi_{2k+1}^{(n)}$, $\alpha_{2k}^{(n)}$ és $\beta_{2k}^{(n)}$ konstansok. A megoldandó módusegyenleteket a (3.27)-(3.30) Einstein egyenletekből és a (3.31) hullámgörvényletekből kaphatjuk (3.98)-(3.100) helyettesítésével. A (3.27)-(3.31) egyenletek nem függetlenek. A hullámgörvénylet következik az Einstein egyenletekből a kontrahált Bianchi azonosság alkalmazásával, és a (t, r) komponens, (3.29), pedig egy kényszeregyenlet. A Fourier kifejtés véges N_F rendben történő levágásának hatására a

módusegyenletek kölcsönösen ellentmondóvá válnak. Azonban, ha bármely három téregyenletet választunk (3.27)-(3.31) közül, az ezekből következő módusegyenleteknek nyilván lesz megoldása. Ellenőriztük, hogy az oszcillatonok energiavesztésére kapott eredményeink függetlenek attól, hogy melyik három egyenletet választjuk. Azt is ellenőriztük, hogy a másik két egyenletből következő módusegyenleteknél jelentkező eltérések gyorsan nullához tartanak ha N_F növekszik.

Behelyettesítve az y koordináta (3.119) definícióját a (3.27)-(3.31) egyenletekbe és az $\varepsilon \rightarrow 0$ határértéket véve a szingularitás közelében, bizonyos r -ben alacsonyabb rendű tagok elhanyagolhatóvá válnak. Ezután, a Fourier módusegyenletekbe behelyettesítve az $1/y^2$ szerinti kifejtést (3.126)-(3.128) alakban, az $1/y$ páratlan hatványainak a hiánya miatt, a $\psi_1^{(1)}$ előjelétől eltekintve az eredmény egyértelműen meghatározottá válik. A (3.120)-(3.125) kifejtés meghatározása a Fourier módusegyenletekből technikailag lényegesen egyszerűbb mint a kis-amplitúdós kifejtéses módszer, és algebrai számolások végzésére alkalmas programok használatával $1/y$ -ban egész magas rendekig is számolható.

Egy közös szorzótól eltekintve, a $\psi_k^{(n)}$, $\alpha_k^{(n)}$ és $\beta_k^{(n)}$ oefficiensek nagy n esetre való vezető rendű viselkedése a módusegyenletek szerkezetének vizsgálatával megkapható. Belátható, hogy nagy n esetén $\psi_3^{(n)}$ dominál a koefficiensek között. A Klein-Gordon mező harmadik Fourier módusára kapható eredmény

$$\psi_3^{(n)} = k_d (-1)^n \frac{(2n-1)!}{8^n} \left[1 + \frac{3(9d-10)}{2(d-2)n} + \frac{3(9d-10)(7d-8)}{2(d-2)^2 n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) \right], \quad (3.129)$$

ahol k_d egy szorzó ami d -től és N_F -től függ. Az összes többi koefficiens lassabban növekszik n szerint aszimptotikusan. Habár az $1/n$ és $1/n^2$ korrekciós tagok függhetnek a skalár kölcsönhatási potenciáljától, a vezető rendű viselkedés minden szimmetrikus potenciál esetén ugyanaz mint (3.129)-ben. A k_d konstans szorzó értéke alapvető fontosságú az oszcillatonok energiavesztésének meghatározásához. A koefficienseket $n = 100$ rendig kiszámolva, és a Fourier módusegyenleteket $N_F = 6$ rendig figyelembe véve, a Klein-Gordon esetben

$$k_3 = -0.301 \quad , \quad k_4 = -0.134 \quad , \quad k_5 = -0.0839 \quad . \quad (3.130)$$

3.4.4. A szinguláris breather megoldás a szingularitás környezetében

A (3.126)-(3.128) kifejtés egy aszimptotikus sor a Φ_k , \bar{A}_k és \bar{B}_k Fourier komponensekre. A konkrét kifejtési együtthatók bizonyos rendig történő meghatározása után a (3.120)-(3.125) kifejezéseket határfeltételnek tekintjük a Fourier egyenletekhez az

$$|y| \rightarrow \infty \quad , \quad -\pi/2 < \arg y < 0 \quad (3.131)$$

tartományban, ezzel egyértelművé téve a belső probléma megoldását. Ez annak a követelménynek felel meg, hogy a ϕ skalármező nullához tart a valós r tengely pozitív részén, állóhullám farok nélkül, vagyis a 2.9.6 fejezetben részletesen leírt eljáráshoz hasonlóan, a $\Phi_k^{(SB)}$, $\bar{A}_k^{(SB)}$ és $\bar{B}_k^{(SB)}$ függvényekkel jellemzett *szinguláris breather* megoldást tekintjük.

A (3.31) hullámegyenlet Fourier komponensei az öngravitáló esetben is a (2.197) egyenlettel megegyező formában írhatók fel,

$$\frac{d^2\Phi_n}{dr^2} + \frac{d-1}{r} \frac{d\Phi_n}{dr} + (n^2\omega^2 - 1)\Phi_n = F_n , \quad (3.132)$$

ahol az F_n forrástagok nemlineáris polinom alakú kifejezések, amelyekben Φ_k , \bar{A}_k , \bar{B}_k és deriváltjaik szerepelnek $k \leq N_F$ esetén. A szingularitás közelében az y koordinátát használva és az $\varepsilon \rightarrow 0$ határesetet véve,

$$\frac{d^2\Phi_n}{dy^2} + (n^2 - 1)\Phi_n = \tilde{F}_n , \quad (3.133)$$

ahol \tilde{F}_n az F_n nemlineáris forrástag $\varepsilon \rightarrow 0$ határértéke. A nemlineáris tagok szerkezetétől eltekintve, ez ugyanolyan alakú, mint az egydimenziós oszcillonok esetén a belső tartományban kielégítendő (2.139) egyenlet. A képzetes tengelyen az $1/y^2$ szerinti kifejtés minden rendben valós függvényeket ad. Ezzel szemben, a módusegyenletek szinguláris breather megoldásainak szükségképpen kicsi de nem nulla képzetes részük kell legyen a képzetes tengelyen. A képzetes tengelyre korlátozódva, a skalármező $\Phi_k^{(SB)}$ Fourier komponensei nagyon jó közelítéssel a (3.133) egyenlet baloldali lineáris részét elégítik ki. Szimmetrikus potenciál esetén az első, és egyúttal domináns, sugárzó komponens Φ_3 . Következésképpen, ahogy azt a 2.9.3 fejezetben részletesen beláttuk, az SB megoldásnak a képzetes tengelyen lefelé haladva exponenciálisan lecsengő képzetes része van,

$$\text{Im } \Phi_3^{(SB)} = \nu_3 \exp\left(-i\sqrt{8}y\right) \quad \text{ha} \quad \text{Re } y = 0 , \quad (3.134)$$

ahol ν_3 egy állandó. Másrészt, mivel a kis állóhullám farokkal rendelkező kvázibreather megoldás reguláris a középpontban, a valós része szimmetrikus, míg képzetes része antiszimmetrikus a képzetes tengelyre viszonyítva, így a kvázibreathernél a skalármező $\Phi_3^{(QB)}$ komponense tisztán valós a képzetes tengelyen.

Szimmetrikus potenciál esetén a ν_3 konstans értéke kiszámolható Borel összegzés segítségével [40]. A Pomeau, Ramani és Grammaticos [128] munkáján alapuló módszert, oszcillonok esetére a 2.9.4 fejezetben ismertettük részletesen. Első lépésként a (3.126) alakban kifejtett Φ_3 függvényhez tartozó $\hat{\Phi}_3$ transzformált függvényt definiáljuk,

$$\hat{\Phi}_3(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\psi_3^{(n)}}{(2n)!} z^{2n} . \quad (3.135)$$

A (2.176) levezetéshez hasonló módon, a Borel összegzett Φ_3 függvényt a következő módon számolhatjuk,

$$\Phi_3^{(SB)}(y) = \int_0^\infty dt e^{-t} \widehat{\Phi}_3\left(\frac{t}{y}\right). \quad (3.136)$$

Vezessük be az $y = -i\tilde{y}$ jelölést. A $\Phi_3^{(SB)}(y)$ függvény képzetes részét szeretnénk meghatározni a képzetes tengely negatív részén, ahol $\tilde{y} > 0$ valós. A $\widehat{\Phi}_3$ függvény argumentuma $z = t/y = it/\tilde{y}$, ami tisztán képzetes, pozitív képzetes résszel. Mivel (3.135) minden tagja páros z hatványt tartalmaz, önmagában az összeg semelyik tagja sem képes (3.136)-ban $\text{Im } \Phi_3^{(SB)}$ -hoz járulékot adni. A képzetes tengelyen a Borel összegzett $\text{Im } \Phi_3^{(SB)}$ értéke a sor nagy n -re történő vezető rendű viselkedése által határozódik meg. Ezt a vezető rendű viselkedést a (3.129) egyenletben írtuk fel. Ennek behelyettesítésével,

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}_3(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} k_d \frac{(-1)^n}{2n} \left(\frac{z}{\sqrt{8}}\right)^{2n} = k_d \frac{z^2}{16} + \sum_{n=1}^{\infty} k_d \frac{(-1)^n}{2n} \left(\frac{z}{\sqrt{8}}\right)^{2n} \\ &= \frac{k_d}{2} \left[\frac{z^2}{8} - \ln\left(1 - \frac{iz}{\sqrt{8}}\right) - \ln\left(1 + \frac{iz}{\sqrt{8}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.137)$$

A Borel összegzett függvény pedig

$$\Phi_3^{(SB)}(y) = \frac{k_d}{2} \int_0^\infty dt e^{-t} \left[\frac{z^2}{8} - \ln\left(1 + \frac{t}{\sqrt{8}\tilde{y}}\right) - \ln\left(1 - \frac{t}{\sqrt{8}\tilde{y}}\right) \right]. \quad (3.138)$$

A (2.178) egyenlethez hasonlóan, csak a harmadik tag ad képzetes járulékot a képzetes y tengelyen. Az ott részletesen leírt módon kapható, hogy

$$\text{Im } \Phi_3^{(SB)}(y) = -\frac{k_d\pi}{2} \exp\left(-i\sqrt{8}y\right). \quad (3.139)$$

A (3.134) egyenlettel való összehasonlítás adja a sugárzási amplitúdót meghatározó ν_3 konstanssal való kapcsolatot,

$$\nu_3 = -\frac{1}{2}k_d\pi. \quad (3.140)$$

A dimenziófüggetlen k_d numerikus értékét (3.130)-ban adtuk meg.

A minimuma körül nem szimmetrikus $U(\phi)$ potenciál esetén Φ_2 a vezető rendű sugárzó komponens, amelyre

$$\text{Im } \Phi_2^{(SB)}(y) = \nu_2 \exp\left(-i\sqrt{3}y\right) \quad \text{ha} \quad \text{Re } y = 0. \quad (3.141)$$

Mivel ekkor a domináns viselkedést Φ_0 határozza meg, a ν_2 állandó nem határozható meg a Borel összegzéses módszerrel. Értéke a Fourier módusegyenletek numerikus integrálással kapható, a [34] és a [30] cikkekben ismertetett módon.

3.4.5. A kvázibreather és az oszcillaton előállítása

A felső szingularitás környezetében a sugárzás nagyságát meghatározó (3.134) és (3.141) exponenciálisan kicsi korrekciót együttesen a következő alakba írhatjuk,

$$\delta\Phi_k^{(+)} = i\nu_k \exp(-i\sqrt{k^2 - 1} y) , \quad (3.142)$$

ahol szimmetrikus potenciálra $k = 3$, nemszimmetrikus potenciál esetén pedig $k = 2$. A kifejezés megegyezik az oszcillonokra vonatkozó (2.217) egyenlettel, így az ott részletesen ismerttetett eljárást követhetjük a korrekció valós tengelyre történő kiterjesztésénél. Megjegyezzük, hogy mivel a ϕ skalármező (3.5) szerinti átskálázása miatt Φ_k tartalmaz egy a sík térhez viszonyított $\sqrt{8\pi}$ szorzót, a ν_k konstansban is megjelenik ez a különbség. Az $\varepsilon \ln \varepsilon$ rendű másodrendben kicsi járulékkal most nem foglalkozunk.

A komplex r koordinátával jellemzett külső tartományban a $\delta\Phi_k$ korrekció, vagyis a kvázibreather és a szinguláris breather megoldás különbsége, a (3.132) egyenlet baloldali lineáris részét elégíti ki, amelynek általános megoldása Bessel függvények segítségével a (2.222) alakban írható fel, α és β konstansok segítségével. A valós tengely alatt szimmetrikusan elhelyezkedő szingularitás járulékanak köszönhetően $\beta = 0$, és a belső tartományhoz való illesztésből következően, (2.229)-hez hasonlóan,

$$\alpha = 2\nu_k \left(\frac{P}{\varepsilon}\right)^{\frac{d-1}{2}} \exp\left(-\sqrt{k^2 - 1} \frac{P}{\varepsilon}\right) . \quad (3.143)$$

A kvázibreather farok-tartományában a skalármező

$$\bar{\phi}^{(QB)} = -\frac{\alpha}{r^{\frac{d-1}{2}}} \sin\left[\sqrt{k^2 - 1} r - \frac{\pi}{4}(d-1)\right] \cos(kt) , \quad (3.144)$$

a (2.231) kifejezésnek megfelelően. A linearizált egyenlet időeltolt koszinusz függésű megoldását hozzáadva megkapjuk az oszcillaton sugárzó farkának alakját

$$\bar{\phi}^{(osc)} = -\frac{\alpha}{r^{\frac{d-1}{2}}} \sin\left[\sqrt{k^2 - 1} r - \frac{\pi}{4}(d-1) - kt\right] , \quad (3.145)$$

ahol szimmetrikus potenciálnál $k = 3$, egyébként $k = 2$. A skalármező (3.5) szerinti $\bar{\phi} = \sqrt{8\pi} \phi$ átskálázása miatt a valódi fizikai amplitúdó $\alpha/\sqrt{8\pi}$. Mivel a (3.4) transzformáció átskálazza a koordinátákat, nem egységnyi m skalártömeg esetén a (3.144) és (3.145) kifejezésekben az α amplitúdó mellett megjelenik egy $m^{(1-d)/2}$ szorzó.

Szimmetrikus potenciál esetén $k = 3$, és ν_3 értéke (3.140) szerint adott. Klein-Gordon potenciálnál, ha a térdimenziók száma $d = 3$, akkor a konstansok numerikus értékét behelyettesítve a (3.143) szerinti α amplitúdó paraméter ε függése

$$\alpha = \frac{3.761}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{11.2497}{\varepsilon}\right) . \quad (3.146)$$

3.4.6. A tömegveszteségi ráta kis amplitúdóknál

A (3.145) kifejezés a jelöléstől eltekintve megegyezik a (2.125) egyenletben felírt sík térbeli általános sugárzó farok alakkal. Mint láttuk, a tömeg időbeli megváltozását megadó (3.20) egyenlet konzisztens a sík háttéren az energia kisugárzására felírt (2.11) és (2.12) kifejezésekkel. Ilyen módon, a kisugárzott energiaáram rezgési periódusra vonatkozó átlagértékét megadó (2.126) egyenlet most is alkalmazható, ahol $\omega_f = k$ és $\lambda_f = \sqrt{k^2 - 1}$. Ennek eredményeképp, az oszcillatonok időátlagolt tömeg (vagyis energia) veszteségi rátája

$$\bar{S} = \frac{\pi^{\frac{d}{2}-1}}{2m^{d-3} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \nu_k^2 k \sqrt{k^2 - 1} \left(\frac{P}{\varepsilon}\right)^{d-1} \exp\left(-2\sqrt{k^2 - 1} \frac{P}{\varepsilon}\right). \quad (3.147)$$

A sík háttérre vonatkozó (2.232) egyenlethez viszonyított $1/(8\pi)$ szorzó eltérés a skalármező $\bar{\phi} = \sqrt{8\pi} \phi$ átskálázása miatt ν_k -ban is megjelenő szorzóból adódik.

Szimmetrikus potenciál esetén, amikor a $k = 3$ módus felelős a sugárzásért, ν_3 értékére alkalmazhatjuk a (3.140) összfüggést, így az egységnyi idő alatti átlagolt tömegveszteség

$$\bar{S} = -\frac{dM}{dt} = \frac{c_1}{m^{d-3} \varepsilon^{d-1}} \exp\left(-\frac{c_2}{\varepsilon}\right), \quad (3.148)$$

ahol a térdimenziók d számától függő állandók:

$$c_1 = 3\sqrt{2} k_d^2 P^{d-1} \frac{\pi^{d/2+1}}{4\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}, \quad c_2 = 4\sqrt{2} P. \quad (3.149)$$

A c_1 és c_2 állandók numerikus értékét a 3.4 táblázatban adjuk meg. A c_2 konstans értéke

	$d = 3$	$d = 4$	$d = 5$
c_1	30.0	7.23	0.720
c_2	22.4993	13.0372	6.99159

3.4. táblázat. A tömegveszteségi ráta (3.148) képletében szereplő c_1 és c_2 állandók

$d = 3, 4, 5$ térbeli dimenzió és Klein-Gordon mező esetén.

minden szimmetrikus potenciálnál ugyanaz, de a c_1 -re megadott számok csak a Klein-Gordon mezőre érvényesek.

Az exponenciális függés miatt, minél nagyobb ε , annál nagyobb esélyünk van az előreláthatólag nagyon kicsi energiaveszteség megfigyelésére. A 3.3.5 fejezetben tárgyalt módon, $d = 3$ térdimenzióánál az oszcillatonok stabilak ha az amplitúdót jellemző paraméter egy kritikus érték alatt marad, $\varepsilon < \varepsilon_c$. A (3.96) egyenlet szerint ennek közelítő numerikus értéke $\varepsilon_c = 0.525$. Az oszcillaton tömege maximális ennél az ε_c értéknél. A skalármező m

tömegét figyelembe véve, az ε kifejtésből adódó érték $M_c = 0.614/m$. A (3.148) egyenletbe helyettesítve, a maximális tömegű, és így legerősebben sugárzó stabil oszcillaton relatív tömegveszteségi rátája,

$$\left(\frac{1}{M} \frac{d\overline{M}}{dt} \right)_{M=M_c} = -4.33 \cdot 10^{-17} m . \quad (3.150)$$

A (3.85) egyenletnek megfelelően, $d = 3$ térbeli dimenzió esetén a teljes tömeg arányos az amplitúdóval, $M = \varepsilon M^{(1)}/m$. A 3.2 táblázat szerint ekkor $M^{(1)} = 1.75266$. Behelyettesítve a (3.148) egyenletbe, a Klein-Gordon potenciál esetére

$$\frac{d\overline{M}}{dt} = -\frac{c_3}{m^2 M^2} \exp\left(-\frac{c_4}{mM}\right) . \quad (3.151)$$

ahol

$$c_3 = 92.2 \quad , \quad c_4 = 39.4337 . \quad (3.152)$$

A (3.151) kifejezés ugyanolyan alakú, mint a Don Page [39] cikkének (122)-es egyenletében megadott tömegveszteségi formula. Azonban, a c_3 -nak megfelelő állandó nagyságrendekkel nagyobb abban a cikkben, értékére 3797437.776 szerepel. Ez azt jelenti, hogy a sugárzás amplitúdóját (3.145) szerint meghatározó α konstans értéke 202.9 szoros szorzóval túlbecsült a [39] cikkben. A [40] cikkünkben részletesen elemeztük a két eljárás közötti különbséget. Az eltérést az okozza, hogy [39]-ben egy végtelen sornak csak az első rendje lett figyelembe véve, pedig a sor minden tagja ε -ban azonos rendű járulékot ad.

