

Direction du temps

Janos Polonyi

University of Strasbourg

(Dated: December 3, 2021)

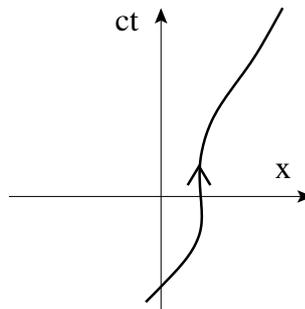
Video: https://drive.google.com/drive/folders/1_Y-4XmJMmg0sCwrPC4yZXuxv_xdzR9c2?usp=sharing

I. INTRODUCTION

1. L'équivalence de l'espace et du temps?

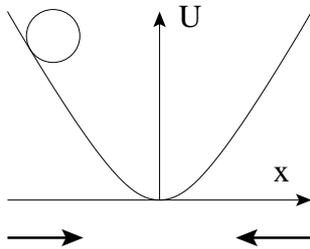
- *Oui*: Relativité restreinte, $x^\mu = (ct, x, y, z) = (x^0, \mathbf{x})$

une ligne du monde, $x^\mu(s) = (x^0(s), \mathbf{x}(s))$, $\mu = 0, 1, 2, 3$

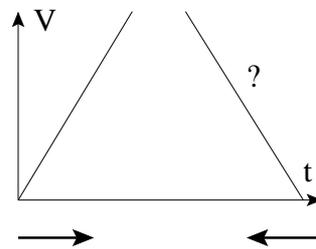


- *Non*:

- Relativité restreinte: $s^2 = c^2t^2 - \mathbf{x}^2$
- Temps est orienté:



Une balle qui roule sur une surface



Du sable dans le sablier

- La mesure du temps est constituée par la mesure des coordonnées et nécessite une mémoire (physique macroscopique!)
- Mécanique quantique: temps \rightarrow nombre, coordonnées \rightarrow opérateurs

– Temps: cause et conséquence

• **Flèche du temps:**

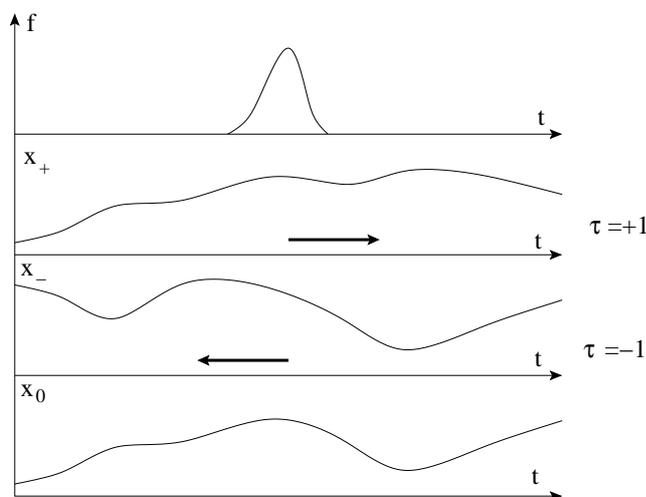
(a) *Équation de mouvement:* $\tau_d = \pm 1$, la direction du mouvement stable
(l'irréversibilité, la force de frottement de Newton)

(b) *Structure causale:* $\tau_c = \pm 1$,

f : force extérieure,

x_{\pm} : $\tau_c = \pm 1$,

x_0 : système de contrôle (sans force extérieure)



2. **Questions:**

• *Comment peut-on reconnaître expérimentalement la direction d'une flèche temporelle dynamique?*

(a) Faire un enregistrement vidéo du mouvement

(b) Jouer le mouvement à rebours

(c) L'équation de mouvement:

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}(-t) \implies 0 = f(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t)) = f(\mathbf{x}(-t), -\dot{\mathbf{x}}(-t), \ddot{\mathbf{x}}(-t)) \stackrel{?}{=} f(\mathbf{x}(-t), \dot{\mathbf{x}}(-t), \ddot{\mathbf{x}}(-t))$$

i. Le mouvement satisfait l'équation de mouvement: $\nexists \tau_d$

(Le mouvement d'une boule de billard avec une perte d'énergie négligeable est réversible)

ii. Le mouvement ne satisfait pas à l'équation de mouvement: $\exists \tau_d$

(Le glissement sur une surface avec frottement est irréversible)

• *Existe-t-il des systèmes sans flèche de temps causale ?*

(a) Mécanique classique: non

(b) Mécanique quantique:

- i. Les événements individuels sont non déterministes ($\nexists \tau_c$)
 - ii. Les moyens sont déterministes ($\exists \tau_c$)
- *La flèche causale et la flèche temporelle dynamique sont-elles identiques ?*
généralement oui, mais pas toujours
 - *Les interactions fondamentales sont (presque) invariants par rapport à l'inversion du temps.*

D'où viennent les flèches du temps dans un monde régi par des lois physiques invariantes à l'inversion du temps?

3. Quatre flèches du temps dynamiques:

(a) *Flèche du temps électromagnétique:*

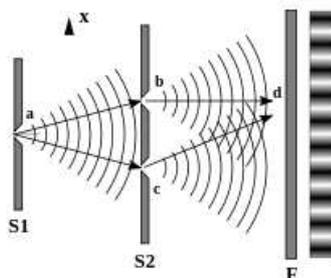
- i. Une personne entre dans une pièce sombre et allume la lumière.
- ii. On fait un enregistrement video de l'événement.
- iii. Lorsque l'enregistrement vidéo est regardé à rebours avec une très fine résolution temporelle, on remarque que la pièce devient sombre avant que la main de la personne n'atteigne l'interrupteur électrique. (champ de rayonnement retardé)

(b) *Flèche du temps mécanique ou thermodynamique:*

- i. Quelqu'un écrit sur une feuille de papier avec un stylo plume.
- ii. L'encre se diffuse dans le papier.
- iii. On fait un enregistrement video de l'événement.
- iv. En voyant cela à l'envers, on observe un phénomène bizarre et irréaliste : le stylo aspire l'encre du papier. (irréversibilité)

(c) *Flèche du temps quantique:*

- i. L'interférence dans la double fente de Young provient de la différence de phase de la fonction d'onde de particule lorsqu'elle traverse les deux fentes.



- ii. Lorsque nous contrôlons quelle fente est traversée par la particule, l'interférence disparaît. La phase de l'"autre" fente est perdue et ne peut être récupérée. (perte d'information à la transition quantique classique)

(d) *Flèche du temps cosmologique:*

- i. Le Big Bang, enregistré par un témoin extérieur.
- ii. Pas d'univers avant le Big Bang (conditions initiales cosmologiques)

4. Plan:

(a) *Analyse complexe ← fonction de Green*

(b) *Flèche du temps électromagnétique*

(c) *Flèche du temps mécanique*

II. ANALYSE COMPLEXE

A. Equations de Cauchy et Riemann

Dérivabilité: une fonction holomorphe

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Beaucoup plus que dans l'analyse réelle: l'indépendance de la phase de h

- $h = \eta, \eta \in \mathbb{R}$

$$f'(z) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{f(z+\eta) - f(z)}{\eta}$$

- $h = i\eta, \eta \in \mathbb{R}$

$$f'(z) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{f(z+i\eta) - f(z)}{i\eta}$$

$$\begin{aligned} \implies \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{f(z+\eta) - f(z)}{\eta} &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{f(z+i\eta) - f(z)}{i\eta}, \quad f = f_1 + if_2, \quad z = z_1 + iz_2 \\ \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{f_1(z+\eta) - f_1(z) + i[f_2(z+\eta) - f_2(z)]}{\eta} &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{f_1(z+i\eta) - f_1(z) + i[f_2(z+i\eta) - f_2(z)]}{i\eta} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z_1} + i \frac{\partial f_2}{\partial z_1} &= -i \frac{\partial f_1}{\partial z_2} + \frac{\partial f_2}{\partial z_2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial f_1}{\partial z_1} = \frac{\partial f_2}{\partial z_2}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z_1} = -\frac{\partial f_1}{\partial z_2}}$$

B. Théorème de Cauchy

1. Domaine sur le plan complexe: D

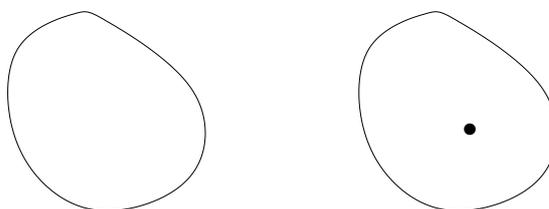
- Disque: $d_r(z) = \{u \in \mathbb{C} \mid \sqrt{(u-z)^*(u-z)} < r\}$

- Ouvert: $z \in D \implies \exists \epsilon > 0, d_\epsilon(z) \subset D$

(de se déplacer à proximité de n'importe quel point sans quitter le domaine)

- Simplement connexe: pas de trous

(toute boucle fermée continue peut être déformée en continu jusqu'à un point donné sans quitter le domaine)



