

A KVANTUMOS ÉS KLASSZIKUS TARTOMÁNYOK HATÁRÁN

Polónyi János^{1,2}

¹Institut Pluridisciplinaire Hubert Curien, Université de Strasbourg, Strasbourg

²HUN-REN Wigner Fizikai Kutatóközpont, Budapest

E-mail: polonyi@iphc.cnrs.fr



Polónyi János a Strasbourgi Egyetem emeritusz professzora, Magyarországon, Németországban, az Egyesült Államokban és Franciaországban végezte kutatásait. Jelenlegi érdeklődési területe a nyitott rendszerek dinamikája, melyet a kvantumtérelmélet és a renormálási csoport módszereivel vizsgál.

1. Mikroszkopikus-makroszkopikus átmenet

A kvantummechanika száz év alatt teljesen váratlan javaslategyüttesből a fizika egyik pillérévé vált, melyet az azóta végzett mérések kivétel nélkül megerősítettek. Ezzel fizikai világunk két szintre, mikroszkopikus és makroszkopikus jelenségekre hasadt, melyek alapfeltevései teljesen különbözőek. Ugyanakkor meg vagyunk győződve arról, hogy világunk egy és oszthatatlan. Mennyiben békíthető ki ez a két szint?

Összeférhetőségüket kizárólag egy olyan fogalmi rendszer segítségével ellenőrizhetjük, amely interpolál a kvantumos és a klasszikus tartomány határán, és ezért mindkét szinten alkalmazható.

Hol is keressük a kvantumos-klasszikus átmenetet? A kvantummechanika egyik meglepő eredménye az elemi részecskék definíciója. A dinamikát lineáris terekben megvalósító formalizmusban természetes módon azonosíthatók a dinamikai folyamatok elemi, diszkrét lépései a szimmetriák irreducibilis ábrázolásai segítségével. Ennek megfelelően a klasszikus fizikából kiindulva megfigyeléseink csak akkor érik el a kvantumos szintet, amikor felbontásuk eleget az egyes elemi gerjesztések követéséhez. Akkor azonban a mérés olyan pontosságúvá válik, hogy a mérőeszköz elkerülhetetlen kölcsönhatása a mért rendszerrel – elkerülhetetlen, hiszen ennek alapján beszélhetünk egyáltalán mérésről – befolyásolja a mérés eredményét. Ezzel pedig a determinizmus empirikus ellenőrzése lehetetlenné vált, hiszen definíció szerint nem ismerjük mérőeszközünk kezdeti feltételét.

A kvantumos-klasszikus átmenet megértését célzó és az alábbiakban vázolt javaslat abból áll, hogy a kvantumos-klasszikus átmenet helyett a mikroszkopikus-makroszkopikus átmenetre fordítsuk figyelmünket – az iskolában megismert zárt rendszerek helyett nyitott rendszerek megfogalmazásában. Ennek megfelelően fogalmazzuk meg úgy a törvényeket, hogy azok tartalmazhassák a megfigyelést elkerülő, de a megfigyelt rendszerrel kölcsönható dinamikai szabadságfokok hatását.

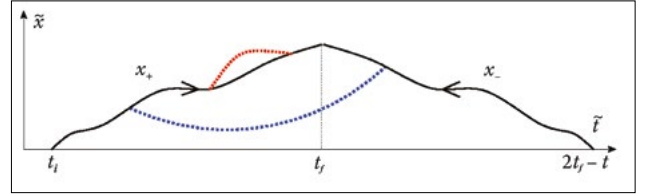
2. Nyílt rendszerek

A nyílt rendszerek leírása két egymástól függetlennek tűnő problémát tartalmaz. (a) A környezet általában sokkal nagyobb, összetettebb, mint a megfigyelt rendszer. Hogyan találjuk meg a rendszer számára fontos környezeti szabadságfokokat? (b) Hogyan illeszthetjük be ezeket a megfigyelt rendszer dinamikájába?