3.4.7. Farok amplitúdó

Az előző alfejezetekben kiszámolt állóhullám farok amplitúdója annyira kicsi, hogy nem meglepő hogy numerikusan nem figyelték meg a [37] és [136] cikkekben. Ahhoz hogy összehasonlíthassuk a középponti és a farok amplitúdót, a mag tartományban a skalármezőt a vezető rendű $\phi = \varepsilon^2 p_2 \cos \tau$ értékkel közelítjük, a farok tartományban pedig (3.144)-et használjuk. A farok annál az $r = r_f$ sugárnál kezd dominánssá válni, ahol

$$\bar{\phi}(t = 0, r) = \varepsilon^2 p_2(\varepsilon r) = \varepsilon^2 S(\varepsilon r) \sqrt{\frac{d-1}{d-2}} \quad (3.153)$$

egyenlővé válik $\alpha r^{(1-d)/2}$ értékével. Mivel nagy ρ -nál $s \approx -1 + s_1 \rho^{2-D}$, az függvény aszimptotikus viselkedése az oszcillatonok létezését megengedő dimenziók esetén

$$S = \begin{cases} S_t e^{-\rho} \rho^{s_1/2-1} \left[1 - \frac{s_1(s_1-2)}{8\rho} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho^2}\right) \right] & \text{ha } d = 3, \\ S_t \frac{e^{-\rho}}{\rho^{3/2}} \left[1 - \frac{4s_1-3}{8\rho} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho^2}\right) \right] & \text{ha } d = 4, \\ S_t \frac{e^{-\rho}}{\rho^2} \left[1 + \frac{1}{\rho} - \frac{s_1}{4\rho^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho^4}\right) \right] & \text{ha } d = 5, \end{cases} \quad (3.154)$$

ahol az s_1 állandó numerikus értékét a 3.1 táblázatban, az S_t értékét pedig a 3.5 táblázatban adjuk meg. Az r_f sugarat ahol a farok megjelenik, és az ottani $\phi_f = \alpha r_f^{(1-d)/2} / \sqrt{8\pi}$

	$d = 3$	$d = 4$	$d = 5$
S_t	3.495	88.24	23.39

3.5. táblázat. Az S_t állandó numerikus értéke.

farok amplitúdót a 3.6 táblázatban mutatjuk be különféle ε értékek esetén. Az r_f sugár nyil-

ε	$d = 3$		$d = 4$		$d = 5$	
	r_f	ϕ_f	r_f	ϕ_f	r_f	ϕ_f
0.1	1160	$8.96 \cdot 10^{-52}$	648	$2.76 \cdot 10^{-32}$	346	$4.42 \cdot 10^{-20}$
0.2	302	$4.63 \cdot 10^{-27}$	168	$1.06 \cdot 10^{-17}$	92.6	$6.01 \cdot 10^{-12}$
0.3	140	$9.28 \cdot 10^{-19}$	78.2	$9.45 \cdot 10^{-13}$	45.0	$3.83 \cdot 10^{-9}$
0.4	81.6	$1.40 \cdot 10^{-14}$	46.4	$3.07 \cdot 10^{-10}$	27.9	$1.03 \cdot 10^{-7}$
0.5	54.3	$4.68 \cdot 10^{-12}$	31.5	$1.03 \cdot 10^{-8}$	19.8	$7.56 \cdot 10^{-7}$
0.6	39.2	$2.30 \cdot 10^{-10}$	23.2	$1.09 \cdot 10^{-7}$	15.1	$2.87 \cdot 10^{-6}$
0.7	29.9	$3.76 \cdot 10^{-9}$	18.0	$5.91 \cdot 10^{-7}$	12.2	$7.42 \cdot 10^{-6}$
0.8	23.8	$3.08 \cdot 10^{-8}$	14.6	$2.12 \cdot 10^{-6}$	10.3	$1.51 \cdot 10^{-5}$

3.6. táblázat. Az r_f sugár ahol a farok dominánssá válik, és a skalármező ottani ϕ_f amplitúdója.

vánvalóan sokkal nagyobb mint a mag tipikus mérete, amely $r_q = \rho_q / (\varepsilon m)$, ahol ρ_q a 3.3 táblázatban adott.

A skalármező farkának amplitúdóját a mező középponti értékéhez célszerű hasonlítani, amely

$$\phi_c = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \varepsilon^2 \phi_{1c} \quad , \quad \phi_{1c} = S_c \sqrt{\frac{d-1}{d-2}} \quad , \quad (3.155)$$

ahol az S_c értéke a 3.1 táblázatban található. Nyilvánvalóan csak viszonylag nagy ε értékeknél van esélye annak, hogy a sugárzásért felelős rezgő farkat numerikusan kimutathassuk.

3.5. Kvázibreatherek numerikus vizsgálata $\Lambda = 0$ esetén

Ebben a fejezetben időben tökéletesen periodikus állapotokat tanulmányozunk $d = 3$ térbeli dimenzió és $m = 1$ tömegű Klein-Gordon skalármező esetén. Nagy pontosságú spektrális numerikus módszer segítségével kívánjuk meghatározni az állóhullám farok amplitúdóját, amely sok nagyságrenddel kisebb mint a mag tartománybeli amplitúdók. Térben konformisan sík koordináta-rendszert használunk, amikor $C = r^2 B$, és a megoldandó egyenletek (3.27)-(3.31). Az ω frekvencia függvényében keressünk megoldásokat a (3.98)-(3.100) Fourier sor alakban. A Klein-Gordon potenciál szimmetriája miatt a skalármezőnek csak páratlan, míg a metrikus függvényeknek csak páros komponensei vannak. A fejezetben a [41] cikkünkben közölt eredményeket ismertetjük.

3.5.1. Aszimptotikus viselkedés

A közbülső tartományban, ahol az állóhullám farok által képviselt tömeg még jóval kisebb mint az kvázibreather magjának tömege, a téridő aszimptotikusan síknak tekinthető, és így a Schwarzschild metrikához tart. Térben konformisan sík koordináta-rendszer esetén ennek alakja a (3.22) egyenletben adott. Háromdimenziós térnél a metrikus függvények aszimptotikus viselkedése

$$A = 1 - \frac{r_A}{r}, \quad (3.156)$$

$$B = 1 + \frac{r_B}{r}, \quad (3.157)$$

ahol r_A és r_B állandók. Természetesen, a teljes rendszer megoldására teljesülnie kell, hogy $r_A = r_B \equiv r_0$, ahol most $d = 3$ térdimenzió esetén $r_0 = 2M$. Az $r_A = r_B$ összefüggést azonban nem követeljük meg közvetlenül a numerikus kódunkban, hanem inkább a kód pontosságának mérésére használjuk.

Nagy távolságokra, vezető rendben a skalármező Φ_n Fourier komponensei továbbra is a sík háttéren felírt (2.43) egyenlet baloldali lineáris részét elégíti ki $m = 1$ mellett. Mivel a frekvenciára feltételezhetjük, hogy $\frac{1}{3} < \omega < 1$, két különböző eset van. Ha $n = 1$ akkor a végtelenben lecsengő megoldás

$$\Phi_1 = C_1 \frac{\exp(-\varepsilon r)}{r}, \quad (3.158)$$

ahol $\varepsilon = \sqrt{1 - \omega^2}$ és C_1 konstans. Ha $n > 1$ akkor a megoldás oszcillálva lecsengő,

$$\Phi_n = C_n \frac{\cos(\lambda_n r + \alpha_n)}{r}, \quad (3.159)$$

ahol $\lambda_n = \sqrt{n^2 \omega^2 - 1}$, valamint C_n és α_n állandók. A C_n együtthatók a 3.4.5 fejezetben általános dimenzió esetén (3.144)-ben használt α konstansnak felelnek meg.

A vezető rendű közelítésben a háttér a Minkowski térdeiő, és az α_n fázis konstans. Ennél jobb leírást kaphatunk, ha a háttérrel a Schwarzschild téridőnek választjuk, aminek hatására a fázisban megjelenik egy lassú függés a radiális koordinátától. Hogy a közelítés következő rendjét megkaphassuk, megengedjük hogy az α_n lassan változó függvénye legyen az r koordinátának, úgy hogy deriváltjára fennáll, hogy $\alpha_{n,r} \ll \lambda_n$. Pontosabban, feltesszük hogy (3.159) fennáll, és $\alpha_{n,r}$ rendje λ_n/r . Az első két rendet megtartva $1/r$ -ben,

$$\Phi_{n,r} = -C_n (\lambda_n + \alpha_{n,r}) \frac{\sin(\lambda_n r + \alpha_n)}{r} - C_n \frac{\cos(\lambda_n r + \alpha_n)}{r^2}, \quad (3.160)$$

$$\Phi_{n,rr} = -C_n (\lambda_n^2 + 2\lambda_n \alpha_{n,r}) \frac{\cos(\lambda_n r + \alpha_n)}{r} + 2C_n \lambda_n \frac{\sin(\lambda_n r + \alpha_n)}{r^2}. \quad (3.161)$$

A (3.31) hullámegyenletbe helyettesítve a metrikus függvények (3.156)-(3.157) kifejezését, ahol $r_A = r_B = r_0$, és $1/r$ -ben négyzetes és magasabb rendű tagokat elhagyva,

$$\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \Phi_{n,rr} + \frac{2}{r} \Phi_{n,r} + n^2 \omega^2 \left(1 + \frac{r_0}{r}\right) \Phi_n - \Phi_n = 0. \quad (3.162)$$

Behelyettesítve a (3.159)-(3.161) kifejezéseket, a másodrendű tagokból következik egy differenciálegyenlet az α_n fázisra,

$$-2\lambda_n \alpha_{n,r} + \frac{r_0}{r} (\lambda_n^2 + n^2 \omega^2) = 0, \quad (3.163)$$

melynek megoldása

$$\alpha_n = \frac{r_0}{2} \left(\frac{2\lambda_n^2 + 1}{\lambda_n} \right) \log r + \delta_n, \quad (3.164)$$

ahol δ_n konstans. Könnyen ellenőrizhető, hogy a kiindulási hipotézisnek megfelelően, $\alpha_{n,r}$ valóban azonos rendű mint λ_n/r . A skalármező Fourier komponenseire külső határfeltételként a (3.159) kifejezést fogjuk használni (3.164) behelyettesítésével.

3.5.2. Spektrális numerikus módszer

A rendszer numerikus megoldásait a Philippe Grandclement által kifejlesztett KADATH spektrális könyvtár használatával állítottuk elő [183, 184]. A programcsomagot kétdimenziós téren definiált függvények leírására használjuk, a (t, r) koordináták függvényeként. Az

időkoordinátára egyetlen tartományt definiálunk. A t fizikai időkoordináta a t^* numerikus koordinátához a $t^* = \omega t$ összefüggéssel kapcsolódik. Ezután spektrális kifejtést hajtunk végre t^* szerint, páros koszinuszokat használva A -ra és B -re, valamint páratlanokat ϕ -re, a (3.98)-(3.100) Fourier kifejtésnek megfelelően.

A radiális koordinátára több egymáshoz illeszkedő tartományban elvégzett dekompozíciót használunk, hasonlóan a [184] cikk (2.2) fejezetében leírtakhoz. Egy mag tartományt definiálunk, ami a szimmetria középpontot tartalmazza, és több gömbhéj alakú tartományt, amelyek két véges sugár között helyezkednek el. Az állóhullám rezgő farkak jelenléte miatt nem tudunk egy végtelen nagy külső tartományra kompaktifikációt alkalmazni. Az egyenleteket az r radiális koordináta egy nagy R_{\max} értékig oldjuk meg, ahol az előző alfejezetben leírt módon az aszimptotikus megoldáshoz illesztünk. A fizikai r koordináta mindegyik tartományban egy-egy affín transzformációval kapcsolódik az r^* numerikus koordinátához. A mag tartományban $r = R_{\text{nuc}} r^*$ összefüggést használunk, ahol $r^* \in [0,1]$ és R_{nuc} a tartomány sugara. A gömbhéjakban használt összefüggés

$$r = \left(\frac{R_{\text{outer}} - R_{\text{inner}}}{2} \right) r^* + \left(\frac{R_{\text{outer}} + R_{\text{inner}}}{2} \right) , \quad (3.165)$$

ahol $r^* \in [-1, 1]$, valamint R_{inner} és R_{outer} a tartomány belső és külső sugara. A spektrális kifejtést az r^* változó szerint végezzük. A mag tartományban, mivel a függvények párosak az origóra nézve, csak páros Csebisev-polinomokat használunk. A többi tartományban standard Csebisev-polinomok szerinti kifejtést alkalmazunk. Például, egy adott gömbhéjban az A metrikus függvény közelítése

$$A = \sum_{j=1}^{N_t} \sum_{i=0}^{N_r} A_{ij} \cos(2jt^*) T_i(r^*) , \quad (3.166)$$

ahol N_t és N_r a koefficiensek száma t^* és r^* szerint. Az i -ed fokú Csebisev polinomot T_i -vel jelöljük, és az A_{ij} konstansok az A függvény spektrális koefficiensei.

3.5.3. Illesztési feltételek a külső határon

A külső határfeltételeket a mezők 3.5.1 alfejezetben bemutatott aszimptotikus viselkedése alapján határozzuk meg. Tekintsünk a numerikusan számolandó tartományban egy $f(r)$ függvényt, amit a határfelületen az analitikusan meghatározott $g(r)$ alakú aszimptotikus viselkedéshez kell illesztenünk. Megköveteljük, hogy az $f(r)$ függvény közel legyen a $Cg(r)$ függvényhez, ahol C előre nem ismert állandó. A függvény és deriváltjának folytonossága az

alábbi feltételeket adja:

$$f(R_{\max}) = Cg(R_{\max}) , \quad (3.167)$$

$$f_{,r}(R_{\max}) = Cg_{,r}(R_{\max}) . \quad (3.168)$$

A C konstanst kiküszöbölhetjük, és így f -re egy olyan határfeltételt kapunk ami csak a g függvényt tartalmazza,

$$[fg_{,r} - f_{,r}g](R_{\max}) = 0 . \quad (3.169)$$

Ezt az eljárást alkalmazzuk az A és B metrikus függvények időfüggetlen nulladik Fourier komponenseire, amelyeket a (3.156)-(3.157) alakhoz illesztünk. A és B többi komponensét az azonosan nulla függvényhez illesztjük a határon. A skalármezőnél a nulladik komponensét a (3.158) egyenlet szerinti exponenciálisan lecsengő alakhoz illesztjük. A többi komponensét az oszcilláló (3.159) alakhoz illesztjük, ahol az α_n fázis (3.164) kifejezésében az $r_0 = r_B$ értéket használjuk, mivel r_A és r_B egyaránt r_0 -hoz konvergál ha az R_{\max} illesztési sugár növekszik.

3.5.4. A numerikus rendszer

A KADATH spektrális numerikus könyvtár használatával végzett számolás keretében a rendszert leíró parciális differenciálegyenletek átalakításra kerülnek csatolt algebrai egyenletek rendszerévé, amelyben az ismeretlenek a különböző mezők kifejtési együtthatói. A nemlineáris rendszert Newton-Raphson módszerrel oldjuk meg. Egy kezdeti közelítő megoldásból indulva a megoldást iteráció segítségével közelítjük. Minden egyes lépésnél a linearizált rendszer invertálásra kerül [184].

A megoldandó egyenletek (3.27)-(3.31) rendszere redundáns, vagyis több egyenletet tartalmaz mint ismeretlent. Konkrét számolásaink során megoldandó rendszerként a (3.27), (3.28) és (3.31) egyenleteket választjuk, és a többi megfelelő teljesülését a megoldás meghatározása után ellenőrizzük.

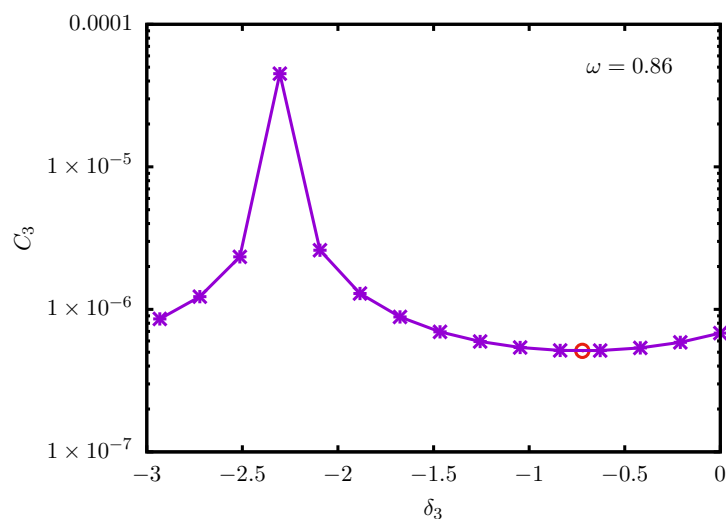
Mint a 3.3 fejezetben bemutatott kis-amplitúdós kifejtésnél láttuk, az oszcillatonok mérete egyre nagyobbá válik ahogy az ω frekvenciájuk 1-hez tart. Emiatt bevezettünk egy $\rho = \varepsilon r$ átskálázott radiális koordinátát, ahol $\varepsilon = \sqrt{1 - \omega^2}$. A ρ koordináta használatával a megoldások geometriája viszonylag hasonlónak válik. Ezt figyelembe véve, a radiális tartományokat az r koordináta szerint a következőképpen választjuk meg: $[0, 1/\varepsilon]$, $[1/\varepsilon, 2/\varepsilon]$, $[2/\varepsilon, 4/\varepsilon]$ az első háromra, és $[4i/\varepsilon, 4(i+1)/\varepsilon]$ a többi i -vel indexelt tartományra. A külső tartományok méretét egységesen $4/\varepsilon$ -nak választjuk, hogy megfelelően le tudjuk írni a ϕ skalárfüggvényben megjelenő állóhullám farkat, amihez szükséges, hogy a tartomány mérete ne legyen túl nagy a rezgések hullámhosszához képest. A külső illesztési felület helye változtatható a tartományok

N_d számának megválasztásával. A számolásaink során általában megfelelőnek bizonyult az $N_d = 20$ választás, ami $R_{\max} = 68/\varepsilon$ -nak felel meg.

