KOVARIANCIA, KORRELÁCIÓ ÉS ÖSSZEFONÓDÁS KLASSZIKUS ÉS KVANTUMRENDSZEREKBEN

FÖLDES SZABOLCS

Kivonat. Megvizsgáljuk a részrendszerek közötti korreláció viselkedését klasszikus és kvantum kétrész-rendszerekben. A kovariancia eltűnése már a klasszikus valószínűségszámításban sem elégséges a valószínűségi változók függetlenségéhez. Ez által motiválva megvizsgáljuk az obszervábilisek kovarianciájának és az állapot korreláltságának (nemszorzatságának) kapcsolatát klasszikus és kvantum rendszerekben. Megmutatjuk, hogy két bit rendszerek esetén a kovariancia eltűnése elég a szorzatsághoz, de nagyobb klasszikus rendszerekben és bármilyen kvantumrendszerben lehetséges a kovariancia eltűnése korrelált rendszerben is. Továbbá meglátjuk, hogy a rendszer korrelációja általánosan jól jellemezhető az állapotból létrehozott korrelációs tenzor szinguláris érték felbontásával, mely kijelöli a rendszer korrelált irányait. Vizsgálatainkat példákkal illusztráljuk mind a klasszikus, mind a kvantum esetekben.

TDK dolgozat
Eötvös Loránd Tudományegyetem, 2025
Témavezető: Szalay Szilárd, PhD., tudományos főmunkatárs
Wigner Fizikai Kutatóközpont



ELTE
EÖTVÖS LORÁND
TUDOMÁNYEGYETEM



Tartalomjegyzék

1. Bevezetés 1
2. Vektorterek 2
2.1. Vektorterek általánosan 2
2.2. Hilbert terek 3
3. Valószínűségelmélet 6
3.1. Klasszikus valószínűségelmélet 6
3.2. Kvantum valószínűségelmélet 7
3.3. Klasszikus entrópiák 11
3.4. Kvantum entrópiák 13
4. Kétrész-rendszerek és korrelációk 14
4.1. Klasszikus kétrész-rendszerek 14
4.2. Kvantum kétrész-rendszerek 16
4.3. Klasszikus korreláció 17
4.4. Kvantum korreláció 18
4.5. Kvantum összefonódás 18
4.6. Klasszikus korrelációs mértékek 18
4.7. Kvantum korrelációs mértékek 20
4.8. Kvantum összefonódási mértékek 21
5. Eredmények 22
5.1. Két-bit rendszer kovarianciája 22
5.2. Bit-trit rendszer kovarianciája 23
5.3. Klasszikus kovariancia maximuma 24
5.4. Azonos obszervábilisek mérése a klasszikus részrendszereken 25
5.5. Két-qubit rendszer kovarianciája 27
5.6. Kvantum kovariancia maximuma 30
5.7. Azonos obszervábilisek mérése a kvantum részrendszereken 32
6. Összefoglalás 33
Köszönetnyilvánítás 34
Hivatkozások 34

1. Bevezetés

A kvantumelmélet számos érdekes és a klasszikus intuíciónak ellentmondó jelenséget tár elénk. Ahhoz, hogy legalább a felvetett kérdéseket megértsük, érdemes párhuzamba állítani a kvantumos és a klasszikus leírást.

A kvantumelmélet egy valószínűségelmélet, amely kizárólag a mérhető mennyiségek különböző kimeneteleinek valószínűségeit adja meg. A mérhető mennyiségek (obszervábilisek) gyakran folytonos értékkészlettel rendelkeznek, azonban a valószínűségszámításban értelmes dolog diszkrét és véges értékkészletű mennyiségek valószínűségelméletét tekinteni, nem is beszélve arról, hogy a kvantumrendszerek vizsgálatai során a természetben is találtak ilyen mennyiségeket. Már ezekben az egyszerű, véges rendszerekben is megjelennek olyan sajátosan kvantumos jelenségek, amelyek révén a kvantumelmélet fő vonásai jól megfigyelhetők.

A kvantumos viselkedés legszokatlanabb jelenségei rendszerint akkor mutatkoznak meg, amikor egy összetett rendszer részeinek egymás közötti viszonyát vizsgáljuk. Ezek különböző típusú kvantumkorrelációk, amelyek közül a legjelentősebb az összefonódás (entanglement). Az összefonódás a kvantuminformáció-elmélet és a kvantumszámítógépek fő erőforrása, melynek felhasználásával elérhetővé válik az úgynevezett „kvantum előny”, ami azt jelenti, hogy a kvantumos algoritmusok futásideje jobban skálázódhat a klasszikus megfelelőikénél. Ennek oka, hogy a kvantumkorrelációk több lényeges vonatkozásban eltérnek a klasszikus korrelációktól, ebben a dolgozatban néhány ilyen különbséget vizsgálunk meg. A két elmélet közötti eltérés legjobban úgy ragadható meg, ha a klasszikus és kvantum eseteket párhuzamosan tárgyaljuk, és a klasszikus rendszerek valószínűségi leírását a kvantumelmélettel analóg módon fogalmazzuk meg. Ez a megközelítés kevéssé megszokott, ugyanakkor szemlélteti a klasszikus és kvantum elméletek közötti hasonlóságokat és különbségeket.

Először a 2. fejezetben felidézzük a szükséges matematikai eszközöket, mint a vektortereket és Hilbert-tereket, a tenzorszorzatot, lineáris operátorokat, valamint a Hilbert–Schmidt-féle belső szorzat fogalmát. Ezekre az eszközökre támaszkodva a 3. fejezetben felépítjük a klasszikus és kvantum valószínűségelméleteket, a klasszikus és kvantum információ-elméletekből ismert entrópikus mennyiségekkel együtt. A 4. fejezetben pedig a kétrész-rendszerek és az ezekben fellépő korrelációk definícióját és számszerűsítésükhöz szükséges mennyiségeket tekintjük át. E fejezetek megírásánál a kiváló [1, 3, 4, 7] tankönyvekre támaszkodunk.

Az 5. fejezetben az obszervábilisek kovarianciája és az állapot korreláltsága (nem-szorzat jellege) közötti kapcsolatot vizsgáljuk, mind a klasszikus, mind a kvantum esetben. A klasszikus valószínűségszámításban ismert, hogy két valószínűségi változó (obszervábilis) kovarianciájának eltűnése nem feltétlenül jelenti azt, hogy az eloszlás (állapot) szorzat alakú (azaz, hogy a változók függetlenek). Az általános elméletben azonban kevésbé ragaszkodunk az obszervábilisekhez és azok kovarianciájához, különösen a kvantum eset miatt, ahol ugyanazon rendszeren belül nemkommutáló obszervábilisekkel kell dolgozni. Fontosabb tulajdonság az állapot korreláltsága, vagyis annak nemszorzat jellege. Ebből a nézőpontból a lényegi különbség az, hogy még egy erősen korrelált állapot esetén sem szükségszerű, hogy ez a korreláció megjelenjen adott kedvezőtlenül megválasztott obszervábilis-pár kovarianciájában.

Általánosan megmutatjuk, hogy ilyen helyzet nem fordulhat elő klasszikus két-bit rendszerekben, ott elegendő, ha a kovariancia egy rögzített, nemtriviális obszervábilis-párra nulla, és ez már önmagában biztosítja, hogy az állapot korrelálatlan. Ezzel szemben akármilyen nagyobb klasszikus rendszerben, valamint minden kvantumos rendszerben, beleértve a két-qubit rendszereket is, előfordulhat, hogy bizonyos obszervábilis-párok kovarianciája nulla, miközben az állapot nemszorzat, vagyis korrelált. Ez az eredmény egy újabb különbség a klasszikus és kvantum rendszerek között: a két-bit rendszerek túl kicsik ahhoz, hogy a kovariancia eltűnése ne implikálja a

függetlenséget, míg a két-qubit rendszerek már elég nagyok ahhoz, hogy a kovariancia eltűnése ne legyen elegendő feltétele az állapot szorzatságának.

Adott állapotú rendszer obszervábilis-párjainak kovarianciája lineárisan függ az obszervábilisektől, de ezt a függést nem könnyű áttekinteni. Ehhez a korrelációkat leíró tenzor szinguláris érték felbontását hívjuk segítségül, mely mindkét részrendszer obszervábilis algebrájában meghatároz egymással korrelált irányokat. Ebből a ránézésből kiindulva érthető meg adott állapot esetén az obszervábilis-párok kovarianciájának viselkedése, például a kovariancia eltűnése akár erősen korrelált állapotok esetében. Ezeket egyszerű példákkal szemléltetjük.

2. Vektorterek

A klasszikus és kvantumrendszerek leírásában a legfontosabb eszközök a vektorterek. Ebben a dolgozatban diszkrét véges rendszerekkel foglalkozunk, így véges vektortereket és Hilbert tereket használunk.

2.1. Vektorterek általánosan Egy *vektortér* $\mathcal{V}$ a komplex számok $\mathbb{C}$ halmaza felett zárt a *lineáris kombinációra* nézve, tehát, ha $v_i \in \mathcal{V}$ és $c_i \in \mathbb{C}$, akkor $\sum_{i=1}^{m} c_i v_i \in \mathcal{V}$. Lineáris kombináció alatt véges elem összegét értjük, akkor is ha ezt nem írjuk ki expliciten.

Egy másik struktúra, ami mind a klasszikus, mind a kvantum valószínűségelméletben fontos, a konvexitás. A $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$ részhalmaz egy $\mathcal{V}$ vektortérben akkor *konvex tér*, ha zárt a *konvex kombinációra* nézve, tehát ha $u_i \in \mathcal{C}$, $w_i \geq 0$ és $\sum_i w_i = 1$, akkor $\sum_{i=1}^{m} w_i u_i \in \mathcal{C}$. Véges számú elem konvex kombinációja *konvex politópot* alkot.

Vektorok halmaza *lineárisan független* akkor és csak akkor, ha csak a triviális lineáris kombinációjuk tudja kiadni a nullvektort. A maximális számú lineárisan független vektorok száma a $\mathcal{V}$ vektortér *dimenziója*, $\dim(\mathcal{V})$.

A véges dimenziós vektorterek tipikus példája a $\mathbb{C}^d$ komplex szám d-sek vektortere, ahol $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_d)$ egy vektor. Bármely d dimenziós vektortér izomorf a $\mathbb{C}^d$ komplex szám d-sek terével. A $\mathbb{C}^d$ téren minden $p \in [1, \infty]$ paraméterre lehet definiálni a p-normát, úgy mint $\|\boldsymbol{v}\|_p := \left(\sum_i |v_i|^p\right)^{1/p}$, valamint $\|\boldsymbol{v}\|_\infty := \lim_{p\to\infty} \|\boldsymbol{v}\|_p = \max(|v_i|)$.

$A \in \mathrm{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ *lineáris operátor* olyan $\mathcal{V} \to \mathcal{W}$ függvény, amelyre fennáll, hogy $A\left(\sum_i c_i v_i\right) := \sum_i c_i A(v_i)$, azaz megőrzi a vektortér lineáris struktúráját. Lineáris operátorok esetén a zárójelek elhagyhatók.

A lineáris operátorok a $\left(\sum_i c_i A_i\right)v := \sum_i c_i (A_i v)$ definícióval vektorteret alkotnak. Ha $\mathcal{W} = \mathcal{V}$, akkor a $\mathrm{Lin}(\mathcal{V}) := \mathrm{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ jelölést használjuk, továbbá $I \in \mathrm{Lin}(\mathcal{V})$ az identitás operátor. Valamint használjuk az $\mathcal{A} := \mathrm{Lin}(\mathcal{V})$ jelölést, mivel ez egy algebra.

A véges dimenziós lineáris operátorterek *tipikus példája* a $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^{d'}$ tér, azaz a komplex $d \times d'$ mátrixok tere. A $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^{d'}$ téren definiálható a Schatten p-norma, mint $\|M\|_p := \left(\mathrm{Tr}(|M|^p)\right)^{1/p}$, ahol $|M| = \sqrt{M^\dagger M}$, tehát $\|M\|_p$ egyszerűen M szinguláris értékeinek vektorának p-normája.

A $\mathrm{Lin}(\mathbb{C}^d) = \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ mátrixalgebrák nemkommutatívak, de léteznek kommutatív algebrák is. Például a $\mathbb{C}^d$ komplex szám d-sek az $\boldsymbol{v}\boldsymbol{w} = (v_1, v_2, \ldots, v_d)(w_1, w_2, \ldots, w_d) := (v_1 w_1, v_2 w_2, \ldots, v_d w_d)$ elemenkénti szorzással kommutatív algebrát alkotnak, amit $\mathbb{A} := \mathbb{C}^d$-vel jelölünk, itt az egységelem $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$.

Abban a speciális esetben, amikor egy lineáris operátor értékkészlete az eredeti vektortér alapteste, azaz $\mathcal{W} = \mathbb{C}$, az $f \in \mathrm{Lin}(\mathcal{V}, \mathbb{C})$ operátort *lineáris funkcionálnak* nevezzük. A lineáris funkcionálok tere a vektortér *duális tere*, $\mathcal{V}^* := \mathrm{Lin}(\mathcal{V}, \mathbb{C})$, és teljesül, hogy $\dim(\mathcal{V}^*) = \dim(\mathcal{V})$.

A $v \in \mathcal{V}$ és $w \in \mathcal{W}$ vektorok *tenzorszorzata* $v \otimes w$, ahol $\otimes$ a tenzorszorzás, mely bilineáris,

$$\left(\sum_i a_i v_i\right) \otimes \left(\sum_j b_j w_j\right) := \sum_i \sum_j a_i b_j (v_i \otimes w_j). \tag{2.1}$$

A $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ vektorterek tenzorszorzata az *elemi tenzorok* $v \otimes w$ lineáris kombinációinak tere, azaz $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W} := \mathrm{Span}\{v \otimes w | v \in \mathcal{V}, w \in \mathcal{W}\}$. Ennek dimenziója $\dim(\mathcal{V}) \dim(\mathcal{W})$.

Az $f \in \mathcal{V}^*$ és $w \in \mathcal{W}$ vektorokból képzett $w \otimes f \in \mathrm{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ elemi tenzorra gondolhatunk lineáris leképezésként, melynek hatása egy $v \in \mathcal{V}$ vektoron

$$(w \otimes f)(v) := f(v)w, \tag{2.2}$$

amiből következik az azonosítás

$$\mathrm{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = \mathcal{W} \otimes \mathcal{V}^*. \tag{2.3}$$

Azaz minden $A \in \mathrm{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ operátor felbontható mint elemi tenzor operátorok lineáris kombinációja,

$$A = \sum_i c_i w_i \otimes f_i, \tag{2.4}$$

vagy ekvivalensen $A = \sum_{i,j} A_{ij} w_i \otimes f_j$.

Az $\mathcal{A} = \mathrm{Lin}(\mathcal{V})$-beli operátorokra létezik a *nyom (trace)* leképezés, amely lineáris, elemi operátorokon hatva

$$\mathrm{Tr}(v \otimes f) := f(v), \tag{2.5}$$

amiből következik, hogy

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}\Big(\sum_i c_i v_i \otimes f_i\Big) = \sum_i c_i f_i(v_i), \tag{2.6}$$

vagy ezzel ekvivalensen $\mathrm{Tr}(\sum_{i,j} A_{ij} v_i \otimes f_j) = \sum_{i,j} A_{ij} f_j(v_i)$.

Az $A \in \mathrm{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ és $B \in \mathrm{Lin}(\mathcal{W}, \mathcal{W}')$ *lineáris operátorok tenzorszorzata* az elemi tenzorokon definiált lineáris operátor

$$(A \otimes B)(v \otimes w) := (Av) \otimes (Bw). \tag{2.7}$$

A lineáris leképezések (operátorokon ható) tenzorszorzata is hasonlóan adható meg. Legyenek $\mathcal{A} := \mathrm{Lin}(\mathcal{V})$ és $\mathcal{B} := \mathrm{Lin}(\mathcal{W})$ lineáris operátorok, ekkor a $\Phi \in \mathrm{Lin}(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ és $\Upsilon \in \mathrm{Lin}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ lineáris leképezések tenzorszorzata az elemi operátor-tenzorokon definiált lineáris leképezés,

$$(\Phi \otimes \Upsilon)(A \otimes B) := \Phi(A) \otimes \Upsilon(B). \tag{2.8}$$

Példa egy ilyen lineáris leképezésre a *részleges nyom (partial trace)*, mely definíció szerint,

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}} := \mathrm{Tr} \otimes \mathcal{I}, \tag{2.9}$$

ahol $\mathrm{Tr} \in \mathrm{Lin}(\mathcal{A}, \mathbb{C})$ az $\mathcal{A}$ tér nyomleképezése, $\mathcal{I} \in \mathrm{Lin}(\mathcal{B})$ az identitás leképezés $\mathcal{B}$-n. Így $\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}}(A \otimes B) = \mathrm{Tr}(A)B$ a részleges nyom hatása egy operátor tenzorszorzaton.

2.2. Hilbert terek A $\mathcal{H}$ *Hilbert-tér* egy vektortér a komplex számok felett, amelyhez tartozik egy kétváltozós művelet, az úgynevezett *belső szorzat*,

$$\langle ., . \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}, \tag{2.10}$$

amely definíció szerint *nemnegatív* ($\langle \psi, \psi \rangle \geq 0$), *nemdegenerált* ($\langle \psi, \psi \rangle = 0$ akkor és csak akkor, ha $\psi = 0$), *Hermitikus* vagy *konjugált szimmetrikus* ($\langle \psi, \phi \rangle = \langle \phi, \psi \rangle^*$), és *lineáris a második argumentumban* ($\langle \phi, \sum_i c_i \psi_i \rangle = \sum_i c_i \langle \phi, \psi_i \rangle$). Az előző két tulajdonság miatt igaz az is, hogy a belső szorzat konjugált-lineáris az első argumentumban ($\langle \sum_i c_i \phi_i, \psi \rangle = \sum_i c_i^* \langle \phi_i, \psi \rangle$). A $\mathbb{C}^d$ szám d-sek esetén a $(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w}) = \sum_{i=1}^d v_i^* w_i$ jelölés a szokásos belső szorzatot jelenti.