(sans la frontière)

simplement connexe

non simplement connexe

2. **Théorème de Cauchy:** Si $f(z) : D \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe dans le domaine D , alors l'intégrale de $f(z)$ sur $\gamma(s) : [0, 1] \rightarrow D$ est égale à zéro,

$$\oint_{\gamma} dz f(z) = \int_0^1 ds \frac{d\gamma(s)}{ds} f(\gamma(s)) = 0$$

Preuve:

- *Théorème de Green:*

$$\oint_{\partial\Sigma} dx \mathbf{u} = \int_{\Sigma} ds \nabla \times \mathbf{u},$$

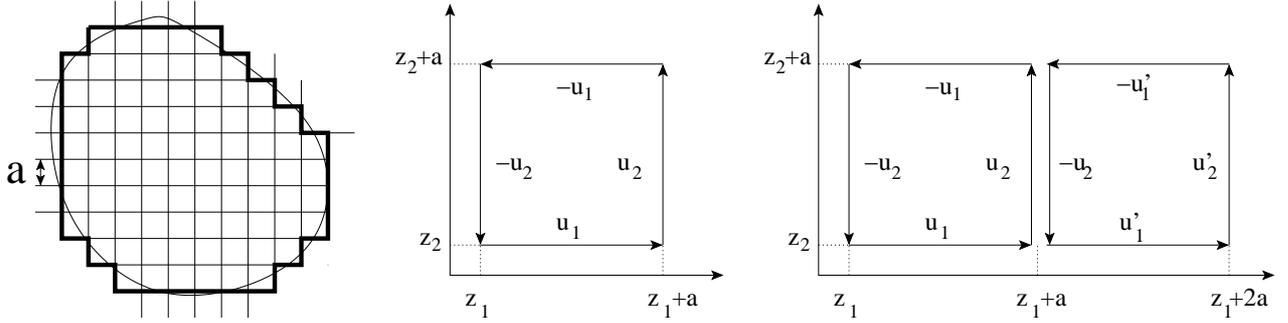
- *L'application du théorème de Green:*

$$D = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}(z_1, z_2, 0)\}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1, u_2, 0) \rightarrow \nabla \times \mathbf{u} = (0, 0, \frac{\partial u_2}{\partial z_1} - \frac{\partial u_1}{\partial z_2})$$

$$\oint_{\partial D} (dz_1 u_1 + dz_2 u_2) = \int_D dz_1 dz_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial z_1} - \frac{\partial u_1}{\partial z_2} \right)$$

Preuve:



(a) L'intégrale d'une boucle sur un carré infinitésimal:

$$\begin{aligned}
 \sum_{-\in \partial D} I_- &= \sum_{\square \in D} I_{\square} \\
 I_{\square} &= \int_{z_1}^{z_1+a} dz_1 \int_{z_2}^{z_2+a} dz_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial z_1} - \frac{\partial u_1}{\partial z_2} \right) \\
 &= \int_{z_2}^{z_2+a} dz_2 [u_2(z_1+a, z_2) - u_2(z_1, z_2)] - \int_{z_1}^{z_1+a} dz_1 [u_1(z_1, z_2+a) - u_1(z_1, z_2)] \\
 &= a[u_2(z_1+a, z_2) - u_2(z_1, z_2) - u_1(z_1, z_2+a) + u_1(z_1, z_2)] + \mathcal{O}(a^2)
 \end{aligned}$$

(b) L'annulation de lignes internes:

$$\sum_{-\in \partial D} I_- = \sum_{\square \in D} I_{\square}$$

s'il n'y a pas de trou

• L'intégrale de boucle:

$$\begin{aligned}
 I &= \oint_{\gamma} dz f(z) \\
 &= \oint (dz_1 + idz_2)(f_1 + if_2) \\
 &= \oint (dz_1 f_1 - dz_2 f_2) + i \oint (dz_1 f_2 + dz_2 f_1)
 \end{aligned}$$

- $\text{Re}I$: $u_1 = f_1, u_2 = -f_2$

$$\begin{aligned}
 \text{Re} \left[\oint_{\partial D} dz f(z) \right] &= \oint_{\partial D} (dz_1 u_1 + dz_2 u_2) = \int_D dz_1 dz_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial z_1} - \frac{\partial u_1}{\partial z_2} \right) \\
 &= - \int_D dz_1 dz_2 \left(\frac{\partial f_2}{\partial z_1} + \frac{\partial f_1}{\partial z_2} \right) = 0 \quad \leftarrow \text{Cauchy - Riemann}
 \end{aligned}$$

- $\text{Im}I$: $u_1 = f_2, u_2 = f_1$

$$\begin{aligned}
 \text{Im} \left[\oint_{\partial D} dz f(z) \right] &= \oint_{\partial D} (dz_1 u_1 + dz_2 u_2) = \int_D dz_1 dz_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial z_1} - \frac{\partial u_1}{\partial z_2} \right) \\
 &= \int_D dz_1 dz_2 \left(\frac{\partial f_1}{\partial z_1} - \frac{\partial f_2}{\partial z_2} \right) = 0 \quad \leftarrow \text{Cauchy - Riemann}
 \end{aligned}$$

3. L'utilisation du théorème de Cauchy:

(a) Invariance des intégrales de contour complexes:

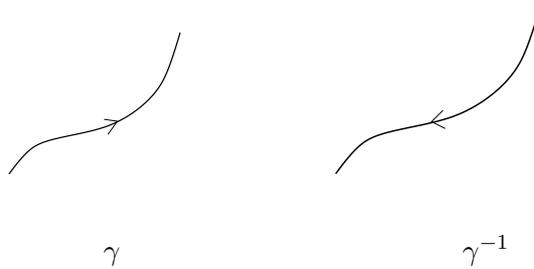
L'intégrale

$$I_\gamma = \int_\gamma dz f(z)$$

reste inchangée lorsque le contour de l'intégration est déformé sans franchir les singularités.

Preuve:

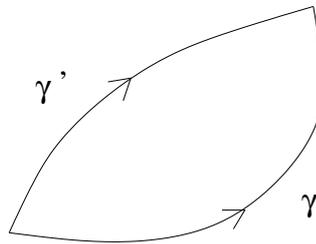
i. $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma^{-1}(s) = \gamma(1 - s)$



ii. $I_{\gamma^{-1}} = -I_\gamma$.

iii. γ, γ' :

- $\gamma(0) = \gamma'(0)$, $\gamma(1) = \gamma'(1)$
- γ' et γ encerclent un domaine holomorphe, simplement connexe.



- Théorème de Cauchy:

$$I_\gamma + I_{\gamma'^{-1}} = I_\gamma - I_{\gamma'} = 0$$

(b) Si une fonction est holomorphe dans un domaine ouvert et simplement connexe alors elle est

i. infiniment différentiable et

ii. analytique, c'est-à-dire qu'elle peut être représentée par une série de puissances absolument et uniformément convergentes

$$f(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N f_n(z - z_0)^n$$

dans le rayon de convergence de la série $z, z_0 \in D$, $|z - z_0| < r$.

Définition:

i. La série converge $\sum_n f_n(z)$ vers $f(z)$ à z si

$$\epsilon > 0, \exists N, \left| f(z) - \sum_{n \leq N} f_n(z) \right| < \epsilon.$$

ii. La convergence de la série $\sum_n f_n(z)$ est absolue si la série $\sum_n |f_n(z)|$ converge,

$$\exists f_a(z), \forall z, \forall \epsilon > 0, \exists N, \left| f_a(z) - \sum_{n \leq N} |f_n(z)| \right| < \epsilon.$$

iii. La convergence de la série $\sum_n f_n(x)$ est uniforme si la série converge de manière uniforme,

$$\exists f_a(z), \forall \epsilon > 0, \exists N, \forall z, \left| f_a(z) - \sum_{n \leq N} f_n(z) \right| < \epsilon.$$

La convergence absolue et uniforme nous permet d'échanger l'ordre de la limite et l'intégration et la différenciation.