A spektrális koeficienszek számát tekintve, háromféle felbontást használtunk, egy alacsony $N_r = 13$ radiális és $N_t = 5$ időszerű koeficienssel, egy közepeset $N_r = 17$ és $N_t = 7$, valamint egy nagy felbontásút $N_r = 33$ és $N_t = 9$ értékekkel. A Newton-Raphson iteráció elkezdéséhez szükséges közelítő kezdeti megoldást a kis-amplitúdós kifejtés első rendjéből kaptuk, $\varepsilon \approx 0.1$ választással. Ha már ismert egy megoldás melyre ω közel van 1-hez, azt kezdeti konfigurációnak lehet használni új megoldások kereséséhez az ω frekvencia kis lépésekben történő változtatásával. A nagyobb felbontású számolások a koeficienszek nagy számából adódó óriási méretű mátrixok invertálása miatt még egy több tucat számítógépből álló csoporton futtatva is jelentős időt vettek igénybe.

3.5.5. A rezgő farkok amplitúdójának minimalizálása

A skalármező $n > 1$ indexű Fourier komponenseinek (3.159) szerinti aszimptotikus viselkedésénél az összes lassan változó α_n fázis (3.164) alakjában van egy-egy szabadon választható δ_n konstans. A gyakorlatban azt a megoldást keressük, amely a lehető legjobban lokalizáltnak tekinthető. Az úgynevezett kvázibreather megoldást kívánjuk megkonstruálni, amellyel az állóhullám fark az összes módusban minimális amplitúdójú. Ehhez elvileg az összes δ_n függvényében kellene minimalizálni az összes módus farka által képviselt együttes energiasűrűséget. A feladatot szerencsére lényegesen egyszerűsíti az, hogy a Φ_3 Fourier módus rezgő farkának amplitúdója nagyságrendekkel nagyobb a többi módus amplitúdójánál, és így elegendő a (3.159) egyenletben szereplő C_3 konstans minimalizálni. További jelentős egyszerűsítést származik abból, hogy a magasabb módusok farkának viselkedése alig befolyásolja a náluk sokkal nagyobb domináns Φ_3 módust. Más szóval, C_3 majdnem független az $n > 3$ indexű δ_n fázisoktól. Ez azt jelenti, hogy C_3 minimalizálása csak a δ_3 fázis függvényében nagyon jó közelítéssel megadja a valódi minimumot. Ezt a várakozást a numerikus vizsgálataink is meggyőzően megerősítik. Az összes vizsgált esetben a δ_5 és a többi nagyobb indexű fázis megváltoztatása elhanyagolható mértékben változtatta meg C_3 minimumának értékét és annak δ_3 szerinti helyét. Ezen megfontolások alapján, a konkrét számolásoknál $n \neq 3$ esetén a δ_n fázisokat nullának választjuk, míg δ_3 -at a C_3 amplitúdó minimalizálásával kapjuk. A számolásaink során a minimalizálást az aranymetszés módszere segítségével végeztük. A 3.5 ábrán a C_3 amplitúdó fázisfüggését láthatjuk $\omega = 0.86$ esetére. Látható, hogy a minimum környezetében a függvény nagyon lassan változik, így nem szükséges δ_3 értékét nagy pontossággal meghatározni ahhoz hogy az amplitúdóra pontos értéket kapjunk. Ellen-



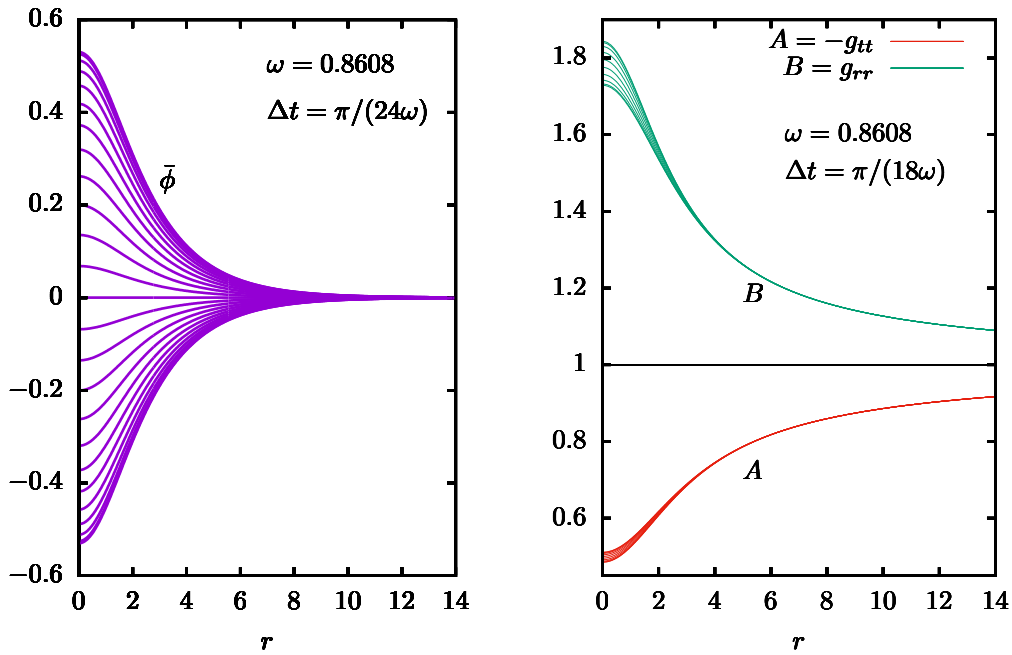
3.5. ábra. A domináns C_3 amplitúdó a δ_3 fázis függvényében $\omega = 0.86$ esetén. A piros kör a minimum helyét jelzi, $\delta_3 = -0.72$ -nél $C_3 = 5.118 \cdot 10^{-7}$.

őriztük, hogy δ_3 értékére különféle nemnulla értékeket választva a C_3 -ra kiszámolt eredmény csak a sokadik tizedesjegyben változik, relatív megváltozása 10^{-6} alatt marad, pedig már az abszolút értéke is 10^{-6} körüli.

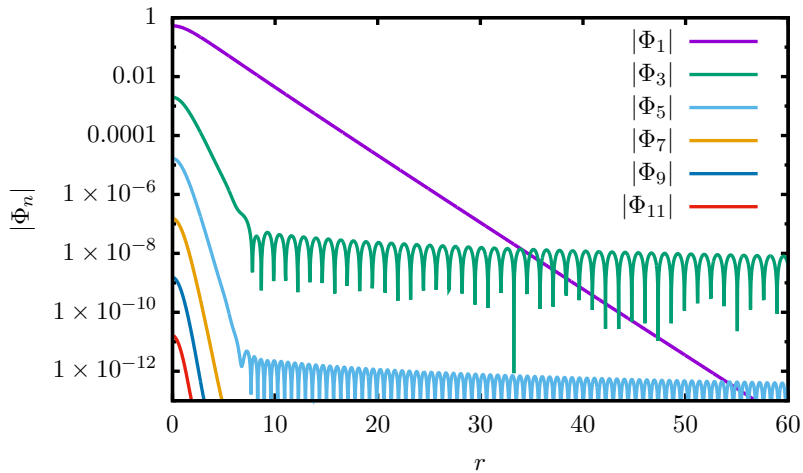
3.5.6. Numerikus eredmények

A 3.6 ábrán A skalármező és a metrikus függvények egy rezgési periódus alatti változását láthatjuk a mag tartományban az $\omega = \omega_c = 0.8608$ kritikus frekvenciájú Klein-Gordon mező által létrehozott oszcillaton esetén. A kritikus frekvencia alatti oszcillatonok instabilak, míg $\omega_c < \omega < 1$ esetén stabilnak bizonyulnak. Látható, hogy A és B esetén a sztatikus \bar{A}_0 és \bar{B}_0 komponenshez képest való rezgés viszonylag kicsi. Nagyobb frekvenciájú állapotokat vizsgálva kitűnik, hogy $\omega \rightarrow 1$ esetén a rezgés relatív nagysága egyre kisebbé válik, és az állapot egyre inkább hasonlónak lesz a komplex mezők által létrehozott sztatikus bozoncsillagokhoz.

A 3.7 ábrán, ugyanennél a kritikus frekvenciájú oszcillatonnál, a skalármező első néhány Fourier módusának radiális függését láthatjuk. A függvények sok nagyságrendben történő változása miatt az abszolút értéküket adjuk meg logaritmikus formában. A lefelé mutató csúcsok a zérushelyeknek felelnek meg. A 3.8 ábrán az A metrikus függvény komponenseit, míg a 3.9 ábrán B komponenseit láthatjuk. Más frekvenciákra is hasonló ábrákat kaphatunk. A frekvencia növelésével a farok amplitúdók gyorsan csökkennek. Ahogy a frekvencia közelíti az 1 küszöbértéket, a magasabb módusok alaplómódushoz viszonyított relatív nagysága is csökken, így kevesebb Fourier módus figyelembe vételével is pontos eredményt kaphatunk.



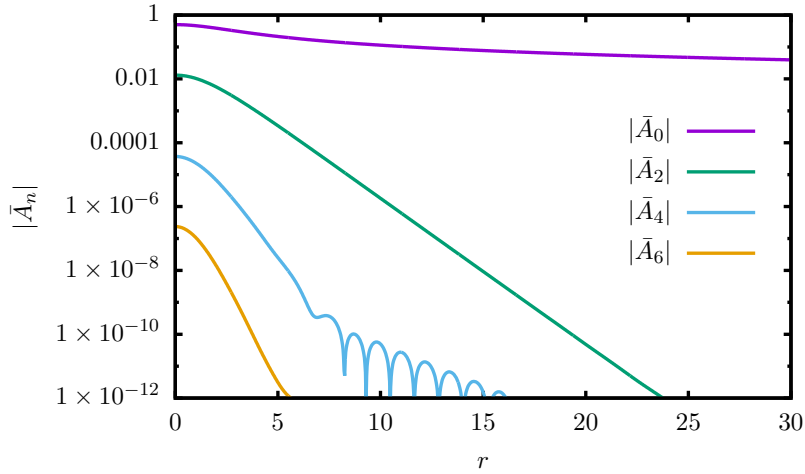
3.6. ábra. A $\bar{\phi}$ skalármező, valamint az A és B metrikus komponensek időfejlődése egy rezgési periódus alatt.



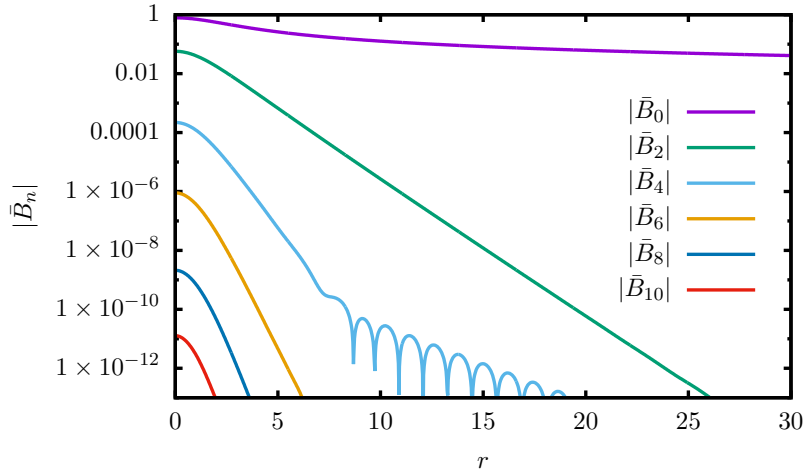
3.7. ábra. A $\bar{\phi}$ skalármező Φ_n Fourier komponensei $\omega = 0.8608$ frekvenciánál.

Numerikus számolásaink egyik legfontosabb eredménye annak kimutatása, hogy nincs olyan ω frekvencia amelynél a sugárzásért felelős rezgő farok eltűnik.

A 3.10 ábrán megadjuk a minimalizált C_3 amplitúdó frekvenciától való függését abban a tartományban ahol a farok elég nagy ahhoz hogy numerikusan meg tudjuk határozni. A spektrális koefficiensek száma az alacsony felbontásnál $N_r = 13$, $N_t = 5$, közepesnél $N_r = 17$,

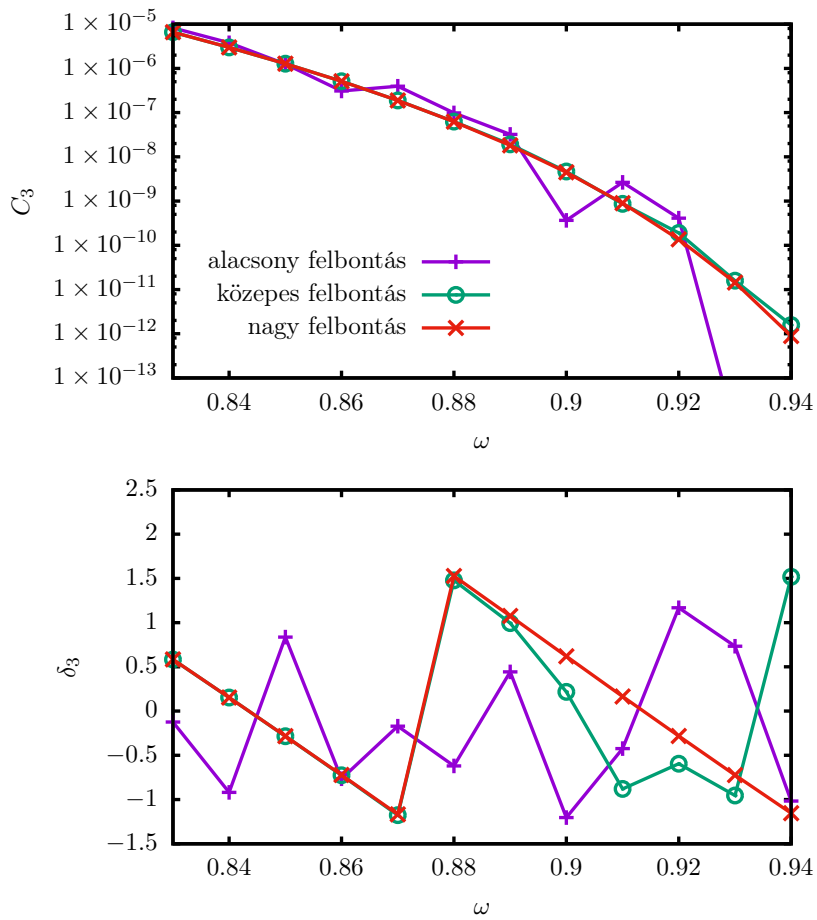


3.8. ábra. Az A metrikus függvény \bar{A}_n Fourier komponensei $\omega = 0.8608$ esetén.

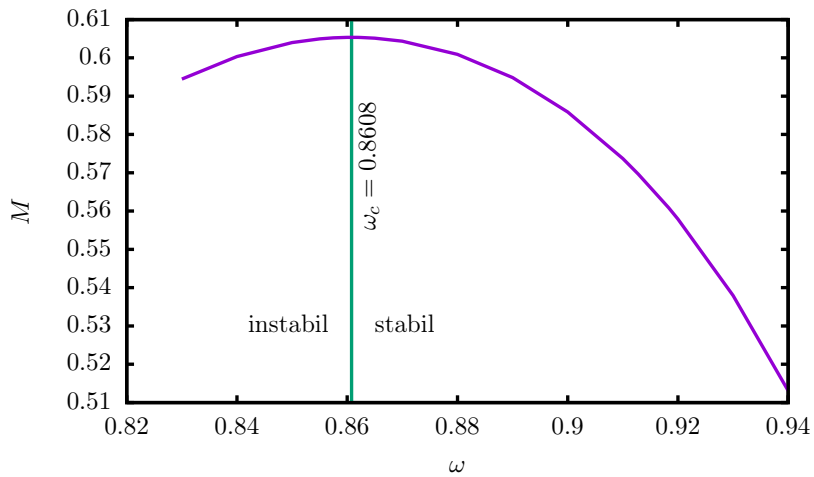


3.9. ábra. A B metrikus függvény \bar{B}_n Fourier komponensei $\omega = 0.8608$ esetén.

$N_t = 7$, nagy felbontásnál $N_r = 33$, $N_t = 9$. Az alsó ábrán a δ_3 fázist is megadjuk a háromféle felbontás esetére. Az hogy nincs olyan ω amelyre $C_3 = 0$ azt jelenti, hogy nincs egzaktul periodikus lokalizált breather megoldása a rendszernek. Az összes oszcillaton megoldás tömege nagyon lassan csökken az idő múlásával a skalármező által kisugárzott energia miatt. Az alsó ábrából látható, hogy az alacsony felbontás nem elegendő a fázis meghatározására, és a közepes is csak alacsony frekvenciáknál megfelelő. Ennek ellenére, a minimális C_3 amplitúdó értékére a görbe lapossága miatt már ezek a felbontások is elfogadható közelítést adnak. A 3.11 ábrán a mag tartomány által képviselt teljes tömeget láthatjuk, abban az előbb is használt frekvenciatartományban ahol a fark nagysága még kimutatható. A tömeg maximumát az $\omega_c = 0.8608$ frekvenciánál veszi fel, ahol értéke $M_c = 0.60535$. Ez a kritikus állapot



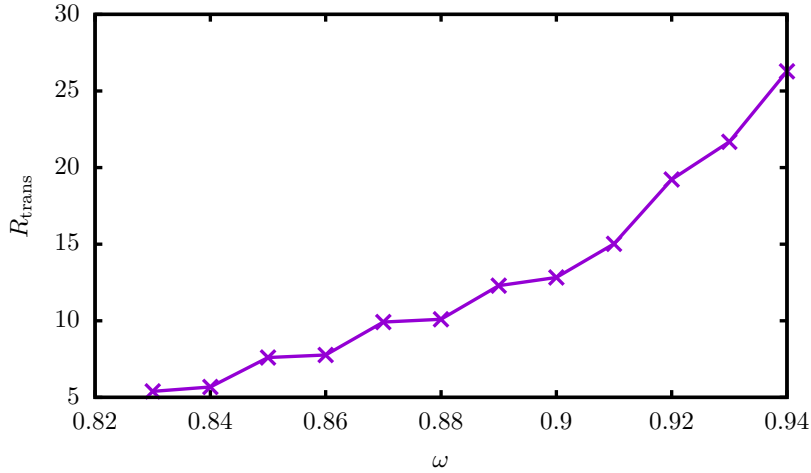
3.10. ábra. Oszcillatonok domináns sugárzási amplitúdóját meghatározó minimalizált C_3 amplitúdó és a hozzá tartozó δ_3 fázis, háromféle numerikus felbontás esetén.



3.11. ábra. Klein-Gordon oszcillatonok tömege a frekvenciájuk függvényében.

választja el egymástól a stabil és instabil oszcillatonokat. Habár a tömegnek maximuma van, a Φ_1 , Φ_3 Fourier módusok középponti értéke, és így a központi energiasűrűség is, monoton csökken ω növekedésével.