A $\psi, \phi \in \mathcal{H}$ vektorok *ortogonálisak*, ha $\langle \psi, \phi \rangle = 0$. A belső szorzat tulajdonságaiból következik, hogy $\langle \psi, \psi \rangle \geq 0$, és így egy norma definiálható $\|\psi\| := \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}$ alakban. A $\psi \in \mathcal{H}$ vektor *normált*, ha $\|\psi\| = 1$.

Megmutatható, hogy ezzel a belső szorzattal teljesül a *Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz* egyenlőtlenség, tehát minden $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ esetén

$$|\langle \psi, \phi \rangle|^2 \leq \langle \psi, \psi \rangle \langle \phi, \phi \rangle. \tag{2.11}$$

Az előbb definiált normával ez átírható,

$$|\langle\psi,\phi\rangle| \leq \|\psi\|\|\phi\|. \tag{2.12}$$

Továbbá létezik egy általánosabb egyenlőtlenség is p-normákra, a Hölder-egyenlőtlenség következményeként,

$$|\langle\psi,\phi\rangle| \leq \|\psi\|_p\|\phi\|_q, \tag{2.13}$$

bármely p- és q-normákra, ahol $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. A (2.13) egyenlőtlenség speciális esete a fenti Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz egyenlőtlenség, amikor $p=q=2$.

Vegyük ismét a lineáris operátorok $\mathrm{Lin}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ vektorterét, az $\mathcal{A}:=\mathrm{Lin}(\mathcal{H})$ operátoralgebrát, és a $\mathcal{H}^*=\mathrm{Lin}(\mathcal{H},\mathbb{C})$ duális Hilbert-teret. Egy $A\in\mathrm{Lin}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ operátorhoz definiálhatjuk az *adjungáltját*, mint $A^\dagger\in\mathrm{Lin}(\mathcal{K},\mathcal{H})$, ahol

$$\langle A^\dagger\psi,\phi\rangle := \langle\psi,A\phi\rangle,\ \forall\ \psi\in\mathcal{K},\ \phi\in\mathcal{H}. \tag{2.14}$$

A belső szorzat birtokában minden $\mathcal{H}$-beli elemhez természetes módon hozzárendelhetünk egy elemet a $\mathcal{H}^*$ duális térben. Azaz minden $\psi\in\mathcal{H}$ esetén legyen $\psi^\dagger\in\mathcal{H}^*$ az a lineáris funkcionál, amely minden $\phi\in\mathcal{H}$-ra $\psi^\dagger(\phi):=\langle\psi,\phi\rangle$ módon hat. Ez a leképezés antilineáris, tehát $\left(\sum_i c_i\psi_i\right)^\dagger=\sum_i c_i^*\psi_i^\dagger$, valamint a véges dimenziós esetben bijektív. Ez vezet a megszokott *Dirac-jelöléshez*. A Dirac-jelölésben a $\phi\in\mathcal{H}$ vektorokat $|\phi\rangle:=\phi$ formában jelöljük, „ket"-nek nevezve. A $\psi^\dagger\in\mathcal{H}^*$ alakú lineáris funkcionálokat pedig $\langle\psi|:=\psi^\dagger$ formában, „bra"-nak nevezve. Ekkor a funkcionál hatása a vektorra $\psi^\dagger(\phi)=\langle\psi|(|\phi\rangle)=\langle\psi,\phi\rangle$, amit a továbbiakban $\langle\psi|\phi\rangle:=\langle\psi,\phi\rangle$ alakban jelölünk.

A Dirac-jelölés az operátorokra is kényelmes. Az $|\psi\rangle\otimes\langle\phi|\in\mathrm{Lin}(\mathcal{H},\mathcal{K})=\mathcal{K}\otimes\mathcal{H}^*$ elemi operátorok esetén elhagyjuk az $\otimes$ szimbólumot, és egyszerűen $|\psi\rangle\langle\phi|$ alakban írjuk, ahogyan az irodalomban szokásos. Így az $A\in\mathrm{Lin}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ lineáris operátorok általánosan felírhatók

$$A=\sum_i c_i|\alpha_i\rangle\langle\beta_i| \tag{2.15}$$

alakban, ahol kihasználtuk a (2.4) egyenletet. Továbbá a nyomleképezés $\mathrm{Tr}(|\psi\rangle\langle\phi|)=\langle\phi|\psi\rangle$ módon hat a $|\psi\rangle\langle\phi|\in\mathcal{A}=\mathrm{Lin}(\mathcal{H})$ elemi operátorokra, valamint $\mathrm{Tr}\left(\sum_i c_i|\alpha_i\rangle\langle\beta_i|\right)=\sum_i c_i\langle\beta_i|\alpha_i\rangle$ módon az $A=\sum_i c_i|\alpha_i\rangle\langle\beta_i|\in\mathcal{A}$ általános operátorokra. A Dirac-jelölés használatával az *adjungált* is felírható, $(|\psi\rangle\langle\phi|)^\dagger=|\phi\rangle\langle\psi|$ az $|\psi\rangle\langle\phi|\in\mathrm{Lin}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ elemi operátorokra, valamint $\left(\sum_i c_i|\alpha_i\rangle\langle\beta_i|\right)^\dagger=\sum_i c_i^*|\beta_i\rangle\langle\alpha_i|$ az $A=\sum_i c_i|\alpha_i\rangle\langle\beta_i|\in\mathrm{Lin}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ általános operátorokra.

Minden operátor felbontható a (2.4) egyenlet szerint, de ez a felbontás általában nem egyértelmű. A Hilbert-terek esetén minden $A\in\mathrm{Lin}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ operátor felírható

$$A=\sum_i a_i|\alpha_i\rangle\langle\beta_i| \tag{2.16}$$

alakban, ahol $a_i\geq 0$ a *szinguláris értékek*, és $|\alpha_i\rangle\in\mathcal{K}$, $|\beta_i\rangle\in\mathcal{H}$ a *bal és jobboldali szinguláris vektorok*, melyek ortonormált bázisokat alkotnak. Ez a felbontás lényegében egyértelmű (degenerációk és sorrend erejéig), és *szinguláris érték felbontásnak* nevezzük. Egy $A\in\mathcal{A}$ operátor $\mathrm{rk}(A)$ *rangja* a nemnulla szinguláris értékeinek száma. Idézzünk fel néhány speciális operátort, melyek fontosak a kvantum valószínűségelméletben. Egy $A\in\mathcal{A}$ operátor *normális*, ha $A^\dagger A=AA^\dagger$, ami pontosan akkor teljesül, ha diagonális alakba írható, tehát

$$A=\sum_i a_i|\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|, \tag{2.17}$$

ahol $a_i\in\mathbb{C}$ a *sajátértékek* és $|\alpha_i\rangle$ a *sajátvektorok*, melyek ortonormáltak. Egy $A\in\mathcal{A}$ operátor *unitér*, ha $A^\dagger=A^{-1}$, ami pontosan akkor teljesül, ha A normális és a (2.17) egyenletben szereplő sajátértékekre teljesül, hogy $a_i\in\mathbb{C}$, $|a_i|=1$. Egy $A\in\mathcal{A}$ operátor *önadjungált*, ha $A^\dagger=A$, ami pontosan akkor teljesül, ha A normális és a (2.17) egyenletben szereplő sajátértékekre

teljesül, hogy $a_i \in \mathbb{R}$. Egy $A \in \mathcal{A}$ operátor *pozitív szemidefinit*, amit $A \geq 0$-val jelölünk, ha $\langle\psi|A|\psi\rangle \geq 0$ minden $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ esetén, ami pontosan akkor teljesül, ha A normális és a (2.17) egyenletben szereplő sajátértékekre teljesül, hogy $a_i \geq 0$. Egy $A \in \mathcal{A}$ operátor *projekció (vetítés)*, ha $P^2 = P = P^\dagger$, ami pontosan akkor teljesül, ha A normális és a (2.17) egyenletben szereplő sajátértékekre teljesül, hogy $a_i \in \{0, 1\}$.

Egy konkrét operátor szinguláris érték felbontásának meghatározása általában nem megy absztrakt módon, hanem egy bázis felvétele után mátrixokkal kell számolni. Ekkor a (2.16) képlet mátrix formája

$$A = USV^\dagger, \tag{2.18}$$

ahol S diagonális és a diagonálisbeli elemei az $a_i \geq 0$ szinguláris értékek, valamint U és V unitér mátrixok, és U oszloponként tartalmazza az $|\alpha_i\rangle$ vektorok, V pedig a $|\beta_i\rangle$ vektorok kifejtési együtthatóit. Fontos, hogy a szinguláris érték felbontásban egy index van jelen, valamint a bázistranszformációt unitér mátrixok hajtják végre, így az ortonormáltság megőrződik. Az A mátrix szinguláris érték felbontása kiszámítható az

$$\begin{aligned} A^\dagger A &= VS^\dagger SV^\dagger, \\ AA^\dagger &= USS^\dagger U^\dagger \end{aligned} \tag{2.19}$$

mátrixok sajátérték felbontásából, ahol ugyanúgy S tartalmazza a szinguláris értékeket és U, V a bal és jobboldali szinguláris vektorokat. Látható, hogy a (2.19) képlet $A^\dagger A$ és $AA^\dagger$ sajátérték problémái ($A^\dagger A$ és $AA^\dagger$ sajátértékei megegyeznek), tehát A szinguláris értékei egyenlőek $A^\dagger A$ és $AA^\dagger$ (nemnegatív) sajátértékeinek gyökeivel.

Az $A, B \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ lineáris operátorokra definiálható a *Hilbert–Schmidt belső szorzat*,

$$(A|B) := \mathrm{Tr}(A^\dagger B). \tag{2.20}$$

Ezzel a skaláris szorzattal $\mathrm{Lin}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ szintén Hilbert-tér, amelyet *Hilbert–Schmidt-térnek* nevezünk. Itt is igaz, hogy a Hilbert–Schmidt-tér feletti lineáris funkcionálok megadhatók operátorokkal való Hilbert-Schmidt belső szorzással, viszont a megfelelő Dirac-jelölés itt ritkábban használatos.

A $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ Hilbert-terek tenzorszorzata a $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ Hilbert-tér, a

$$\big\langle \psi_1 \otimes \psi_2 \big| \phi_1 \otimes \phi_2 \big\rangle := \langle\psi_1|\phi_1\rangle\langle\psi_2|\phi_2\rangle \tag{2.21}$$

belső szorzattal a $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ terek belső szorzataival megadva. Az operátorokhoz hasonlóan megadható egy $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ vektor szinguláris érték felbontása is, amit ekkor *Schmidt felbontásnak* is neveznek,

$$|\psi\rangle = \sum_i s_i |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle, \tag{2.22}$$

ahol s_i a szinguláris értékek (Schmidt együtthatók) és $|\alpha_i\rangle$, $|\beta_i\rangle$ pedig az ortonormált bázisokat alkotó bal és jobboldali szinguláris vektorok. Konkrét esetben a szinguláris érték kiszámításához itt is bázis szükséges. Ekkor

$$\psi = USV^T, \tag{2.23}$$

ahol ψ, S $d_1 \times d_2$ mátrix formában szerepelnek, S diagonális és a $p_i \geq 0$ szinguláris értékeket tartalmazza, valamint $U \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_1)$, $V \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_2)$ unitér mátrixok, melyek oszlopai a bal és jobboldali szinguláris vektorok. A $|\psi\rangle$ vektor szinguláris érték felbontása kiszámítható a

$$\begin{aligned} \psi^\dagger \psi &= V^* S^\dagger S V^T, \\ \psi\psi^\dagger &= USS^\dagger U^\dagger \end{aligned} \tag{2.24}$$

sajátérték problémák segítségével (a két probléma sajátértékei megegyeznek), ahol ψ, S, U és V mátrixok az előzőekkel megegyezőek, és V^T, illetve V^* a V mátrix transzponáltja, illetve

konjugáltja. Így $|\psi\rangle$ szinguláris értékei megegyeznek $\psi^\dagger\psi$, és $\psi\psi^\dagger$ (nemnegatív) sajátértékeinek gyökeivel.

3. Valószínűségelmélet

A valószínűségelmélet valószínűségi változókkal és azok mérési kimeneteleinek valószínűségeivel foglalkozik. A valószínűségi módon leírt fizikai mennyiségeket *obszervábiliseknek (megfigyelhetőknek)* nevezzük, ezek az obszervábilis algebra elemei mind a klasszikus, mind a kvantumos esetben. Azokat a lineáris funkcionálokat, amelyek az obszervábilisek várható értékeit (vagy ekvivalensen, a kimenetelek valószínűségeit) adják meg, *állapotoknak* nevezzük mind a klasszikus, mind a kvantumos esetben. A klasszikus elméletben ez az obszervábilis algebra kommutatív, míg a kvantum esetben nem az. Mivel ebben a dolgozatban *diszkrét, véges rendszerekkel* foglalkozunk az obszervábilisek méréskor véges számú diszkrét értéket vehetnek fel. Ekkor az obszervábilis algebrák és az állapottér is véges dimenziósak.

3.1. Klasszikus valószínűségelmélet Vegyünk obszervábiliseket, amelyek a_i (valós vagy komplex) számértékeket vehetnek fel a mérés során. Mivel az obszervábilisek lineáris kombinációja és (kommutatív) szorzata is obszervábilis, ezért reprezentáljuk őket mint $\boldsymbol{a} := (a_1, a_2, \dots, a_d) \in \mathbb{A} := \mathbb{C}^d$ szám d-sek, ahol az elemenkénti szorzást az $(\boldsymbol{ab})_i := a_i b_i$ kifejezés adja meg. Ekkor felírható

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{d} a_i \boldsymbol{\chi}_i, \tag{3.1}$$

ahol $\boldsymbol{\chi}_i$ az i-edik mérési kimenet karakterisztikus obszervábilise, $\boldsymbol{\chi}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\boldsymbol{\chi}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ és így tovább. Látható, hogy $\boldsymbol{\chi}_i$ értéke 1, ha az i-edik kimenet következik be, és 0 egyébként.

Legyen az i-edik kimenet valószínűsége p_i, tehát $p_i \geq 0$ és $\sum_{i=1}^{d} p_i = 1$. Ekkor az $\boldsymbol{a}$ obszervábilis várható értéke

$$\mathrm{Exp}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{d} p_i a_i = (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{a}), \tag{3.2}$$

amit a $\mathbb{C}^d$ tér belső szorzata ad meg. Az ilyen $\boldsymbol{p} := (p_1, p_2, \dots, p_d) \in \mathbb{C}^d$ szám d-set *állapotnak* nevezzük. Általánosságban az állapot egy lineáris funkcionál, az obszervábilis algebra duális terének egy eleme, de a belső szorzat segítségével azonosíthatjuk a teret a duálisával. Így az obszervábilishez hasonlóan az állapotnak is felírhatjuk egy szemléletesebb alakját,

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{d} p_i \boldsymbol{\delta}_i, \tag{3.3}$$

ahol $\boldsymbol{\delta}_i$ egy *tiszta állapot*. Egy tiszta állapotban minden komponens 0, kivéve az i-ediket, amely 1, tehát $\boldsymbol{\delta}_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $\boldsymbol{\delta}_2 = (0, 1, 0, \dots)$ és így tovább. Látható, hogy a $\boldsymbol{\delta}_i$ tiszta állapot esetén bármely obszervábilis i-edik kimenete biztosan bekövetkezik, míg a többi biztosan nem. Egy másik speciális állapot a *fehér zaj*, ami egy teljesen véletlen állapotot jelent, vagyis $\mathbf{1}/d := (1/d, 1/d, \dots, 1/d)$, ez esetben bármely obszervábilis minden kimenete egyenlő valószínűséggel következik be. A várható érték (3.2) egy obszervábilis és egy állapot belső szorzata, ami jól mutatja, hogy a várható érték éppúgy függ az állapottól, mint magától a mért obszervábilistől.

Az összes lehetséges (nemnegatív, normált) $\boldsymbol{p}$ állapot tere, az *állapottér*,

$$\Delta := \left\{ \boldsymbol{p} \in \mathbb{C}^d \;\middle|\; p_i \geq 0, \sum_i p_i = 1 \right\}, \tag{3.4}$$

amely egy $d-1$ dimenziós részhalmaz a $\mathbb{R}^d$ térben. A valószínűségelmélet alapvető struktúrája a konvex struktúra, vagyis az állapottér zárt a konvex kombinációra, tehát

$$\sum_{j=1}^{m} w_j \boldsymbol{p}_j \in \Delta, \quad \text{ahol } w_j \geq 0, \sum_{j=1}^{m} w_j = 1. \tag{3.5}$$

Megjegyezzük, hogy az állapottér nem zárt a lineáris kombinációra, tehát tetszőleges állapotok lineáris kombinációja nem állapot, csakis a konvex kombinációjuk az. A (3.3) egyenlet alapján az állapottér a d darab tiszta állapot konvex burka, tehát egy konvex politóp. Mivel dimenziója $d-1$, így ez egy szimplex, ami azt jelenti, hogy minden állapot tiszta konvex felbontása egyértelmű. Szemléletesen a fehér zaj $\mathbf{1}/d$ az állapottér „középpontjában" helyezkedik el.