Mindkét fent vázolt probléma egyidejű megoldását először a klasszikus fizikában tárgyaljuk, az x és y koordinátákkal leírt rendszer és környezet együttesének zárt dinamikáját leíró $S[x, y]$ hatásból kiindulva [1]. A (b) kérdés megválaszolása, a nyílt rendszer mozgásegyenletének levezetése két lépésből áll. (i) Oldjuk meg a környezet $\delta S[x, y]/\delta y = 0$ mozgásegyenletét tetszőleges $x(t)$ trajektóriára! (ii) Az így kapott $y[x](t)$ trajektóriát helyettesítjük be a rendszer variációs mozgásegyenletébe: $\delta S[x, y]/\delta x|_{y=y[x]} = 0$. A nyílt dinamika formális problémája abban nyilvánul meg, hogy ezt a nyílt mozgásegyenletet nem lehet a természetesnek tűnő $S_{\text{eff}}[x] = S[x, y[x]]$ hatásból származtatni, hiszen

$$\left. \frac{\delta S[x, y]}{\delta x} \right|_{y=y[x]} \neq \frac{\delta S[x, y[x]]}{\delta x}. \quad (1)$$

A probléma megoldása kézenfekvő: használjunk két koordinátát a rendszer minden szabadságfokára, $x \rightarrow (x, x')$,



1. ábra. A mozgást kétszer követjük végig, egyszer oda, majd a végpontban végrehajtott időirány megfordítása után, vissza az időben. A zárt kölcsönhatás (felső szaggatott vonal) az oda vagy a vissza meneten belül történik, a nyitott kölcsönhatás (alsó szaggatott vonal) a kétfajta mozgás között lehet jelenik meg

$S_{\text{eff}}[x, x'] = S[x, y[x']]$, melyeket csak a mozgásegyenlet megoldása után teszünk egyenlővé. Az új koordinátát válasszuk meg úgy, hogy ez a megkétszereződés formális maradjon, azaz mindkét koordinátára ugyanazt a trajektóriát eredményezze a variációs mozgásegyenlet! Ennek érdekében kétszer követjük végig a mozgást. Először előre haladva az időben, majd a végén megfordítjuk az időirányt, és visszafelé is végigkövetjük az időtükrözött mozgást, míg a kezdeti időig visszajutunk. Ez persze felesleges megkettőződés zárt dinamika esetében, de várjunk egy kicsit a javaslat elbírálásával!

A hatás megválasztása érdekében az így kapott és az ábrán vázolt $\tilde{x}(\tilde{t})$ trajektóriát két részre bontva $\tilde{x}(\tilde{t}) \rightarrow (x_+(t), x_-(t)) = (x(t), x(2t_f - t))$ vezetjük be a megkétszereződést. A hagyományos $S[x]$ hatással leírt zárt dinamika esetén az $S[x_+, x_-] = S[x_+] - S^*[x_-]$ hatást választjuk, ahol a negatív előjel a $t \rightarrow -t$ időtükrözésből fakad, és a komplex konjugálás a Green-függvények érdekében a hatásban bevezetett (itt az egyszerűség miatt nem tárgyalt) infinitezimális képzetes tagok miatt szükséges. A trajektóriák variációját pedig olyan trajektóriahalmazon végezzük el, melyet mindkét trajektóriára kirótt fizikai kezdeti feltétellel és a végső időpontban kiszabott $x_+(t_f) = x_-(t_f)$ lezárással definiálunk. Innen ered a módszer zárt időpálya (Closed Time Path, CTP) elnevezése.

Vegyük észre, hogy ebben a rendszerben minőségleg új kölcsönhatások vezethetők be, ugyanis a szokásos $x_{\pm} \leftrightarrow x_{\pm}$ kölcsönhatás mellett a zárt rendszerekben ismeretlen $x_{\pm} \leftrightarrow x_{\mp}$ kölcsönhatásra is lehetőség van. Mivel $x_{\pm}$ környezetét $x_{\mp}$ képviseli, ez utóbbi a rendszer-környezet kölcsönhatásnak felel meg. Így oldódik meg a fentebb említett (a) probléma: a rendszer számára fontos környezet pont annyira összetett, mint maga a rendszer. Ez jól látható az

$$S[x_+, x_-] = S_1[x_+] - S_1[x_-] + S_2[x_+, x_-]$$

felbontásban, ahol az egyetlen koordinátára vonatkozó $S_1[x]$ és a koordinátopárok közti kölcsönhatást tartalmazó $S_2[x_+, x_-]$ a zárt, illetve nyitott kölcsönhatást írja le.