A 3.12 ábrán annak az R_{trans} sugárnak a frekvencia függését ábrázoljuk, amelynél a Φ_3



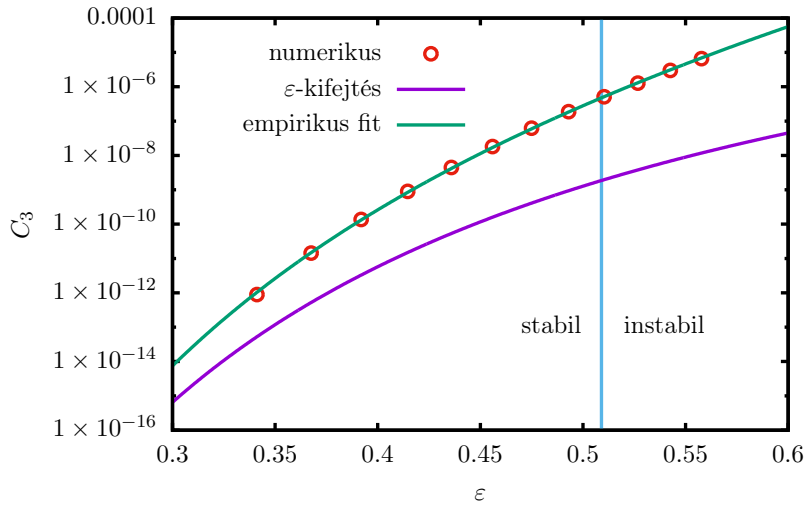
3.12. ábra. Az állóhullám farok megjelenésének R_{trans} helye a Φ_3 módusban, a frekvencia függvényében.

módusban a sugárzás dominánssá válik. Pontosabban, R_{trans} értékének azt az r sugarat definiáljuk, ahol Φ_3 értéke először nullává válik. A görbén megjelenő kis oszcilláció a farok fázisának változása miatt jelentkezik. A R_{trans} függvény lényegében monoton növekszik, és a kis-amplitúdós kifejtés szerint $\omega = 1$ -nél végtelenhez tart. Az a sugár, ahol a ϕ skalármező radiális függésében is láthatóan megjelenik az állóhullám farok ennél az értéknél még jóval kijebb van, mivel az R_{trans} sugárnál az exponenciálisan lecsengő Φ_1 módus még sokkal nagyobb mint Φ_3 .

3.5.7. A kis-amplitúdós kifejtéssel való összehasonlítás

Három térdimenzió és Klein-Gordon potenciál esetén a $C_3 \equiv \alpha$ amplitúdó paraméter ε függésére kapott vezető rendű elméleti eredmény (3.146) által adott. A 3.13 ábrán újra megadjuk a 3.10 ábrán már bemutatott numerikusan kiszámolt C_3 amplitúdókat, de az összehasonlítás megkönnyítése végett az $\varepsilon = \sqrt{1 - \omega^2}$ paraméter függvényeként. A (3.146) kifejezéssel leírt elméleti görbe jóval lejjebb helyezkedik el az adatpontoknál. A következő empirikus kifejezéssel megadott görbe,

$$C_3^{\text{emp}} = \frac{3.761}{\varepsilon} (1 + \varepsilon^2)^{16.63} \exp \left[-\frac{11.2497}{\varepsilon} (1 - 0.2990 \varepsilon^2) \right], \quad (3.170)$$

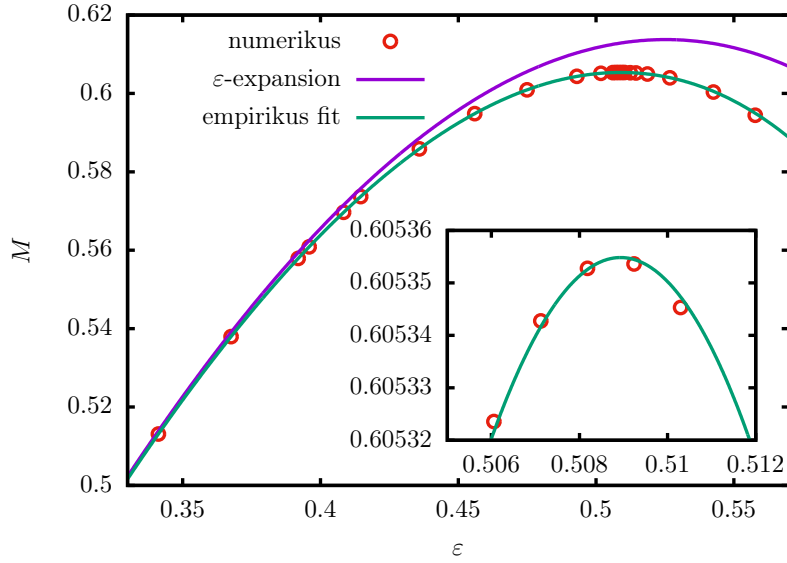


3.13. ábra. A Φ_3 módus C_3 farok amplitúdójára kapott numerikus értékek összehasonlítása a lila görbével jelzett vezető rendű elméleti eredménnyel. A zöld görbét az adatpontokra való illesztéssel kaptuk.

jól illeszkedik a numerikus eredményekre, továbbá kis ε értékeknél a (3.146) elméleti eredményt közelíti. Természetes elvárásnak tűnik, hogy ha a sugárzást ε -ban magasabb rendben meg tudnánk határozni, akkor a pólus helye és az exponenciális előtti együttható is polinomiális módon függene ε -tól, és így a fenti empirikus kifejezéshez hasonló képletet kaphatnánk. Mivel nagyon jól közelíti az összes eddigi numerikus eredményt, ennek az empirikus formulának azért nagy a jelentősége, mert a teljes stabil tartományban, bármely $\omega_c < \omega < 1$ frekvencia esetén, további numerikus számolás nélkül nagy pontossággal megadja a farok nagyságát, és így a sugárzás erősségét.

Nagy ε értékeknél a 3.13 ábrán látható numerikus értékek több százszor nagyobbak mint az analitikus eredmények, de ε csökkenésével a relatív különbség is exponenciálisan csökken. A legkisebb ε amelynél a farkat numerikusan ki tudjuk számolni $\varepsilon = 0.341$, ahol a C_3 amplitúdó nagyságrendje 10^{-12} . Ekkor a numerikus eredmény még mindig hússzor nagyobb az elméletinél. Az $\varepsilon = 0.341$ paraméter egy hatványok szerinti kifejtésnél még egyáltalán nem tekinthető kicsinek. A relatív eltérés exponenciális csökkenése miatt meggyőzőnek látszik, hogy a két módszerrel kapott eredmény egyre inkább megegyező eredményt adna kisebb ε értékeknél.

A (3.14) ábrán az oszcillaton tömegét adjuk meg az ε paraméter függvényében. A kis-amplitúdós kifejtés (3.85) által megadott első két tagja elfogadható közelítést ad, de a maximum helye és nagysága már nem különösebben pontos. Ez nem meglepő, mert a maximum



3.14. ábra. Numerikusan és analitikusan számolt oszcillaton tömeg különféle ε értékeknél. A zöld görbe egy pontos empirikus illesztés.

helye $\varepsilon \approx 0.5$, ami egyáltalán nem kicsi. Az adatokra nagyon jól illeszkedő görbét kaphatunk a következő alakban:

$$M^{\text{emp.}} = \varepsilon M_1 + \varepsilon^3 M_2 + \varepsilon^5 M_3 + \varepsilon^7 M_4 + \varepsilon^9 M_5, \quad (3.171)$$

ahol M_1 és M_2 értékére megtartottuk az $M_1 = 1.75266$ és $M_2 = -2.11742$ kis amplitúdós kifejtés által meghatározott értékeket, az illesztett konstansok pedig $M_3 = -0.24723$, $M_4 = 1.1749$ és $M_5 = -4.1308$. A maximum helyét megadó numerikus érték $\varepsilon_c = 0.509$, ami az $\omega_c = 0.8608$ frekvenciának felel meg, és a maximális tömeg $M_c = 0.60535$. Ezen értékeknek az ad fontosságot, hogy $\varepsilon > \varepsilon_c$ esetén, vagyis $\omega < \omega_c$ mellett, az oszcillatonok instabilak. A korábbi irodalomban, a [136, 140] cikkekben található értékek ω_c -re 0.864 és M_c -re 0.607. Az m skalártömeg visszaállításával és fizikai mértékegységek használatával felírt maximális tömeg képletét (3.97)-ben írtuk fel.

3.5.8. A tömegveszteségi ráta nagy amplitúdóknál

A skalármező által kisugárzott energiaáramot most is a 3.4.6 fejezetben leírt módon számolhatjuk. Az ott leírtakkal ellentétben most nem tesszük fel hogy $\omega = 1$, azért hogy nagy amplitúdójú oszcillatonokra is pontos eredményt kaphassunk. Az alábbi gömbhullám által kiszállított energiát kell kiszámolnunk,

$$\bar{\phi} = \frac{C_3}{r} \cos(\lambda_3 r - 3\omega t + \alpha_3), \quad (3.172)$$

ahol $\lambda_3 = \sqrt{9\omega^2 - 1}$. Az átskálázás miatt a fizikai skalármező $\phi = \bar{\phi}/\sqrt{8\pi}$. A kisugárzott energiaáram rezgési periódusra vonatkozó átlagértékét megadó (2.126) egyenlet most is alkalmazható, ahol $\omega_f = 3\omega$, $\lambda_f = \lambda_3$ és $\alpha = C_3$. Ennek eredményeképp, az oszcillatonok időátlagolt tömegveszteségi rátája

$$\bar{S} = -\frac{\overline{dM}}{dt} = \frac{3}{4}C_3^2\omega\sqrt{9\omega^2 - 1}. \quad (3.173)$$

A C_3 -ra vonatkozó (3.170) empirikus formula behelyettesítésével kaphatjuk a numerikus számolásainkon alapuló, nagy amplitúdókra is megbízható sugárzási rátát megadó kifejezést:

$$\bar{S} = 10.61 \frac{\omega\sqrt{9\omega^2 - 1}}{\varepsilon^2} (1 + \varepsilon^2)^{33.26} \exp\left[-\frac{22.4993}{\varepsilon} (1 - 0.2990\varepsilon^2)\right], \quad (3.174)$$

ahol $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$.

Kizárólag az analitikus kis-amplitúdós eredményeket használva, a (3.148) képletbe a $d = 3$ esetre vonatkozó állandók 3.4 táblázatból történő behelyettesítésével kaphatjuk az ε -ban vezető rendű eredményt,

$$\bar{S} = \frac{30.0}{\varepsilon^2} \exp\left(-\frac{22.4993}{\varepsilon}\right). \quad (3.175)$$

Kis ε értékekre ez valóban a (3.174) egyenlet megfelelő közelítése. A maximális tömeget közelítő oszcillatonok esetén azonban a numerikus számolás eredményeként kapott empirikus kifejezés lényegesen erősebb sugárzási rátát ad.

Az $M_c = 0.60535$ maximális tömeghez tartozó $\varepsilon_c = 0.509$ értéket a (3.174) empirikus kifejezésbe helyettesítve, és ezután M_c -vel osztva, megkapjuk a relatív tömegveszteségi rátát a legnagyobb tömegű stabil oszcillatonra,

$$\left(\frac{1}{M} \frac{\overline{dM}}{dt}\right)_{M=M_c} = -5.917 \times 10^{-13} m, \quad (3.176)$$

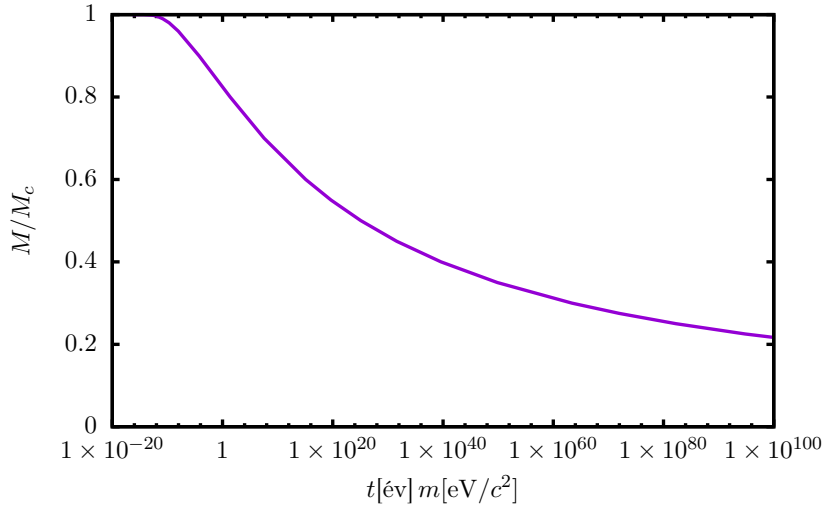
ahol m a skalártömeg Planck egységeiben. Ez a megbízható numerikus eredmény körülbelül 14000-szer nagyobb mint a (3.150) egyenletben megadott ε -ban vezető rendű becslés. Az óriási különbség abból adódik hogy az $\varepsilon = 0.509$ értéknél a kis-amplitúdós kifejtés körülbelül egy százas faktorialábbecsüli a sugárzó farok nagyságát.

Érdekes kérdés, hogy egy $M = M_c$ maximális tömegű oszcillaton mennyi idő alatt veszíti el az eredeti tömegének egy bizonyos részét. Mivel az eltelt t idő fordítottan arányos az m skalártömeggel, a tm szorzat értékeit adjuk meg a 3.7 táblázatban. Az eltelt időt a táblázat bal felében a kis-amplitúdós kifejtésen alapuló közelítés alapján adjuk meg, a jobb oldalon pedig a Fourier kifejtésen alapuló numerikus számolások eredményét mutatjuk. Az első esetben az energiaveszteségi rátát a (3.175) egyenletből számoljuk, és a tömeg ε függésére

$\frac{M_c - M}{M_c}$	ε -kifejtés			numerikus eredmény		
	ε	$t m$	$t[\text{év}]m[\text{eV}/c^2]$	ε	$t m$	$t[\text{év}]m[\text{eV}/c^2]$
0.01	0.482	$3.45 \cdot 10^{15}$	$7.21 \cdot 10^{-8}$	0.469	$7.03 \cdot 10^{11}$	$1.46 \cdot 10^{-11}$
0.1	0.383	$8.65 \cdot 10^{20}$	0.0180	0.376	$2.63 \cdot 10^{18}$	$5.48 \cdot 10^{-5}$
0.2	0.320	$6.69 \cdot 10^{25}$	1400	0.314	$1.16 \cdot 10^{24}$	24.2
0.3	0.267	$2.55 \cdot 10^{31}$	$5.32 \cdot 10^8$	0.264	$1.71 \cdot 10^{30}$	$3.56 \cdot 10^7$
0.4	0.224	$2.74 \cdot 10^{38}$	$5.72 \cdot 10^{15}$	0.220	$5.87 \cdot 10^{37}$	$1.23 \cdot 10^{15}$
0.5	0.182	$9.54 \cdot 10^{47}$	$1.99 \cdot 10^{25}$	0.180	$5.98 \cdot 10^{47}$	$1.25 \cdot 10^{25}$
0.6	0.144	$1.10 \cdot 10^{62}$	$2.29 \cdot 10^{39}$	0.142	$2.03 \cdot 10^{62}$	$4.24 \cdot 10^{39}$
0.7	0.107	$1.78 \cdot 10^{85}$	$3.72 \cdot 10^{62}$	0.105	$1.18 \cdot 10^{86}$	$2.45 \cdot 10^{63}$

3.7. táblázat. Ahhoz szükséges t idő, hogy egy eredetileg maximális tömegű oszcillaton elveszítse a tömegének egy adott részét. Az m skalártömeg és t szorzatát adjuk meg Planck és természetes egységekben. Összehasonlításként, a kis-amplitúdós kifejtéssel kapott becslést és a numerikus számolással kapott megbízható értékeket is megadjuk.

a (3.85) alakot tesszük fel. A numerikus eredményekhez a (3.174) és (3.171) empirikus kifejezéseket használjuk. A (3.15) ábrán a kezdetben M_c maximális tömeggel indított oszcillaton



3.15. ábra. Az M_c maximális tömeggel indított oszcillaton tömegének időbeli változása, az m skalártömeg és a t időkoordináta szorzatának függvényében.

tömegének a kezdeti tömeghez viszonyított relatív nagyságát mutatjuk az idő függvényében. A megbízható numerikus eredményt adjuk meg. A rendkívül lassú csökkenés miatt az tm szorzatot logaritmikusan vesszük fel a vízszintes tengelyre.

További érdekes probléma, hogy egy eredetileg maximális tömegű oszcillaton mekkora részét veszíti el a tömegének az univerzum életkorának megfelelő időtartam alatt, amit $1.37 \cdot 10^{10}$ évnél választunk. A 3.8 táblázatban megadjuk az eltelt idő után megmaradt tömeget M_\odot naptömeg egységeiben, és a relatív tömegváltozás mértékét.

$m[\text{eV}/c^2]$	ε -kifejtés			numerikus eredmény		
	$\varepsilon_c - \varepsilon$	$\frac{M}{M_\odot}$	$\frac{M_c - M}{M_c}$	$\varepsilon_c - \varepsilon$	$\frac{M}{M_\odot}$	$\frac{M_c - M}{M_c}$
10^{-35}	$2.31 \cdot 10^{-10}$	$8.20 \cdot 10^{24}$	$2.91 \cdot 10^{-19}$	$2.37 \cdot 10^{-8}$	$8.09 \cdot 10^{24}$	$3.75 \cdot 10^{-15}$
10^{-30}	$7.31 \cdot 10^{-8}$	$8.20 \cdot 10^{19}$	$2.91 \cdot 10^{-14}$	$7.50 \cdot 10^{-6}$	$8.09 \cdot 10^{19}$	$3.74 \cdot 10^{-10}$
10^{-25}	$2.31 \cdot 10^{-5}$	$8.20 \cdot 10^{14}$	$2.90 \cdot 10^{-9}$	$2.18 \cdot 10^{-3}$	$8.09 \cdot 10^{14}$	$3.16 \cdot 10^{-5}$
10^{-20}	0.00621	$8.20 \cdot 10^9$	$2.09 \cdot 10^{-4}$	0.0544	$7.94 \cdot 10^9$	0.0183
10^{-15}	0.0883	$7.87 \cdot 10^4$	0.0400	0.126	$7.36 \cdot 10^4$	0.0896
10^{-10}	0.169	$7.06 \cdot 10^{-1}$	0.139	0.183	$6.65 \cdot 10^{-1}$	0.178
10^{-5}	0.226	$6.24 \cdot 10^{-6}$	0.238	0.227	$5.96 \cdot 10^{-6}$	0.263
1	0.267	$5.56 \cdot 10^{-11}$	0.322	0.262	$5.36 \cdot 10^{-11}$	0.337
10^5	0.298	$4.98 \cdot 10^{-16}$	0.392	0.289	$4.85 \cdot 10^{-16}$	0.401
10^{10}	0.323	$4.51 \cdot 10^{-21}$	0.450	0.311	$4.41 \cdot 10^{-21}$	0.454
10^{15}	0.342	$4.11 \cdot 10^{-26}$	0.499	0.329	$4.04 \cdot 10^{-26}$	0.500

3.8. táblázat. Eredetileg maximális tömegű oszcillaton M tömege a világegyetem életkorának megfelelő idő eltelte után, különféle m skalármező tömegek esetén. Megadjuk ε -nak a kezdeti ε_c értékről való csökkenését, és a relatív tömegváltozást is. A kis-amplitúdós kifejtésnél $\varepsilon_c = 0.525$ értéket használunk, míg a numerikus számolásnál $\varepsilon_c = 0.509$.