Egy karakterisztikus obszervábilis várható értékének kiszámítása megadja az adott kimenet valószínűségét,

$$\mathrm{Exp}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\chi}_i) = \sum_j p_j(\boldsymbol{\delta}_j|\boldsymbol{\chi}_i) = p_i. \tag{3.6}$$

Egy $\boldsymbol{a} \in \mathbb{A}$ obszervábilis $\boldsymbol{a}^2$ négyzete (a négyzetre emelés elemenként értendő) szintén obszervábilis, és várható értéke a (3.2) egyenlet szerint adódik. Így egy adott $\boldsymbol{a}$ obszervábilis szórása

$$\mathrm{Var}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a}) := \mathrm{Exp}_{\boldsymbol{p}}((\boldsymbol{a} - \mathrm{Exp}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a}))^2) = \mathrm{Exp}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a}^2) - \mathrm{Exp}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a})^2 = (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{a}^2) - (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{a})^2. \tag{3.7}$$

A legegyszerűbb diszkrét véges rendszer két kimenetű obszervábiliseket ír le ($d=2$), ez a *bit*. Ekkor a tiszta állapotok

$$\boldsymbol{\delta}_1 = (1,0), \ \boldsymbol{\delta}_2 = (0,1), \tag{3.8}$$

így az állapottér egy 1 dimenziós szakasz, melynek a középpontjában található a $(1/2, 1/2)$ fehér zaj. Az 1. ábra szemlélteti a bit állapotterét. A bit állapotok

$$\boldsymbol{p} = p_1\boldsymbol{\delta}_1 + p_2\boldsymbol{\delta}_2 = (p_1, p_2) \tag{3.9}$$

szokásos paraméterezése mellett használhatunk más paraméterezést is. Például olyat, amely a fehér zajtól vett eltérést fejezi ki,

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + r\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}(1+r, 1-r), \tag{3.10}$$

ahol $\mathbf{1} = \boldsymbol{\delta}_1 + \boldsymbol{\delta}_2 = (1,1)$, $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\delta}_1 - \boldsymbol{\delta}_2 = (1,-1)$, így $r = 2p_1 - 1 = 1 - 2p_2 \in [-1,1]$. A bit ezen paraméterezése látható a 2 ábrán.

Ha egy három kimenetű obszervábilist tekintünk, akkor egy *trit*-et ($d=3$) kapunk, melynek tiszta állapotai

$$\boldsymbol{\delta}_1 = (1,0,0), \ \boldsymbol{\delta}_2 = (0,1,0), \ \boldsymbol{\delta}_3 = (0,0,1). \tag{3.11}$$

Valamint ezekből a tiszta állapotokból egy általános $\boldsymbol{p}$ állapot

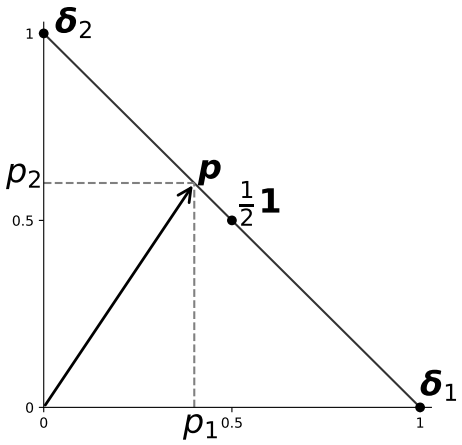
$$\boldsymbol{p} = p_1\boldsymbol{\delta}_1 + p_2\boldsymbol{\delta}_2 + p_3\boldsymbol{\delta}_3, \tag{3.12}$$

tehát az állapottér egy szabályos háromszög, amelynek középpontjában a fehér zaj található. Ezt szemlélteti a 3. ábra.

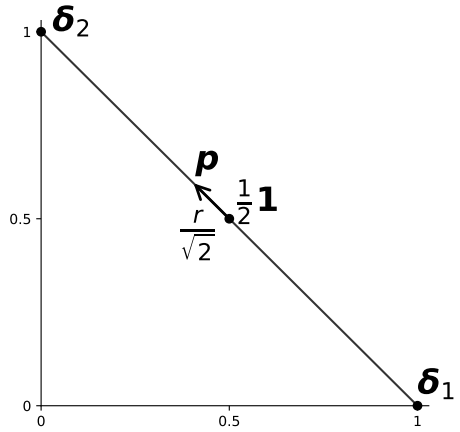
3.2. Kvantum valószínűségelmélet A kvantumelméletben az obszervábiliseket a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér normális operátorai reprezentálják, tehát

$$A = \sum_i a_i|\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| \in \mathcal{A} = \mathrm{Lin}(\mathcal{H}), \tag{3.13}$$

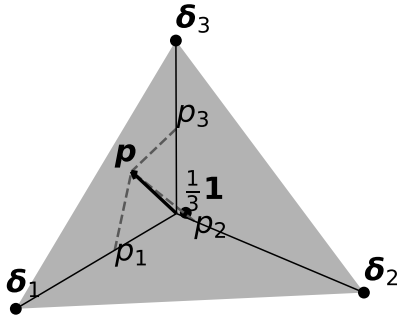
ahol az $a_i \in \mathbb{C}$ sajátértékek az obszervábilis diszkrét mérhető értékei, és $|\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$ az i-edik sajátaltérhez tartozó projekció. A $P_i = |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$ operátort felfoghatjuk karakterisztikus obszervábilisként, mely értéke 1 az A obszervábilis i-edik mérési kimenete esetén és 0 a többi esetén.



1. ábra. A bit állapottere a természetes bázisban



2. ábra. A bit állapotere a fehér zajra centrált (klasszikus Pauli) bázisban



3. ábra. A trit állapottere

Egy $A \in \mathcal{A}$ obszervábilis várható értékét a $\rho \in \mathcal{A}$ *sűrűségoperátor*, más néven *kvantumállapot* adja meg,

$$\mathrm{Exp}_\rho(A) = \mathrm{Tr}(\rho A). \tag{3.14}$$

Általánosságban egy állapot lineáris funkcionál, az $\mathcal{A}$ obszervábilis-algebra $\mathcal{A}^* = \mathrm{Lin}(\mathcal{A}, \mathbb{C})$ duális terének egy eleme, de az algebra és duális tere a Hilbert–Schmidt-belső szorzat segítségével

ismét azonosítható. A *Born-szabály* kimondja, hogy egy $A = \sum_i a_i P_i$ obszervábilis i. mérési kimenetelének valószínűsége a $P_i = |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$ karakterisztikus obszervábilis várható értéke,

$$p_i = \mathrm{Tr}(\rho P_i), \tag{3.15}$$

ami ekvivalens a várható értékre vonatkozó (3.14) képlettel. A p_i valószínűségek összessége adja meg az $A \in \mathcal{A}$ obszervábilis mérési statisztikáját.

A sűrűségoperátor tulajdonságai a Born-szabályból következnek. Ahhoz, hogy $p_i \in \mathbb{R}$ teljesüljön, a sűrűségoperátornak önadjungáltnak kell lennie, tehát $\rho^\dagger = \rho$. Ahhoz, hogy $p_i \geq 0$ is teljesüljön, a $\rho \geq 0$ pozitív szemidefinitség szükséges, és ahhoz pedig, hogy $\sum_{i=1}^d p_i = 1$ legyen, 1-nyomúnak kell lennie, tehát $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$.

Ha a (3.15) egyenletet egy $\pi = |\psi\rangle\langle\psi|$ alakú állapotra alkalmazzuk, akkor a kimenet valószínűsége

$$p_i = \langle\psi|\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|\psi\rangle = |\langle\alpha_i|\psi\rangle|^2, \tag{3.16}$$

ez a *Born-szabály* szokásos alakja, azonban a (3.15) egyenlet a szabály általános formája.

A $\pi = |\psi\rangle\langle\psi| \in \mathcal{A}$ alakú speciális állapotot *tiszta állapotnak* nevezzük, az azt meghatározó $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ vektort pedig *állapotvektornak*, ekkor $\||\psi\rangle\| = 1$. A $|\psi\rangle = |\alpha_i\rangle$ állapotvektorú, $\pi = |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| = P_i$ tiszta állapot azt az esetet írja le, amikor az $A = \sum_i a_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$ obszervábilis i-edik kimenetele biztosan bekövetkezik, a többi pedig biztosan nem. Ekkor az obszervábilis mérési statisztikája megegyezik a klasszikus értelemben vett tiszta állapotéval. Akármilyen tiszta állapotra létezik olyan obszervábilis, amelynek mérési statisztikája nem tiszta, azaz nincsen biztos kimenet. Klasszikus rendszerben ilyen állapot nem létezik, ez a mögöttes algebra kommutativitásának köszönhető, ami a kvantumelméletben nem teljesül. Egy állapot akkor és csak akkor tiszta, ha négyzete önmaga, $\rho^2 = \rho$, vagyis, ha egy 1-rangú projektor. Egy nem tiszta, azaz *kevert állapot* tiszta állapotok konvex kombinációjával adható meg, ilyen állapot esetén nem létezik olyan obszervábilis, amelyre a mérési statisztika tiszta lenne.

A (pozitív szemidefinit és normált) kvantumállapotok tere

$$\mathcal{D} := \Big\{ \rho \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}) \;\Big|\; \rho \geq 0, \mathrm{Tr}(\rho) = 1 \Big\}, \tag{3.17}$$

ami a $\mathrm{Lin}(\mathcal{H})$ tér egy $(d^2 - 1)$ valós dimenziós részhalmaza. Ismét, a valószínűségelmélet fő szerkezeti tulajdonsága a konvexitás, tehát az állapottér zárt a konvex kombinációra nézve, azaz

$$\sum_{j=1}^m w_j \rho_j \in \mathcal{D}, \quad \text{ahol } w_j \geq 0, \sum_{j=1}^m w_j = 1. \tag{3.18}$$

Ismét megjegyezzük, hogy lineáris kombinációkra nézve nem zárt az állapottér, tehát tetszőleges állapotok lineáris kombinációja nem állapot, csak a konvex kombinációjuk az. Másképpen, az állapottér a folytonosan sok tiszta állapot konvex burka,

$$\mathcal{D} = \Big\{ \rho \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}) \;\Big|\; \rho = \sum_j w_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|, |\psi_j\rangle \in \mathcal{H}, \||\psi_j\rangle\| = 1, w_j \in \mathbb{R}, w_j \geq 0, \sum_j w_j = 1 \Big\}. \tag{3.19}$$

Továbbá definiálható a tiszta állapotok tere,

$$\mathcal{P} := \Big\{ \pi \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}) \;\Big|\; \pi = |\psi\rangle\langle\psi|, |\psi\rangle \in \mathcal{H}, \||\psi\rangle\| = 1 \Big\}, \tag{3.20}$$

mely egy $2d-2$ valós dimenziós részhalmaz a $\mathrm{Lin}(\mathcal{H})$ térben. Egy általános állapot tehát felírható

$$\rho = \sum_i w_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \tag{3.21}$$

módon. A klasszikus esettel ellentétben egy (nem tiszta) állapot tiszta konvex felbontása *nem* egyértelmű, végtelen sok különböző felbontása létezik. Létezik minimális számú tiszta állapot, amely a felbontáshoz szükséges, ezek száma az állapot rangja.

Egy másik speciális állapot a *fehér zaj*, mely $I/d \in \mathcal{D}$. A fehér zajra teljesül, hogy bármely obszervábilis esetén a mérési statisztika a klasszikus értelemben vett fehér zaj (teljesen véletlenszerű statisztika) lesz. A fehér zaj bizonyos értelemben az állapottér középpontja.

Az $A \in \mathcal{A}$ obszervábilis négyzete $A^2 = \sum_i a_i^2 |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$, valamint ennek várható értéke $\mathrm{Exp}_\rho(A^2) = \mathrm{Tr}(\rho A^2)$. Ily módon az A obszervábilis $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_d) \in \mathbb{C}^d$ mérési értékeinek a $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_d) \in \mathbb{C}^d$ mérési statisztika által meghatározott $\mathrm{Var}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a})$ varianciája operátorokkal is megfogalmazható,

$$\mathrm{Var}_\rho(A) := \mathrm{Exp}_\rho((A - \mathrm{Exp}_\rho(A)I)^2) = \mathrm{Exp}_\rho(A^2) - \mathrm{Exp}_\rho(A)^2 = \mathrm{Tr}(\rho A^2) - \mathrm{Tr}(\rho A)^2, \quad (3.22)$$

ami megegyezik a $\mathrm{Var}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a})$ kifejezéssel. Tiszta állapot esetén léteznek olyan obszervábilisek, amelyek varianciája 0, míg kevert állapotok esetén nem.

Megjegyezzük, hogy ha csak kommutáló obszervábiliseket veszünk figyelembe (például, ha csak ezek hozzáférhetők), akkor ezek egyidejűleg diagonalizálhatók, és így a kvantum valószínűségelmélet leegyszerűsödik a klasszikusra.

A legegyszerűbb kvantumrendszer a $d = 2$ dimenziós Hilbert térrel leírt *qubit*. Ekkor a $\mathcal{D}$ állapottér egy $\dim(\mathcal{D}) = 3$ dimenziós konvex test. Ahogy a klasszikus esetben, úgy itt is használható a $\mathrm{Lin}(\mathcal{H})$ természetes számítási bázisa, de célszerűbb bevezetni a fehér zajra centrált bázist. A $\mathrm{Lin}(\mathcal{H})$ tér ilyen bázisát (a Hilbert–Schmidt belső szorzat szerint ortonormáltan) az I és a *Pauli-operátorok* adják meg, $\left(\frac{I}{\sqrt{2}}, \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}}, \frac{\sigma_2}{\sqrt{2}}, \frac{\sigma_3}{\sqrt{2}}\right)$, amelyek szorzási szabálya

$$\sigma_\mu \sigma_\nu = \delta_{\mu\nu} I + i \sum_{\lambda=1}^{3} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \sigma_\lambda, \quad (3.23)$$

ahol $\varepsilon_{\mu\nu\lambda}$ a szokásos Lévi-Civita-szimbólumot jelöli. A Pauli-operátorok mátrix alakja

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

a kommutátoruk és az antikommutátoruk pedig

$$[\sigma_\mu, \sigma_\nu] = \sigma_\mu \sigma_\nu - \sigma_\nu \sigma_\mu = 2i \sum_{\lambda=1}^{3} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \sigma_\lambda, \quad (3.25)$$

$$\{\sigma_\mu, \sigma_\nu\} = \sigma_\mu \sigma_\nu + \sigma_\nu \sigma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} I. \quad (3.26)$$

Ebben a bázisban egy adott állapot paraméterezhető a $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$ *Bloch-vektorral*, mégpedig $\rho = \frac{1}{2}(I + \boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma})$ alakban, ahol $\boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma} = r_1\sigma_1 + r_2\sigma_2 + r_3\sigma_3$. Ez az affin leképezés megőrzi a konvex kombinációt, azaz $\rho(\sum_j w_j \boldsymbol{r}_j) = \sum_j w_j \rho(\boldsymbol{r}_j)$, ahol $w_j \geq 0$ és $\sum_j w_j = 1$, így ugyanaz lesz a geometria a Bloch-vektorok és az operátorok terében. A $\mathcal{D}$ állapottér alakjának meghatározásához tekintsük először a tiszta állapotokat, amelyekre fennáll a $\rho^2 = \rho$ egyenlőség, vagyis

$$\frac{1}{4}(I + \boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma})(I + \boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma}) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}(I + \boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma}). \quad (3.27)$$

A bal oldali kifejezés beszorozva $\frac{1}{4}(I + \|\boldsymbol{r}\|^2 + 2\boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma})$, amiből látható, hogy ez az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\|\boldsymbol{r}\|^2 = 1$. Így a $\mathcal{P}$ tiszta állapotok tere egy gömbfelület, míg a $\mathcal{D}$ teljes állapottér ennek konvex burka, tehát egy (tömör) gömb, a *Bloch-gömb*. A $\frac{1}{2}I$ fehér zaj a Bloch-gömb $\|\boldsymbol{r}\|^2 = 0$ középpontjának felel meg.

Határozzuk meg a ρ állapot sajátértékeit is. ρ sajátértékeinek megállapításához, tudnunk kell $\boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma}$ sajátértékeit, ehhez két dolgot figyelünk meg. Egyrészt $(\boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma})^2 = \|\boldsymbol{r}\|^2 I$, vagyis minden sajátérték négyzete $\|\boldsymbol{r}\|^2$. Másrészt $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma}) = 0$, tehát a sajátértékeknek egymás ellentettjeinek kell lenni. Így a $\boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma}$ sajátértékei $\pm\|\boldsymbol{r}\|$. A $\boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma}$ spektrális felbontása tehát

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma} = \|\boldsymbol{r}\||\phi_+\rangle\langle\phi_+| - \|\boldsymbol{r}\||\phi_-\rangle\langle\phi_-|. \quad (3.28)$$

Mivel $I = |\phi_+\rangle\langle\phi_+| + |\phi_-\rangle\langle\phi_-|$, ezért a spektrális projekciók kifejezhetők $|\phi_\pm\rangle\langle\phi_\pm| = (I \pm \frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma}}{\|\boldsymbol{r}\|})/2$ alakban is. Ezáltal a ρ állapot operátor spektrális felbontása

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}\Big(\big(1 + \|\boldsymbol{r}\|\big)|\phi_+\rangle\langle\phi_+| + \big(1 - \|\boldsymbol{r}\|\big)|\phi_-\rangle\langle\phi_-|\Big). \tag{3.29}$$

Ebből látható, hogy a ρ sűrűségoperátor sajátértékei $\big(1 \pm \|\boldsymbol{r}\|\big)/2$ lesznek, és a spektrális projekciói megegyeznek $\boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma}$ projekcióival.

Az obszervábiliseket szintén ki lehet fejezni a Pauli operátorokkal adott $\left(\frac{I}{\sqrt{2}}, \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}}, \frac{\sigma_2}{\sqrt{2}}, \frac{\sigma_3}{\sqrt{2}}\right)$ bázisban. Egy $A = \sum_{i=1}^{2} a_i|\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| \in \mathcal{A}$ obszervábilis írható $A = A_0 I + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\sigma}$ alakban, ahol ismét $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\sigma} = A_1\sigma_1 + A_2\sigma_2 + A_3\sigma_3$. Ha $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^3$, akkor az A obszervábilis spektrális felbontása a sűrűségoperátoréhoz hasonló módon nyerhető, például a sajátértékei $A_0 \pm \|\boldsymbol{A}\|$ lesznek.