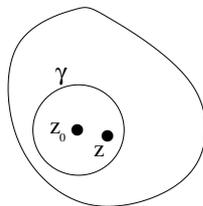
Preuve:

- Lemme: Représentation de $f(z)$ par une intégrale de contour, $z \in D$, $\gamma(\alpha) = z + r(\alpha)e^{i\alpha} \rightarrow z + \epsilon e^{i\alpha}$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} du \frac{f(u)}{u-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{d\gamma}{d\alpha} \frac{f(z + \epsilon e^{i\alpha})}{\epsilon e^{i\alpha}} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} d\alpha i \epsilon e^{i\alpha} \frac{f(z + \epsilon e^{i\alpha})}{\epsilon e^{i\alpha}} \rightarrow f(z)$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} du \frac{f(u)}{u-z}$$

- Théorème de Cauchy: $\forall \gamma \subset D$



$$\frac{1}{u-z} = \frac{1}{u-z_0 - (z-z_0)} = \frac{1}{u-z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{u-z_0}}, \quad \left| \frac{z-z_0}{u-z_0} \right| = \frac{|z-z_0|}{|u-z_0|} < 1$$

$$= \frac{1}{u-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{u-z_0} \right)^n \quad \leftarrow \text{convergence absolue et uniforme}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} du \frac{f(u)}{u-z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \oint_{\gamma} du \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}$$

$$\frac{f^n(z)}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} du \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}$$

C. Théorème du résidu

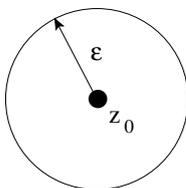
1. Définition du résidu:

$$Res f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

si la limite existe

2. Exemple:

- *Pôle d'ordre k*: Soit la fonction $f(z)$ est holomorphe dans $d_\epsilon(z_0) \setminus z_0$. Le z_0 est un pôle d'ordre k si $(z - z_0)^k f(z)$ est holomorphe dans $d_\epsilon(z_0)$.



Exemple: $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}$, où $g(z)$ est holomorphe dans $d_\epsilon(z_0)$.

- *Résidu*: Soit z_0 un pôle d'ordre k de $f(z)$. Alors le résidu à z_0 est

$$Res f(z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)] \quad (0! = 1)$$

Preuve:

$$g(z) = (z - z_0)^k f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{g^{(m)}}{m!} (z - z_0)^m$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z)}{(z - z_0)^{k-1}} = \frac{g^{(k-1)}}{(k-1)!} \quad \text{si la limite existe}$$

- #### 3. Théorème du résidu:
- Si $f(z)$ est holomorphe sur un domaine simplement connexe, D , sauf à un ensemble fini de points discrets, $\{z_1, \dots, z_N\}$ alors

$$\oint_{\gamma} dz f(z) = 2\pi i \sum_{n=1}^N \nu_{\gamma}(z_n) Res f(z_n),$$

où

$$\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} dz' \frac{1}{z' - z},$$

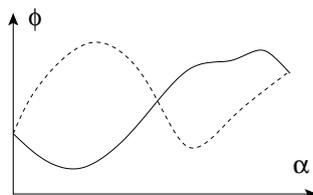
est l'indice (le numéro de tours), le nombre de fois où γ se déplace dans le sens contraire des aiguilles d'une montre autour de z .

- *L'indice*: $\gamma(\alpha) = z + r(\alpha)e^{i\phi(\alpha)}$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $r(2\pi) = r(0)$, $\phi(2\pi) = \phi(0) + 2\pi n$

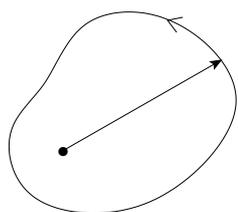
– Valeur:

$$\begin{aligned}
 \nu(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{\left(\frac{dr}{d\alpha} + ir \frac{d\phi}{d\alpha}\right) e^{i\phi}}{r e^{i\phi}} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \underbrace{d\alpha \frac{d \ln r(\alpha)}{d\alpha}}_{r(2\pi) - r(0) = 0} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{d\alpha \frac{d\phi}{d\alpha}}_{\phi(2\pi) - \phi(0) = n} \\
 &= n
 \end{aligned}$$

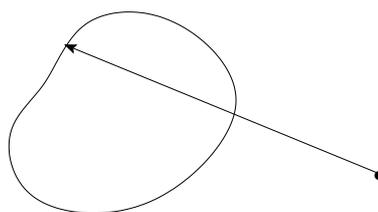
– Une quantité topologique qui reste invariante sous la déformation continue de γ .



– $\nu_\gamma(z) = 0$ en dehors de $\gamma \implies$ la sommation est sur les singularités encerclées par la boucle uniquement

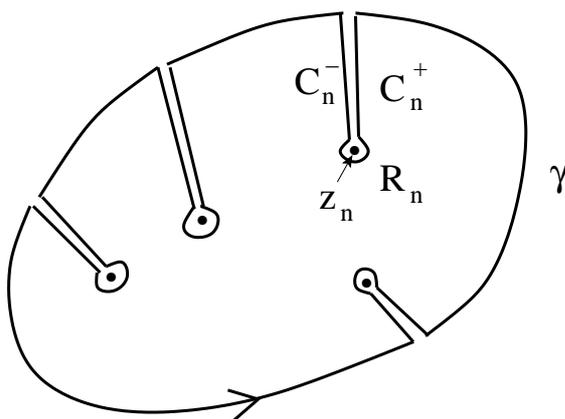


$n = 1$



$n = 0$

• *Preuve:* Théorème du Cauchy:



$$\begin{aligned}
0 &= \oint_{\gamma} dz f(z) + \sum_n \left[C_n^+ - \oint_{R_n} dz f(z) + C_n^- \right] \\
z &= z_n + \epsilon e^{i\alpha}, \quad dz = i d\alpha \epsilon e^{i\alpha} = i d\alpha (z - z_n) \\
\oint_{\gamma} dz f(z) &= i \sum_n \int_0^{2\pi} d\alpha (z - z_n) f(z) \\
&\rightarrow 2\pi i \sum_{n=1}^N \nu_{\gamma}(z_n) \text{Res} f(z_n)
\end{aligned}$$

III. FONCTIONS DE GREEN

1. Définition et l'usage:

- *Oscillateur harmonique:*

$$\begin{aligned}
m\ddot{x}(t) &= -m\omega_0^2 x(t) - j(t) \\
L(\partial_t) &= -m(\partial_t^2 - \omega_0^2) \\
L(\partial_t)x(t) &= j(t)
\end{aligned}$$

- *Définition:*

$$\begin{aligned}
L(\partial_t)x(t) &= j(t) \\
L(\partial_t)G(t, t') &= \delta(t - t')
\end{aligned}$$

- *Invariance sous les translations temporelles:*

$$G(t, t') = G(t - t')$$

- *L'usage formel:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{1} &= LG = GL \quad \leftarrow \quad \times f(t) \\
\int dt' \delta(t - t') f(t') &= \int dt' L(\partial_t)G(t, t') f(t') = \int dt' G(t - t') L(\partial_{t'}) f(t') \\
f(t) &= \int dt' L(\partial_t)G(t, t') f(t') = \int dt' L(\partial_t)G(t - t') f(t') \\
Lx = j &\implies x = L^{-1}j = Gj
\end{aligned}$$

- *Solution formelle:*

$$x(t) = \int dt' G(t - t') j(t')$$

- *L'espace nul: $N_L = \{f(t) | L(\partial_t)f(t) = 0\} \neq \emptyset \implies \nexists L^{-1}$*

- *Solution: $x(t) = x_h(t) + x_{ih}(t)$, $x_h L = 0$, $L x_{ih} = j$*

↗

conditions auxiliaires

2. La transformation de Fourier:

- *Le théorème de Fourier:*

$$\tilde{f}(\omega) = \int dt e^{i\omega t} f(t), \quad f(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{f}(\omega)$$

Preuve:

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{\pm ikx}$$

$$f(t) = \mathbb{1} f(t) = \int dt' \delta(t-t') f(t') = \int \frac{d\omega}{2\pi} dt' e^{-i\omega(t-t')} f(t') = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{f}(\omega)$$

$$\tilde{f}(\omega) = \mathbb{1} \tilde{f}(\omega) = \int \frac{dt'}{2\pi} d\omega' e^{i(\omega-\omega')t'} \tilde{f}(\omega') = \int dt e^{i\omega t} f(t)$$

- *La solution de l'équation du mouvement dans l'espace de Fourier:*

$$x(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{x}(\omega), \quad G(t, t') = G(t-t') = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \tilde{G}(\omega)$$

$$x(t) = \int dt' G(t-t') j(t')$$

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{x}(\omega) = \int dt' \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega'}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')-i\omega't} \tilde{G}(\omega) \tilde{j}(\omega') = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega'}{2\pi} \underbrace{\int dt' e^{i(\omega-\omega')t'}}_{2\pi\delta(\omega-\omega')} e^{-i\omega t} \tilde{G}(\omega) \tilde{j}(\omega')$$

$$= \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{G}(\omega) \tilde{j}(\omega) \implies \boxed{\tilde{x}(\omega) = \tilde{G}(\omega) \tilde{j}(\omega) = \frac{1}{L(-i\omega)} \tilde{j}(\omega)}$$

↗

$$GL = \mathbb{1}, \quad \partial_t e^{-i\omega t} = -i\omega e^{-i\omega t}, \quad L(\partial_t) e^{-i\omega t} \rightarrow L(-i\omega) e^{-i\omega t}$$