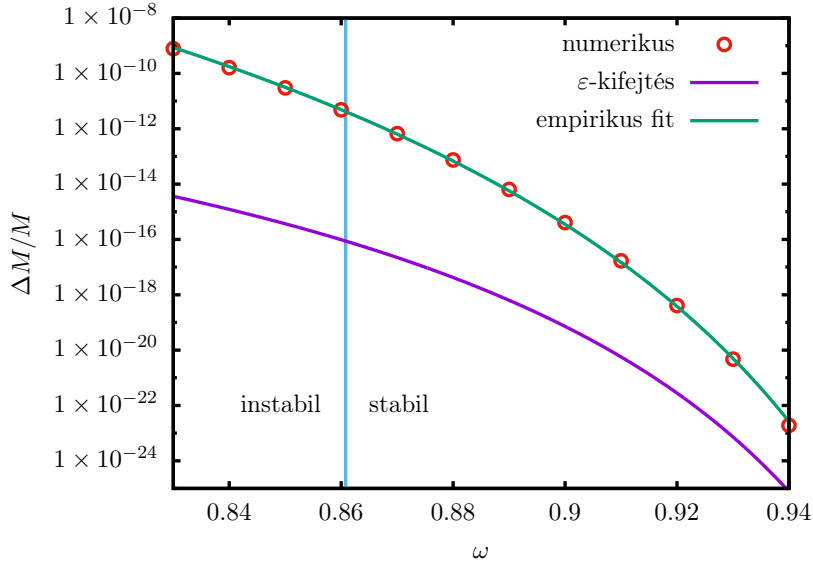
A (3.16) ábrán azt mutatjuk meg, hogy egy rezgési periódus alatt az oszcillaton tömegének mekkora hányadát veszíti el. Ez a mennyiség azért is érdekes, mert független a skalármező m tömegétől,

$$\frac{\Delta M}{M} = -\frac{2\pi}{\omega} \frac{1}{M} \frac{dM}{dt} . \quad (3.177)$$

Az ábráról jól látható, hogy a relatív tömegvesztés annyira kicsi, hogy minden stabil oszcillaton jó közelítéssel időben periodikusnak tekinthető.

3.6. Oszcillatonok pozitív kozmológiai állandó esetén

Fontos tisztázni, hogy a világegyetem tágulása hogyan befolyásolja a skalármezők által létrehozott lokalizált objektumok kialakulását, stabilitását és élettartamát. Az univerzum dinamikáját a benne lévő anyag nagy skálákon való tulajdonságai szabják meg. A probléma



3.16. ábra. Oszcillatonok egy periódus alatti relatív tömegvesztesége.

vizsgálatánál célszerű először azt a legegyszerűbb esetet tanulmányozni, amikor nagy távolságokra az anyagot csupán egy nem nulla kozmológiai állandó képviseli. Ekkor a vizsgálandó lokalizált oszcillatontól nagy távolságokra a Λ kozmológiai állandó figyelembe vételével felírt vákuum Einstein egyenleteket kell megoldanunk. Közvetlen fizikai alkalmazás szempontjából a pozitív kozmológiai állandó vizsgálata jelentősebb, mivel a világegyetem jelenlegi gyorsulva tágulását, valamint a korai univerzum inflációs tágulását is $\Lambda > 0$ okozhatja, illetve modellezheti.

Pozitív kozmológiai konstans esetén az oszcillatontól nagy távolságokra a téridő a de Sitter metrikához kell tartson, melynek alakja sztatikus Schwarzschild koordináta-rendszerben

$$ds^2 = - (1 - H^2 \bar{r}^2) dt^2 + \frac{d\bar{r}^2}{1 - H^2 \bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega_{d-1}^2 . \quad (3.178)$$

A H Hubble-állandó és a Λ kozmológiai állandó kapcsolata d térdimenzió esetén

$$H^2 = \frac{2\Lambda}{d(d-1)} . \quad (3.179)$$

A számolásainknál továbbra is térben konformisan sík koordinátákat használunk, amelynél a de Sitter metrika alakja

$$ds^2 = - \frac{(1 - \frac{1}{4} H^2 r^2)^2}{(1 + \frac{1}{4} H^2 r^2)^2} dt^2 + \frac{dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2}{(1 + \frac{1}{4} H^2 r^2)^2} . \quad (3.180)$$

A kétféle radiális koordináta kapcsolata $r = \bar{r} (1 + \frac{1}{4} H^2 r^2)$. A kozmológiai horizont, ami

Schwarzschild koordinátákban az $\bar{r} = 1/H$ helyen van, térben konformisan sík esetben az $r_h = 2/H$ radiális koordinátánál helyezkedik el.

A kozmológiai állandót úgy is tekinthetjük, mint egy tökéletes folyadékot, melynek energiasűrűsége és nyomása

$$\mu_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi} \quad , \quad p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi} . \quad (3.181)$$

A negatív nyomás miatt $\Lambda > 0$ egy effektív taszító erőként értelmezhető, amelynek hatására az oszcillatonok sugárzása nagyobbá válik az aszimptotikusan sík esethez képest. A továbbiakban ennek az extra sugárzásnak a meghatározását írjuk le, a [42] cikkünkben közölt eredményeket ismertetve.

3.6.1. Kis-amplitúdós kifejtés

Rögzített de Sitter háttéren önkölcsönható skalármező által létrehozott oszcillonok esetén a [97] cikkben egy amplitúdó paraméter szerinti kifejtés segítségével határozták meg a pozitív Λ hatására létrejövő sugárzás nagyságát. A továbbiakban ehhez hasonló módszert fogunk alkalmazni a gravitációval kölcsönható skalármező által kialakított oszcillatonok tanulmányozására. A módszer a 3.3 fejezetben részletesen ismertetett ε kifejtés általánosítása $\Lambda > 0$ esetére. A skalármező tömegét ebben az esetben is beállíthatnánk az $m = 1$ értékre a (3.4) skálázási szabadság segítségével, de mivel a skalármező tömegének a kozmológiai állandóhoz viszonyított nagysága fontos az eredmények értelmezéséhez, az eljárásban m értékét tetszőlegesnek hagyjuk.

Az amplitúdót jellemző kis paramétert ε -al jelöljük. Továbbra is feltehető, hogy az oszcillaton mérete növekszik a központi amplitúdó csökkenésével, így (3.32)-höz hasonlóan bevezetjük a ρ átskálázott radiális koordinátát,

$$\rho = \varepsilon m r \quad , \quad (3.182)$$

Az m szorzót a (3.4) skálázási szabadság motiválja.

Hosszú élettartamú lokalizált megoldások várhatóan csak akkor létezhetnek, ha a méretük jóval kisebb mint a kozmológiai horizont mérete. Ennek érdekében bevezetjük a h átskálázott Hubble-állandót a

$$H = \varepsilon^2 m h \quad (3.183)$$

összefüggéssel. Feltesszük hogy h értéke megfelelően kicsi, vagyis $h \ll 1$ még az állapot jellemzésére használt kis ε értékek esetén is. Ezzel biztosítjuk, hogy az oszcillatonok tipikus mérete, ami az r koordináta segítségével felírva $1/(\varepsilon m)$ rendű, kisebb mint a kozmológiai

horizont sugara, $r_h = 2/H = 2/(\varepsilon^2 m h)$. Mint hamarosan látni fogjuk, a skalármezőhöz tartozó μ energiasűrűség a központi tartományban ε^4 -el arányos. Másrészt, a kozmológiai állandóhoz tartozó $\mu_\Lambda = \Lambda/(8\pi)$ energiasűrűség (3.179) és (3.183) szerint

$$\mu_\Lambda = \frac{d(d-1)}{16\pi} \varepsilon^4 m^2 h^2 . \quad (3.184)$$

A h átskálázott Hubble-állandó kicsi értéke garantálja, hogy μ_Λ kisebb marad mint a skalármező μ energiasűrűsége, még a kis-amplitúdós határesetben is.

Olyan térben lokalizált korlátos megoldásokat keresünk, amelyeknél ha a ϕ skalármező kicsié válik, akkor a téridő a de Sitter metrikához közelít. A (3.33)-(3.35) egyenletekhez hasonlóan a skalármezőt és a metrikus függvényeket ε hatványai szerint fejtsük ki,

$$\bar{\phi} = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} \phi_{2k} , \quad (3.185)$$

$$A = \frac{\left(1 - \frac{1}{4} \varepsilon^2 h^2 \rho^2\right)^2}{\left(1 + \frac{1}{4} \varepsilon^2 h^2 \rho^2\right)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} A_{2k} , \quad (3.186)$$

$$B = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4} \varepsilon^2 h^2 \rho^2\right)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} B_{2k} . \quad (3.187)$$

Az A és B első tagjai a de Sitter téridőnek felelnek meg (3.180) szerint. Mivel aszimptotikusan de Sitter koordináta rendszert szándékozunk használni, olyan ϕ_{2k} , A_{2k} és B_{2k} függvényeket keresünk amelyek nullához tartanak amikor ρ tart a végtelenhez.

Mivel a frekvencia függ az amplitúdótól, bevezetünk egy átskálázott τ időkoordinátát,

$$\tau = \omega t , \quad (3.188)$$

és (3.37)-hez hasonlóan kifejtjük az ω szorzó négyzetét ε hatványai szerint,

$$\omega^2 = m^2 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} \omega_{2k} \right) . \quad (3.189)$$

A téregyenletek amelyeket meg kell oldanunk továbbra is a (3.27)-(3.30) Einstein egyenletek és a (3.31) hullámegyenlet. Az eljárás lépései annyira hasonlóan a 3.3.2 alfejezetben leírtakhoz, hogy most csak az eredményeket írjuk le. Az ε^2 rendű kifejtési együtthatók a $\Lambda = 0$ esettel azonos alakúak,

$$\phi_2 = p_2 \cos \tau \quad , \quad B_2 = -\frac{A_2}{d-2} , \quad (3.190)$$

ahol p_2 , A_2 és B_2 csak az r radiális koordináta függvénye. A megoldást (3.54)-nek megfelelően most is egy s és S radiális függvény segítségével írhatjuk fel,

$$A_2 = \omega_2 - s \quad , \quad p_2 = S \sqrt{\frac{d-1}{d-2}} . \quad (3.191)$$

Az S és s függvények kielégítik a Schrödinger-Newton egyenleteket, amelyek most (3.55)-(3.56)-hoz képest kiegészülnek egy h^2 -el arányos kozmológiai taggal,

$$\frac{d^2 S}{d\rho^2} + \frac{d-1}{\rho} \frac{dS}{d\rho} + (s + h^2 \rho^2) S = 0 , \quad (3.192)$$

$$\frac{d^2 s}{d\rho^2} + \frac{d-1}{\rho} \frac{ds}{d\rho} + S^2 = 0 . \quad (3.193)$$

Ha $S(\rho)$ és $s(\rho)$ megoldás, akkor a transzformált függvények

$$\tilde{S}(\rho) = \lambda^2 S(\lambda\rho) , \quad \tilde{s}(\rho) = \lambda^2 s(\lambda\rho) \quad (3.194)$$

szintén megoldják a Schrödinger-Newton egyenleteket, $\tilde{h} = \lambda^2 h$ mellett.

Ha a skalármező, és emiatt S is nullához tart $\rho \rightarrow \infty$ esetén, akkor (3.193) alapján s aszimptotikus viselkedése

$$s = s_0 + s_1 \rho^{2-d} . \quad (3.195)$$

Mivel olyan megoldásokat keresünk, amelyre $A_2 = \omega_2 - s$ szintén nullához tart nagy ρ esetén, szükségképpen $\omega_2 = s_0$. Annak érdekében, hogy a (3.192)-(3.193) Schrödinger-Newton egyenletek megoldását egyértelművé tegyük, megköveteljük hogy

$$\omega_2 = s_0 = -1 \quad (3.196)$$

legyen. Beállítva, hogy $\omega_k = 0$ legyen $k \geq 3$ esetére, (3.196) egyúttal lerögzíti az ω frekvencia és az ε paraméter közötti kapcsolatot,

$$\omega = m\sqrt{1 - \varepsilon^2} . \quad (3.197)$$

A (3.195) kifejezést (3.192)-be helyettesítve megkapjuk az S függvény aszimptotikus viselkedését meghatározó egyenletet,

$$\frac{d^2 S}{d\rho^2} + \frac{d-1}{\rho} \frac{dS}{d\rho} + (h^2 \rho^2 - 1 + s_1 \rho^{2-d}) S = 0 . \quad (3.198)$$

A skalármező energiasűrűségének (3.24) kifejezésébe a kis-amplitúdós kifejtést helyettesítve, az ε -ban vezető rendű eredmény

$$\mu = \frac{1}{16\pi} \varepsilon^4 \frac{d-1}{d-2} m^2 S^2 . \quad (3.199)$$

A középponti értékeket c indexszel jelölve, a (3.184) kifejezéssel összehasonlítva kaphatjuk a kozmológiai állandó és a skalármező által képviselt energiasűrűségek arányát,

$$\frac{\mu_\Lambda}{\mu_c} = \frac{d(d-2)}{S_c^2} h^2 . \quad (3.200)$$

A kifejezés fontos fizikai jelentést ad a h átskálázott Hubble állandónak. Mint látni fogjuk, h a lényeges paraméter ami meghatározza az oszcillatonok sugárzásának mértékét.

Ha h kicsi, akkor a mag tartományban az oszcillatonok alakja alig tér el a $\Lambda = 0$ esetben meghatározottól. A (3.199) kifejezésbe S -nek a 3.1 táblázatban található középponti értékét helyettesítve, $d = 3$ dimenziónál a fizikai egységekben kifejezett középponti sűrűség

$$\mu_c \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] = \varepsilon^4 (m[\text{eV}/c^2])^2 1.436 \times 10^{39} . \quad (3.201)$$

Ez még nagyon kicsi ε értékek mellett is jóval nagyobb mint a kozmológiai konstans jelenlegi értékéhez tartozó energiasűrűség, melynek közelítő értéke $\mu_\Lambda [\text{kg}/\text{m}^3] = 6.8 \times 10^{-24}$ (lásd a [42] cikkünk D Appendixét).

3.6.2. A sugárzás meghatározása

A 3.3.3 fejezetben megmutattuk, hogy zéró kozmológiai állandó esetén, ha a térbeli dimenziók száma $3 \leq d \leq 5$, akkor létezik a Schrödinger-Newton egyenleteknek egyértelmű lokalizált zérushely mentes megoldása, amelynél az s függvény az $s_0 = -1$ értékhez tart. Az S függvény exponenciálisan tart nullához, és nagy ρ esetén a viselkedését a (3.154) egyenletben írtuk fel, ahol az s_1 állandó numerikus értéke a 3.1 táblázatban, az S_t pedig a 3.5 táblázatban található.

Ha h nem nulla, akkor is feltesszük hogy elég kicsi ahhoz, hogy létezzen egy tartomány ρ -ban ami eléggé a mag tartományon kívül van, de ahol a kozmológiai állandó hatása még elhanyagolható. Ebben a tartományban S jó közelítéssel kielégíti a (3.198) egyenlet $h = 0$ helyettesítéssel kapott változatát. Következésképpen S (3.154) alakú, a $\Lambda = 0$ esetben kiszámolt és a táblázatokban megadott s_1 és S_t állandók mellett.

Ha $h > 0$ akkor elég nagy távolságokra $\rho \gg 1/h$, és ekkor a (3.198) egyenletben a $h^2 \rho^2$ melletti tagok elhanyagolhatók,

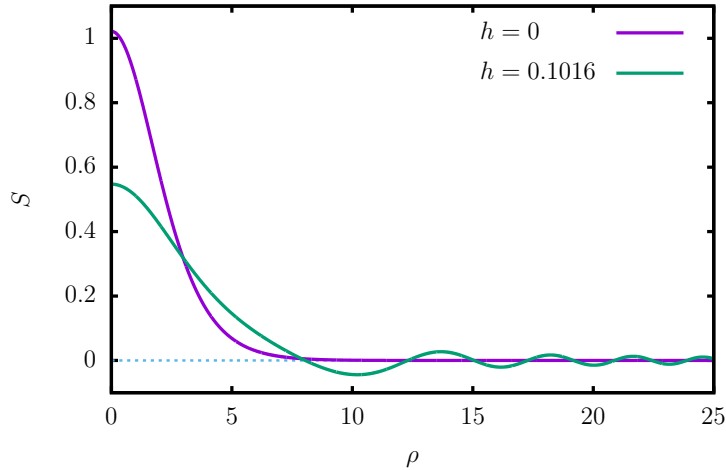
$$\frac{d^2 S}{d\rho^2} + \frac{d-1}{\rho} \frac{dS}{d\rho} + h^2 \rho^2 S = 0 . \quad (3.202)$$

Az S függvénynek rezgő állóhullám farok megoldása van ebben a tartományban, amelynek alakja nagy ρ esetén

$$S = \frac{\alpha}{\rho^{d/2}} \cos \left(\frac{h\rho^2}{2} + \beta \right) , \quad (3.203)$$

ahol az α és β állandók az amplitúdót és fázist adják meg. Az α amplitúdó határozza meg az oszcillatonok $\Lambda > 0$ miatt bekövetkező energiaveszteségét. A zéró kozmológiai állandó esettel szemben, ilyenkor elég az ε kifejtés vezető rendjét kiszámolni, mert a farok már a Schrödinger-Newton egyenleteknek megoldásában jelentkezik.

A (3.192)-(3.193) Schrödinger-Newton egyenletek numerikus módszerrel történő megoldásakor az állóhullám α amplitúdója az s és S függvények $\rho = 0$ középpontbeli értékétől függ. Az $\alpha = \alpha_{\min}$ minimális amplitúdót szándékozunk meghatározni azon feltevés mellett, hogy $\rho \rightarrow \infty$ esetén $s \text{ tart} = -1$ -hez. Olyan megoldásokat keresünk, amelyeknek nincs zérus helyük a mag tartományban, ahol h befolyása elhanyagolható. Ha $h > 0$ akkor szükségképpen α_{\min} nem nulla. Hogy megmutassuk a pozitív kozmológiai állandó befolyását az S függvény menetére, a 3.17 ábrán megadjuk S alakját egy viszonylag nagy pozitív h és $h = 0$ esetére.