A fő példa egy obszervábilisre a $\hat{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^3$, $\|\hat{\boldsymbol{v}}\| = 1$ irányú $S_{\hat{\boldsymbol{v}}} = \frac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{\sigma}$ spinoperátor. Ennek spektrális felbontása $S_{\hat{\boldsymbol{v}}} = \frac{\hbar}{2}|\alpha_+\rangle\langle\alpha_+| - \frac{\hbar}{2}|\alpha_-\rangle\langle\alpha_-|$, ahol a spektrális projekciók $|\alpha_\pm\rangle\langle\alpha_\pm| = (I \pm \hat{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{\sigma})/2$. Ha ezt egy $\rho = \frac{1}{2}(I + \boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma})$ állapotban mérjük, akkor a $+/-$ kimenetelekhez tartozó mérési statisztika

$$p_\pm = \mathrm{Tr}(\rho(\boldsymbol{r})|\alpha_\pm\rangle\langle\alpha_\pm|) = \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}(I + \boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma})\frac{1}{2}(I \pm \hat{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{\sigma})\right) = \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}(I \pm \hat{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{r}I) = \frac{1}{2}(1 \pm \hat{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{r}) \tag{3.30}$$

lesz, felhasználva a Pauli operátorok nyom-mentességét és szorzási szabályát. Ez azt jelenti, hogy a $\pm\frac{\hbar}{2}$ kimeneteleket $\frac{1}{2}(1 \pm \hat{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{r})$ valószínűségekkel kapjuk. Tehát még tiszta állapotban mérve sem biztos, hogy egyetlen biztos kimenet lesz, ehhez $\hat{\boldsymbol{v}}$ és $\boldsymbol{r}$ ugyanabba (vagy ellentétes) irányba kell, hogy mutasson. A Bloch-gömb és a mérési statisztika látható a 4. ábrán.

Látható, hogy a klasszikus bit a kvantumbit azon speciális esete, amikor $\hat{\boldsymbol{v}} = (0, 0, 1)$ és $\boldsymbol{r} = (0, 0, r)$, vagyis $\hat{\boldsymbol{v}}$ és $\boldsymbol{r}$ a σ_3, vagyis z irányba mutatnak. Ekkor az A és ρ mátrixai diagonálisak, és a ρ diagonális elemei a (p_+, p_-) klasszikus állapotot adják, melynek klasszikus r paramétere r_3 a kvantumos esetben (3.10). Általánosabban, ha a vizsgált obszervábilisek kommutálnak, akkor ezek egyidejűleg diagonalizálhatók, és így a kvantum valószínűségelmélet leegyszerűsödik a klasszikusra.

3.3. Klasszikus entrópiák Klasszikus valószínűségelméletben a $\boldsymbol{p} \in \Delta$ állapot bizonytalanságát a *Shannon entrópia* adja meg [3, 4],

$$S(\boldsymbol{p}) := -\sum_{i=1}^{d} p_i \ln p_i. \tag{3.31}$$

A Shannon entrópia értéke a $[0, \ln(d)]$ intervallumba esik, ha az $f(x) = -x\ln x$ függvényt jobbról folytonossá tesszük $x = 0$-ban, vagyis ha $f(0) := \lim_{x\to 0+} f(x) = 0$. Az entrópia pontosan akkor nulla, ha $\boldsymbol{p}$ tiszta állapot, és $\ln(d)$, ha az állapot a fehér zaj. A Shannon-entrópia a $\boldsymbol{p}$ kimenet-eloszlású forrás információtartalmát méri a *Shannon-féle zajmentes kódolási tétel* értelmében, mely szerint a kimeneti (bit-)kód optimális hossza L a Shannon-entrópiával adható meg,

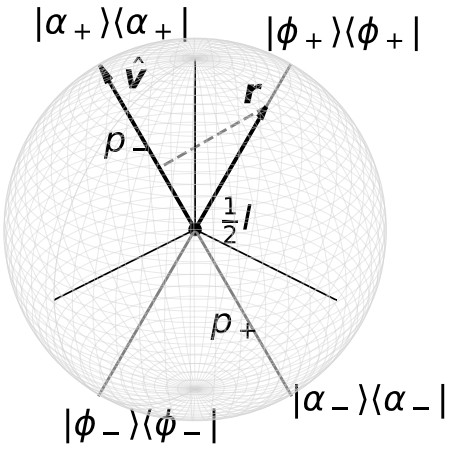
$$\frac{S(\boldsymbol{p})}{\ln(2)} \le L \le \frac{S(\boldsymbol{p})}{\ln(2)} + 1. \tag{3.32}$$

A Shannon-entrópia *konkáv* függvény, azaz

$$\sum_i w_i S(\boldsymbol{p}_i) \le S\Big(\sum_i w_i \boldsymbol{p}_i\Big), \tag{3.33}$$

ami azt fejezi ki, hogy az entrópia az információvesztéssel növekszik. Szintén fontos tulajdonsága, hogy a Shannon-entrópia *Schur-konkáv*, azaz

$$\boldsymbol{p} \preceq \boldsymbol{q} \quad \Longrightarrow \quad S(\boldsymbol{p}) \ge S(\boldsymbol{q}), \tag{3.34}$$



4. ábra. A qubit állapottere, a Bloch-gömb és S mérési statisztikája

ahol $\boldsymbol{p} \preceq \boldsymbol{q}$ azt jelenti, hogy $\boldsymbol{p}$-t majorálja $\boldsymbol{q}$. Ez azt jelenti, hogy $\sum_{i=1}^{k} p_i^{\downarrow} \leq \sum_{i=1}^{k} q_i^{\downarrow}$ minden k-ra, ahol $p_i^{\downarrow}$ és $q_i^{\downarrow}$ rendre $\boldsymbol{p}$ és $\boldsymbol{q}$ elemei csökkenő sorrendbe rendezve. A majorálás a két állapot kevertségét hasonlítja össze, pontosabban a kevertséget definiálhatjuk úgy, hogy a majorálással részben rendezett tulajdonság, így a Shannon entrópia is a kevertség mértékét jellemzi. Ezenfelül a Shannon entrópia szubadditív, erősen szubadditív és extenzív is. Az entrópia növekszik azokban a fizikai folyamatokban (csatornákban), amelyek a fehér zajt invariánsan hagyják, és nem változik meg, ha a folyamat csupán az i indexek permutálásával egyezik meg.

A $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \Delta$ állapotok megkülönböztethetőségét a *relatív entrópia* (vagy *Kullback–Leibler divergencia*) adja meg, ami

$$D(\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}) := \sum_{i=1}^{d} p_i(\ln(p_i) - \ln(q_i)), \tag{3.35}$$

ha $p_i = 0$ mindenhol i-re amire $q_i = 0$, egyébként ∞. Bizonyítható, hogy $D(\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}) \geq 0$, valamint $D(\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}) = 0$ pontosan akkor, ha $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}$, tehát a relatív entrópia értékkészlete a $[0, \infty]$. A relatív entrópia nem szimmetrikus, vagyis $D(\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}) \neq D(\boldsymbol{q}||\boldsymbol{p})$ általában, így ez egy divergencia, nem pedig metrika. A *Sanov-tétel* szerint a relatív entrópia kifejezi a $\boldsymbol{p}$ és $\boldsymbol{q}$ állapotok megkülönböztethetőségét, úgy, mint a hiba valószínűségének mintamérettel való csökkenési rátája a hipotézis tesztelésnél. A relatív entrópia együtt-konvex,

$$D\Big(\sum_i w_i \boldsymbol{p}_i \Big\| \sum_i w_i \boldsymbol{q}_i\Big) \leq \sum_i w_i D(\boldsymbol{p}_i||\boldsymbol{q}_i), \tag{3.36}$$

és minden fizikai folyamatban (csatornában) nem-növekvő. A relatív entrópiára alsó korlát adható az 1-normával, ez a *Pinsker-egyenlőtlenség*,

$$D(\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}) \geq \frac{1}{2}\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}\|_1^2. \tag{3.37}$$

3.4. Kvantum entrópiák A kvantum elméletben egy $\rho \in \mathcal{D}$ állapot bizonytalanságát a *von Neumann entrópia* adja meg [3, 4],

$$S(\rho) := -\operatorname{Tr}(\rho \ln(\rho)). \tag{3.38}$$

Ha az állapot sajátérték-felbontása $\rho = \sum_i \eta_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$, akkor a von Neumann-entrópia

$$S(\rho) = -\sum_i \eta_i \ln(\eta_i) = S(\boldsymbol{\eta}), \tag{3.39}$$

ami a $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_d)$ sajátértékek klasszikus Shannon-entrópiája. Ebből következik, hogy a von Neumann entrópia a $[0, \ln(d)]$ tartományban vesz fel értékeket. A von Neumann entrópia pontosan akkor nulla, ha ρ egy tiszta állapot, és pontosan akkor $\ln(d)$, ha az állapot a fehér zaj. A von Neumann-entrópia kifejezi a ρ által leírt forrás kvantuminformáció-tartalmát, mivel a kvantum esetben is megfogalmazható egy kódolási tétel, a *Schumacher-féle zajmentes kódolási tétel*. A von Neumann-entrópia *konkáv*, azaz

$$\sum_i w_i S(\rho_i) \leq S\Big(\sum_i w_i \rho_i\Big), \tag{3.40}$$

ami kifejezi, hogy az entrópia nő az információvesztéssel. A von Neumann-entrópia fontosabb tulajdonsága, hogy *Schur-konkáv*, azaz

$$\rho \preceq \sigma \quad \Longrightarrow \quad S(\rho) \geq S(\sigma), \tag{3.41}$$

ahol $\rho \preceq \sigma$ azt jelenti, hogy ρ-t majorálja σ, amit a spektrumok majorálása definiál, $\boldsymbol{\eta}(\rho) \preceq \boldsymbol{\eta}(\sigma)$. A majorálás a két állapot kevertségét hasonlítja össze, így a von Neumann-entrópia is az állapot kevertségét jellemzi. Továbbá a von Neumann-entrópia szubadditív, erősen szubadditív és extenzív is. Valamint növekszik azokban a fizikai folyamatokban (kvantum csatornákban), amelyek megőrzik a fehér zajt, továbbá nem változik unitér csatornák esetén, $S(U\rho U^\dagger) = S(\rho)$.

A $\rho, \sigma \in \mathcal{D}$ állapotok megkülönböztethetőségt az *Umegaki-féle kvantum relatív entrópia* (vagy *kvantum Kullback–Leibler divergencia*) adja meg, ami

$$D(\rho||\sigma) := \operatorname{Tr}\big(\rho(\ln(\rho) - \ln(\sigma))\big), \tag{3.42}$$

ha $\operatorname{Supp}(\rho) \subseteq \operatorname{Supp}(\sigma)$, és ∞ egyébként. Bizonyítható, hogy $D(\rho||\sigma) \geq 0$, valamint $D(\rho||\sigma) = 0$ pontosan akkor, ha $\rho = \sigma$, tehát a kvantum relatív entrópia a $[0, \infty]$ tartományban vehet fel értékeket. A kvantum relatív entrópia nem szimmetrikus, ezért egy divergencia, nem pedig metrika. A *kvantum Sanov-tétel* szerint a kvantum relatív entrópia kifejezi a ρ és σ állapotok megkülönböztethetőségét, úgy, mint a hiba valószínűségének mintamérettel való csökkenési rátája kvantum hipotézis tesztelésnél. A kvantum relatív entrópia *együtt-konvex*,

$$D\Big(\sum_i w_i \rho_i \Big\| \sum_i w_i \sigma_i\Big) \leq \sum_i w_i D(\rho_i||\sigma_i), \tag{3.43}$$

és minden fizikai folyamatban (kvantum csatornában) nem-növekvő, valamint nem változik unitér csatornákban $D(U\rho U^\dagger||U\sigma U^\dagger) = D(\rho||\sigma)$. A kvantum relatív entrópiára alsó korlát adható az 1-normával, ez a *kvantum Pinsker egyenlőtlenség*,

$$D(\rho||\sigma) \geq \frac{1}{2}\|\rho-\sigma\|_1^2. \tag{3.44}$$

4. Kétrész-rendszerek és korrelációk

Egy összetett rendszer két vagy több részrendszerből áll, ezek a részrendszerek egyenként tetszőleges méretűek lehetnek. Ebben a dolgozatban két részrendszerből álló összetett rendszereket vizsgálunk. Az összetett rendszereket a részrendszereket leíró terek tenzorszorzatával írjuk le, így jellemezni tudjuk az egyszerre mérhető obszervábilisek kimenetpárjait, míg megtartjuk a lineáris struktúrát az egész rendszeren.

4.1. Klasszikus kétrész-rendszerek Legyen két rendszerünk, amelyeket az $\mathbb{A}_1 := \mathbb{C}^{d_1}$ és $\mathbb{A}_2 := \mathbb{C}^{d_2}$ obszervábilis algebrák írnak le, ekkor az obszervábilisek

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{d_1} a_i \boldsymbol{\chi}_{1,i} \in \mathbb{A}_1, \quad \boldsymbol{b} = \sum_{j=1}^{d_2} b_j \boldsymbol{\chi}_{2,j} \in \mathbb{A}_2 \tag{4.1}$$

alakúak, ahol a karakterisztikus obszervábilisekre teljesül, hogy $(\boldsymbol{\chi}_{1,i})_j = \delta_{ij}$ és $(\boldsymbol{\chi}_{2,j})_k = \delta_{jk}$, mint a 3.1. fejezetben. Továbbá a részrendszerek állapotai

$$\boldsymbol{p}_1 = \sum_{i=1}^{d_1} p_{1,i} \boldsymbol{\delta}_{1,i} \in \Delta_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \sum_{j=1}^{d_2} p_{2,j} \boldsymbol{\delta}_{2,j} \in \Delta_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}, \tag{4.2}$$

ahol a tiszta állapotok $(\boldsymbol{\delta}_{1,i})_j = \delta_{ij}$, $(\boldsymbol{\delta}_{2,j})_k = \delta_{jk}$, mint korábban. Így a rendszerek obszervábiliseinek várható értékei az állapotokban

$$\mathrm{Exp}_{\boldsymbol{p}_1}(\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{p}_1|\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{d_1} p_{1,i} a_i, \quad \mathrm{Exp}_{\boldsymbol{p}_2}(\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{p}_2|\boldsymbol{b}) = \sum_{j=1}^{d_2} p_{2,j} b_j, \tag{4.3}$$

lesznek, megfelelően a 3.1. fejezetnek.

A fenti egyenletek a két külön részrendszert írják le. De hogyan írjuk le a változók szorzatának mérését, ami egy együttes mérés a teljes rendszeren? Legyen az együttes obszervábilis

$$\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} = \sum_i \sum_j a_i b_j \boldsymbol{\chi}_{1,i} \otimes \boldsymbol{\chi}_{2,j} \in \mathbb{A}_1 \otimes \mathbb{A}_2, \tag{4.4}$$

ami a $\boldsymbol{a} \in \mathbb{A}_1$ és a $\boldsymbol{b} \in \mathbb{A}_2$ obszervábilisek tenzorszorzata. Ez a *szorzat obszervábilis*, ami $a_i b_j$ értékeket vesz fel. A $\boldsymbol{\chi}_{ij} := \boldsymbol{\chi}_{1,i} \otimes \boldsymbol{\chi}_{2,j}$ karakterisztikus obszervábilis az az obszervábilis, ami 1 értéket vesz fel, ha $\boldsymbol{a}$ mérésekor az i-edik, *és* $\boldsymbol{b}$ mérésekor a j-edik kimenet következik be, egyébként pedig 0-t. Ha p_{ij} az *együttes valószínűsége* annak, hogy $\boldsymbol{a}$ mérésekor az i-edik, $\boldsymbol{b}$ mérésekor pedig a j-edik kimenet következik be, akkor az egész rendszer állapota

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{d_1} \sum_{j=1}^{d_2} p_{ij} \boldsymbol{\delta}_{ij} \in \Delta \subset \mathbb{R}^{d_1} \otimes \mathbb{R}^{d_2}. \tag{4.5}$$

Ha a rendszer a $\boldsymbol{\delta}_{ij}$ tiszta állapotban van, akkor $\boldsymbol{a}$ mérésénél az i-edik kimenet és $\boldsymbol{b}$ mérésénél a j-edik kimenet következik be biztosan, a többi kombináció valószínűsége 0. Az eddigiekhez hasonlóan megadhatjuk a szorzat obszervábilis várható értékét,

$$\mathrm{Exp}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^{d_1} \sum_{j=1}^{d_2} p_{ij} a_i b_j, \tag{4.6}$$

és a $\boldsymbol{\chi}_{ij}$ együttes karakterisztikus obszervábilis várható értéke adja az adott együttes kimenet valószínűségét,

$$\mathrm{Exp}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\chi}_{ij}) = \sum_{i,j} p_{ij} (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{\chi}_{ij}) = p_{ij}. \tag{4.7}$$

Megjegyzendő, hogy nemcsak $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} \in \mathbb{A} := \mathbb{A}_1 \otimes \mathbb{A}_2$ alakú szorzat obszervábilisek léteznek, hanem ezek tetszőleges lineáris kombinációja is értelmezhető, így a teljes rendszer egy általános obszervábilise

$$\boldsymbol{c} = \sum_i \sum_j c_{ij} \boldsymbol{\chi}_{ij} \in \mathbb{A}. \tag{4.8}$$

Ennek várható értéke

$$\mathrm{Exp}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{c}) = \sum_{i,j} p_{ij} c_{ij}. \tag{4.9}$$

Ilyen általános obszervábilis írja le például két megkülönböztethető dobókocka értékeinek összegét. Később korrelációkat fogunk vizsgálni, ehhez csak a jóval egyszerűbb szorzat obszervábilisekre lesz szükség.