A kvantummechanikában a szabadságfokok megkettőzésének bevezetése a következő gondolatmenettel történik. Egy nyitott kvantumrendszer állapota tipikusan kevert, ezért a nyitott kvantumdinamikát a sűrűségmátrix segítségével kell leírni. Tetszőleges fizikai A mennyiség várható értékét tekintve,

$$\langle A \rangle = \text{Tr}[A\rho] = \int dx_+ dx_- \langle x_- | A | x_+ \rangle \rho(x_+, x_-), \quad (2)$$

de amennyiben a rendszer tiszta állapotban van, a sűrűségmátrix faktorizálódik, $\rho(x_+, x_-) = \langle x_+ | \psi \rangle \langle \psi | x_- \rangle$, így a fenti várható értékben a $\langle \psi |$ bra és a $|\psi \rangle$ ket állapotok kvantumfluktációi, $\langle \psi | x_- \rangle$ és $\langle x_+ | \psi \rangle$ függetlenek. Azonban egy kevert állapot sűrűségmátrixa,

$$\rho(x_+, x_-) = \sum_n \langle x_+ | \psi_n \rangle p_n \langle \psi_n | x_- \rangle, \quad n=1, 2, \dots$$

nem faktorizálható, ezért nyílt rendszerekben a bra és a ket komponens kvantumfluktációi korreláltak.

A pályaintegrálos formalizmusban ez a szabadságfokok klasszikus mechanikában megfigyelt megkétszereződéséhez vezet [2]. Az így kialakult formalizmus már jó fél évszázada ismert a kvantumelméletben [3–5], csupán általánosságának és jelentőségének felismerése váratott magára.

Az $S[x_+, y_+, x_-, y_-]$ hatásra alapuló pályaintegrálból elindulva a környezet szabadságfokainak integrálásával kapott $S_{\text{eff}}[x_+, x_-]$ hatás a nyílt dinamikát írja le. A környezeti szabadságfokok eliminálását a renormálási csoport módszerével lehet módszeresen végrehajtani. Ily módon a klasszikus, kvantum, zárt és nyitott dinamikát egyaránt leíró hatásfunkcionál felhasználásával új lehetőség nyílik a kvantum-klasszikus átmenet leírására.

3. A mikroszkopikus folyamatok sajátos jellemzői

Mielőtt fő célunkat, a makroszkopikus határesetet tárgyalnánk, megemlítünk két olyan kvantum jelenséget, melyeknek el kell tűnniük ahhoz, hogy a klasszikus fizikához eljérjünk.

Egyik a makroszkopikusan különböző kvantumállapotok között fellépő interferencia, melynek elnyomását dekoherenciának hívják. Ez a környezettel való kölcsönhatásból fakad, és jól megértett folyamat. Tekintsünk például egy bútor darabot, melynek a legcsekélyebb áthelyezése a szobában lévő levegőmolekulák mikroszkopikus átrendeződéséhez vezet. Nem nehéz belátni a bútor és a levegő közös zárt dinamikájában, hogy mindegyik molekula állapotának megváltozása egy egynél kisebb abszolút értékű komplex számszorzóval csökkenti a bútor két állapota közti interferenciát, amely ennél fogva teljesen eltűnik a termodinamikai határesetben. A dekoherencia eredményeképp a sűrűségmátrix nem diagonális elemei nagyon kicsivé válnak, ez azonban bázisfüggő. A koordinátabázisban a dekoherenciát a rendszer és a környezet összefonódását jellemző $S_2[x_+, x_-]$ tag képzetes része írja le, amely sokrészecskés rendszerekben a kvantumtérelmélet perturbációs számítása segítségével egyszerűen azonosítható és számítható.

A másik kérdéses jelenség a kvantum világot jellemző indeterminizmus (kvantumfluktációk), melyek elnyomása is feltétele a determinisztikus klasszikus tör-

vények megjelenésének. A determinizmus két változatban szokott megjelenni a köztudatban. A és B jelenség determinisztikus logikai kapcsolatban van, $A \leftrightarrow B$, ha elmondható, hogy A akkor és csak akkor jelenik meg amikor B . A determinizmus a filozófusok számára inkább az ok-okozat, röviden okság törvényeként ismeretes, semmi sem történik ok nélkül. Ez annak felel meg, hogy ha A megtörtént akkor B is bekövetkezik, $A \rightarrow B$. Kant óta elfogadott feltételezés, hogy ez csupán gondolkodásunk rendezőelve. A filozófusok által használt ok és okozat különbsége, azaz hogy az ok időben megelőzi az okozatot, nehezen értelmezhető a klasszikus fizikában, amely csupán egy mozgás, illetve folyamat két különböző időpontban felvett állapota közti összefüggésekre szorítkozik. A klasszikus determinisztikus törvények szerint a két állapot közül az egyik szükségképpen meghatározza a másikat, függetlenül az időbeli sorrendtől.