3.17. ábra. Az S radiális függésének összehasonlítása $h = 0.1016$ és $h = 0$ esetén.

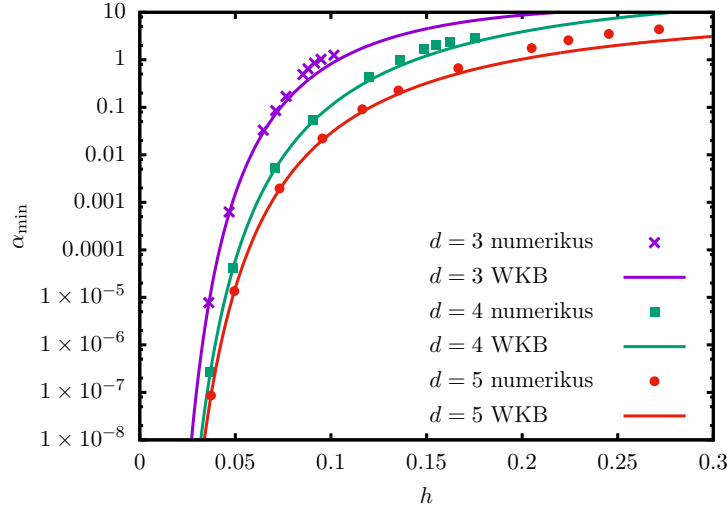
Ha h kicsi, az amplitúdót kiszámolhatjuk WKB közelítés segítségével. Az eljárás elemi, de hosszadalmas, részletes leírása a [42] cikkünkben található. A számolás eredményeképp a minimális amplitúdó h függését megkapjuk az s_1 és S_t állandók segítségével,

$$\alpha_{\min} = \begin{cases} \frac{S_t}{\sqrt{h}} \left(\frac{2}{h}\right)^{s_1/2} \exp\left(-\frac{\pi}{4h}\right) & \text{ha } d = 3, \\ \frac{S_t}{\sqrt{h}} \exp\left(-\frac{\pi}{4h}\right) & \text{ha } d > 3. \end{cases} \quad (3.204)$$

A 3.18 ábrán az α_{\min} minimális amplitúdóra a WKB közelítéssel számolt és a numerikus eredményeket mutatjuk $d = 3, 4, 5$ térdimenzióánál. A WKB közelítés 10%-nál kisebb hibát ad $d = 3$ esetén, ha $h < 0.06$.

Az α_{\min} együttható a Schrödinger-Newton egyenlet megoldásának S változóban lévő farkának nagyságát adja meg. A skalármező állóhullám farkának nagyságát vezető rendben ebből (3.33), (3.190), (3.191), (3.203) és (3.182) felhasználásával kaphatjuk,

$$\bar{\phi} = \varepsilon^2 \phi_2 = \varepsilon^2 p_2 \cos \tau = \varepsilon^2 S \sqrt{\frac{d-1}{d-2}} \cos \tau = \frac{\phi_A}{r^{d/2}} \cos(\omega t) \cos\left(\frac{h\varepsilon^2 m^2 r^2}{2} + \beta\right), \quad (3.205)$$



3.18. ábra. Az S függvény farkának amplitúdója h függvényében.

ahol $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$, az amplitúdó pedig

$$\phi_A = \frac{\varepsilon^{2-(d/2)}}{m^{d/2}} \sqrt{\frac{d-1}{d-2}} \alpha_{\min} . \quad (3.206)$$

Ehhez a megoldáshoz hozzáadhatunk egy elnyomott WKB tagot, amely a külső mag tartományban befelé haladva exponenciálisan lecseng, és arányos a $\sin(h\varepsilon^2 m^2 r^2 / 2 + \beta) \sin(\omega t)$ kifejezéssel. A hozzáadott tag amplitúdóját azonosnak választva kaphatjuk az oszcillaton sugárzásáért felelős kimenő hullám alakját,

$$\bar{\phi} = \frac{\phi_A}{r^{d/2}} \cos\left(\frac{h\varepsilon^2 m^2 r^2}{2} + \beta - \omega t\right) , \quad (3.207)$$

ami mivel (3.202) felhasználásával kaptuk, $\rho \gg 1/h$ esetén érvényes.

Általános gömbszimmetrikus téridő esetén az adott sugáron belüli tömeget az \hat{m} Misner-Sharp energiafüggvény írja le, és nagy távolságokra \hat{m} az oszcillaton M teljes tömegéhez tart. Az általános esetben \hat{m} időderiváltja (3.19) szerint írható fel az energia-impulzus tenzor segítségével. Az \hat{m} idő szerinti deriváltja megadja az S tömegveszteségi ráta -1 -szeresét. Még akkor is ha $\rho \gg 1/h$ a rezgő farok tartományban, ha ε elég kicsi akkor $\varepsilon h \rho \ll 1$, és (3.186)-(3.187) szerint az A és B metrikus függvények még mindig nagyon közel maradnak 1-hez. Ekkor a sík háttéren felírt (3.20) egyenlet még mindig alkalmazható a tömeg deriváltjának számolására. Behelyettesítve a (3.207) kimenő hullám alakot, és egy rezgési periódusra átlagolva, a tömegveszteségi rátára a következő eredményt kapjuk:

$$\bar{S} = -\frac{\overline{dM}}{dt} = \frac{\pi^{d/2-1} h \varepsilon^2 m^3 \phi_A^2}{8\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} . \quad (3.208)$$

Mivel ε -ban vezető rendű eredményt keresünk, a számolásnál az $\omega = m$ helyettesítést alkalmaztuk.

A (3.206) és (3.204) egyenleteket felhasználva, a $h = H/(m\varepsilon^2)$ helyettesítéssel kaphatjuk, hogy $d > 3$ esetén a tömegveszteségi ráta

$$\bar{S} = \frac{\pi^{d/2-1}(d-1)S_t^2\varepsilon^{6-d}}{8m^{d-3}(d-2)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \exp\left(-\frac{\pi m\varepsilon^2}{2H}\right). \quad (3.209)$$

Ha $d = 3$ akkor van egy további s_1 -et tartalmazó tényező,

$$\bar{S} = \frac{1}{2}S_t^2\varepsilon^3\left(\frac{2m\varepsilon^2}{H}\right)^{s_1} \exp\left(-\frac{\pi m\varepsilon^2}{2H}\right). \quad (3.210)$$

Az oszcillatonok tömege nem nulla kozmológiai állandó esetén is ugyanúgy számolható mint a 3.3.5 fejezetben, és a vezető rendben a végeredmény továbbra is (3.85)-(3.86) által adott,

$$M = \varepsilon^{4-d} \frac{(d-1)\pi^{d/2}}{8\pi m^{d-2}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} s_1. \quad (3.211)$$

$d = 3$ térdimenzió esetén

$$M = \varepsilon \frac{s_1}{2m}. \quad (3.212)$$

Helyettesítéssel kaphatjuk az időátlagolt tömegveszteségi rátát az M függvényeként. Az eredmény $d = 3$ dimenziónál

$$\frac{\overline{dM}}{dt} = -4S_t^2 \frac{m^3 M^3}{s_1^3} \left(\frac{8m^3 M^2}{H s_1^2}\right)^{s_1} \exp\left(-\frac{2\pi m^3 M^2}{H s_1^2}\right). \quad (3.213)$$

Konkrét m és H esetén ennek numerikus integrálásával számolható a tömeg időfüggése.

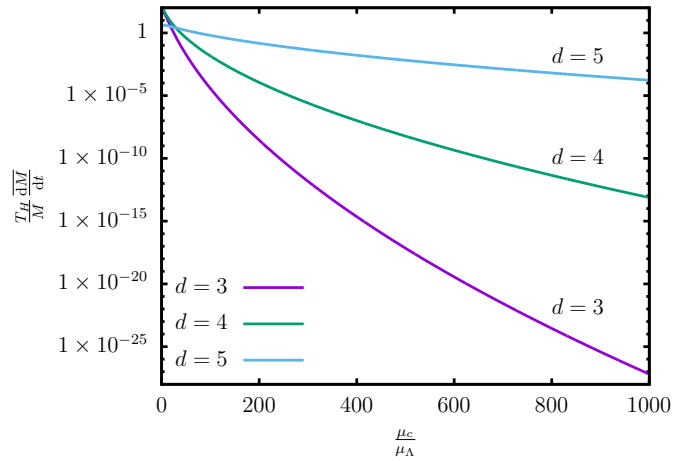
A $T_H = 1/H$ Hubble-idő megadja a világegyetem tágulásának időskáláját. A Hubble-időnek megfelelő időtartamra extrapolált relatív tömegveszteségi ráta $d > 3$ esetén

$$\frac{T_H \overline{dM}}{M dt} = -\frac{S_t^2}{(d-2)s_1 h} \exp\left(-\frac{\pi}{2h}\right), \quad (3.214)$$

valamint $d = 3$ -nál,

$$\frac{T_H \overline{dM}}{M dt} = -\frac{S_t^2}{s_1 h} \left(\frac{2}{h}\right)^{s_1} \exp\left(-\frac{\pi}{2h}\right). \quad (3.215)$$

Az eredmény csak a $h = H/(m\varepsilon^2)$ átskálázott kozmológiai állandótól függ. Mint a (3.200) egyenletben láttuk, h^2 arányos a μ_c középponti energiasűrűség és a μ_Λ kozmológiai állandóhoz tartozó energiasűrűség hányadosával. A 3.19 ábrán a Hubble-időre extrapolált relatív tömegveszteségi rátát mutatjuk $\frac{\mu_c}{\mu_\Lambda}$ függvényében.



3.19. ábra. A Hubble-időre extrapolált relatív tömegveszteségi ráta a μ_c középponti sűrűség és a kozmológiai állandóhoz tartozó μ_Λ sűrűség hányadosának függvényeként.

Az ábráról is jól látható, hogy a kozmológiai állandó által generált sugárzás csak akkor jelentős, ha az oszcillatonhoz tartozó energiasűrűség összemérhető a kozmológiai állandónak megfeleltethető energiasűrűséggel. Ez csak nagyon kis amplitúdójú oszcillatonoknál áll fenn, amikor viszont az oszcillaton mérete már nagyon nagy, közelíti a kozmológiai horizont távolságának nagyságrendjét. Az $\varepsilon \approx 0.5$ körüli amplitúdó paraméterrel jellemzett közel maximális tömegű oszcillatonok esetén a $\Lambda > 0$ miatti sugárzás általában elhanyagolható. Ezzel ellentétben, a sík háttéren is jelentkező, a 3.4 és 3.5 fejezetekben kiszámolt sugárzás éppen a maximális amplitúdóknál jelentős, és kisebb ε esetre értéke exponenciálisan csökken. Egy nagy amplitúdóval keletkező oszcillaton sugárzását kezdetben a (3.174) egyenlet írja le, majd ha hosszú idő alatt a tömegveszteség miatt a mérete naggyá válik, akkor a $\Lambda > 0$ által generált (3.210) sugárzás válik dominánssá. Ha végül a méret a kozmológiai horizontot közelíti, akkor az oszcillaton viszonylag hirtelen elbomlik.

4. fejezet

Összefoglalás és kitekintés

Valós skalárelméletekben, habár sztatikus vagy egzaktul időperiodikus véges energiájú lokalizált megoldások nem léteznek, a lehetséges kezdőadatok egy jelentős részéből mégis lokalizált hosszú élettartamú gömbszimmetrikus rezgő állapotok fejlődnek ki. Az objektumok rezgési frekvenciája lassan növekszik a skalármező kisugárzása miatti energiaveszteség hatására. Ha a sík háttéren értelmezett elmélet nemlinearitását a skalár önkölcsönhatási potenciálja adja, akkor a kialakult objektumot oszcillonnak nevezik. Az általános relativitáselmélet keretében vizsgált öngravitáló valós skalármezőből létrejövő lokalizált állapot oszcillaton néven ismert. A doktori értekezésben ismertetett cikkeinkben az oszcillonok és oszcillatonok alakját és tulajdonságait határoztuk meg lényegesen pontosabban mint ahogy az korábban ismert volt. Egymást kiegészítő módon alkalmaztunk numerikus és analitikus módszereket. Az extrém nagy pontosságra elsősorban az oszcillonok és az oszcillatonok rendkívül kis mértékű sugárzási veszteségének megbízható és pontos meghatározásához van szükség.

A kimenő sugárzás mértékének meghatározásához nélkülözhetetlen első lépés az egzaktul periodikus, de minimális állóhullám farokkal rendelkező kvázibreather megoldás definiálása és tanulmányozása. Az időben periodikusság lehetővé teszi nemcsak a precíz spektrális numerikus kódok alkalmazását, de az egyenletek komplex síkra való kiterjesztésével az analitikus módszerek használatát is. Viszonylag könnyen belátható, hogy a sugárzás exponenciálisan kicsi a mag tartomány rezgési amplitúdóját meghatározó ε paraméter szerint. Azonban, az exponenciális tag előtti szorzó nagyságának konkrét meghatározása csak meglehetősen bonyolult összetett eljárással lehetséges. A dolgozatban igyekeztem könnyen érthetően és reprodukálhatóan bemutatni az oszcillonok és oszcillatonok sugárzásának kiszámolására alkalmazható analitikus módszert. A munka során az is egyértelművé vált, hogy az ε kifejtésen alapuló analitikus eredmények pontos eredményt adnak a kis és közepes amplitúdójú állapotokra, míg nagy amplitúdók esetén csak a spektrális numerikus módszer képes a sugárzást

megbízhatóan megadni.

Az állapotok hosszú élettartama miatt többféle fizikai alkalmazásuk válik lehetővé a kozmológiában és az asztrofizikában. A $3+1$ dimenziós oszcillonok sugárzása annyira kicsi, hogy több ezer rezgési periódus is eltelhet mire az instabil tartományba érve elbomlanak. A gravitációhoz csatolt oszcillatonok olyan lassan sugároznak, hogy még az univerzum életkorának megfelelő időtartam alatt sem veszíthetik el tömegüknek több mint a felét. Oszcillonok és oszcillatonok várhatóan minden olyan többfajta mezőt is tartalmazó elméletben kialakulhatnak, ahol legalább egy valós skalármező szerepel. De megfelelő nemlinearitás esetén még a skalár létezése sem feltétlenül szükséges, ahogy azt a tömeges öngravitáló Proca mezőből kialakuló rezgő lokalizált állapotok létezése is mutatja [60, 59].

Fontos tisztázni, hogy ha a Λ kozmológiai állandó nem nulla, az hogyan befolyásolja a lokalizált állapotok kialakulását, szerkezetét és sugárzását. Negatív kozmológiai állandó effektív vonzóerőként elősegíti oszcillonok és oszcillatonok kialakulását, sugárzásukat pedig csökkenti. Pozitív kozmológiai konstans hatása ennek éppen ellenkezője. Pozitív Λ hatását oszcillonokra a [96, 97, 98] cikkekben vizsgálták. Oszcillatonok esetére a [42] cikkünkben és az értekezés 3.6 fejezetében ismertettük részletesen azt, hogy egy kicsi $\Lambda > 0$ hogyan növeli meg exponenciálisan kis mértékben a sugárzás miatti tömegvesztést. A pozitív kozmológiai állandóval a sötét energia hatására gyorsulva táguló univerzumot, vagy a korai világegyetem inflációs időszakát modellezhetjük.

Negatív kozmológiai állandó is közvetett fizikai jelentőséggel bírhat az AdS/CFT megfeleltetés miatt. Skalármezők $\Lambda < 0$ melletti viselkedését azután kezdték egyre többen tanulmányozni, miután Bizoń és Rostworowski 2011-ben numerikus módszerekkel demonstrálta az anti-de Sitter téridő instabilitását [185]. Gömbszimmetrikus nulla tömegű valós Klein-Gordon mező által létrehozott hullámcsomagok időfejlődését tanulmányozták az általános relativitáselmélet keretében $\Lambda < 0$ esetén. Az eredményeik szerint bármilyen kis amplitúdójú kezdőadatból fekete lyuk jöhet létre, a hullámcsomag központi tartományba való elegendő számú visszaverődése és egyre koncentráltabbá válása után. Azonban nem mindenfajta kezdőadat fejlődése során jön létre fekete lyuk.

Negatív kozmológiai állandó esetén időben egzaktul periodikus lokalizált megoldások is léteznek, amelyek egyáltalán nem sugároznak, és így breather-nek tekinthetők [186]. Ezek nem túl nagy mértékben deformált változatai a periodikus megoldás közelében maradnak, és nem alakul ki szingularitás a fejlődésük során. A breather megoldások körül ilyen módon „stabilitási szigetek” helyezkednek el a lehetséges kezdőadatok terében [187, 188]. Gömbszimmetrikus skalár breather megoldásokat rögzített AdS háttéren a [61] cikkünkben tanulmányoztunk többféle kölcsönhatási potenciál esetén. AdS aszimptotikával rendelkező breather

megoldások nulla tömegű mezők esetén is léteznek, ekkor a kozmológiai állandó határozza meg a jellemző méretüket. Negatív Λ esetén az öngravitáló valós skalármező által létrehozott breather megoldásokat a [189] cikkünkben tanulmányoztuk analitikus és numerikus módszerekkel, általános d térdimenzió esetén. Olyan eljárást használtunk, amely a korábbiakkal ellentétben páratlan d esetén is alkalmazható. Minden $n \geq 0$ egész esetén egyparaméteres megoldások serege létezik, ahol n a skalármező zérushelyeinek a számát adja meg. Kis amplitúdók esetén a rezgési frekvencia az $\omega = d + 2n$ egész értékhez tart.

A skalármezők vizsgálatát az általános relativitáselmélet keretében $\Lambda < 0$ esetén főleg az motiválta, hogy ekkor a gömbszimmetrikus esetre korlátozódva is van a rendszernek nemtriviális dinamikája, ami lehetővé teszi hogy energia sugározódhasson ki nagy távolságokra. Ilyen módon, a gravitációs hullámok és kisugárzásuk bonyolult elmélete helyett, egy technikai jóval könnyebben vizsgálható, egyszerűbb de sok szempontból analóg módon viselkedő modellhez juthatunk. A skalár rendszer instabilitása nagyon valószínűvé teszi, hogy a csupán vákuum gravitációs hullámokat tartalmazó rendszer is instabil $\Lambda < 0$ esetén. Időben egzaktul periodikus, de nem gömbszimmetrikus, lokalizált breather megoldásai valóban léteznek a vákuum Einstein egyenleteknek negatív Λ mellett [190, 191, 192, 193]. A megoldások nem veszítenek energiát sugárzással, és nagy távolságokra aszimptotikusan az anti-de Sitter téridőhöz tartanak. A vákuum AdS breather megoldások inkább AdS geon néven ismertek. A geon elnevezést John Archibald Wheeler vezette be 1955-ben, az elektromágneses vagy gravitációs hullámok által létrehozott hosszú élettartamú lokalizált állapotokra az aszimptotikusan sík esetben [194, 195, 196]. Az AdS geonok egyparaméteres családjainak szerkezetét a [197] és [198] cikkeinkben vizsgáltuk spektrális numerikus és magas rendű kifejtéses módszerekkel. A megoldások között vannak tengelyszimmetrikusak, helikális szimmetriával rendelkező forgó megoldások, és meglepő módon, nem szimmetrikus, de mégis nulla teljes impulzummomentummal rendelkezők is.