Meg szeretnénk határozni a részrendszerek állapotát, azaz a *redukált*, vagy *marginális állapotokat*, az egész rendszer állapotából. Ha $\boldsymbol{a} \in \mathbb{A}_1$ az 1. részrendszer obszervábilise, akkor ennek alakja a teljes rendszer obszervábiliseinek terén $\boldsymbol{a} \otimes \mathbf{1} \in \mathbb{A}$, ahol $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$. A $\mathrm{Red}_2(\boldsymbol{p})$ redukált állapot az az állapot, ami megadja az 1. részrendszer obszervábiliseinek várható értékét a közös állapoton, tehát

$$\mathrm{Exp}_{\mathrm{Red}_2(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{a}) := \mathrm{Exp}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a} \otimes \mathbf{1}). \tag{4.10}$$

A jobb oldal kifejtve

$$\mathrm{Exp}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a} \otimes \mathbf{1}) = \sum_{i,j} p_{ij} a_i 1 = \sum_i \Big(\sum_j p_{ij} \Big) a_i, \tag{4.11}$$

így azonosítjuk a redukált állapotot,

$$\mathrm{Red}_2(\boldsymbol{p}) = \Big(\sum_j p_{ij} \Big) \boldsymbol{\delta}_{1,i} \in \Delta_1. \tag{4.12}$$

Hasonló módon megkapható a 2. részrendszerre vett redukált állapot is,

$$\mathrm{Red}_1(\boldsymbol{p}) = \Big(\sum_i p_{ij} \Big) \boldsymbol{\delta}_{2,j} \in \Delta_2. \tag{4.13}$$

Így a redukált állapotok komponensei a szokásos marginális valószínűségek. A redukált állapotok meghatározása lineáris funkcionálok formájában is megfogalmazható. Legyen $\mathrm{Red} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ a $\mathrm{Red}(\boldsymbol{p}) := (\mathbf{1}|\boldsymbol{p}) = \sum_i p_i$ lineáris funkcionál, amivel $\mathrm{Red}_2 := I \otimes \mathrm{Red} : \Delta \to \Delta_1$ és $\mathrm{Red}_1 := \mathrm{Red} \otimes I : \Delta \to \Delta_2$.

Nézzük meg röviden egy két bitből álló klasszikus rendszer állapotát. Célszerű a Pauli-bázist használni mindkét biten. Egy általános állapot alakja

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{4} \big(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + r\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes s\boldsymbol{\sigma} + t(\boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma}) \big), \tag{4.14}$$

ahol $r, s, t \in \mathbb{R}$ a megfelelő kifejtési együtthatók. Ebben a formában jól láthatóak a részrendszereket leíró (lokális) paraméterek, r és s, és a redukált állapotok könnyen meghatározhatók,

$$\boldsymbol{p}_1 := \mathrm{Red}_2(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2} \big(\mathbf{1} + r\boldsymbol{\sigma} \big), \qquad \boldsymbol{p}_2 := \mathrm{Red}_1(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2} \big(\mathbf{1} + s\boldsymbol{\sigma} \big). \tag{4.15}$$

A t kifejtési együttható pedig a klasszikus állapotot leíró információ nemlokális részét tartalmazó paraméter.

4.2. Kvantum kétrész-rendszerek A kvantumelméletben a részrendszerek állapotai és az obszervábilisei a Hilbert-tereken ható operátorok. Legyen két rendszerünk, amelyeket az $\mathcal{A}_1 = \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_1)$ és $\mathcal{A}_2 = \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_2)$ obszervábilis algebrák írnak le, ekkor az obszervábilisek

$$A = \sum_i a_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| = \sum_i a_i P_{1,i} \in \mathcal{A}_1, \quad B = \sum_j b_j |\beta_j\rangle\langle\beta_j| = \sum_j b_j P_{2,j} \in \mathcal{A}_2 \tag{4.16}$$

alakúak, ahol a $P_{1,i} = |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$ és $P_{2,j} = |\beta_j\rangle\langle\beta_j|$ 1 rangú projekciók a karakterisztikus obszervábilisek. Továbbá a részrendszerek állapotai

$$\rho_1 = \sum_i w_{1,i} |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \in \mathcal{D}_1, \quad \rho_2 = \sum_j w_{2,j} |\phi_j\rangle\langle\phi_j| \in \mathcal{D}_2, \tag{4.17}$$

ahol a tiszta állapotok $|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ és $|\phi_j\rangle\langle\phi_j|$ 1 rangú projekciók. Ekkor az obszervábilisek várható értékei az állapotokban

$$\mathrm{Exp}_{\rho_1}(A) = \mathrm{Tr}(\rho_1 A), \quad \mathrm{Exp}_{\rho_2}(B) = \mathrm{Tr}(\rho_2 B) \tag{4.18}$$

lesznek, megfelelően a 3.2. fejezetnek.

A fenti egyenletek a két külön részrendszert írják le. De hogyan írjuk le a változók szorzatának mérését, ami egy együttes mérés a teljes rendszeren? Legyen az együttes obszervábilis

$$A \otimes B = \sum_{i,j} a_i b_j P_{1,i} \otimes P_{2,j} \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \tag{4.19}$$

ami az $A \in \mathcal{A}_1$ és a $B \in \mathcal{A}_2$ obszervábilisek tenzorszorzata. A $P_{ij} := P_{1,i} \otimes P_{2,j}$ karakterisztikus obszervábilis az az obszervábilis, ami 1 értéket vesz fel, ha A mérésekor az i-edik kimenet *és* B mérésekor a j-edik kimenet következik be, egyébként pedig 0-t. A *teljes rendszer állapota*

$$\rho = \sum_i w_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \in \mathcal{D} \subset \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2. \tag{4.20}$$

Ha a rendszer a $|\psi\rangle\langle\psi| = P_{ij}$ tiszta állapotban van, akkor A mérésénél az i-edik kimenet és B mérésénél a j-edik kimenet következik be biztosan, a többi kombináció nem. Ugyanakkor más tiszta állapotok is léteznek adott $A \otimes B$ párra, amelyekre ez nem igaz. Az eddigiekhez hasonlóan megadhatjuk a szorzat obszervábilis várható értékét,

$$\mathrm{Exp}_\rho(A \otimes B) = (\rho | A \otimes B) = \sum_{k,i,j} w_k a_i b_j |\langle\psi_k | \alpha_i \otimes \beta_j\rangle|^2, \tag{4.21}$$

és a P_{ij} együttes karakterisztikus obszervábilis várható értéke adja meg az együttes kimenet valószínűségét,

$$\mathrm{Exp}_\rho(P_{ij}) = \sum_k w_k |\langle\psi_k | \alpha_i \otimes \beta_j\rangle|^2 = p_{ij}. \tag{4.22}$$

Megjegyzendő, hogy nemcsak $A \otimes B \in \mathcal{A}$ szorzat obszervábilisek léteznek, hanem ezek tetszőleges lineáris kombinációja is értelmezhető, így teljes rendszer egy általános obszervábilise

$$C = \sum_i c_i Q_i \in \mathbb{A}, \tag{4.23}$$

ahol $Q_i = |\gamma_i\rangle\langle\gamma_i|$ az együttes karakterisztikus obszervábilisek, melyek, a klasszikus esettel ellentétben, nem feltétlenül szorzatok. Egy általános obszervábilis várható értéke

$$\mathrm{Exp}_\rho(C) = (\rho | C) = \sum_i q_i c_i, \tag{4.24}$$

ahol $q_i = (\rho | Q_i)$ a mérési statisztika. Később korrelációkat fogunk vizsgálni, ehhez csak a jóval egyszerűbb szorzat obszervábilisekre lesz szükség.

Meg szeretnénk határozni a részrendszerek állapotát, azaz a *redukált*, vagy *marginális állapotokat*, az egész rendszer állapotából. Ha $A \in \mathcal{A}_1$ az 1. részrendszer obszervábilise, akkor ennek

alakja a teljes rendszer obszervábiliseinek terén $A\otimes I\in\mathcal{A}$, ahol I az egység operátor. A $\mathrm{Red}_2(\rho)$ redukált állapot az az állapot, amely megadja az 1. részrendszer obszervábiliseinek várható értékét az együttes állapoton, azaz

$$\mathrm{Exp}_{\mathrm{Red}_2(\rho)}(A) := \mathrm{Exp}_\rho(A\otimes I). \tag{4.25}$$

Kiderül, hogy a redukálást, mint leképezést a részleges nyom (partial trace, lásd (2.9). egyenlet) adja meg, mint

$$\mathrm{Red}_2(\rho) = \mathrm{Tr}_2(\rho)\in\mathcal{D}_1, \tag{4.26}$$

Hasonló módon megkapható a 2. részrendszerre vett redukált állapot is,

$$\mathrm{Red}_1(\rho) = \mathrm{Tr}_1(\rho)\in\mathcal{D}_2. \tag{4.27}$$

Nézzük meg röviden egy két qubitből álló kvantum rendszer állapotát, célszerű a Pauli-bázist használni mindkét qubiten. Egy általános állapot alakja

$$\rho = \frac{1}{4}\big(I\otimes I + \boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma}\otimes I + I\otimes \boldsymbol{s}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{t}(\boldsymbol{\sigma}\otimes\boldsymbol{\sigma})\big), \tag{4.28}$$

ahol $\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}\in\mathbb{R}^3$ és $\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^3\otimes\mathbb{R}^3$ tartalmazzák az egyes kifejtési együtthatókat, és használjuk a $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{\sigma}\otimes\boldsymbol{\sigma}) := \sum_{\mu\nu} t_{\mu\nu}\sigma_\mu\otimes\sigma_\nu$ jelölést. Ebben a formában jól láthatóak a részrendszereket leíró (lokális) paraméterek, $\boldsymbol{r}$ és $\boldsymbol{s}$ Bloch-vektorok, így a redukált állapotok könnyen meghatározhatók,

$$\rho_1 := \mathrm{Tr}_2(\rho) = \frac{1}{2}(I+\boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma}), \qquad \rho_2 := \mathrm{Tr}_1(\rho) = \frac{1}{2}(I+\boldsymbol{s}\boldsymbol{\sigma}). \tag{4.29}$$

A $\boldsymbol{t}$ mátrix pedig a kvantumállapotot leíró információ nemlokális részét tartalmazza.

4.3. Klasszikus korreláció Az $\boldsymbol{a}\in\mathcal{A}_1$ és $\boldsymbol{b}\in\mathcal{A}_2$ *obszervábilis-pár korrelálatlan* a $\boldsymbol{p}\in\Delta$ állapottal leírt rendszerben, ha a szorzatuk várható értéke a várható értékük szorzata,

$$\mathrm{Exp}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}) = \mathrm{Exp}_{\boldsymbol{p}_1}(\boldsymbol{a})\,\mathrm{Exp}_{\boldsymbol{p}_2}(\boldsymbol{b}). \tag{4.30}$$

A $\boldsymbol{p}\in\Delta$ *állapot korrelálatlan*, ha bármely obszervábilis-pár korrelálatlan, azaz

$$\mathrm{Exp}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}) = \mathrm{Exp}_{\boldsymbol{p}_1}(\boldsymbol{a})\,\mathrm{Exp}_{\boldsymbol{p}_2}(\boldsymbol{b}) \qquad \text{minden } \boldsymbol{a}\in\mathbb{A}_1,\ \boldsymbol{b}\in\mathbb{A}_2 \text{ esetén.} \tag{4.31}$$

Ez ekvivalens azzal, hogy az állapot szorzatállapot,

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1\otimes\boldsymbol{p}_2, \tag{4.32}$$

vagyis a redukált állapotainak szorzata, amit a 4.6. fejezetben fogunk megmutatni. (A hagyományos valószínűségszámításban ebben az esetben azt mondjuk, hogy a két valószínűségi változó független. Itt azonban általánosabb nézőpontot veszünk fel, mivel az obszervábiliseket nem rögzítjük előre.) A szorzatállapot komponensei a redukált állapotok komponenseinek szorzatai $p_{ij} = p_{1,i}p_{2,j}$. Továbbá könnyen látható, hogy minden tiszta állapot korrelálatlan, mivel a teljes rendszer bármely tiszta állapota a részrendszerek tiszta állapotainak szorzata, $(\boldsymbol{\delta}_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} = (\boldsymbol{\delta}_{1,i})_k(\boldsymbol{\delta}_{2,j})_l$. Ekkor a korrelálatlan állapotok állapottere

$$\Delta_{\mathrm{unc}} := \Big\{\boldsymbol{p}_1\otimes\boldsymbol{p}_2 \;\Big|\; \boldsymbol{p}_1\in\Delta_1, \boldsymbol{p}_2\in\Delta_2\Big\}\subset\Delta, \tag{4.33}$$

továbbá a teljes állapottér ezek konvex burka,

$$\Delta = \mathrm{Conv}(\{\boldsymbol{\delta}_{ij}\mid i=1,2,\ldots,d_1; j=1,2,\ldots,d_2\}) = \mathrm{Conv}(\Delta_{\mathrm{unc}}), \tag{4.34}$$

vagyis bármely állapot előállítható korrelálatlan (tenzorszorzat) állapotok statisztikus keverékeként (konvex kombinációjaként).

4.4. Kvantum korreláció A korrelálatlan obszervábilisek definíciója formálisan megegyezik a klasszikus esettel. Az $A \in \mathcal{A}_1$ és $B \in \mathcal{A}_2$ *obszervábilis-pár korrelálatlan* a $\rho \in \mathcal{D}$ állapottal leírt rendszerben, ha a szorzatuk várható értéke a várható értékük szorzata,

$$\mathrm{Exp}_\rho(A \otimes B) = \mathrm{Exp}_{\rho_1}(A)\,\mathrm{Exp}_{\rho_2}(B). \tag{4.35}$$

A $\rho \in \mathcal{D}$ *állapot korrelálatlan*, ha bármely obszervábilis-pár korrelálatlan, azaz

$$\mathrm{Exp}_\rho(A \otimes B) = \mathrm{Exp}_{\rho_1}(A)\,\mathrm{Exp}_{\rho_2}(B) \qquad \text{minden } A \in \mathcal{A}_1,\ B \in \mathcal{A}_2 \text{ esetén.} \tag{4.36}$$

Ez ekvivalens azzal, hogy az állapot szorzatállapot, azaz

$$\rho = \rho_1 \otimes \rho_2, \tag{4.37}$$

vagyis a redukált állapotainak szorzata, amit a 4.7. fejezetben fogunk megmutatni. A szorzatállapot komponensei a redukált állapotok komponenseinek szorzatai, $\rho_{ii'jj'} = \rho_{1,ii'}\rho_{2,jj'}$. Fontos megjegyezni, hogy itt, a klasszikus esettel ellentétben, a tiszta állapotok nem mindig korrelálatlanok. Ez vezet az összefonódás (entanglement) jelenségéhez, melyet a következő alfejezetben adunk meg. (A nem szorzat típusú tiszta állapot egyik példája a Bell-állapot, amelyet a számítási bázisban a $\big(|00\rangle + |11\rangle\big)/\sqrt{2}$ vektor ad meg.) Ekkor a korrelálatlan állapotok állapottere

$$\mathcal{D}_{\mathrm{unc}} := \Big\{ \rho_1 \otimes \rho_2 \;\Big|\; \rho_1 \in \mathcal{D}_1,\ \rho_2 \in \mathcal{D}_2 \Big\} \subset \mathcal{D}. \tag{4.38}$$

Mivel azonban léteznek korrelált tiszta állapotok, ezért

$$\mathcal{D} = \mathrm{Conv}(\mathcal{P}) \supsetneq \mathrm{Conv}(\mathcal{D}_{\mathrm{unc}}), \tag{4.39}$$

ami szintén az összefonódás jelenségére utal.

4.5. Kvantum összefonódás A kvantum esetben a korrelálatlan állapotokon kívül egy másik fontos kategória is létezik. A (4.39). egyenletben láttuk, hogy léteznek olyan (korrelált) állapotok is, amelyek nem állíthatók elő korrelálatlan állapotok keverékeként. Ez az *összefonódás (entanglement)* definíciója [6].

A $\rho \in \mathcal{D}$ állapot *szeparálható*, ha előállítható korrelálatlan (szorzat) állapotok keverékeként. A szeparálható állapotok tere eszerint a korrelálatlan állapotok konvex burka,

$$\mathcal{D}_{\mathrm{sep}} := \mathrm{Conv}(\mathcal{D}_{\mathrm{unc}}) = \Big\{ \sum_k w_k \rho_{1,k} \otimes \rho_{2,k} \;\Big|\; w_k \geq 0,\ \sum_k w_k = 1,\ \rho_{1,k} \in \mathcal{D}_1,\ \rho_{2,k} \in \mathcal{D}_2 \Big\} \subset \mathcal{D}. \tag{4.40}$$

Ezek azok az állapotok, amelyek *lokálisan, klasszikus kommunikációval* (LOCC) előállíthatóak, ahol a klasszikus kommunikáció teszi lehetővé a statisztikus keverést. Azokat az állapotokat, amelyek nem szeparálhatók, azaz nem írhatók fel ilyen formában, *összefonódott (entangled)* állapotoknak nevezzük. Ezek előállításához kvantumos kommunikációra van szükség.

4.6. Klasszikus korrelációs mértékek Az $\boldsymbol{a} \in \mathbb{A}_1$ és $\boldsymbol{b} \in \mathbb{A}_2$ *obszervábilisek kovarianciája* a $\boldsymbol{p} \in \Delta$ állapotú rendszerben

$$\mathrm{Cov}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) := \mathrm{Exp}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) - \mathrm{Exp}_{\boldsymbol{p}_1}(\boldsymbol{a})\ \mathrm{Exp}_{\boldsymbol{p}_2}(\boldsymbol{b}). \tag{4.41}$$

Ennek ekvivalens alakja

$$\mathrm{Cov}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{g}|\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}), \tag{4.42}$$

ahol a

$$\boldsymbol{g} := \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1 \otimes \boldsymbol{p}_2 \tag{4.43}$$

korrelációs tenzor az állapot korrelációját írja le. A két képlet ekvivalens, hiszen

$$\mathrm{Exp}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) - \mathrm{Exp}_{\boldsymbol{p}_1}(\boldsymbol{a})\ \mathrm{Exp}_{\boldsymbol{p}_2}(\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{p}|\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{p}_1|\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{p}_2|\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1 \otimes \boldsymbol{p}_2|\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}),$$

ahol a belső szorzat tulajdonságait használtuk fel. Megjegyezzük, hogy $\boldsymbol{g} = 0$ pontosan akkor, ha az állapot korrelálatlan, vagyis $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 \otimes \boldsymbol{p}_2$.