3. Oscillateur harmonique:

- *L'équation de mouvement:*

$$m\ddot{x}(t) + m\omega_0^2 x(t) = -j(t)$$

$$x(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{x}(\omega)$$

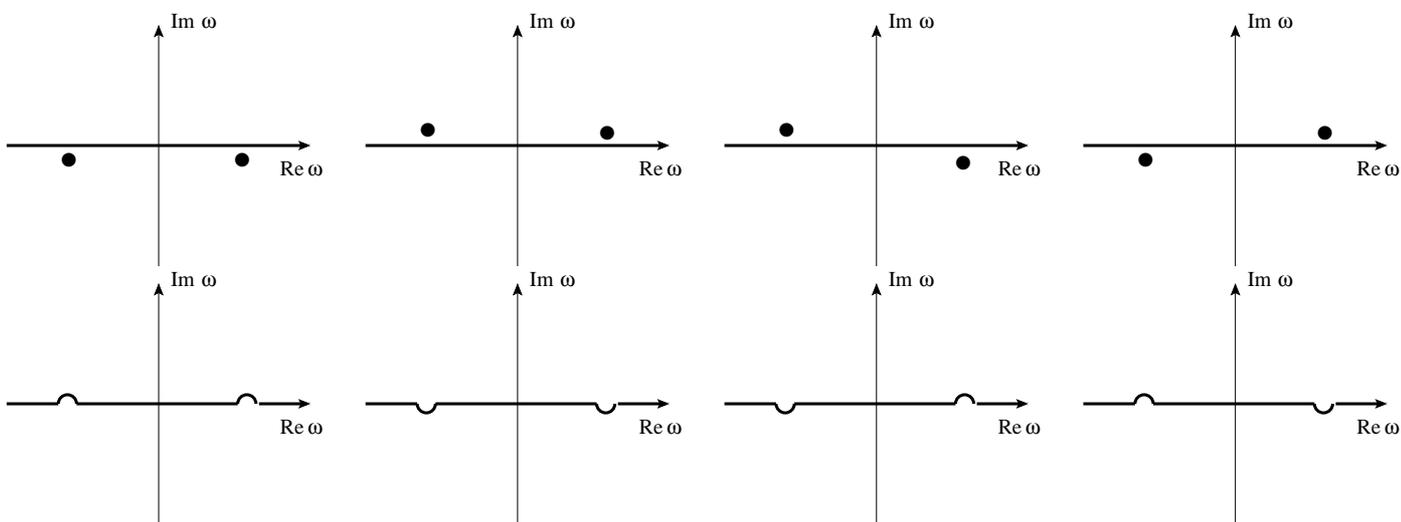
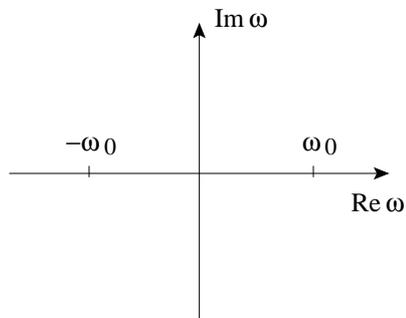
$$-m \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} (\omega^2 - \omega_0^2) \tilde{x}(\omega) = - \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{j}(\omega)$$

$$m(\omega^2 - \omega_0^2) \tilde{x}(\omega) = \tilde{j}(\omega)$$

$$\boxed{\tilde{G}(\omega) = \frac{1}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}}$$

- *Traitement de l'espace nul:*

$$x(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{\tilde{j}(\omega)}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{\tilde{j}(\omega)}{m(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}$$



Retardée

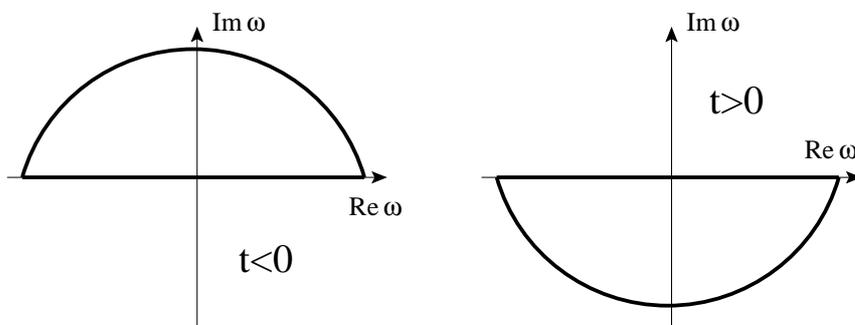
Avancée

Feynman

Feynman*

- *Intégrale de Fourier:*

Libre choix pour fermer la boucle



$$D_{\sigma\sigma'}(t) = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{m[(\omega - \omega_0 - i\sigma\epsilon)(\omega + \omega_0 - i\sigma'\epsilon)]}$$

$$D_{--\sigma\sigma'}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{m[(\omega - \omega_0 + i\epsilon)(\omega + \omega_0 + i\epsilon)]} = -\Theta(t) \frac{i}{2m\omega_0} (e^{-i\omega_0 t} - e^{i\omega_0 t})$$

$$G_{++}(t) = i\Theta(-t) \frac{e^{-i\omega_0 t} - e^{i\omega_0 t}}{2m\omega_0} e^{\epsilon t} = \Theta(-t) \frac{\sin \omega_0 t}{m\omega_0} e^{\epsilon t} = G^a(t)$$

$$G_{+-}(t) = i \frac{\Theta(t)e^{i\omega_0 t} + \Theta(-t)e^{-i\omega_0 t}}{2m\omega_0} e^{-\epsilon|t|} = i \frac{e^{i\omega_0|t|}}{2m\omega_0} e^{-\epsilon|t|} = G_F^*(t)$$

$$G_{-+}(t) = -i \frac{\Theta(t)e^{-i\omega_0 t} + \Theta(-t)e^{i\omega_0 t}}{2m\omega_0} e^{-\epsilon t} = -i \frac{e^{-i\omega_0|t|}}{2m\omega_0} e^{-\epsilon|t|} = G_F(t)$$

$$G_{--}(t) = -i\Theta(t) \frac{e^{-i\omega_0 t} - e^{i\omega_0 t}}{2m\omega_0} e^{-\epsilon t} = -\Theta(t) \frac{\sin \omega_0 t}{m\omega_0} e^{-\epsilon t} = G^r(t)$$

- *Conditions auxiliaires*: $j(t) \neq 0$ pour $t_i < t < t_f$

- (a) Conditions initiales: $x(t_i) = x_i, \dot{x}(t_i) = v_i$

$$x_h(t) = a(x_i, v_i) \cos \omega_0 t + b(x_i, v_i) \sin \omega_0 t$$

$$x_{ih}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G^r(t-t') j(t') \quad \leftarrow \quad x_{ih}(t_i) = 0, \quad \dot{x}_{ih}(t_i) = 0$$

- (b) Conditions finales: $x(t_f) = x_f, \dot{x}(t_f) = v_f$

$$x_h(t) = a(x_f, v_f) \cos \omega_0 t + b(x_f, v_f) \sin \omega_0 t$$

$$x_{ih}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G^a(t-t') j(t') \quad \leftarrow \quad x_{ih}(t_f) = 0, \quad \dot{x}_{ih}(t_f) = 0$$

- (c) Inversion du temps: $t \rightarrow -t, L(\partial_t) \rightarrow L(-\partial_t) = L(\partial_t)$ mais $G^a \rightarrow G^r$

L'équation de mouvement est symétrique mais sa solution brise la symétrie d'inversion du temps en raison des conditions auxiliaires
 \implies **flèche de temps causale mécanique**

IV. ELECTROMAGNETISME

1. Champ électrique et magnétique:

Les équations de Maxwell:

$$4\pi\rho = \nabla \cdot \mathbf{E}, \quad \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = -\partial_{ct} \mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{B}$$

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{B}, \quad 0 = \partial_{ct} \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E}$$

2. Vecteur potentiel: Unification des champs électriques et magnétiques

(a) Lemme:

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{v} = 0 &\implies \exists \mathbf{u}, \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{u} \\ \nabla \times \mathbf{v} = 0 &\implies \exists s, \mathbf{v} = \nabla s\end{aligned}$$

(b) Les équations de Maxwell:

$$\begin{aligned}0 &= \nabla B \implies \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \text{loi de Faraday : } 0 &= \nabla \times (\mathbf{E} + \partial_{ct}\mathbf{A}) \implies \mathbf{E} + \partial_{ct}\mathbf{A} = -\nabla\phi\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_{ct}\mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}}$$

3. Symétrie de jauge: une redondance

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \phi + \partial_{ct}\chi, \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} - \nabla\chi \\ \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \partial_{ct}\mathbf{A} \rightarrow -\nabla\phi - \nabla\partial_{ct}\chi - \partial_{ct}\mathbf{A} + \partial_{ct}\nabla\chi = \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \rightarrow \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \times \nabla\chi = \mathbf{B}\end{aligned}$$