A kvantummechanikában nem valósul meg sem a determinizmus, sem pedig az okság elve. A determinizmus hiánya a Heisenberg-féle határozatlansági reláció alapján érthető meg. Két fizikai mennyiség kompatibilis, ha az azokat leíró operátorok kommutálnak. A határozatlansági reláció szerint egy rendszeren két nem kompatibilis fizikai mennyiség egymás után mért értéke között csak valószínűségi, nem pedig determinisztikus kapcsolat van. Az okság elvének megsértése pedig legkönnyebben az ún. EPR-paradoxon [7] példáján keresztül érthető meg. Tekintsünk két mikroszkopikus rendszert, melyek egy pillanatban kölcsönhatnak, és ennek folyamán állapotuk összefonódik! A kvantummechanika szerint a két rendszeren egyidejűleg elvégzett mérések eredménye korrelált az ún. Bell-egyenlőtlenségek sérülése miatt, függetlenül a két rendszer távolságától. A jelenség kísérleti ellenőrzésére számos technikai probléma megoldása után csak 48 évvel később került sor, melyet számos további mérés követett az elképzelhető hibaforrások kiküszöbölésével.

Ezek szerint az egyik mérés által kapott információ a fénysebességnél gyorsabban módosítja a másik rendszert. A speciális relativitáselmélet szerint a térszerűen szeparált mérések időbeli sorrendje függ attól, hogy milyen sebességgel mozog a sorrendet felállító megfigyelő, azaz tetszőleges. Tehát a két mérés eredménye közt nem állhat fenn oksági kapcsolat – Kant feltevését megerősítve – helyette egy régebben megtörtént és a megfigyelést elkerülő kölcsönhatást kell feltételeznünk. Erről lásd még a *Fizikai Szemle* jelen számában Szabó Gábor cikkét a „kvantum közös ok” hipotéziséről. Klasszikus fizikai mérések esetén az okság ilyen megkerülése nyilvánvalóan illuzórikus, például a szinkronizált órák korrelált viselkedése triviális jelenség, de az említett mikroszkopikus kísérlet esetében biztosak lehetünk abban, hogy csak a mérés által, a mérés idejében kiváltott folyamatok korrelációjáról van szó. A cikk további részében azt fogjuk tárgyalni, hogyan megy át a mikroszkopikus indeterminizmus makroszkopikus determinizmusba.

4. Valószínűség-elmélet

Folytassuk most gondolatmenetünket, mellyel az indeterminisztikus mikroszkopikus törvények determinisztikus makroszkopikus törvényekbe történő átalakulását követjük! Ennek az átmenetnek megértése az indeterminisztikus jelenségek matematikai leírásán, a Kolmogorov által megfogalmazott axiómákra alapuló valószínűség-számításon alapul.

Mit is jelent egy jelenség valószínűsége? Objektívnek mondható, ha a jelenséget jellemzi, szubjektívnek pedig, ha a jelenséget vizsgálóra vonatkozik. A Bayes-tétel szokásos értelmezése arra utal, hogy a valószínűség az ismereteket gyűjtő gondolkodót jellemzi.

Az objektív jelleget helyezi előtérbe a nagy számok törvénye: egy véletlen X jelenség egymástól független megvalósulásait vizsgálva a relatív gyakoriság, egy adott érték megjelenésének N_r és az összes megfigyelés N_t hányadosa, $p_{\text{rel}} = N_r/N_t$, a jelenség $p(X)$ valószínűségéhez tart az $N_t \rightarrow \infty$ határátmenetben. Sajnálatos módon ez a valószínűségnek egy körkörös definíciójához vezet, és csupán azt biztosítja, hogy a relatív gyakoriság és a valószínűség eltérése a valószínűség, $p(p_{\text{rel}} - p(X))$ kellően nagy N_t -re tetszőlegesen kicsi.