Irodalomjegyzék

- [1] G. H. Derrick, “Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 5, no. 9, pp. 1252–1254, 1964.
- [2] S. Kichenassamy, “Breather solutions of the nonlinear wave equation,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 44, no. 7, pp. 789–818, 1991.
- [3] I. L. Bogolubsky, “Cascade evolution of spherically symmetric pulsons in multivacuum field theory models,” *Physics Letters A*, vol. 61, no. 4, pp. 205 – 206, 1977.
- [4] I. L. Bogolyubskii and V. G. Makhan’kov, “Dynamics of spherically symmetrical pulsons of large amplitude,” *JETP Letters*, vol. 25, p. 107, 1977.
- [5] M. Gleiser, “Pseudostable bubbles,” *Phys. Rev. D*, vol. 49, pp. 2978–2981, Mar 1994.
- [6] E. J. Copeland, M. Gleiser, and H.-R. Müller, “Oscillons: Resonant configurations during bubble collapse,” *Phys. Rev. D*, vol. 52, pp. 1920–1933, Aug 1995.
- [7] A. E. Kudryavtsev, “Solitonlike solutions for a Higgs scalar field,” *JETP Letters*, vol. 22, p. 82, 1975.
- [8] A. B. Adib, M. Gleiser, and C. A. S. Almeida, “Long-lived oscillons from asymmetric bubbles: Existence and stability,” *Phys. Rev. D*, vol. 66, p. 085011, Oct 2002.
- [9] M. Hindmarsh and P. Salmi, “Numerical investigations of oscillons in 2 dimensions,” *Phys. Rev. D*, vol. 74, p. 105005, Nov 2006.
- [10] S.-Y. Zhou, E. J. Copeland, R. Easther, H. Finkel, Z.-G. Mou, and P. M. Saffin, “Gravitational waves from oscillon preheating,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2013, p. 26, Oct 2013.
- [11] S. Antusch, F. Cefalà, and S. Orani, “Gravitational waves from oscillons after inflation,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 118, p. 011303, Jan 2017.

- [12] S. Antusch, F. Cefalà, S. Krippendorff, F. Muia, S. Orani, and F. Quevedo, “Oscillons from string moduli,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2018, p. 83, Jan 2018.
- [13] J. Liu, Z.-K. Guo, R.-G. Cai, and G. Shiu, “Gravitational waves from oscillons with cuspy potentials,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 120, p. 031301, Jan 2018.
- [14] S. Antusch, F. Cefalà, and S. Orani, “What can we learn from the stochastic gravitational wave background produced by oscillons?,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2018, pp. 032–032, mar 2018.
- [15] M. A. Amin, J. Braden, E. J. Copeland, J. T. Giblin, C. Solorio, Z. J. Weiner, and S.-Y. Zhou, “Gravitational waves from asymmetric oscillon dynamics?,” *Phys. Rev. D*, vol. 98, p. 024040, Jul 2018.
- [16] E. Farhi, N. Graham, V. Khemani, R. Markov, and R. Rosales, “An oscillon in the $SU(2)$ gauged Higgs model,” *Phys. Rev. D*, vol. 72, p. 101701, Nov 2005.
- [17] N. Graham, “An electroweak oscillon,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 98, p. 101801, Mar 2007.
- [18] N. Graham, “Numerical simulation of an electroweak oscillon,” *Phys. Rev. D*, vol. 76, p. 085017, Oct 2007.
- [19] P. Arnold and L. McLerran, “The sphaleron strikes back: A response to objections to the sphaleron approximation,” *Phys. Rev. D*, vol. 37, pp. 1020–1029, Feb 1988.
- [20] C. Rebbi and R. Singleton, “Computational study of baryon number violation in high energy electroweak collisions,” *Phys. Rev. D*, vol. 54, pp. 1020–1043, Jul 1996.
- [21] M. Gleiser and J. Thorarinson, “Phase transition in $U(1)$ configuration space: Oscillons as remnants of vortex-antivortex annihilation,” *Phys. Rev. D*, vol. 76, p. 041701, Aug 2007.
- [22] M. Gleiser and J. Thorarinson, “Class of nonperturbative configurations in Abelian-Higgs models: Complexity from dynamical symmetry breaking,” *Phys. Rev. D*, vol. 79, p. 025016, Jan 2009.
- [23] V. Achilleos, F. K. Diakonov, D. J. Frantzeskakis, G. C. Katsimiga, X. N. Maintas, E. Manousakis, C. E. Tsagkarakis, and A. Tsapalis, “Oscillons and oscillating kinks in the Abelian-Higgs model,” *Phys. Rev. D*, vol. 88, p. 045015, Aug 2013.

- [24] F. K. Diakonov, G. C. Katsimiga, X. N. Maintas, and C. E. Tsagkarakis, “Symmetric solitonic excitations of the (1 + 1)-dimensional Abelian-Higgs classical vacuum,” *Phys. Rev. E*, vol. 91, p. 023202, Feb 2015.
- [25] R. F. Dashen, B. Hasslacher, and A. Neveu, “Particle spectrum in model field theories from semiclassical functional integral techniques,” *Phys. Rev. D*, vol. 11, pp. 3424–3450, 1975.
- [26] M. P. Hertzberg, “Quantum radiation of oscillons,” *Phys. Rev. D*, vol. 82, p. 045022, Aug 2010.
- [27] P. M. Saffin, P. Tognarelli, and A. Tranberg, “Oscillon lifetime in the presence of quantum fluctuations,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2014, p. 125, Aug 2014.
- [28] G. Fodor, P. Forgács, P. Grandclément, and I. Rácz, “Oscillons and quasibreathers in the ϕ^4 Klein-Gordon model,” *Phys. Rev. D*, vol. 74, p. 124003, Dec 2006.
- [29] G. Fodor, P. Forgács, Z. Horváth, and A. Lukács, “Small amplitude quasibreathers and oscillons,” *Phys. Rev. D*, vol. 78, p. 025003, Jul 2008.
- [30] G. Fodor, P. Forgács, Z. Horváth, and M. Mezei, “Computation of the radiation amplitude of oscillons,” *Phys. Rev. D*, vol. 79, p. 065002, Mar 2009.
- [31] G. Fodor, P. Forgács, Z. Horváth, and M. Mezei, “Radiation of scalar oscillons in 2 and 3 dimensions,” *Physics Letters B*, vol. 674, no. 4, pp. 319 – 324, 2009.
- [32] E. P. Honda and M. W. Choptuik, “Fine structure of oscillons in the spherically symmetric φ^4 Klein-Gordon model,” *Phys. Rev. D*, vol. 65, p. 084037, Apr 2002.
- [33] A. M. Kosevich and A. S. Kovalev, “Self-localization of vibrations in a one-dimensional anharmonic chain,” *JETP*, vol. 40, p. 1973, 1975.
- [34] H. Segur and M. D. Kruskal, “Nonexistence of small-amplitude breather solutions in ϕ^4 theory,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, pp. 747–750, Feb 1987.
- [35] V. S. Buslaev, “Solutions of “double soliton” type for the multidimensional equation $\square u = F(u)$,” *Theoretical and Mathematical Physics*, vol. 31, pp. 293–299, Apr 1977.
- [36] I. L. Bogolyubskii, “Oscillating particle-like solutions of the nonlinear Klein-Gordon equation,” *JETP Letters*, vol. 24, p. 535, 1976.

- [37] E. Seidel and W.-M. Suen, “Oscillating soliton stars,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 66, pp. 1659–1662, Apr 1991.
- [38] E. Seidel and W.-M. Suen, “Formation of solitonic stars through gravitational cooling,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 72, pp. 2516–2519, Apr 1994.
- [39] D. N. Page, “Classical and quantum decay of oscillations: Oscillating self-gravitating real scalar field solitons,” *Phys. Rev. D*, vol. 70, p. 023002, Jul 2004.
- [40] G. Fodor, P. Forgács, and M. Mezei, “Mass loss and longevity of gravitationally bound oscillating scalar lumps (oscillatons) in D dimensions,” *Phys. Rev. D*, vol. 81, p. 064029, Mar 2010.
- [41] P. Grandclément, G. Fodor, and P. Forgács, “Numerical simulation of oscillatons: Extracting the radiating tail,” *Phys. Rev. D*, vol. 84, p. 065037, Sep 2011.
- [42] G. Fodor, P. Forgács, and M. Mezei, “Boson stars and oscillatons in an inflationary universe,” *Phys. Rev. D*, vol. 82, p. 044043, Aug 2010.
- [43] T. Matos and F. S. Guzmán, “On the spacetime of a galaxy,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 18, no. 23, p. 5055, 2001.
- [44] M. Alcubierre, F. S. Guzmán, T. Matos, D. Núñez, L. A. Ureña-López, and P. Wiederhold, “Galactic collapse of scalar field dark matter,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 19, no. 19, p. 5017, 2002.
- [45] C. Hogan and M. Rees, “Axion miniclusters,” *Physics Letters B*, vol. 205, no. 2, pp. 228 – 230, 1988.
- [46] E. W. Kolb and I. I. Tkachev, “Nonlinear axion dynamics and the formation of cosmological pseudosolitons,” *Phys. Rev. D*, vol. 49, pp. 5040–5051, May 1994.
- [47] D. J. Marsh, “Axion cosmology,” *Physics Reports*, vol. 643, pp. 1 – 79, 2016.
- [48] S. Krippendorff, F. Muia, and F. Quevedo, “Moduli stars,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2018, p. 70, Aug 2018.
- [49] L. Visinelli, S. Baum, J. Redondo, K. Freese, and F. Wilczek, “Dilute and dense axion stars,” *Physics Letters B*, vol. 777, pp. 64 – 72, 2018.
- [50] E. Braaten and H. Zhang, “Axion stars,” 2018. arXiv:1810.11473 [hep-ph].

- [51] P.-H. Chavanis, “Phase transitions between dilute and dense axion stars,” *Phys. Rev. D*, vol. 98, p. 023009, Jul 2018.
- [52] H.-Y. Schive, T. Chiueh, and T. Broadhurst, “Cosmic structure as the quantum interference of a coherent dark wave,” *Nature Physics*, vol. 10, p. 496, 2014. See supplementary information also.
- [53] J. Veltmaat and J. C. Niemeyer, “Cosmological particle-in-cell simulations with ultralight axion dark matter,” *Phys. Rev. D*, vol. 94, p. 123523, Dec 2016.
- [54] W. Hu, R. Barkana, and A. Gruzinov, “Fuzzy cold dark matter: The wave properties of ultralight particles,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, pp. 1158–1161, Aug 2000.
- [55] D. J. E. Marsh and A.-R. Pop, “Axion dark matter, solitons and the cusp–core problem,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 451, no. 3, pp. 2479–2492, 2015.
- [56] B. Schwabe, J. C. Niemeyer, and J. F. Engels, “Simulations of solitonic core mergers in ultralight axion dark matter cosmologies,” *Phys. Rev. D*, vol. 94, p. 043513, Aug 2016.
- [57] L. Hui, J. P. Ostriker, S. Tremaine, and E. Witten, “Ultralight scalars as cosmological dark matter,” *Phys. Rev. D*, vol. 95, p. 043541, Feb 2017.
- [58] R. Brito, V. Cardoso, and H. Okawa, “Accretion of dark matter by stars,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 115, p. 111301, Sep 2015.
- [59] R. Brito, V. Cardoso, C. F. B. Macedo, H. Okawa, and C. Palenzuela, “Interaction between bosonic dark matter and stars,” *Phys. Rev. D*, vol. 93, p. 044045, Feb 2016.
- [60] D. Garfinkle, R. Mann, and C. Vuille, “Critical collapse of a massive vector field,” *Phys. Rev. D*, vol. 68, p. 064015, Sep 2003.
- [61] G. Fodor, P. Forgács, and P. Grandclément, “Scalar field breathers on anti–de Sitter background,” *Phys. Rev. D*, vol. 89, p. 065027, Mar 2014.
- [62] S. J. Avis, C. J. Isham, and D. Storey, “Quantum field theory in anti-de Sitter spacetime,” *Phys. Rev. D*, vol. 18, pp. 3565–3576, Nov 1978.
- [63] R. M. Wald, *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.

- [64] V. M. Eleonskii, N. E. Kulagin, N. S. Novozhilova, and V. P. Silin, “Asymptotic expansions and qualitative analysis of finite-dimensional models in nonlinear field theory,” *Theoretical and Mathematical Physics*, vol. 60, no. 3, pp. 896–902, 1984.
- [65] V. Eleonsky, *Problems of Existence of Nontopological Solitons (Breathers) for Nonlinear Klein-Gordon Equations*, pp. 357–363. Boston, MA: Springer US, 1991.
- [66] P. A. Vuillermot, “Nonexistence of spatially localized free vibrations for a class of nonlinear wave equations,” *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 62, no. 1, pp. 573–586, 1987.
- [67] J. N. Hormuzdiar and S. D. H. Hsu, “On spherically symmetric breathers in scalar theories,” 1999. arXiv:hep-th/9906058.
- [68] V. G. Makhankov, “Dynamics of classical solitons (in non-integrable systems),” *Physics Reports*, vol. 35, no. 1, pp. 1 – 128, 1978.
- [69] V. G. Makhankov, *Soliton Phenomenology*. Springer Netherlands, 1990.
- [70] J. Geicke, “How stable are pulsons in the $(\phi_-^4)_2$ field theory?,” *Physics Letters B*, vol. 133, no. 5, pp. 337 – 340, 1983.
- [71] J. Geicke, “Cylindrical pulsons in nonlinear relativistic wave equations,” *Physica Scripta*, vol. 29, no. 5, p. 431, 1984.
- [72] M. Gleiser and A. Sornborger, “Long-lived localized field configurations in small lattices: Application to oscillons,” *Phys. Rev. E*, vol. 62, pp. 1368–1374, Jul 2000.
- [73] P. L. Christiansen, N. Grønbech-Jensen, P. S. Lomdahl, and B. A. Malomed, “Oscillations of eccentric pulsons,” *Physica Scripta*, vol. 55, no. 2, p. 131, 1997.
- [74] A. A. Minzoni, N. F. Smyth, and A. L. Worthy, “Evolution of two-dimensional standing and travelling breather solutions for the sine-gordon equation,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 189, no. 3–4, pp. 167 – 187, 2004.
- [75] P. L. Christiansen and P. S. Lomdahl, “Numerical study of 2+1 dimensional sine-Gordon solitons,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 2, no. 3, pp. 482 – 494, 1981.
- [76] B. Piette and W. J. Zakrzewski, “Metastable stationary solutions of the radial d - dimensional sine-Gordon model,” *Nonlinearity*, vol. 11, no. 4, p. 1103, 1998.

- [77] G. L. Alfimov, W. A. B. Evans, and L. Vázquez, “On radial sine-Gordon breathers,” *Nonlinearity*, vol. 13, no. 5, p. 1657, 2000.
- [78] A. Bratsos, “The solution of the two-dimensional sine-Gordon equation using the method of lines,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 206, no. 1, pp. 251 – 277, 2007.
- [79] T. Sugiyama, “Kink-antikink collisions in the two-dimensional ϕ^4 model,” *Progress of Theoretical Physics*, vol. 61, no. 5, pp. 1550–1563, 1979.
- [80] M. Moshir, “Soliton-antisoliton scattering and capture in $\lambda\phi^4$ theory,” *Nuclear Physics B*, vol. 185, no. 2, pp. 318 – 332, 1981.
- [81] D. K. Campbell, J. F. Schonfeld, and C. A. Wingate, “Resonance structure in kink-antikink interactions in ϕ^4 theory,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 9, no. 1, pp. 1 – 32, 1983.
- [82] C. A. Wingate, “Numerical search for a ϕ^4 breather mode,” *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 43, no. 1, pp. 120–140, 1983.
- [83] T. Romanczukiewicz and Y. Shnir, “Oscillon resonances and creation of kinks in particle collisions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 105, p. 081601, Aug 2010.
- [84] M. Gleiser, B. Rogers, and J. Thorarinson, “Bubbling the false vacuum away,” *Phys. Rev. D*, vol. 77, p. 023513, Jan 2008.
- [85] M. Gleiser, “Oscillons in scalar field theories: Applications in higher dimensions and inflation,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 16, no. 02n03, pp. 219–229, 2007.
- [86] M. Gleiser, N. Graham, and N. Stamatopoulos, “Generation of coherent structures after cosmic inflation,” *Phys. Rev. D*, vol. 83, p. 096010, May 2011.
- [87] M. Gleiser and N. Graham, “Transition to order after hilltop inflation,” *Phys. Rev. D*, vol. 89, p. 083502, Mar 2014.
- [88] M. Hindmarsh and P. Salmi, “Oscillons and domain walls,” *Phys. Rev. D*, vol. 77, p. 105025, May 2008.
- [89] J. N. Hormuzdiar and S. D. H. Hsu, “Pion breather states in QCD,” *Phys. Rev. C*, vol. 59, pp. 889–893, Feb 1999.

- [90] E. I. Sfakianakis, “Analysis of oscillons in the SU(2) gauged Higgs model,” 2012. arXiv:1210.7568 [hep-ph].
- [91] R. Correa, L. Ospedal, W. de Paula, and J. Helayël-Neto, “Supersymmetry and fermionic modes in an oscillon background,” *Physics Letters B*, vol. 780, pp. 159 – 165, 2018.
- [92] M. V. Charukhchyan, E. S. Sedov, S. M. Arakelian, and A. P. Alodjants, “Spatially localized structures and oscillons in atomic Bose-Einstein condensates confined in optical lattices,” *Phys. Rev. A*, vol. 89, p. 063624, Jun 2014.
- [93] S. Borsányi and M. Hindmarsh, “Low-cost fermions in classical field simulations,” *Phys. Rev. D*, vol. 79, p. 065010, Mar 2009.
- [94] P. M. Saffin, “Recrudescence of massive fermion production by oscillons,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2017, p. 126, Jul 2017.
- [95] E. Cotner, A. Kusenko, and V. Takhistov, “Primordial black holes from inflaton fragmentation into oscillons,” *Phys. Rev. D*, vol. 98, p. 083513, Oct 2018.
- [96] N. Graham and N. Stamatopoulos, “Unnatural oscillon lifetimes in an expanding background,” *Physics Letters B*, vol. 639, no. 5, pp. 541 – 545, 2006.
- [97] E. Farhi, N. Graham, A. H. Guth, N. Iqbal, R. R. Rosales, and N. Stamatopoulos, “Emergence of oscillons in an expanding background,” *Phys. Rev. D*, vol. 77, p. 085019, Apr 2008.
- [98] M. Gleiser, N. Graham, and N. Stamatopoulos, “Long-lived time-dependent remnants during cosmological symmetry breaking: From inflation to the electroweak scale,” *Phys. Rev. D*, vol. 82, p. 043517, Aug 2010.
- [99] E. A. Andersen and A. Tranberg, “Four results on ϕ^4 oscillons in $D + 1$ dimensions,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2012, p. 16, Dec 2012.
- [100] E. Honda, *Resonant dynamics within the nonlinear Klein-Gordon Equation: Much ado about Oscillons*. PhD thesis, The University of Texas at Austin, 2000. arXiv:hep-ph/0009104.
- [101] J. Geicke, “Logarithmic decay of φ^4 breathers of energy $E \lesssim 1$,” *Phys. Rev. E*, vol. 49, pp. 3539–3542, Apr 1994.