4. Jauge de Lorentz:

$$\partial_{ct}\phi + \nabla\mathbf{A} = 0$$

5. Produit vectoriel:

$$\text{Levi Civita : } \epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki}, \quad \epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} \implies 1 = \epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = -\epsilon_{132} = -\epsilon_{213} = -\epsilon_{321}, \quad 0 = \epsilon_{jjk}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_k &= \sum_{ij} \epsilon_{ijk} a_i b_j \\ (\nabla \times \nabla)_k &= \sum_{ij} \epsilon_{ijk} \nabla_i \nabla_j = 0 \quad \leftarrow \quad \nabla_i \nabla_j \chi = \nabla_j \nabla_i \chi \\ (\nabla \times \nabla \times \mathbf{u})_k &= \sum_{ij} \epsilon_{ij} \nabla_i (\nabla \times \mathbf{u})_j \\ &= \sum_{ij} \epsilon_{ijk} \nabla_i \sum_{lm} \epsilon_{lmj} \nabla_l u_m \\ \sum_j \epsilon_{ikj} \epsilon_{lmj} &= \sum_{iklm} (\delta_{il} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kl}) = \delta_{il} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kl} = -\sum_j \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmj} \\ (\nabla \times \nabla \times \mathbf{u})_k &= \sum_{ijlm} (\delta_{im} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{km}) \nabla_i \nabla_l u_m = [\nabla(\nabla \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u}]_k \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} &= \nabla(\nabla \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u}\end{aligned}$$

6. Équations de Maxwell inhomogènes: $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_{ct}\mathbf{A}$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

$$\begin{aligned} 4\pi\rho &= \nabla\mathbf{E} = -\nabla(\nabla\phi + \partial_{ct}\mathbf{A}) = (\partial_{ct}^2 - \Delta)\phi = \square\phi, \\ \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} &= -\partial_{ct}\mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{B} = \partial_{ct}(\nabla\phi + \partial_{ct}\mathbf{A}) + \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \\ &= -\nabla(\nabla\mathbf{A}) + \partial_{ct}^2\mathbf{A} + \nabla(\nabla\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} = (\partial_{ct}^2 - \Delta)\mathbf{A} = \square\mathbf{A} \end{aligned}$$

7. Formulaire relativiste: $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$, $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

8. Fonction de Green:

- *Fonction de Green scalaire:*

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= \frac{4\pi}{c} \int dx' D^\mu{}_\nu(x-x') j^\nu(x') \\ D^\mu{}_\nu(x-x') &= \delta^\mu_\nu D(x-x') \\ \square\phi &= j \\ \phi(x) &= \int dx' D(x-x') j(x') \end{aligned}$$

- *Transformation de Fourier:*

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iqx} \tilde{\phi}(q) \\ D(x-x') &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x-x')} \tilde{D}(q) \\ - \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iqx} q^2 \tilde{\phi}(q) &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iqx} \tilde{j}(q) \\ \tilde{\phi}(q) &= -\frac{\tilde{j}(q)}{q^2} \implies \tilde{D}(q) = -\frac{1}{q^2} \end{aligned}$$

- *Fonction de Green retardée:*

$$\begin{aligned}
D^r(x) &= - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ick_0t}}{(k_0 + i\epsilon - |\mathbf{k}|)(k_0 + i\epsilon + |\mathbf{k}|)} \\
&= i\Theta(t) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \left(\frac{e^{-ickt}}{2k} - \frac{e^{ickt}}{2k} \right) \\
&= \frac{i\Theta(t)}{(2\pi)^3} \int dk k^2 d\phi d(\cos\theta) e^{ikr \cos\theta} \frac{e^{-ickt} - e^{ickt}}{2k} \\
&= \frac{i\Theta(t)}{(2\pi)^2} \int dk k^2 \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr} \frac{e^{-ickt} - e^{ickt}}{2k} \\
&= \frac{\Theta(t)}{2(2\pi)^2 r} \int_0^\infty dk (e^{ikr} - e^{-ikr})(e^{-ickt} - e^{ickt}) \\
&= \frac{\Theta(t)}{8\pi r} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{2\pi} (e^{ik(r-ct)} + e^{ik(-r+ct)} - e^{-ik(r+ct)} - e^{ik(r+ct)}) \\
&= \frac{\Theta(t)}{4\pi r} [\delta(-r+ct) - \delta(r+ct)] \\
&= \frac{\delta(ct-r)}{4\pi r}.
\end{aligned}$$

- *Fonction de Green avancée:*

$$\begin{aligned}
D^a(x) &= - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ick_0t}}{(k_0 - i\epsilon - |\mathbf{k}|)(k_0 - i\epsilon + |\mathbf{k}|)} \\
&= i\Theta(-t) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \left(\frac{e^{ickt}}{2k} - \frac{e^{-ickt}}{2k} \right) \\
&= \Theta(-t) \frac{\delta(r+ct) - \delta(-r+ct)}{4\pi r} \\
&= \frac{\delta(ct+r)}{4\pi r}.
\end{aligned}$$

- *Résumé:*

$$\begin{aligned}
D^{\bar{a}}(x) &= \Theta(\pm t) \frac{\delta(ct \mp r)}{4\pi r} \\
&= \Theta(\pm t) \frac{\delta(ct+r) + \delta(ct-r)}{4\pi r} \\
&= \Theta(\pm t) \frac{\delta(c^2t^2 - r^2)}{2\pi} \\
&= \Theta(\pm x^0) \frac{\delta(x^2)}{2\pi}.
\end{aligned}$$

- *Fonctions de Green proches et lointaines:*

$$\begin{aligned}
D^a(x-y) &= D^r(y-x) = D^{r\text{tr}}(x-y) \\
D^n &= \frac{1}{2}(D^r + D^a) = \frac{1}{2}(D^r + D^{r\text{tr}}) \quad \leftarrow \text{partie symétrique, } \mathbf{E}^n(\mathbf{v}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \\
D^f &= \frac{1}{2}(D^r - D^a) = \frac{1}{2}(D^r - D^{r\text{tr}}) \quad \leftarrow \text{partie antisymétrique, } \mathbf{E}^f(\mathbf{v}, \mathbf{a}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \\
D^{\bar{a}} &= D^n \pm D^f, \quad D^n = D^{n\text{tr}}, \quad D^f = -D^{f\text{tr}}
\end{aligned}$$

9. Potentiel de Lienard-Weichert:

- *Dirac-delta:*

$$\int dx \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0)$$

$$\int dx \delta(h(x)) f(x) = \int dh \left| \frac{dx}{dh} \right| \delta(h) f(x(h)) = \sum_{x'} \frac{f(x')}{|h'(x')|}, \quad h(x') = 0$$

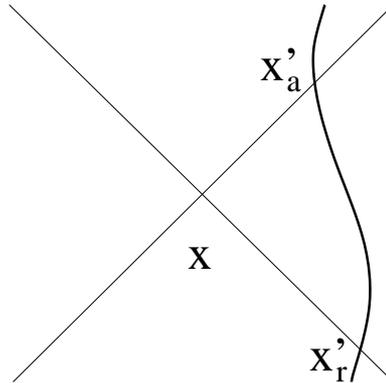
- *Courant électrique:*

$$\begin{aligned} j^\mu(x) &= ec \int ds \delta(x - x(s)) \dot{x}^\mu \\ &= ec \int ds \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(s)) \delta(x^0 - x_a^0(s)) \dot{x}^\mu \\ &= ec \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(s)) \frac{\dot{x}^\mu}{|\dot{x}^0|} \\ &= e \underbrace{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(s))}_{\rho(\mathbf{x})} \frac{dx^\mu}{dt} \\ &= (c\rho, \mathbf{j}) = (c\rho, \rho\mathbf{v}) = \rho \frac{ds}{dt} \dot{x}^\mu \end{aligned}$$

- *Conservation du courant:*

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu &= \partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} \\ &= \sum_a [-\mathbf{v}_a(t) \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a(t)) + \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a(t)) \mathbf{v}_a(t)] = 0 \end{aligned}$$

- *Champ d'une charge ponctuelle:*



$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= \frac{4\pi}{c} \int dx' \delta_\nu^\mu D(x - x') j^\nu(x') \\ D^{\bar{a}}(x) &= \Theta(\pm t) \frac{\delta(ct \mp r)}{4\pi r} \\ A_{ih}^\mu(x) &= \frac{1}{c} \int d^4y \frac{\delta(x^0 - y^0 \mp |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} j^\mu(y) \\ &= \frac{1}{c} \int d^3y \frac{j^\mu(x^0 \mp |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \end{aligned}$$

- *Champ de rayonnement:* $A_f(\mp\infty, \mathbf{x}) = A_f(\mathbf{x})$

$$A(x) = \frac{4\pi}{c} \int dy D^r(x, y) j(y) + A_f(x) = \frac{4\pi}{c} \int dy [D^n(x, y) \pm D^f(x, y)] j(y) + A_f(x)$$

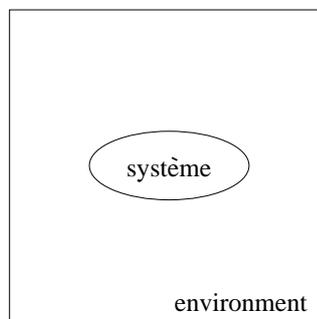
$$A_{ray} = A_f - A_i = \frac{8\pi}{c} \int dy D^f(x, y) j(y) = 2A^f$$

La flèche du temps causale est générée par les conditions auxiliaires

10. Origine de la flèche du temps (conditions auxiliaires)

- (a) Notre expérience quotidienne montre de façon convaincante que la solution retardée doit être utilisée et qu'un problème de condition initiale doit être résolu.
- (b) Origine physique:
- Les conditions finales du champ électromagnétique sont manifestement inconnues
 - Les conditions initiales triviales, $A_i = \partial_t A_i = 0$, supposées valables dans un passé lointain.
- (c) Origine cosmologique : la faiblesse du rayonnement de fond diffus cosmologique.