Most már könnyen megmutathatjuk, hogy a (4.31) egyenletben megadott korrelálatlan állapotok pontosan a (4.32) egyenletben megadott szorzatállapotok, azaz

$$\mathrm{Cov}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{A}_1, \boldsymbol{b} \in \mathbb{A}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{p} \in \Delta_{\mathrm{unc}}. \tag{4.44}$$

A „⇐” irány belátásához vegyük észre, hogy ha $\boldsymbol{p} \in \Delta_{\mathrm{unc}}$ akkor $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 \otimes \boldsymbol{p}_2$, így

$$\mathrm{Cov}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1 \otimes \boldsymbol{p}_2 | \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{0} | \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) = 0,$$

ami bármely $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ obszervábilis-párra teljesül. A „⇒” irány esetén, ha $\mathrm{Cov}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 0$, akkor

$$\mathrm{Cov}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1 \otimes \boldsymbol{p}_2 | \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) = 0, \forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{A}_1, \boldsymbol{b} \in \mathbb{A}_2,$$

amiből következik, hogy $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1 \otimes \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{0}$, mivel az $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$ elemi tenzorok kifeszítik a teljes rendszer obszervábilis algebráját, és egy vektor pontosan akkor nulla, ha a skaláris szorzata minden vektorral nulla.

Az $\boldsymbol{a} \in \mathbb{A}_1$ és $\boldsymbol{b} \in \mathbb{A}_2$ *obszervábilisek korrelációja*, a $\boldsymbol{p} \in \Delta$ állapotú rendszerben

$$\mathrm{Corr}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) := \frac{\mathrm{Cov}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{\sqrt{\mathrm{Var}_{\boldsymbol{p}_1}(\boldsymbol{a})\ \mathrm{Var}_{\boldsymbol{p}_2}(\boldsymbol{b})}}. \tag{4.45}$$

Ez a kovariancia normált változata, amelyre $-1 \leq \mathrm{Corr}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \leq 1$ teljesül. Esetünkben célszerűbb a kovariancia használatánál maradni, mivel a kovariancia az obszervábilisekben lineáris. Másrészt az obszervábilis korrelációnak ez a fajta normalizálása amúgy sem lesz hasznos számunkra.

Megadhatjuk továbbá magának az *állapotnak a korrelációját*, függetlenül az obszervábilisektől. A $\boldsymbol{p} \in \Delta$ állapottal leírt rendszerben a *korreláció relatív entrópiája*, vagy egyszerűen csak az *állapot korrelációja*

$$C(\boldsymbol{p}) := \min_{\boldsymbol{q} \in \Delta_{\mathrm{unc}}} D(\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}), \tag{4.46}$$

ahol $D(\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q})$ a relatív entrópia, lásd a (3.35) egyenletet. Ez a mennyiség kifejezi, hogy az adott állapot mennyire különbözik a korrelálatlan állapotoktól a relatív entrópiával mérve. Ez egy *korrelációmérték*, hiszen lokális műveletekre nézve nemnövekvő, tükrözve azt, hogy a korrelációt lokálisan nem lehet létrehozni vagy erősíteni. (Ez abból következik, hogy a relatív entrópia minden csatornára csökkenő, és a lokális műveletek a korrelálatlan állapotok halmazát önmagába képezik.) Ez egy *hű korrelációmérték*, vagyis

$$\boldsymbol{p} \in \Delta_{\mathrm{unc}} \quad \Longleftrightarrow \quad C(\boldsymbol{p}) = 0, \tag{4.47}$$

ami a relatív entrópia tulajdonságaiból következik. Tiszta állapotokra $C = 0$, hiszen klasszikus esetben a tiszta állapotok mindig korrelálatlanok.

A (4.46) képletben szereplő minimalizálás elvégezhető explicit módon is. Bebizonyítható (lásd [2]), hogy $C(\boldsymbol{p})$ minimuma $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}_1 \otimes \boldsymbol{p}_2$ esetén adódik. Ebből következik, hogy

$$C(\boldsymbol{p}) = D(\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}_1 \otimes \boldsymbol{p}_2) = S(\boldsymbol{p}_1) + S(\boldsymbol{p}_2) - S(\boldsymbol{p}). \tag{4.48}$$

Megjegyezzük, hogy ezt más kontextusban *kölcsönös információnak (mutual information)* is nevezik.

Az állapot korrelációja alsó korlátot ad bármely (megfelelően normált) obszervábilis-pár kovarianciájára [8],

$$\frac{1}{2}\left|\mathrm{Cov}_{\boldsymbol{p}}\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|_\infty}, \frac{\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|_\infty}\right)\right|^2 \leq C(\boldsymbol{p}), \qquad \text{minden } \boldsymbol{a} \in \mathbb{A}_1,\ \boldsymbol{b} \in \mathbb{A}_2 \text{ esetén}, \tag{4.49}$$

ahol $\frac{\boldsymbol{a}}{||\boldsymbol{a}||_\infty}$ és $\frac{\boldsymbol{b}}{||\boldsymbol{b}||_\infty}$ a normált obszervábilisek. Az ilyen obszervábilisek értékei az egységkörlapon helyezkednek el. A (4.49) egyenlőtlenség levezetése

$$\begin{aligned} |\operatorname{Cov}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| &= |(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1\otimes\boldsymbol{p}_2|\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})| \\ &\le \|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1\otimes\boldsymbol{p}_2\|_1\|\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\|_\infty \\ &\le \sqrt{2D(\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}_1\otimes\boldsymbol{p}_2)}\|\boldsymbol{a}\|_\infty\|\boldsymbol{b}\|_\infty, \end{aligned}$$

ahol a (2.13) Hölder-egyenlőtlenséget használtuk $p=1$ és $q=\infty$ paraméterekre, valamint a (3.37) Pinsker-egyenlőtlenséget. A tagok átrendezése után, és a korreláció második alakját használva a (4.48) egyenletben megkapjuk a (4.49)-t.

4.7. Kvantum korrelációs mértékek Az $A\in\mathcal{A}_1$ és $B\in\mathcal{A}_2$ *obszervábilisek kovarianciája* a $\rho\in\mathcal{D}$ állapotú rendszerben

$$\operatorname{Cov}_\rho(A,B) := \operatorname{Exp}_\rho(A\otimes B) - \operatorname{Exp}_{\rho_1}(A)\operatorname{Exp}_{\rho_2}(B). \tag{4.50}$$

Ennek ekvivalens alakja

$$\operatorname{Cov}_\rho(A,B) = (\gamma|A\otimes B), \tag{4.51}$$

ahol a

$$\gamma := \rho-\rho_1\otimes\rho_2 \tag{4.52}$$

korrelációs tenzor az állapot korrelációját írja le. A két képlet ekvivalens, hiszen

$$\operatorname{Exp}_\rho(A\otimes B) - \operatorname{Exp}_{\rho_1}(A)\operatorname{Exp}_{\rho_2}(B) = (\rho|A\otimes B) - (\rho_1|A)(\rho_2|B) = (\rho-\rho_1\otimes\rho_2|A\otimes B),$$

ahol a belső szorzat tulajdonságait használtuk fel. Megjegyezzük, hogy $\gamma=0$ pontosan akkor, ha az állapot korrelálatlan, vagyis ha $\rho=\rho_1\otimes\rho_2$.

Most már könnyen megmutathatjuk, hogy a (4.36) egyenletben megadott korrelálatlan állapotok pontosan a (4.37) egyenletben megadott szorzatállapotok, azaz

$$\operatorname{Cov}_\rho(A,B)=0 \quad \forall A\in\mathcal{A}_1, B\in\mathcal{A}_2 \quad\Longleftrightarrow\quad \rho\in\mathcal{D}_{\text{unc}}. \tag{4.53}$$

A „$\Leftarrow$” irány belátásához vegyük észre, ha $\rho\in\mathcal{D}_{\text{unc}}$, akkor $\rho=\rho_1\otimes\rho_2$, így

$$\operatorname{Cov}_\rho(A,B) = (\rho-\rho_1\otimes\rho_2|A\otimes B) = (0|A\otimes B) = 0,$$

ami bármely A,B obszervábilis-párra teljesül. A „$\Rightarrow$” irány esetén, ha $\operatorname{Cov}_\rho(A,B)=0$, akkor

$$\operatorname{Cov}_\rho(A,B) = (\rho-\rho_1\otimes\rho_2|A\otimes B) = 0, \forall A\in\mathcal{A}_1, B\in\mathcal{A}_2,$$

amiből következik, hogy $\rho-\rho_1\otimes\rho_2=0$, mivel az $A\otimes B$ elemi tenzorok kifeszítik a teljes rendszer obszervábilis algebráját, és egy vektor pontosan akkor nulla, ha a skaláris szorzata minden vektorral nulla.

Az $A\in\mathcal{A}_1$ és $B\in\mathcal{A}_2$ *obszervábilisek korrelációja* a $\rho\in\mathcal{D}$ állapotú rendszerben

$$\operatorname{Corr}_\rho(A,B) := \frac{\operatorname{Cov}_\rho(A,B)}{\sqrt{\operatorname{Var}_{\rho_1}(A)\operatorname{Var}_{\rho_2}(B)}}. \tag{4.54}$$

Ez a kovariancia normált változata, amelyre $-1\le\operatorname{Corr}_\rho(A,B)\le 1$. Mindazonáltal a kvantum esetben is a korreláció mérésére a kovariancia használata kényelmesebb, mivel az lineáris az $A\in\mathcal{A}_1$ és $B\in\mathcal{A}_2$ obszervábilisekben.

Megadhatjuk továbbá magának az *állapotnak a korrelációját*, függetlenül az obszervábilisektől. A $\rho\in\mathcal{D}$ állapottal leírt rendszerben a *korreláció relatív entrópiája*, vagy egyszerűen csak az *állapot korrelációja* definiálható, mint

$$C(\rho) := \min_{\tau\in\mathcal{D}_{\text{unc}}} D(\rho||\tau), \tag{4.55}$$

ahol $D(\rho||\tau)$ a kvantum relatív entrópia, lásd a (3.42) egyenletet. Ez a mennyiség kifejezi, hogy az adott állapot mennyire különbözik a korrelálatlan állapotoktól a relatív entrópiával mérve. Ez egy

korrelációmérték, hiszen lokális műveletekre nézve nemnövekvő, tükrözve azt, hogy korrelációt lokálisan nem lehet létrehozni vagy erősíteni. (Ez abból következik, hogy a kvantum relatív entrópia minden kvantumcsatornára csökkenő, és a lokális műveletek a korrelálatlan állapotok halmazát önmagába képezik.) Ez egy *hű korrelációmérték*, azaz

$$\rho \in \mathcal{D}_{\text{unc}} \quad \Longleftrightarrow \quad C(\rho) = 0, \tag{4.56}$$

ami a relatív entrópia tulajdonságaiból következik. Megjegyezzük, hogy C tiszta állapotokra nem feltétlenül nulla, mivel a kvantum esetben tiszta állapotok is lehetnek korreláltak.

A (4.55) képletben szereplő minimalizálás elvégezhető explicit módon is. Bebizonyítható (lásd [2]), hogy $C(\rho)$ minimuma a $\tau = \rho_1 \otimes \rho_2$ esetén adódik. Ebből következik, hogy

$$C(\rho) = \min_{\tau \in \mathcal{D}_{\text{unc}}} D(\rho||\tau) = D(\rho||\rho_1 \otimes \rho_2) = S(\rho_1) + S(\rho_2) - S(\rho). \tag{4.57}$$

Megjegyezzük, hogy ezt más kontextusban *kvantum kölcsönös információnak* is nevezik. A $\pi = |\psi\rangle\langle\psi|$ tiszta állapotok esetén a korreláció

$$C(\pi) = 2S(\pi_1) = 2S(\pi_2), \tag{4.58}$$

vagyis a korreláció a kétszerese a redukált állapot entrópiájának, mivel $S(\pi) = 0$, valamint a redukált állapotok nemnulla sajátértékei multiplicitással együtt megegyeznek

Az állapot korrelációja alsó korlátot ad bármely (megfelelően normált) obszervábilis-pár kovarianciájára [8],

$$\frac{1}{2}\left|\operatorname{Cov}_\rho\Big(\frac{A}{\|A\|_\infty}, \frac{B}{\|B\|_\infty}\Big)\right|^2 \leq C(\rho), \qquad \text{minden } A \in \mathcal{A}_1,\ B \in \mathcal{A}_2 \text{ esetén}, \tag{4.59}$$

ahol $\frac{A}{\|A\|_\infty}$ és $\frac{B}{\|B\|_\infty}$ a normált obszervábilisek. Az ilyen obszervábilisek értékei az egységkörlapon helyezkednek el. A (4.59) egyenlőtlenség levezetése

$$\begin{aligned} |\operatorname{Cov}_\rho(A,B)| &= |(\rho - \rho_1 \otimes \rho_2 | A \otimes B)| \\ &\leq \|\rho - \rho_1 \otimes \rho_2\|_1 \|A \otimes B\|_\infty \\ &\leq \sqrt{2D(\rho||\rho_1 \otimes \rho_2)}\|A\|_\infty \|B\|_\infty, \end{aligned}$$

ahol a (2.13) Hölder-egyenlőtlenséget (2.13) használtuk $p = 1$ és $q = \infty$ paraméterekre, valamint a (3.44) Pinsker-egyenlőtlenséget. A tagok átrendezése után, és a korreláció második alakját használva a (4.57) egyenletben megkapjuk a (4.59)-t.

4.8. Kvantum összefonódási mértékek Számszerűsíthetjük az összefonódás nagyságát is hasonló módon, mint az előző alfejezetben a korreláció esetében. A $\rho \in \mathcal{D}$ állapotú rendszer összefonódása leírható az *összefonódás relatív entrópiájával*,

$$E(\rho) := \min_{\tau \in \mathcal{D}_{\text{sep}}} D(\rho||\tau), \tag{4.60}$$

ahol $D(\rho||\tau)$ ismét a kvantum relatív entrópia, a (3.42) egyenlet szerint. Ez a mennyiség kifejezi, hogy az adott állapot mennyire különbözik a szeparábilis állapotoktól a kvantum relatív entrópiával mérve. Ez egy *összefonódásmérték*, hiszen lokális műveletekre és klasszikus kommunikációra nézve nemnövekvő, türközve azt, hogy összefonódás lokális művelettel és klasszikus kommunikációval nem hozható létre, illetve nem erősíthető. (Ez abból következik, hogy a kvantum relatív entrópia minden kvantumcsatornában csökken, és a lokális műveletek és a klasszikus kommunikációk a szeparábilis állapotok halmazát önmagába képezik le.) Ez egy *hű összefonódásmérték*, azaz

$$\rho \in \mathcal{D}_{\text{sep}} \quad \Longleftrightarrow \quad E(\rho) = 0, \tag{4.61}$$

ami a relatív entrópia tulajdonságaiból következik

A korrelációval ellentétben, a (4.60) képletben szereplő minimalizálás nem hajtható végre explicit módon. Ugyanakkor bizonyított (lásd [5]), hogy a $\pi = |\psi\rangle\langle\psi|$ tiszta állapotok esetén az összefonódás relatív entrópiája

$$E(\pi) = S(\pi_1) = S(\pi_2), \tag{4.62}$$

vagyis a redukált állapot entrópiájával egyenlő. Ezt más kontextusban *összefonódási entrópiának* is nevezik, ez az n/m aszimptotikus arány, mely m darab tiszta állapot (lokális műveletekkel és klasszikus kommunikációval való) n darab Bell-állapotba kódolását fejezi ki.

5. Eredmények

Meg szeretnénk vizsgálni a kovariancia és a korreláció kapcsolatát, valamint hogy ez hogyan kapcsolódik a kovariancia eltűnéséhez. Ehhez tekintünk egyszerű klasszikus és kvantum rendszereket. Továbbá elemezzük a kovariancia eltűnésének feltételeit általánosan és különböző speciális esetekben is, a korrelációs tenzorok szinguláris érték felbontásával.

5.1. Két-bit rendszer kovarianciája Egy két-bit rendszer állapota felírható általánosan (4.5) alakban,

$$\boldsymbol{p} = p_{00}\boldsymbol{\delta}_{00} + p_{01}\boldsymbol{\delta}_{01} + p_{10}\boldsymbol{\delta}_{10} + p_{11}\boldsymbol{\delta}_{11} = (p_{00}, p_{01}, p_{10}, p_{11}), \tag{5.1}$$

de érdemesebb a klasszikus Pauli-bázist használni. Ezzel egy általános állapot felírható (4.14) alakban

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p} &= \frac{1}{4}\big(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} + r\boldsymbol{\sigma}\otimes\mathbf{1} + s\mathbf{1}\otimes\boldsymbol{\sigma} + t\boldsymbol{\sigma}\otimes\boldsymbol{\sigma}\big)\\ &= \frac{1}{4}\big((1,1,1,1) + r(1,1,-1,-1) + s(1,-1,1,-1) + t(1,-1,-1,1)\big)\\ &= \frac{1}{4}\big(1+r+s+t, 1+r-s-t, 1-r+s-t, 1-r-s+t\big),\end{aligned} \tag{5.2}$$

valamint a redukáltak állapotai (4.15)

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + r\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}(1+r, 1-r), \quad \boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + s\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}(1+s, 1-s). \tag{5.3}$$

Fontos, hogy nem akármilyen r, s, t paraméterek esetén lesz ez állapot, ugyanúgy, ahogy a p_{ij} paraméterek sem lehetnek tetszőlegesek, nemnegatívnak és 1-összegűnek kell lenniük. Ehhez először kifejezzük az r, s és t változókat a p_{ij} valószínűségek segítségével,

$$r = 2(p_{00}+p_{01}) - 1, \quad s = 2(p_{00}+p_{10}) - 1, \quad t = 2(p_{00}+p_{11}) - 1. \tag{5.4}$$

A tiszta állapotok ($\boldsymbol{\delta}_{00} = (1,0,0,0)$ stb.) megadják a 3-dimenziós állapottér (szimplex) extremális pontjait az r, s és t paraméterekkel koordinátázott térben. Ezek konvex burka lesz az állapottérnek megfelelő, r, s és t paraméterek számára megengedett tartomány ebben a koordinátázásban. A $p_{ij} \geq 0$ feltételekből közvetlen is megkapható ez a tartomány, de az r, s és t paraméterekben kapott lineáris egyenlőtlenség rendszer ekkor csatolt lesz,

$$\pm(r+s) - 1 \leq t \leq 1 \pm (r-s), \tag{5.5a}$$

$$\pm(r+t) - 1 \leq s \leq 1 \pm (r-t), \tag{5.5b}$$

$$\pm(t+s) - 1 \leq r \leq 1 \pm (t-s), \tag{5.5c}$$

mely egy tetraédert határoz meg.