- [102] M. Israeli and S. A. Orszag, “Approximation of radiation boundary conditions,” *Journal of Computational Physics*, vol. 41, no. 1, pp. 115 – 135, 1981.
- [103] M. W. Choptuik, *A Study of Numerical Techniques for Radiative Problems in General Relativity*. PhD thesis, The University of British Columbia, 1986. <https://open.library.ubc.ca/media/download/pdf/831/1.0085044/1>.
- [104] R. L. Marsa and M. W. Choptuik, “Black-hole–scalar-field interactions in spherical symmetry,” *Phys. Rev. D*, vol. 54, pp. 4929–4943, Oct 1996.
- [105] J. Balakrishna, E. Seidel, and W.-M. Suen, “Dynamical evolution of boson stars. II. Excited states and self-interacting fields,” *Phys. Rev. D*, vol. 58, p. 104004, Sep 1998.
- [106] G. Fodor and I. RÁCz, “Numerical investigation of highly excited magnetic monopoles in $SU(2)$ Yang-Mills-Higgs theory,” *Phys. Rev. D*, vol. 77, p. 025019, Jan 2008.
- [107] G. Fodor and I. RÁCz, “What Does a Strongly Excited ’t Hooft-Polyakov Magnetic Monopole Do?,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 92, p. 151801, Apr 2004.
- [108] B. Gustafsson, H.-O. Kreiss, and J. Oliger, *Time-Dependent Problems and Difference Methods*. John Wiley Sons, Inc., 2013.
- [109] G. Fodor and I. RÁCz, “Massive fields tend to form highly oscillating self-similarly expanding shells,” *Phys. Rev. D*, vol. 68, p. 044022, Aug 2003.
- [110] P. M. Saffin and A. Tranberg, “Oscillons and quasi-breathers in $D+1$ dimensions,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2007, no. 01, p. 030, 2007.
- [111] P. Salmi and M. Hindmarsh, “Radiation and relaxation of oscillons,” *Phys. Rev. D*, vol. 85, p. 085033, Apr 2012.
- [112] „GCC libquadmath.” <https://gcc.gnu.org/onlinedocs/libquadmath/>.
- [113] „boost C++ libraries, multiprecision.” https://www.boost.org/doc/libs/1_69_0/libs/multiprecision/doc/html/index.html.
- [114] D. H. Bailey and J. M. Borwein, “High-precision arithmetic in mathematical physics,” *Mathematics*, vol. 3, no. 2, pp. 337–367, 2015.
- [115] J. P. Boyd, “Weakly non-local solitary waves,” in *Mesoscale/Synoptic Coherent structures in Geophysical Turbulence* (J. Nihoul and B. Jamart, eds.), vol. 50 of *Elsevier Oceanography Series*, pp. 103 – 112, Elsevier, 1989.

- [116] J. P. Boyd, *Weakly Nonlocal Solitary Waves and Beyond-All-Orders Asymptotics*. Springer US, 1998.
- [117] P. E. Salmi, „Oscillons.” <https://openaccess.leidenuniv.nl/handle/1887/13117>, 2000. PhD thesis, Lorenz-Institute, Faculty of Science, Leiden University, ISBN: 978-90-9023437-3.
- [118] J. P. Boyd, “New directions in solitons and nonlinear periodic waves: Polycnoidal waves, imbricated solitons, weakly nonlocal solitary waves, and numerical boundary value algorithms,” vol. 27 of *Advances in Applied Mechanics*, pp. 1 – 82, Elsevier, 1989.
- [119] J. P. Boyd, “A numerical calculation of a weakly non-local solitary wave: the ϕ^4 breather,” *Nonlinearity*, vol. 3, no. 1, p. 177, 1990.
- [120] J. P. Boyd, “Weakly nonlocal envelope solitary waves: numerical calculations for the Klein-Gordon (ϕ^4) equation,” *Wave Motion*, vol. 21, no. 4, pp. 311 – 330, 1995.
- [121] R. Watkins, „Theory of oscillons.” DART-HEP-96 preprint, unpublished, 1996.
- [122] „LORENE, Langage Objet pour la RELativité Numérique.” <http://www.lorene.obspm.fr/>.
- [123] „School on spectral methods: Application to General Relativity and Field Theory, 2005, Meudon Observatory, France.” <http://www.lorene.obspm.fr/school/index.html>.
- [124] P. Grandclément, S. Bonazzola, E.ourgoulhon, and J.-A. Marck, “A multidomain spectral method for scalar and vectorial Poisson equations with noncompact sources,” *Journal of Computational Physics*, vol. 170, no. 1, pp. 231 – 260, 2001.
- [125] „GSL - GNU Scientific Library, Multidimensional Minimization.” <https://www.gnu.org/software/gsl/doc/html/multimin.html>.
- [126] M. Gleiser, “d-Dimensional oscillating scalar field lumps and the dimensionality of space,” *Physics Letters B*, vol. 600, no. 1, pp. 126 – 132, 2004.
- [127] V. L. Pokrovskii and I. M. Khalatnikov, “On the problem of above-barrier reflection of high-energy particles,” *JETP*, vol. 13, p. 1207, 1961.
- [128] Y. Pomeau, A. Ramani, and B. Grammaticos, “Structural stability of the Korteweg-de Vries solitons under a singular perturbation,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 31, no. 1, pp. 127 – 134, 1988.

- [129] „*NIST Digital Library of Mathematical Functions.*” <http://dlmf.nist.gov/>. F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller and B. V. Saunders, eds.
- [130] D. J. Kaup, “Klein-Gordon geon,” *Phys. Rev.*, vol. 172, pp. 1331–1342, Aug 1968.
- [131] R. Ruffini and S. Bonazzola, “Systems of self-gravitating particles in general relativity and the concept of an equation of state,” *Phys. Rev.*, vol. 187, pp. 1767–1783, Nov 1969.
- [132] P. Jetzer, “Boson stars,” *Physics Reports*, vol. 220, no. 4, pp. 163 – 227, 1992.
- [133] F. E. Schunck and E. W. Mielke, “General relativistic boson stars,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 20, no. 20, p. R301, 2003.
- [134] S. L. Liebling and C. Palenzuela, “Dynamical boson stars,” *Living Reviews in Relativity*, vol. 20, p. 5, Nov 2017.
- [135] L. A. Ureña-López, “Oscillatons revisited,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 19, no. 10, p. 2617, 2002.
- [136] L. A. Ureña-López, T. Matos, and R. Becerril, “Inside oscillatons,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 19, no. 23, p. 6259, 2002.
- [137] F. S. Guzmán and L. A. Ureña López, “Newtonian collapse of scalar field dark matter,” *Phys. Rev. D*, vol. 68, p. 024023, Jul 2003.
- [138] F. S. Guzmán and L. A. Ureña López, “Evolution of the Schrödinger-Newton system for a self-gravitating scalar field,” *Phys. Rev. D*, vol. 69, p. 124033, Jun 2004.
- [139] F. S. Guzmán and L. A. Ureña-López, “Gravitational cooling of self-gravitating Bose condensates,” *The Astrophysical Journal*, vol. 645, no. 2, p. 814, 2006.
- [140] M. Alcubierre, R. Becerril, F. S. Guzmán, T. Matos, D. Núñez, and L. A. Ureña-López, “Numerical studies of ϕ^2 -oscillatons,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 20, no. 13, p. 2883, 2003.
- [141] P. R. Brady, C. M. Chambers, and S. M. C. V. Gonçalves, “Phases of massive scalar field collapse,” *Phys. Rev. D*, vol. 56, pp. R6057–R6061, Nov 1997.

- [142] H. Okawa, V. Cardoso, and P. Pani, “Collapse of self-interacting fields in asymptotically flat spacetimes: Do self-interactions render Minkowski spacetime unstable?,” *Phys. Rev. D*, vol. 89, p. 041502, Feb 2014.
- [143] M. Rozali and B. Way, “Gravitating scalar stars in the large D limit,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2018, p. 106, Nov 2018.
- [144] O. Obregón, L. A. Ureña López, and F. E. Schunck, “Oscillatons formed by nonlinear gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 72, p. 024004, Jul 2005.
- [145] L. A. Ureña-López, S. Valdez-Alvarado, and R. Becerril, “Evolution and stability ϕ^4 oscillatons,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 29, no. 6, p. 065021, 2012.
- [146] J. Balakrishna, R. Bondarescu, G. Daues, and M. Bondarescu, “Numerical simulations of oscillating soliton stars: Excited states in spherical symmetry and ground state evolutions in 3D,” *Phys. Rev. D*, vol. 77, p. 024028, Jan 2008.
- [147] I. I. Tkachev, “Coherent scalar-field oscillations forming compact astrophysical object,” *Soviet Astronomy Letters*, vol. 12, pp. 305–308, 1986. Translation *Pisma v Astronomicheskii Zhurnal*, vol. 12, Sept. 1986, p. 726-733.
- [148] E. W. Kolb and I. I. Tkachev, “Axion miniclusters and Bose stars,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 71, pp. 3051–3054, Nov 1993.
- [149] A. Arvanitaki, S. Dimopoulos, S. Dubovsky, N. Kaloper, and J. March-Russell, “String axiverse,” *Phys. Rev. D*, vol. 81, p. 123530, Jun 2010.
- [150] D. J. E. Marsh, “Axions and ALPs: a very short introduction,” 2017. arXiv:1712.03018 [hep-ph].
- [151] H. Okawa, “Nonlinear evolutions of bosonic clouds around black holes,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 32, no. 21, p. 214003, 2015.
- [152] T. Helfer, D. J. Marsh, K. Clough, M. Fairbairn, E. A. Lim, and R. Becerril, “Black hole formation from axion stars,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2017, no. 03, p. 055, 2017.
- [153] F. Michel and I. G. Moss, “Relativistic collapse of axion stars,” *Physics Letters B*, vol. 785, pp. 9 – 13, 2018.

- [154] J. Y. Widdicombe, T. Helfer, D. J. Marsh, and E. A. Lim, “Formation of relativistic axion stars,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2018, no. 10, p. 005, 2018.
- [155] A. Iwazaki, “Axion stars and fast radio bursts,” *Phys. Rev. D*, vol. 91, p. 023008, Jan 2015.
- [156] S. Raby, “Axion star collisions with neutron stars and fast radio bursts,” *Phys. Rev. D*, vol. 94, p. 103004, Nov 2016.
- [157] K. Clough, T. Dietrich, and J. C. Niemeyer, “Axion star collisions with black holes and neutron stars in full 3D numerical relativity,” *Phys. Rev. D*, vol. 98, p. 083020, Oct 2018.
- [158] F. Edwards, E. Kendall, S. Hotchkiss, and R. Easther, “Pyultralight: a pseudo-spectral solver for ultralight dark matter dynamics,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2018, no. 10, p. 027, 2018.
- [159] E. J. M. Madarassy and V. T. Toth, “Evolution and dynamical properties of Bose-Einstein condensate dark matter stars,” *Phys. Rev. D*, vol. 91, p. 044041, Feb 2015.
- [160] R. Becerril, T. Matos, and L. Ureña-López, “Geodesics around oscillatons,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 38, pp. 633–641, Apr 2006.
- [161] M. Bošković, F. Duque, M. C. Ferreira, F. S. Miguel, and V. Cardoso, “Motion in time-periodic backgrounds with applications to ultralight dark matter halos at galactic centers,” *Phys. Rev. D*, vol. 98, p. 024037, Jul 2018.
- [162] R. Brito, V. Cardoso, C. A. Herdeiro, and E. Radu, “Proca stars: Gravitating Bose-Einstein condensates of massive spin 1 particles,” *Physics Letters B*, vol. 752, pp. 291 – 295, 2016.
- [163] T. Helfer, E. A. Lim, M. A. G. Garcia, and M. A. Amin, “Gravitational wave emission from collisions of compact scalar solitons,” *Phys. Rev. D*, vol. 99, p. 044046, Feb 2019.
- [164] S. H. Hawley, „Scalar analogues of compact astrophysical systems.” <http://hedges.belmont.edu/~shawley/diss.ps>, 2000. PhD thesis, University of Texas at Austin.
- [165] S. H. Hawley and M. W. Choptuik, “Numerical evidence for “multiscalar stars”,” *Phys. Rev. D*, vol. 67, p. 024010, Jan 2003.

- [166] F. Di Giovanni, N. Sanchis-Gual, C. A. R. Herdeiro, and J. A. Font, “Dynamical formation of proca stars and quasistationary solitonic objects,” *Phys. Rev. D*, vol. 98, p. 064044, Sep 2018.
- [167] C. W. Misner and D. H. Sharp, “Relativistic equations for adiabatic, spherically symmetric gravitational collapse,” *Phys. Rev.*, vol. 136, pp. B571–B576, Oct 1964.
- [168] K. ichi Nakao, “On a quasi-local energy outside the cosmological horizon,” 1995. arXiv:gr-qc/9507022.
- [169] H. Kodama, “Conserved energy flux for the spherically symmetric system and the backreaction problem in the black hole evaporation,” *Progress of Theoretical Physics*, vol. 63, no. 4, pp. 1217–1228, 1980.
- [170] S. A. Hayward, “Gravitational energy in spherical symmetry,” *Phys. Rev. D*, vol. 53, pp. 1938–1949, Feb 1996.
- [171] F. R. Tangherlini, “Schwarzschild field in n dimensions and the dimensionality of space problem,” *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, vol. 27, pp. 636–651, Feb 1963.
- [172] R. Friedberg, T. D. Lee, and Y. Pang, “Mini-soliton stars,” *Phys. Rev. D*, vol. 35, pp. 3640–3657, Jun 1987.
- [173] S. Kichenassamy, “Soliton stars in the breather limit,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 25, no. 24, p. 245004, 2008.
- [174] G. Fodor, P. Forgács, Z. Horváth, and M. Mezei, “Oscillons in dilaton-scalar theories,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2009, no. 08, p. 106, 2009.
- [175] I. M. Moroz, R. Penrose, and P. Tod, “Spherically-symmetric solutions of the Schrödinger-Newton equations,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 15, no. 9, p. 2733, 1998.
- [176] P. Tod and I. M. Moroz, “An analytical approach to the Schrödinger-Newton equations,” *Nonlinearity*, vol. 12, no. 2, p. 201, 1999.
- [177] R. Harrison, I. Moroz, and K. P. Tod, “A numerical study of the Schrödinger–Newton equations,” *Nonlinearity*, vol. 16, no. 1, p. 101, 2003.

- [178] P. Choquard, J. Stubbe, and M. Vuffray, “Stationary solutions of the Schrödinger-Newton model—an ODE approach,” *Differential Integral Equations*, vol. 21, no. 7-8, pp. 665–679, 2008.
- [179] L. Diósi, “Gravitation and quantum-mechanical localization of macro-objects,” *Physics Letters A*, vol. 105, no. 4, pp. 199 – 202, 1984.
- [180] R. Penrose, “Quantum computation, entanglement and state reduction,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 356, p. 1927, 1998.
- [181] R. Ferrell and M. Gleiser, “Gravitational atoms: Gravitational radiation from excited boson stars,” *Phys. Rev. D*, vol. 40, pp. 2524–2531, Oct 1989.
- [182] V. Moroz and J. Van Schaftingen, “A guide to the Choquard equation,” *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, vol. 19, pp. 773–813, Mar 2017.
- [183] „KADATH Spectral Solver.” [https : //luth . obspm . fr/~luthier/grandclement/kadath.html](https://luth.obspm.fr/~luthier/grandclement/kadath.html). author: Philippe Grandclement.
- [184] P. Grandclément, “Kadath: A spectral solver for theoretical physics,” *Journal of Computational Physics*, vol. 229, no. 9, pp. 3334 – 3357, 2010.
- [185] P. Bizoń and A. Rostworowski, “Weakly turbulent instability of anti-de Sitter space-time,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 107, p. 031102, Jul 2011.
- [186] M. Maliborski and A. Rostworowski, “Time-periodic solutions in an Einstein AdS–massless-scalar-field system,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 111, p. 051102, Aug 2013.
- [187] Ó. J. C. Dias, G. T. Horowitz, D. Marolf, and J. E. Santos, “On the nonlinear stability of asymptotically anti-de Sitter solutions,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 29, p. 235019, nov 2012.
- [188] M. W. Choptuik, J. E. Santos, and B. Way, “Charting islands of stability with multi-oscillators in anti-de Sitter space,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 121, p. 021103, Jul 2018.
- [189] G. Fodor, P. Forgács, and P. Grandclément, “Self-gravitating scalar breathers with a negative cosmological constant,” *Phys. Rev. D*, vol. 92, p. 025036, Jul 2015.
- [190] Ó. J. C. Dias, G. T. Horowitz, and J. E. Santos, “Gravitational turbulent instability of anti-de Sitter space,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 29, p. 194002, aug 2012.

- [191] Ó. J. C. Dias and J. E. Santos, “AdS nonlinear instability: moving beyond spherical symmetry,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 33, p. 23LT01, nov 2016.
- [192] A. Rostworowski, “Comment on ‘AdS nonlinear instability: moving beyond spherical symmetry’ (2016 class. quantum grav. 33 23lt01),” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 34, p. 128001, may 2017.
- [193] G. T. Horowitz and J. E. Santos, “Geons and the instability of anti-de Sitter space-time,” in *One hundred years of general relativity* (Y. Bieri, ed.), vol. 20 of *Surveys in Differential Geometry*, pp. 321 – 335, International Press of Boston, 2015.
- [194] J. A. Wheeler, “Geons,” *Phys. Rev.*, vol. 97, pp. 511–536, Jan 1955.
- [195] D. R. Brill and J. B. Hartle, “Method of the self-consistent field in general relativity and its application to the gravitational geon,” *Phys. Rev.*, vol. 135, pp. B271–B278, Jul 1964.
- [196] P. R. Anderson and D. R. Brill, “Gravitational geons revisited,” *Phys. Rev. D*, vol. 56, pp. 4824–4833, Oct 1997.
- [197] G. Martinon, G. Fodor, P. Grandclément, and P. Forgács, “Gravitational geons in asymptotically anti-de Sitter spacetimes,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 34, p. 125012, may 2017.
- [198] G. Fodor and P. Forgács, “Anti-de Sitter geon families,” *Phys. Rev. D*, vol. 96, p. 084027, Oct 2017.