V. SYSTÈMES OUVERTS



- *La base de*
 1. la mécanique statistique,
 2. l'émergence du monde classique à partir de la mécanique quantique.
- *Difficultés:*
 1. l'équation du mouvement ouverte ("effective equation of motion") est non locale dans le temps,
 2. les lois de conservation sont perdues.
- *Interactions avec l'environnement:*

1. toujours importantes après un temps suffisamment long,
2. génèrent la flèche du temps du système

- *Dynamique ouverte ("Effective dynamics"):*

1. l'équation du mouvement fermée pour le système (x) et l'environnement (y):

$$\ddot{x}(t) = F(x(t), y(t)), \quad \ddot{y}(t) = G(x(t), y(t)),$$

2. conditions auxiliaires:

$$x(t_a) = x_a, \quad \dot{x}(t_a) = v_a, \quad y(t_a) = y_a, \quad \dot{y}(t_a) = u_a.$$

3. l'équation du mouvement ouverte:

- (a) résoudre l'équation de mouvement de $y(t)$ pour une trajectoire arbitraire $x(t)$: $y[t, x, y_a, u_a, t_a]$
- (b) insérer la solution dans l'équation de mouvement de x

$$\ddot{x}(t) = F(x(t), y[t, x, y_a, u_a, t_a])$$

4. *Les symétries brisées par (les conditions auxiliaires de) l'environnement:*

- (a) translation dans le temps
- (b) l'inversion du temps

La flèche du temps est générée par les conditions auxiliaires de l'environnement

1. **Modèle harmonique** une particule (système observé), couplés à N oscillateurs harmoniques (environnement)

- *Lagrangien: $L = T - U$*

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m\omega_0^2}{2} x^2 - jx + \sum_n \left(\frac{m}{2} \dot{y}_n^2 - \frac{m\omega_n^2}{2} y_n^2 - g_n x y_n \right) \\ &= \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \underbrace{\left(\frac{m\omega_0^2}{2} - \sum_n \frac{g_n^2}{2m\omega_n^2} \right)}_{>0} x^2 - jx + \sum_n \left[\frac{m}{2} \dot{y}_n^2 - \frac{m\omega_n^2}{2} \left(y_n + \frac{g_n x}{m\omega_n^2} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

- *Les conditions auxiliaires: $\sigma_s, \sigma_e = \begin{cases} 1 & \text{conditions initiales} \\ -1 & \text{conditions finales} \end{cases}$*

$$x(-\sigma_s \infty) = \dot{x}(-\sigma_s \infty) = 0$$

$$y_n(-\sigma_e \infty) = \dot{y}_n(-\sigma_e \infty) = 0$$

- L'équation de mouvement de l'environnement: $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_n &= -m\omega_n^2 y_n - g_n x \\ f(t) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{f}(\omega) \\ m\omega^2 \tilde{y}_n(\omega) &= m\omega_n^2 \tilde{y}_n(\omega) + g_n \tilde{x}(\omega) \\ \tilde{y}_n(\omega) &= \frac{g_n \tilde{x}(\omega)}{m(\omega - \omega_n^2)} \rightarrow \frac{g_n \tilde{x}(\omega)}{m[(\omega + i\sigma_s \epsilon)^2 - \omega_n^2]} = \tilde{G}_n(\omega) g_n \tilde{x}(\omega) \end{aligned}$$

- Fonction de Green de l'environnement:

$$\tilde{G}_n(\omega) = \frac{1}{m[(\omega + i\sigma_s \epsilon)^2 - \omega_n^2]}$$

- L'équation du mouvement ouverte:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -m\omega_0^2 x - g_n y_n - j \\ \tilde{j}(\omega) &= m(\omega - \omega_0^2) \tilde{x}(\omega) - g_n \tilde{y}_n(\omega) \\ &\rightarrow m[(\omega + i\sigma_s \epsilon)^2 - \omega_0^2] \tilde{x}(\omega) - g_n \tilde{y}_n(\omega) \\ &= m[(\omega + i\sigma_s \epsilon)^2 - \omega_0^2] \tilde{x}(\omega) - \frac{g_n^2 \tilde{x}(\omega)}{m[(\omega + i\sigma_s \epsilon)^2 - \omega_n^2]} \\ &= \{m[(\omega + i\sigma_s \epsilon)^2 - \omega_0^2] - \tilde{\Sigma}(\omega)\} \tilde{x}(\omega) = \tilde{G}_{eff}^{-1} \tilde{x}(\omega) \\ \tilde{x}(\omega) &= \tilde{G}_{eff} \tilde{j}(\omega) \end{aligned}$$

- Fonction de Green ouverte:

$$\tilde{G}_{eff}(\omega) = \frac{1}{m[(\omega + i\sigma_s \epsilon)^2 - \omega_0^2] - \tilde{\Sigma}(\omega)}$$

- Energie propre:

$$\tilde{\Sigma}(\omega) = \sum_n g_n^2 G_n(\omega) = \sum_n \frac{g_n^2}{m} \frac{1}{(\omega + i\sigma_s \epsilon)^2 - \omega_n^2}$$

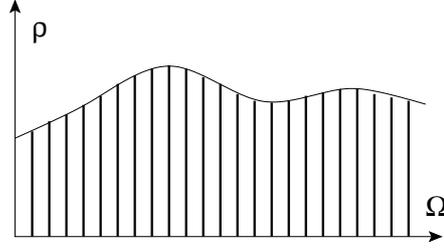
- L'équation du mouvement ouverte:

$$\tilde{G}_{eff}^{-1} \tilde{x}(\omega) = m \left[(\omega + i\sigma_s \epsilon)^2 - \omega_0^2 - \sum_n \frac{g_n^2}{m} \frac{1}{(\omega + i\sigma_s \epsilon)^2 - \omega_n^2} \right] \tilde{x}(\omega) = \tilde{j}(\omega),$$

Non local dans le temps: $\partial_t e^{-i\omega t} = -i\omega t e^{-i\omega t}$, $\omega \sim i\partial_t$

$$m\ddot{x}(t) = -m\omega_0^2 x(t) + \sum_n \frac{g_n^2}{\partial_t^2 + \omega_n^2} x(t) - j(t)$$

2. La fonction spectrale:



(a) *sum* \implies *intégrale*:

$$\rho(\Omega) = \sum_n \frac{g_n^2}{2m\omega_n} \delta(\omega_n - \Omega)$$

$$\tilde{\Sigma}(\omega) = \sum_n \frac{g_n^2}{m} \frac{1}{(\omega + i\sigma_e\epsilon)^2 - \omega_n^2} = \int d\Omega \sum_n \frac{g_n^2}{m} \delta(\omega_n - \Omega) \frac{1}{(\omega + i\sigma_e\epsilon)^2 - \omega_n^2} = \int d\Omega \frac{2\rho(\Omega)\Omega}{(\omega + i\sigma_e\epsilon)^2 - \Omega^2}$$

(b) *La forme phénoménologique de Drude*:

$$\begin{aligned} \rho(\Omega) &= \Theta(\Omega) \frac{g^2 \Omega}{m\Omega_D(\Omega_D^2 + \Omega^2)} \quad \leftarrow \text{form de Drude} \\ \tilde{\Sigma}(\omega) &= \frac{g^2}{m\Omega_D} \int d\Omega \Theta(\Omega) \frac{\Omega}{\Omega_D^2 + \Omega^2} \frac{2\Omega}{(\omega + i\sigma_e\epsilon)^2 - \Omega^2} \\ &= -\frac{g^2}{m\Omega_D} \int d\Omega \frac{\Omega^2}{(\Omega + i\Omega_D)(\Omega - i\Omega_D)(\Omega - \omega - i\sigma_e\epsilon)(\Omega + \omega + i\sigma_e\epsilon)} \\ &= -\frac{g^2}{m\Omega_D} 2\pi i \left[\frac{\Omega_D^2}{2i\Omega_D(\omega^2 + \Omega_D^2)} + \sigma_e \frac{\omega^2}{(\omega^2 + \Omega_D^2)2(\omega + i\epsilon_e)} \right] \\ &= -\frac{g^2 \pi}{m\Omega_D} \frac{\Omega_D + i\sigma_e\omega}{\omega^2 + \Omega_D^2} = -\frac{\pi g^2}{m\Omega_D(\Omega_D - i\sigma_e\omega)} \\ \tilde{G}_{eff}(\omega) &= \frac{1}{m[(\omega + i\sigma_s\epsilon)^2 - \omega_0^2] + \frac{\pi g^2}{m\Omega_D(\Omega_D - i\sigma_e\omega)}} \\ &= \frac{1}{m(\omega^2 - \omega_0^2) + \frac{\pi g^2}{m\Omega_D(\Omega_D - i\sigma_e\omega)}} \end{aligned}$$