A valószínűség eredetének kérdésében Kolmogorov axiómái sem segítenek, ezek csupán a legegyszerűbb, azaz elemi események valószínűsége ismeretében szabják meg az összetettebb események valószínűségét. Az elemi események valószínűsége eredetének kérdése pedig túlmutat a matematikán, és a jelenségek részletesebb ismeretét, fizikai megközelítést igényel. Jaynes értelmezése szerint a valószínűségszámítás a logika kiterjesztése [8]. Fontos megjegyezni, hogy ugyan a klasszikus fizika valószínűségei kielégítik Kolmogorov axiómáit, kvantumfolyamatok esetén ez csak teljes dekoherencia esetén történik meg.

A determinisztikus klasszikus fizikában nincs helye objektív bizonytalanságnak. Tehát itt a valószínűség szubjektív, a megfigyelés véges felbontásából vagy pedig a megfigyelő véges információfeldolgozási képességéből fakad. Ez persze nem azt jelenti, hogy bárki bármit állíthat; azonos részleges információval rendelkező gondolkodóknak azonos következtetésre kell jutniuk.

A valószínűség a kvantummechanikában objektív módon, konstruktív definícióval jelenik meg a Born-szabály révén, amely egy mérés lehetséges eredményeinek előfordulási valószínűségét szabja meg. Ez a valószínűség nem a megfigyelés hiányosságaiból ered, és ennél fogva objektív annak ellenére, hogy empirikus ellenőrzése a nagy számok törvényén alapul. Ennek belátására elegendő elképzelni két kölcsönható részecske tiszta állapotát melyben a két komponens összefonódik. A kvantumállapot információnk összegzéseként fogható fel, tehát a tiszta állapot tartalmazza az adott rendszerről megszerezhető maximális információt. Azonban ennek a birtokában sem tudunk sem-

mit egyetlen részecske állapotáról amennyiben az összefonódott egy másikkal. Más szóval a mérés folyamán, amikor a mért rendszer és a mérőeszköz kölcsönhat és összefonódik, információt nyerünk és veszünk, nem tudjuk kinyerni a teljes információt a mért rendszert alkotó részecskékről. Ezen a ponton kapcsolódik össze az információelmélet és a kvantummechanika, melynek szabályai a részleges információ optimális és módszeres alkalmazásának tűnnek. Tehát a klasszikus fizikát a kvantummechanikából származtatva elkerülhetetlennek tűnik az indeterminizmus.

5. A központi határeloszlás-tétel és a méréselmélet

Hogy lehet elképzelni a determinisztikus törvények megjelenését az előző fejezet végkövetkeztetése fényében? Keressük a választ a valószínűségszámítás központi határeloszlás-tétele segítségével, mely olyan numerikus értékű ξ valószínűségi változóra alkalmazható, melynek mind a $\bar{\xi}$ várható értéke, mind pedig az attól való eltérés négyzetének a várható értéke, $\sigma^2 = (\xi - \bar{\xi})^2$, véges. A tétel szerint N független megvalósulás átlagának eloszlása olyan normális eloszláshoz tart, melynek várható értéke $\bar{\xi}$, és az attól való eltérés négyzetének várható értéke σ^2/N . Tehát az átlag fluktuációja az eredeti szórás $1/\sqrt{N}$ -szere-se, ez pedig kellően nagy N -re tetszőlegesen kicsi lehet.

Ez a tétel az egyensúlyi statisztikus fizika megalapozásában döntő fontosságú, mert segítségével válnak értéketővé a termodinamikai határesetben a véletlenszerű fluktuációkból kiemelkedő determinisztikus törvények, melyeket a termodinamika intuitív módszerével is fel lehet térképezni. A tétel alkalmazása lokális fizikai mennyiségekre azért korlátozott, mert ezek a mennyiségek általában nem függetlenek. Ezt a feltételt kerüli meg a renormálási csoport módszere, mely felfogható a központi határeloszlás tételének olyan általánosításaként, ahol a valószínűségi változó megvalósulásai között megengedett a korreláció.