Lássuk be, hogy 2 bit esetén már egy nemtriviális (két különböző értéket felvevő) obszervábilis-pár nulla kovarianciája garantálja, hogy maga az állapot korrelálatlan. Az $\boldsymbol{a} \in \mathbb{A}_1$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{A}_2$ obszervábilisek *nemtriviálisak*, ha $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \not\sim \mathbf{1}$. Ekkor bármely ilyen obszervábilis-párra ($d_1, d_2 = 2$ esetén) teljesül, hogy

$$\mathrm{Cov}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{p} \in \Delta_{\mathrm{unc}}, \tag{5.6}$$

vagy a megfelelő korrelációs mértékekkel

$$\mathrm{Cov}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0 \quad\Longleftrightarrow\quad C(\boldsymbol{p})=0. \tag{5.7}$$

Megjegyzendő, hogy az $\Longleftarrow$ irány nyilvánvaló a (4.44) egyenlet alapján, az $\Longrightarrow$ irány az ami bizonyítandó. A kovariancia értékét keressük, ezért a szükség van a $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1\otimes\boldsymbol{p}_2$ korrelációs tenzor és az $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}$ obszervábilis alakjára. Ehhez $\boldsymbol{p}_1\otimes\boldsymbol{p}_2$ elemeit $\boldsymbol{p}_1$ és $\boldsymbol{p}_2$ Kronecker-szorzatával kapjuk,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}_1\otimes\boldsymbol{p}_2&=\frac{1}{4}\big(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}+r\boldsymbol{\sigma}\otimes\mathbf{1}+s\mathbf{1}\otimes\boldsymbol{\sigma}+rs\boldsymbol{\sigma}\otimes\boldsymbol{\sigma}\big)\\&=\frac{1}{4}\big((1+r)(1+s),(1+r)(1-s),(1-r)(1+s),(1-r)(1-s)\big)\\&=\frac{1}{4}(1+r+s+rs,1+r-s-rs,1-r+s-rs,1-r-s+rs).\end{aligned} \tag{5.8}$$

Innen

$$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1\otimes\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{4}(t-rs)\boldsymbol{\sigma}\otimes\boldsymbol{\sigma}=\frac{t-rs}{4}(1,-1,-1,1). \tag{5.9}$$

Valamint $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}$ elemeit ismét Kronecker-szorzással kapjuk,

$$\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}=(a_1,a_2)\otimes(b_1,b_2)=(a_1b_1,a_1b_2,a_2b_1,a_2b_2). \tag{5.10}$$

Ezekkel kifejezve a kovariancia

$$\mathrm{Cov}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{g}|\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})=\frac{t-rs}{4}(\boldsymbol{\sigma}|\boldsymbol{a})(\boldsymbol{\sigma}|\boldsymbol{b})=\frac{t-rs}{4}(b_1-b_2)(a_1-a_2)\overset{!}{=}0. \tag{5.11}$$

Ebből látható, hogy vagy valamelyik obszervábilisnek kellene triviálisnak lennie (azaz $a_1=a_2$ vagy $b_1=b_2$), vagy pedig $t-rs=0$. Az előbbi lehetőség nem releváns a nemtriviális obszervábilisekre vonatkozó feltétel mellett, így az (5.11) feltétele csakis $t=rs$ esetén teljesül, ami ekvivalens azzal, hogy az állapot korrelálatlan (szorzat), lásd (5.9).

5.2. Bit-trit rendszer kovarianciája Következő lépésként megvizsgáljuk, hogy az (5.6) egyenlet érvényes lehet-e nagyobb rendszerek esetén is. A legegyszerűbb ilyen eset, ha $d_1=3$ és $d_2=2$. Felmerül a kérdés, hogy találhatunk-e olyan korrelált állapotot, amelyben bizonyos nemtriviális obszervábilis-párhoz nulla kovariancia tartozik.

Tegyük fel, hogy a teljes és redukált állapotok

$$\boldsymbol{p}=(0,x,y,0,0,z), \tag{5.12}$$

$$\boldsymbol{p}_1=(x,y,z),\quad \boldsymbol{p}_2=(y,x+z), \tag{5.13}$$

ahol a szabad paraméterekre $0\le x,y,z\in\mathbb{R}$ és $x+y+z=1$ teljesül. A redukált állapotok tenzorszorzata ekkor

$$\boldsymbol{p}_1\otimes\boldsymbol{p}_2=\big(xy,x(x+z),y^2,y(x+z),yz,z(x+z)\big). \tag{5.14}$$

Az általános obszervábilisek, valamint tenzorszorzatuk,

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\quad \boldsymbol{b}=(b_1,b_2), \tag{5.15}$$

$$\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}=(a_1b_1,a_1b_2,a_2b_1,a_2b_2,a_3b_1,a_3b_2). \tag{5.16}$$

A kovarianciához az állapotból a $\boldsymbol{g}$ korrelációs tenzorra adódik, hogy

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}&=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1\otimes\boldsymbol{p}_2\\&=\big(-xy,x(1-x-z),y(1-y),-y(x+z),-yz,z(1-x-z)\big)\\&=\big(-xy,xy,y(x+z),-y(x+z),-yz,yz\big).\end{aligned} \tag{5.17}$$

Látható, hogy $\boldsymbol{p}$ csak akkor lehet korrelálatlan, ha vagy $y = 0$, vagy $x = z = 0$. A kérdés tehát az, hogy a kovariancia lehet-e nulla korrelált állapot esetén is. A kovariancia kifejezhető, mint

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) &= (\boldsymbol{g}|\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})\\ &= -a_1b_1xy - a_1b_2xy + a_2b_1y(x+z) - a_2b_2y(x+z) - a_3b_1yz + a_3b_2yz\\ &= y\big(x(-a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 - a_2b_2) + z(a_2b_1 - a_2b_2 - a_3b_1 + a_3b_2)\big)\\ &= y(b_2-b_1)\big(x(a_1-a_2) + z(a_3-a_2)\big),\end{aligned} \tag{5.18}$$

amelyből ismét látható, hogy a nemtriviális $\boldsymbol{b}$ bit obszervábilis nem vezethet nulla eredményre. Ugyanakkor $x(a_1 - a_2) + z(a_3 - a_2)$ lehet nulla nemtriviális háromértékű obszervábilis esetén is. Így a két bitnél már némileg nagyobb rendszer esetén sem teljesül az (5.6) összefüggés. Ezt egy konkrét példán is szemléltethetjük: legyen $\boldsymbol{a} = (1, 0, -1)$ és $\boldsymbol{b} = (1, -1)$, amely kvantumos 1-es és 1/2-es spin z-korreláció mérésének megfelelő klasszikus diszkrét probléma. Ebben az esetben, ha az állapot alakja $\boldsymbol{p} = (0, x, y, 0, 0, x)$ és $x, y \neq 0$, akkor a kovariancia minden esetben eltűnik, annak ellenére, hogy $\boldsymbol{p}$ korrelált.

Mivel a kisebb rendszerek beágyazhatók nagyobb dimenziós rendszerekbe, arra a következtetésre juthatunk, hogy az (5.6) egyenlet csak a kétbites rendszerek esetén érvényes. Más szóval, nemtriviális $\boldsymbol{a} \in \mathbb{A}_1$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{A}_2$ obszervábilisekre d_1 vagy $d_2 > 2$ esetén

$$\mathrm{Cov}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 0 \quad \underset{(\Longleftarrow)}{\not\Longrightarrow} \quad \boldsymbol{p} \in \Delta_{\mathrm{unc}}. \tag{5.19}$$

vagy a megfelelő korrelációs mértékekkel

$$\mathrm{Cov}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 0 \quad \underset{(\Longleftarrow)}{\not\Longrightarrow} \quad C(\boldsymbol{p}) = 0. \tag{5.20}$$

5.3. Klasszikus kovariancia maximuma A kovariancia képlete átírható egy kifejezőbb alakra,

$$\mathrm{Cov}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \sum_{k=1}^{d_{\min}} \eta_k(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{a})(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{b}), \tag{5.21}$$

ahol $\eta_k \geq 0$, $\boldsymbol{x}_k \in \mathbb{A}_1$, $\boldsymbol{y}_k \in \mathbb{A}_2$ a $\boldsymbol{g}$ korrelációs tenzor szinguláris értékei, illetve bal és jobboldali szinguláris vektorai, melyek ortonormált rendszereket alkotnak. Ennek levezetése

$$\mathrm{Cov}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{g}|\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}) = \Big(\sum_k \eta_k \boldsymbol{x}_k\otimes\boldsymbol{y}_k\Big|\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\Big) = \sum_k \eta_k(\boldsymbol{x}_k\otimes\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}) = \sum_k \eta_k(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{a})(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{b}),$$

ahol felhasználtuk a $\boldsymbol{g} = \sum_k \eta_k \boldsymbol{x}_k \otimes \boldsymbol{y}_k$ szinguláris érték felbontást. Ha normált obszervábilis-párokat veszünk (2-normával értve, $\|\boldsymbol{a}\|_2 = \sum_i a_i^* a_i = 1$), akkor ebből az alakból korlátot adhatunk a kovatiancia értékére,

$$0 \leq \big|\,\mathrm{Cov}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\big| \leq \eta_{\max}, \tag{5.22}$$

ahol $\eta_{\max}$ a maximális szinguláris érték. Ez abból látható, hogy ha az obszervábilis-pár megegyezik valamelyik szinguláris vektor-párral, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}_k$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}_k$, akkor a kovariancia felveszi a megfelelő szinguláris értéket, $\mathrm{Cov}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}_k) = \eta_k$. Ha $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{x}_k$, akkor a kovariancia is ellentétes lesz, $\mathrm{Cov}_{\boldsymbol{p}}(-\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}_k) = -\eta_k$, ezek az obszervábilisek antikorreláltak. Az (5.21) alakból az is egyértelmű, hogy a 0 érték minden állapotban felvehető, olyan megfelelően választott $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}$ párral, melyre igaz, hogy minden k-ra $\boldsymbol{a}$ vagy $\boldsymbol{b}$ merőleges a megfelelő k-adik szinguláris vektorra. Másként, ha $\boldsymbol{a}$ bizonyos k indexekre az $\boldsymbol{x}_k$-k által kifeszített altérbe esik, míg $\boldsymbol{b}$ a többi k indexre az $\boldsymbol{y}_k$-k által kifeszített altérbe. A lényeg az, hogy $\boldsymbol{g}$ szinguláris vektorai a részrendszerekben megadják azokat az irányokat, melyek *csak egymással korreláltak az ortogonális készleteken belül*. Továbbá azt is fontos látni, hogy ha ezekből az irányokból kimozdulunk, a kovariancia nemtriviálisan fog

változni, és bizonyos esetekben el is tűnhet, nemeltűnő korreláció esetén is. Általános esetben, nem csak normált obszervábilisekre, a kovariancia korlátai

$$0 \leq \left|\operatorname{Cov}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\right| \leq \eta_{\max}\|\boldsymbol{a}\|_2\|\boldsymbol{b}\|_2. \tag{5.23}$$

Az (5.21) képlet szemléltetésére vegyünk egy korrelált két-bit állapotot,

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{2}(1,0,0,1) = \frac{1}{4}\big(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} + t\boldsymbol{\sigma}\otimes\boldsymbol{\sigma}\big), \tag{5.24}$$

ahol $-1 \leq t \leq 1$ az (5.5) határok miatt. Innen a redukált állapotok

$$\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{2}(1,1). \tag{5.25}$$

A Pauli bázis használatával a korrelációs tenzorra adódik, hogy

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1\otimes\boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{4}\Big(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} + t\boldsymbol{\sigma}\otimes\boldsymbol{\sigma}\Big) - \frac{1}{4}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} = \frac{t}{4}\boldsymbol{\sigma}\otimes\boldsymbol{\sigma} = \frac{t}{2}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{2}}\otimes\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{2}}, \tag{5.26}$$

ahol ez már $\boldsymbol{g}$ szinguláris érték felbontása, előjel erejéig. (Itt t lehet negatív is, ezért ez a szó szoros értelmében nem szinguláris érték felbontás, de esetünkben célszerűbb használni. A szinguláris érték felbontás $t<0$ esetben $\frac{|t|}{2}\frac{-\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{2}}\otimes\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{2}}$ lenne.) Így a kovariancia

$$\operatorname{Cov}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \frac{1}{4}(\boldsymbol{\sigma}|\boldsymbol{a})(\boldsymbol{\sigma}|\boldsymbol{b}) = \frac{t}{4}(a_2-a_1)(b_2-b_1), \tag{5.27}$$

mely az (5.11) képlet speciális esete. Tehát ha $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{2}}$ és $\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{2}}$, akkor megkapjuk a maximális abszolút értékű (és most egyetlen nem nulla) szinguláris értéket, $\frac{t}{2}$-t. Vagy ha az egyik részrendszeren ellentétes obszervábilist mérünk, $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{2}}$ és $\boldsymbol{b} = -\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{2}}$, akkor az ellentettjét, $-\frac{t}{2}$-t. Ha pedig legalább az egyik részrendszer obszervábilise nem rendelkezik $\boldsymbol{\sigma}$ irányú komponenssel, akkor a kovariancia 0-t fog adni, viszont ekkor ez triviális obszervábilis lesz, például $a_1 = a_2$. A kovariancia nagysága általánosan 0 és $\frac{|t|}{2}\|\boldsymbol{a}\|_2\|\boldsymbol{b}\|_2$ közé fog esni,

$$0 \leq \left|\operatorname{Cov}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\right| \leq \frac{|t|}{2}\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}\sqrt{|b_1|^2+|b_2|^2}. \tag{5.28}$$

5.4. Azonos obszervábilisek mérése a klasszikus részrendszereken Vizsgáljuk azt a tipikus esetet, amikor mindkét részrendszeren ugyanazt az obszervábilist mérjük. Vegyünk $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{a}$ alakú általános nemtriviális obszervábiliseket és vizsgáljuk meg milyen korrelált $\boldsymbol{p}$ állapotú rendszer esetén állhat fenn, hogy a kovariancia eltűnik,

$$\operatorname{Cov}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = 0. \tag{5.29}$$

Először tekintsünk két bitet ($d_1 = d_2 = 2$), ekkor az (5.11) képletbe behelyettesítve a $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{a}$ obszervábilist kapjuk, hogy

$$\operatorname{Cov}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = \frac{t-rs}{4}(a_1-a_2)^2. \tag{5.30}$$

Tehát, nemtriviális obszervábilisek mellett nem lehet nulla a kovariancia korrelált állapotra. Ez természetesen csak az (5.6) állítás egy speciális esete.