(c) *L'équation du mouvement ouverte*:

$$\begin{aligned} m \left[\omega^2 - \omega_0^2 + \frac{\pi g^2}{m^2 \Omega_D (\Omega_D - i\sigma_e \omega)} \right] \tilde{x}(\omega) &= \tilde{j}(\omega) \\ \frac{\pi g^2}{m^2 \Omega_D^2 (1 - i\sigma_e \frac{\omega}{\Omega_D})} &\approx \frac{\pi g^2}{m^2 \Omega_D^2} \left(1 + i\sigma_e \frac{\omega}{\Omega_D} - \frac{\omega^2}{\Omega_D^2} \right) \\ m[(\omega + i\epsilon_s)^2 - \omega_{eff}^2 + i\sigma_e \nu \omega] \tilde{x}(\omega) &= \tilde{j}(\omega) \quad \leftarrow \omega \rightarrow 0 \\ m_{eff} \omega_{eff}^2 &= m\omega_0^2 - \frac{\pi g^2}{m^2 \Omega_D^2} \quad \leftarrow \text{renormalisation de la fréquence} \\ m_{eff} &= m - \frac{\pi g^2}{m^2 \Omega_D^4} \quad \leftarrow \text{renormalisation de la masse} \\ \nu &= \frac{\pi g^2}{m^2 \Omega_D^3} \quad \leftarrow \text{constante de frottement} \\ \ddot{x}(t) &= -\omega_{eff}^2 x(t) - \sigma_e \nu \dot{x}(t) - j(t) \end{aligned}$$

Force de friction de Newton dérivée dans un système fermé où $\rho(\Omega) = \mathcal{O}(\Omega)$

3. Dissipation

- Sensibilité plus élevée sur la flèche du temps de l'environnement (σ_e)

$$m[(\omega + i\epsilon_s)^2 - \omega_{eff}^2 + i\sigma_e\nu\omega]\tilde{x}(\omega) = \tilde{j}(\omega)$$

- La perte (et non le gain) de l'énergie \leftarrow flèche du temps
- Plus que la brisure de la symétrie d'inversion du temps (interactions faibles)
- La dissipation est une symétrie d'inversion temporelle spontanément brisée

4. Brisure spontanée de symétrie

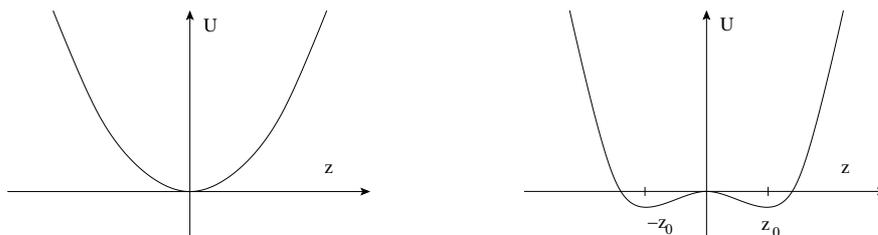
- *Une tige élastique*

- (a) La pression tangentielle induit un déplacement transversal



- (b) Le choix du déplacement entre les possibilités symétriques est aléatoire (spontané)

- (c) Énergie interne

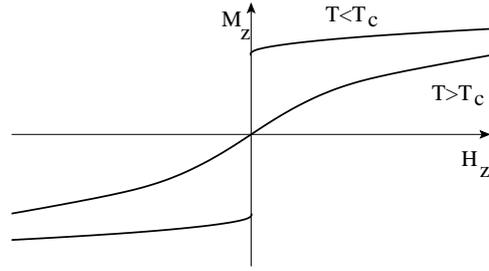


- (d) Les petites fluctuations de l'environnement déterminent la direction du déplacement

- (e) La brisure spontanée de symétrie est un mécanisme amplificateur

- *Le ferromagnétisme:*

- L'aimantation: $\mathbf{M}(\mathbf{H}) = \frac{1}{V} \sum_n \mathbf{m}_n$ en présence d'un champ magnétique externe \mathbf{H}
- Symétrie: $\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{H}, \mathbf{M} \rightarrow -\mathbf{M}$ (couplage par $\mathbf{H}\mathbf{M}$)
- symétrie $\implies \mathbf{M}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
- Phase paramagnétique: $\lim_{\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{0}} \mathbf{M}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$



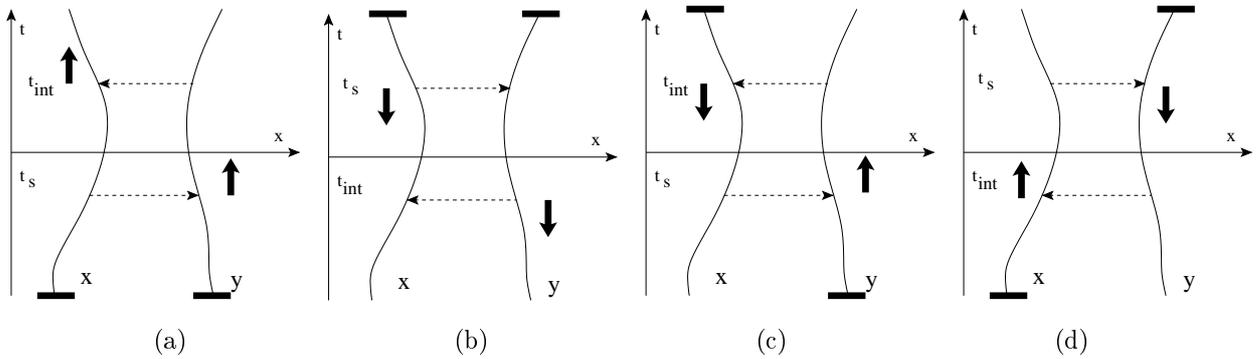
– Phase ferromagnétique: $\lim_{H \rightarrow 0} \mathbf{M}(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$???

Brisure spontanée de la symétrie: le système se souvient de la brisure infinitésimale de la symétrie

- Brisure spontanée de la symétrie d'inversion du temps: $\mathbf{H} \rightarrow \sigma_e \epsilon \mathbf{M} \rightarrow \tau_d$

5. Flèche de temps causale:

(a) *Spectre discret:*

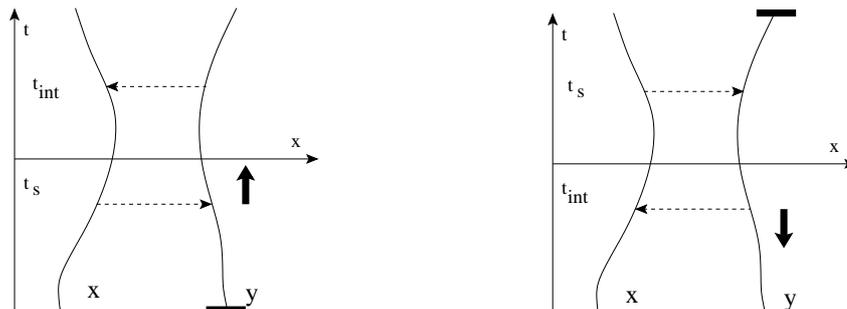


$$\tilde{G}_{eff}(\omega) = \frac{1}{m[(\omega + i\sigma_s \epsilon)^2 - \omega_0^2] - \sum_n \frac{g_n^2}{m} \frac{1}{(\omega + i\sigma_e \epsilon)^2 - \omega_n^2}} = \frac{P(\omega + i\sigma_e \epsilon)}{Q(\omega + i\sigma_s \epsilon, \omega + i\sigma_e \epsilon)}$$

- $\sigma_s = \sigma_e$, (a)-(b): Le pôle est à $\omega_p + i\sigma_e \epsilon \in \mathbb{R} \implies \text{sign}(\text{Im}(\omega_p)) = -\sigma$, dynamique causale, $\tau_c = \sigma$
- $\sigma_s = -\sigma_e$, (c)-(d): dynamique causale, $\nexists \tau_c$

(b) *Spectre continu:*

$$\tilde{G}_{eff}(\omega) = \frac{1}{m(\omega^2 - \omega_0^2) + \frac{\pi g^2}{m\Omega_D(\Omega_D - i\sigma_e \omega)}} \quad \leftarrow \quad \sigma_s \text{ est irrelevant}$$