Mint említettük, a megfigyelt kvantumjelenségek annál a távolságskálánál olvadnak be a klasszikus fizikába, ahol a mérőeszköz felbontása túl durvává válik az egyes elemi gerjesztések követésére. Alkalmazható-e a központi határeloszlás-tétel a makroszkopikus mérőeszköz számára követhetetlen, nagyszámú kvantum fluktuációkra is? A válasz nem nyilvánvaló, mert a fluktuációkat komplex valószínűségi amplitúdó írja le egy adott bázisban, azonban a valószínűség, melyre a tétel vonatkozik, általában amplitúdók összegének abszolútérték-négyzete, melyből ráadásul a dekoherencia elnyomhatja az interferenciát. A tétel érvényben maradása nemcsak a determinizmus megjelenése szempontjából érdekes, a statisztikus fizika sokaságra alapuló leírásának jobb megértéséhez is elvezethet izolált kvantumrendszerek esetében [9]. A központi határeloszlás tételének bizonyítása pár sor a generálófüggvény

használatával. Hasonló függvény a CTP formalizmusban is bevezethető, és szintén egyszerű módon vezet a tétel állításához [10], illetve annak korrelált általánosításához, a renomálási csoport gondolatmenetét követve.

Tegyük fel, hogy mérésünk eredménye számos szabadságfok átlagának tekinthető. Például egy ampermérő mutatójának szöge a mérőeszköz áramkörében mozgó töltött részecskék átlagos mozgásának eredményeképpen alakul ki. Tekintsük a mutató szögét a megfigyelt rendszernek, melynek környezete tartalmazza ezeket a töltéseket. A mért mennyiség klasszikus viselkedésének két elégséges feltétele van, mindkettő a környezetre vonatkozik. (i) A környezetnek elég nagynek kell lenni ahhoz, hogy könnyen gerjeszthetővé váljon. Erre azért van szükség, hogy az így beálló erős dekoherencia összhangba hozza a kvantummechanika által adott valószínűséget Kolmogorov axiómaival. A dekoherencia, a sűrűségmátrix nem diagonális elemeinek elnyomása információvesztést jelent. Ez az irreverzibilis lépés kíséri a mikroszkopikus jelenségek megjelenését a makroszkopikus szinten. (ii) Kellően sok közelítőleg független környezeti szabadságfokra legyen a rendszer-környezet kölcsönhatás átlagolva ahhoz, hogy a mérés eredményének fluktuációja elhanyagolhatóvá váljon. Ez a feltétel sérül makroszkopikus kvantumjelenségeknél, mint például a termodinamika Gibbs-paradoxonjának elkerülésénél, a Bose–Einstein-kondenzációnál, a szuperfolyékonyságnál vagy a kvantumos Hall-effektusnál. Ezekben az esetekben a kölcsönható környezeti szabadságfokok nagy száma ellenére a szabadságfokok erős korrelációja, a térbeli lokalitás sérülése lehetővé teszi egyes kvantumjelenségek makroszkopikus nagyítását.

Tehát a klasszikus világ sem determinisztikus, csupán az Avogadro-szám elképesztő nagysága a makroszkopikus jelenségekben is szükségképpen jelenlévő indeterminisztikus kvantumfluktuációkat gyakorlatilag felismerhetetlenné, jó közelítéssel elhanyagolhatóvá teszi. A determinisztikus klasszikus fizika a termodinamikához hasonlóan a makroszkopikus határesetben valósul meg. Ezen a ponton válnak el visszafordíthatatlanul a gyerekkorunkban kialakított, klasszikus fizikára alapozott fogalmaink a fizikai valóságtól.

Köszönetnyilvánítás

Köszönet illeti Asbóth Jánost, aki számos kérdéssel és megjegyzéssel hozzásegített, hogy ez az írás olvashatóbb és érthetőbb legyen.

Irodalom

1. J. Polonyi: *Ann. Phys.*, 467, (2024) 169694.
2. R. P. Feynman, F. L. Vernon: *Ann. Phys.*, 24, (1963) 118.
3. H. Umezawa, H. Matsumoto, M. Tachiki: *Thermo Field Dynamics and Condensed States*. North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford (1982).
4. J. Schwinger: *J. Math. Phys.*, 2, (1961) 407.
5. L. V. Keldysh: *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 47, (1964) 1515 (*Sov. Phys. JETP*, 20, (1965) 1018).
6. A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen: *Phys. Rev.*, 47, (1935) 777.
7. Takács Gábor: *Fizikai Szemle*, 69/2, (2019) 43.
8. E. T. Jaynes: *Probability Theory, The Logics of Science*. Cambridge University Press, (2003).
9. Kormos Márton: *Fizikai Szemle*, 75/4, (2025) 114.
10. J. Polonyi: *Universe*, 7, (2021) 315.