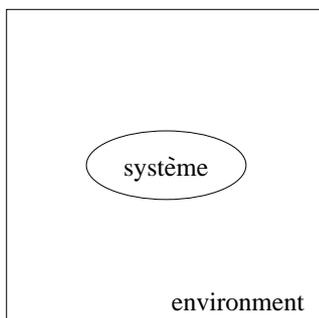
6. Diffusion:

- $\tau_c = \tau_d$ pour le mouvement stable
- La flèche du temps causale n'est déterminée que par l'environnement

VI. ENTROPIE

1. Première loi de la thermodynamique

- *Canaux contrôlés et non contrôlés:*



- *Energie:*

Échange d'énergie contrôlé: W le travail

Échange d'énergie non contrôlé: Q la chaleur

$$E = \langle H \rangle = \sum_n p_n E_n$$

$$\delta E = \delta Q + \delta W, \quad \delta W = \sum_n p_n \delta E_n, \quad \delta Q = \sum_n \delta p_n E_n$$



la première loi

- **Deuxième loi de la thermodynamique**

- *Kelvin:* Nous ne pouvons pas convertir la chaleur en travail sans perte
- *Clausius:* Nous ne pouvons pas transférer la chaleur de l'environnement froid à l'environnement chaud sans perte
- *Entropie:* une fonction d'état thermodynamique, défini par l'intégration sur une trajectoire réversible sur des états d'équilibre

$$\Delta S_{th} = \int_R \frac{\delta Q}{T} \quad (k_B = 1)$$

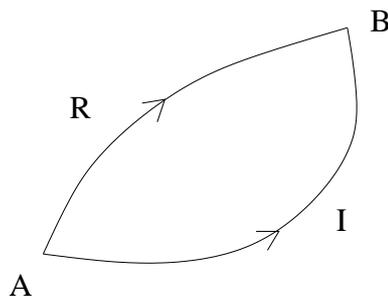
– *Le théorème de Clausius:*

(a) Transformations cycliques:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

(l'égalité pour des transformations réversibles)

(b) Transformations arbitraires: $A \rightarrow B$



$$\int_I \frac{\delta Q}{T} - \int_R \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

$$\int_I \frac{\delta Q}{T} \leq \int_R \frac{\delta Q}{T} = S_{th}(B) - S_{th}(A)$$

(c) L'entropie d'un système isolé thermiquement ne diminue jamais:

$$\int_I \frac{\delta Q}{T} = 0 \implies S_{th}(B) \geq S_{th}(A)$$



flèche du temps thermodynamique

2. La question d'Ehrenfest sur les systèmes fermés:

- *Boltzmann:*

$$S_B = \ln \frac{\Omega}{\Omega_0},$$

- *Gibbs:*

$$S_G = - \int d^{3N} p d^{3N} q p(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \ln p(\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

- *Le théorème de Liouville:* Le fleuve $(\mathbf{q}(t_i), \mathbf{p}(t_i)) \rightarrow (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ préserve le volume dans l'espace de phase.

– Le volume

$$\Gamma(R) = \int_R dx,$$

change pour les trajectoires de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$,

$$\boxed{\frac{d\Gamma(R(t))}{dt} = \int_{R(t)} dx \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))}$$

Preuve:

$$\begin{aligned} \Gamma(R(t)) &= \int_{R(t)} dx = \int_{R(t_i)} dx \det \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \mathbf{x}(t_i)} \\ \mathbf{x}(t + \delta t) &\approx \mathbf{x}(t) + \delta t \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \implies \frac{\partial x_j(t + \delta t)}{\partial x_k(t)} \approx \delta_{jk} + \delta t \frac{\partial f_j(\mathbf{x}(t))}{\partial x_k(t)} \\ \det \frac{\partial \mathbf{x}(t + \delta t)}{\partial \mathbf{x}(t)} &= \det \begin{pmatrix} 1 + \delta t \frac{\partial f_1(\mathbf{x}(t))}{\partial x_1(t)} & \delta t \frac{\partial f_1(\mathbf{x}(t))}{\partial x_2(t)} & \delta t \frac{\partial f_1(\mathbf{x}(t))}{\partial x_3(t)} \\ \delta t \frac{\partial f_2(\mathbf{x}(t))}{\partial x_1(t)} & 1 + \delta t \frac{\partial f_2(\mathbf{x}(t))}{\partial x_2(t)} & \delta t \frac{\partial f_2(\mathbf{x}(t))}{\partial x_3(t)} \\ \delta t \frac{\partial f_3(\mathbf{x}(t))}{\partial x_1(t)} & \delta t \frac{\partial f_3(\mathbf{x}(t))}{\partial x_2(t)} & 1 + \delta t \frac{\partial f_3(\mathbf{x}(t))}{\partial x_3(t)} \end{pmatrix} \\ &\approx 1 + \delta t \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \\ \Gamma(R(t + \delta t)) &= \int_{R(t)} dx [1 + \delta t \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))] \\ \frac{\Gamma(R(t + \delta t)) - \Gamma(R(t))}{\delta t} &= \int_{R(t)} dx \frac{1 + \delta t \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) - 1}{\delta t} = \int_{R(t)} dx \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \end{aligned}$$

– Les équations de Hamilton:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \implies X = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \end{pmatrix} \\ \frac{d\Gamma(R(t))}{dt} &= \int_{R(t)} dX \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{p}} - \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p} \partial \mathbf{q}} \right) = 0 \end{aligned}$$

- La distribution de probabilité reste inchangée dans l'espace de phase
- Ehrenfest: Comment l'entropie de Boltzmann ou de Gibbs peut-elle augmenter ?

3. La reproductibilité des observations thermodynamiques:

- *Micro et macro états:*

(a) Micro: $X = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$

(b) Macro: $\Sigma(\Phi) = \{X | X \text{ est compatible avec } \Phi\}$

↑

potentiel thermodynamique

(c) *Dynamique:*

i. Micro: $X(t_i) \rightarrow X(t)$

ii. Macro: $\Phi(t_i) \rightarrow \Phi(t), \Sigma(\Phi(t_i)) \rightarrow \Sigma(\Phi(t))$

(d) *Reproductibilité:* Différents micro-états initiaux se développent en un même macro-état

- **L'augmentation de l'entropie de Boltzmann dans le temps:**

(a) *Boltzmann:*

$$S_{th}(\Phi) = \ln \frac{\Omega(\Sigma(\Phi))}{\Omega_0}$$

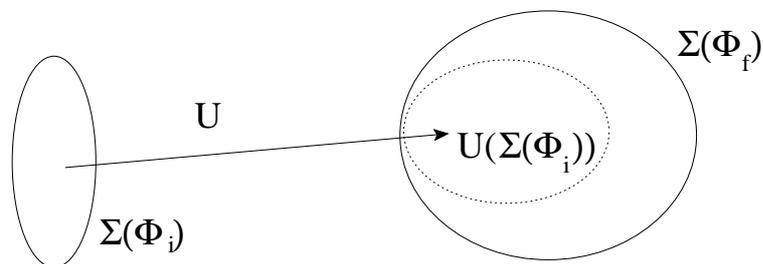
(b) *Dynamique dans l'espace des phases:*

$$U_{t',t} : \mathbb{R}^{6N} \rightarrow \mathbb{R}^{6N}, \quad U_{t',t}(x(t), p(t)) = (x(t'), p(t'))$$

(c) *Le théorème de Liouville:*

$$\Omega(\Sigma(\Phi_f)) = \Omega(U_{t_f,t_i}(\Sigma(\Phi_i)))$$

(d) *Reproductibilité:*



$$U_{t_f,t_i}(\Sigma(\Phi_i)) \subset \Sigma(\Phi_f),$$

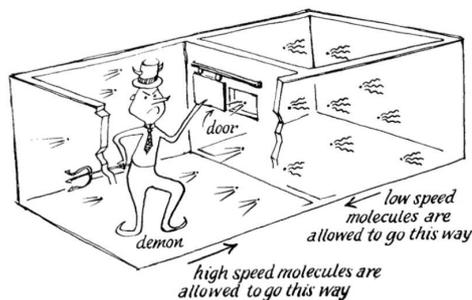
$$\Omega(\Sigma(\Phi_i)) \leq \Omega(\Sigma(\Phi_f))$$

$$S_{th}(\Phi_i) = \ln \frac{\Omega(\Sigma(\Phi_i))}{\Omega_0} \leq \ln \frac{\Omega(\Sigma(\Phi_f))}{\Omega_0} = S_{th}(\Phi_f)$$

(l'égalité pour les processus reproductibles réversibles)

4. Le démon de Maxwell (1867)

- *La deuxième loi de la thermodynamique est violée par la possession d'information*



- *Szilárd (1929):* La deuxième loi \Leftrightarrow La collecte et le traitement de l'information constituent l'entropie
- *Brillouin (1951):* Le processus de collecte d'informations produit suffisamment d'entropie pour sauver la deuxième loi.
- *Landauer (1961):* La mémoire du démon produit assez d'entropie pour satisfaire la deuxième loi.