Most vegyünk egy két-trit rendszert ($d_1 = d_2 = 3$) a $\boldsymbol{p}$ állapottal és $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{a}$ obszervábilissel

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2 \end{bmatrix}. \tag{5.31}$$

(Itt a „mátrix" forma csak kényelmi jelölés, tehát $\boldsymbol{p}$-re és $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{a}$-ra mint 9 komponensű vektorra kell gondolni. Valamint ebben a jelölésben két ilyen „mátrix" skaláris szorzata a Hilbert-Schmidt mátrix skaláris szorzatot jelenti.) Ekkor a kovariancia

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{g}|\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{a}) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3\\ a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3\\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2\end{bmatrix}\\ = g_{11}a_1^2+g_{22}a_2^2+g_{33}a_3^2+a_1a_2(g_{12}+g_{21})+a_1a_3(g_{13}+g_{31})+a_2a_3(g_{23}+g_{32})\overset{!}{=}0.\end{aligned} \tag{5.32}$$

Ez az egyenlet minden $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{a}$ obszervábilis esetén teljesül, ha a $\boldsymbol{g}$ korrelációs tenzor antiszimmetrikus, $g_{ij}=-g_{ji}$ $(i,j\in\{1,2,3\})$, azaz, ha

$$\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 0 & z & -y\\ -z & 0 & x\\ y & -x & 0\end{bmatrix}, \tag{5.33}$$

ahol $x,y,z\in\mathbb{R}$ valós paraméterek. Ez utólag nem is meglepő, hiszen az $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{a}$ szimmetrikus tenzor, kontrakciója egy antiszimmetrikus tenzoral eltűnik. Tehát egy ilyen $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_1\otimes\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{g}$ állapot esetén $(\boldsymbol{g}|\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{a})=0$ akármilyen $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ redukált állapotokra és $\boldsymbol{a}$ obszervábilisekre. Viszont $\boldsymbol{p}$ és $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ nem független változók, bármely antiszimmetrikus $\boldsymbol{g}$ nem ad állapotot, így ezt még kezelni kell. Ehhez vegyük az előbbi

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{p}_1=(p_1,p_2,p_3),\quad \boldsymbol{p}_2=(q_1,q_2,q_3),\\ &\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_1\otimes\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{g}=\begin{bmatrix} p_1q_1 & p_1q_2+z & p_1q_3-y\\ p_2q_1-z & p_2q_2 & p_2p_3+x\\ p_3q_1+y & p_3q_2-x & p_3q_3\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{5.34}$$

ansatzot az állapotra, ahol $\boldsymbol{g}$ antiszimmetrikus (5.33). A $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_1\otimes\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{g}$ alakú állapotok esetén is a redukáltakra természetesen teljesülnie kell, hogy $\sum_i p_i=1$ és $\sum_i q_i=1$. Ebben a mátrixos kényelmi jelölésben a redukáláskor az egy sorban (vagy egy oszlopban) levő komponenseket adjuk össze. Így a

$$p_1=p_1q_1+p_1q_2+z+p_1q_3-y \quad\Longrightarrow\quad 0=p_1(q_1+q_2+q_3-1)+z-y=z-y, \tag{5.35}$$

$$p_2=p_2q_1-z+p_2q_2+p_2q_3+x \quad\Longrightarrow\quad 0=p_2(q_1+q_2+q_3-1)-z+x=x-z, \tag{5.36}$$

$$p_3=p_3q_1+y+p_3q_2-x+p_3q_3 \quad\Longrightarrow\quad 0=p_3(q_1+q_2+q_3-1)+y-x=y-x \tag{5.37}$$

egyenletek adódnak az x,y,z paraméterekre. A másik redukált állapot számolásánál ezekkel ekvivalens egyenletek adódnak. Az egyenletekből következik, hogy $x=y=z$ feltételnek teljesülnie kell a paraméterekre, hogy $\boldsymbol{p}$ ténylegesen állapotot adjon meg. Továbbá $\boldsymbol{p}$ nemnegatív, tehát minden komponensének nagyobbnak kell lennie, mint 0. Így $\boldsymbol{p}$ csak az $|x|\le p_iq_j$ minden $i\neq j$ paraméterértékek esetén alkot tényleges állapotot. Vagyis az ansatz alakja

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{p}_1=(p_1,p_2,p_3)\in\Delta_1,\quad \boldsymbol{p}_2=(q_1,q_2,q_3)\in\Delta_2,\\ &\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_1\otimes\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{g}=\begin{bmatrix} p_1q_1 & p_1q_2+x & p_1q_3-x\\ p_2q_1-x & p_2q_2 & p_2p_3+x\\ p_3q_1+x & p_3q_2-x & p_3q_3\end{bmatrix},\quad |x|\le p_iq_j\ (i\neq j).\end{aligned} \tag{5.38}$$

Tehát azt kaptuk, hogy ha $p_i,q_i\neq 0$ (vagyis egyik részrendszert sem írhatjuk le a teljes tér megszorításával effektíve bitként), és ekkor $x\neq 0$, akkor az (5.38) két-trit állapot korrelált ($\boldsymbol{g}\neq 0$, mert $x\neq 0$), és ez a korreláció kimutathatatlan, ha a két részrendszeren megegyező obszervábiliseket mérünk.

Vizsgáljuk meg azt is, hogy mi lehet a kovariancia lehetséges maximuma az (5.38) állapotban általános (2-normára nézve normált) $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}$ obszervábilis mellett. Ehhez a

$$\boldsymbol{g} = x\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.39}$$

korrelációs tenzor szinguláris érték felbontását kell meghatározni. Ezt a (2.24) képlettel végezhetjük el, tehát először

$$\boldsymbol{g}^\dagger = x\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{g}^\dagger\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}\boldsymbol{g}^\dagger = x^2\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{5.40}$$

Innen $\boldsymbol{g}^\dagger\boldsymbol{g}$ sajátérték problémáját megoldva a $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = 3x^2$ sajátértékeket kapjuk. Így a szinguláris értékek 0, $x\sqrt{3}$, $x\sqrt{3}$, a felbontás pedig

$$\boldsymbol{g} = \frac{x}{\sqrt{3}}\cdot\begin{bmatrix}1\\ \omega^*\\ \omega\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-i & -i\omega & -i\omega^*\end{bmatrix} + \frac{x}{\sqrt{3}}\cdot\begin{bmatrix}1\\ \omega\\ \omega^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i & i\omega^* & i\omega\end{bmatrix} + 0\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}, \tag{5.41}$$

ahol $\omega = e^{2\pi/3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

A szinguláris vektorok szemléletesek, ha a $\boldsymbol{g}$ korrelációs tenzorra, mint a $(-x,-x,-x)$ vektorral való megszokott vektoriális szorzást leíró operátorra gondolunk. A nulla szinguláris értékhez tartozó irány a vektorral párhuzamos, míg a másik kettő arra „merőleges". Látható, hogy a bal és jobboldali szinguláris vektorok komplex értékekkel is rendelkeznek, ebből és az (5.21) képletből következik, hogy kizárólag valós értékű obszervábilisekkel elérhetetlen a kovariancia maximális $x/\sqrt{3}$ értéke, és ezáltal az állapotban rejlő teljes korreláció is.

5.5. Két-qubit rendszer kovarianciája Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogy létezhet-e az (5.6) egyenlethez hasonló eredmény kvantum rendszerek esetén. Ehhez egy két-qubit rendszert tekintünk, amely a legkisebb lehetséges nemtriviális kvantum rendszer. A kvantum rendszerek tulajdonságait kihasználhatjuk, ha olyan állapotokat vizsgálunk, amelyek nem kommutálnak az obszervábilisekkel. Vegyük a teljes rendszer (4.28) egy speciális állapotát,

$$\rho := \frac{1}{4}\big(I\otimes I + r\sigma_1\otimes I + I\otimes s\sigma_1 + t\sigma_1\otimes\sigma_1\big), \tag{5.42}$$

és a redukáltakat (4.29)

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(I + r\sigma_1), \quad \rho_2 = \frac{1}{2}(I + s\sigma_1) \tag{5.43}$$

alakban. A $\sigma_1 = \left[\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right]$ Pauli-mátrix behelyettesítésével kiírhatjuk az állapot mátrixát,

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} + r\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\right)\\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&s&r&t\\s&1&t&r\\r&t&1&s\\t&r&s&1\end{bmatrix},\end{aligned} \tag{5.44}$$

valamint a redukáltakét is,

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&r\\r&1\end{bmatrix}, \quad \rho_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&s\\s&1\end{bmatrix}. \tag{5.45}$$

Az r, s, t paraméterek lehetséges értékeire ρ pozitív szemidefinitsége ad kritériumot. A ρ mátrix lokális forgatásokkal diagonalizálható (a két qubit x irányának z irányba való forgatásával), és ekkor visszakapjuk a klasszikus két-bit állapotot (5.2), melynek értékei a sajátértékek, ezek nemnegatívsága adja a feltételt. Így ebben az esetben is az (5.5) egyenlőtlenségek adják meg a paraméterek határait egy tényleges fizikai állapotban.

A $\gamma = \rho - \rho_1 \otimes \rho_2$ korrelációs tenzor kiszámításához szükségünk van a $\rho_1 \otimes \rho_2$ tenzorszorzatra, mely

$$\rho_1 \otimes \rho_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & s & r & rs \\ s & 1 & rs & r \\ r & rs & 1 & s \\ rs & r & s & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.46}$$

Innen a korrelációs tenzor

$$\gamma = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & s & r & t \\ s & 1 & t & r \\ r & t & 1 & s \\ t & r & s & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & s & r & rs \\ s & 1 & rs & r \\ r & rs & 1 & s \\ rs & r & s & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & t-rs \\ 0 & 0 & t-rs & 0 \\ 0 & t-rs & 0 & 0 \\ t-rs & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.47}$$

Ha z irányú obszervábiliseket választunk, azaz ha $A = \left[\begin{smallmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{smallmatrix}\right]$, $B = \left[\begin{smallmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{smallmatrix}\right]$, akkor a kovariancia $\mathrm{Cov}_\rho(A,B) = (\gamma | A \otimes B) = \mathrm{Tr}(\gamma(A \otimes B))$ kifejezése

$$\mathrm{Cov}_\rho(A,B) = \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & (t-rs)a_2b_2 \\ 0 & 0 & (t-rs)a_2b_1 & 0 \\ 0 & (t-rs)a_1b_2 & 0 & 0 \\ (t-rs)a_1b_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{!}{=} 0. \tag{5.48}$$

Mivel γ általában nem a nulltenzor, az állapot korrelált, azonban $\mathrm{Cov}_\rho(A,B) = 0$, a kovariancia nulla. (Az $\boldsymbol{r\sigma} = r\sigma_2$ esetre hasonló levezetés végezhető, ugyanilyen eredménnyel.) Ez a példa már önmagában is kizárja az (5.6) eredmény kvantum párját. De az alábbiakban általánosabb formában is megmutatjuk, hogy ez miért nem lehetséges, mátrixokra való hivatkozás nélkül.

Ehhez ismét tekintsük a két-qubites rendszer (4.28) (4.29) általános állapotát, azaz

$$\rho = \frac{1}{4}\big(I \otimes I + \boldsymbol{r\sigma} \otimes I + I \otimes \boldsymbol{s\sigma} + \boldsymbol{t}(\boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma})\big), \tag{5.49}$$

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(I + \boldsymbol{r\sigma}), \quad \rho_2 = \frac{1}{2}(I + \boldsymbol{s\sigma}), \tag{5.50}$$

$$\rho_1 \otimes \rho_2 = \frac{1}{4}\big(I \otimes I + \boldsymbol{r\sigma} \otimes I + I \otimes \boldsymbol{s\sigma} + \boldsymbol{r\sigma} \otimes \boldsymbol{s\sigma}\big). \tag{5.51}$$

Ezek indexes alakja

$$\rho = \frac{1}{4}\big(I \otimes I + \sum_\mu r_\mu\sigma_\mu \otimes I + I \otimes \sum_\nu s_\nu\sigma_\nu + \sum_{\mu\nu} t_{\mu\nu}(\sigma_\mu \otimes \sigma_\nu)\big), \tag{5.52}$$

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\big(I + \sum_\mu r_\mu\sigma_\mu\big), \quad \rho_2 = \frac{1}{2}\big(I + \sum_\nu s_\nu\sigma_\nu\big), \tag{5.53}$$

$$\rho_1 \otimes \rho_2 = \frac{1}{4}\big(I \otimes I + \sum_\mu r_\mu\sigma_\mu \otimes I + I \otimes \sum_\nu s_\nu\sigma_\nu + \sum_{\mu\nu} r_\mu s_\nu(\sigma_\mu \otimes \sigma_\nu)\big). \tag{5.54}$$

A korrelációs tenzor ekkor

$$\gamma = \rho - \rho_1 \otimes \rho_2 = \frac{1}{4}\sum_{\mu\nu}(t_{\mu\nu} - r_\mu s_\nu)(\sigma_\mu \otimes \sigma_\nu), \tag{5.55}$$

ahol jól látszik a Pauli-bázis előnye, ugyanis ρ és $\rho_1 \otimes \rho_2$ operátorokban az I operátort tartalmazó tagok megegyeznek, ezért a korrelációs tenzorban kiejtik egymást. A kovariancia ekkor

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}_\rho(A,B) &= (\gamma|A\otimes B) = \mathrm{Tr}(\gamma(A\otimes B)) \\ &= \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\Big(\sum_{\mu\nu}(t_{\mu\nu}-r_\mu s_\nu)(\sigma_\mu\otimes\sigma_\nu)A\otimes B\Big) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{\mu\nu}(t_{\mu\nu}-r_\mu s_\nu)\,\mathrm{Tr}(\sigma_\mu A)\,\mathrm{Tr}(\sigma_\nu B). \end{aligned} \tag{5.56}$$

Ez a kifejezés el tud tűnni korrelált állapotban is, ahogyan azt láttuk is az (5.48) képletben, például ha a γ korrelációs tenzor csak $\sigma_1\otimes\sigma_1$ irányban, míg az $A\otimes B$ obszervábilis csak $\sigma_3\otimes\sigma_3$ irányban rendelkezik nemnulla együtthatóval. Általánosabban elmondható, hogy a kovariancia tud nulla lenni korrelált állapot esetén, ha a γ korrelációs tenzor és az $A\otimes B$ obszervábilis különböző Pauli-altereken helyezkednek el, tehát nincs közös nemnulla komponensű Pauli irányuk. Viszont elképzelhető, hogy létezik más korrelált állapot és obszervábilis, amikor a kovariancia nemtriviális módon szintén eltűnik, de ez az (5.56) felírásból szemléletesen nem megállapítható. Összegezve, ha a kovariancia egy obszervábilis-párra nézve nulla, az nem jelenti azt, hogy a ρ állapot korrelálatlan, még a két-qubit rendszer esetében sem, szemben a klasszikus két-bit rendszerrel.

Ennek további illusztrációját is adhatjuk, például a $|\mathrm{Bell}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ Bell-állapottal és egy másik $|\mathrm{Bell}'\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$ állapottal, ahol $|ij\rangle$ a számítási bázis vektorait jelöli, amelyben minden mátrixot kifejezünk. A két állapot sűrűségmátrixai

$$\rho_{\mathrm{Bell}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}, \quad \rho_{\mathrm{Bell}'} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\1&1&1&-1\\1&1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}. \tag{5.57}$$

Mindkét esetben a redukált állapotok megegyeznek,

$$\rho_1 := \mathrm{Tr}_2(\rho_{\mathrm{Bell}}) = \mathrm{Tr}_2(\rho_{\mathrm{Bell}'}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, \quad \rho_2 := \mathrm{Tr}_1(\rho_{\mathrm{Bell}}) = \mathrm{Tr}_1(\rho_{\mathrm{Bell}'}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}. \tag{5.58}$$

Innen a korrelációs tenzorok mátrixai

$$\gamma_{\mathrm{Bell}} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\2&0&0&1\end{bmatrix}, \quad \gamma_{\mathrm{Bell}'} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}0&1&1&-1\\1&0&1&-1\\1&1&0&-1\\-1&-1&-1&0\end{bmatrix}, \tag{5.59}$$

valamint ezek megfelelő Pauli-bázisbeli reprezentációi

$$\gamma_{\mathrm{Bell}} = \frac{1}{4}(\sigma_1\otimes\sigma_1 - \sigma_2\otimes\sigma_2 + \sigma_3\otimes\sigma_3), \quad \gamma_{\mathrm{Bell}'} = \frac{1}{4}(\sigma_1\otimes\sigma_3 + \sigma_2\otimes\sigma_2 + \sigma_3\otimes\sigma_1). \tag{5.60}$$

Mivel ezek nem nullák, a Bell-állapotok korreláltak. AZ $S_{\hat{\boldsymbol{v}}} = \frac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{\sigma}$, $S_{\hat{\boldsymbol{u}}} = \frac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\sigma}$ spinmérésekre vonatkozó kovarianciák ezekben az állapotokban

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}_{\rho_{\mathrm{Bell}}}\Big(\frac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{\sigma}, \frac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\sigma}\Big) &= \frac{\hbar^2}{4}(v_1u_1 - v_2u_2 + v_3u_3), \\ \mathrm{Cov}_{\rho_{\mathrm{Bell}'}}\Big(\frac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{\sigma}, \frac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\sigma}\Big) &= \frac{\hbar^2}{4}(v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3) = \frac{\hbar^2}{4}(\hat{\boldsymbol{u}}|\hat{\boldsymbol{v}}), \end{aligned} \tag{5.61}$$

amelyek megfelelően megválasztott mérési irányok esetén eltűnhetnek.

Mivel a kisebb rendszerek beágyazhatók nagyobb dimenziós rendszerekbe, arra a következtetésre juthatunk, hogy az (5.6) egyenlethez hasonló eredmény kvantum rendszerekben nem létezik. Vagyis nemtriviális $A \in \mathcal{A}_1$, $B \in \mathcal{A}_2$ obszervábilisekre $d_1, d_2 \geq 2$ esetén

$$\mathrm{Cov}_\rho(A,B) = 0 \quad \underset{(\Longleftarrow)}{\not\Longrightarrow} \quad \rho \in \mathcal{D}_{\mathrm{unc}}, \tag{5.62}$$

vagy a megfelelő korrelációs mértékekkel

$$\mathrm{Cov}_\rho(A,B) = 0 \quad \underset{(\Longleftarrow)}{\not\Longrightarrow} \quad C(\rho) = 0. \tag{5.63}$$

5.6. Kvantum kovariancia maximuma A kovariancia képlete a kvantum esetben is átírható kifejezőbb alakra,

$$\mathrm{Cov}_\rho(A,B) = \sum_{k=1}^{d_{\min}^2} \eta_k (X_k|A)(Y_k|B), \tag{5.64}$$

ahol $\eta_k \geq 0$, $X_k \in \mathcal{A}_1$, $Y_k \in \mathcal{A}_2$ a γ korrelációs tenzor szinguláris értékei, illetve bal és jobboldali szinguláris vektorai, melyek most operátorok, amik (Hilbert-Schmidt) ortonormált rendszereket alkotnak. Ennek levezetése

$$\mathrm{Cov}_\rho(A,B) = (\gamma|A\otimes B) = (\sum_k \eta_k X_k \otimes Y_k | A\otimes B) = \sum_k \eta_k (X_k\otimes Y_k|A\otimes B) = \sum_k \eta_k (X_k|A)(Y_k|B), \tag{5.65}$$

ahol felhasználtuk a $\gamma = \sum_k \eta_k X_k \otimes Y_k$ szinguláris érték felbontást. Ha normált obszervábiliseket veszünk (2-normára értve, azaz $\mathrm{Tr}(A^\dagger A) = \sum_i a_i^* a_i = 1$), akkor ebből az alakból korlátot adhatunk a kovariancia értékére,

$$0 \leq \big|\,\mathrm{Cov}_\rho(A,B)\big| \leq \eta_{\max}, \tag{5.66}$$

ahol $\eta_{\max}$ a maximális szinguláris érték. Ez onnan látható, hogy ha az obszervábilis-pár megegyezik valamelyik szinguláris vektor-párral, $A = X_k$, $B = Y_k$, akkor a kovariancia felveszi a megfelelő szinguláris értéket, $\mathrm{Cov}_\rho(X_k, Y_k) = \eta_k$. Ha $A = -X_k$, akkor a kovariancia is ellentétes lesz, $\mathrm{Cov}_\rho(-X_k \otimes Y_k) = -\eta_k$, ezek az obszervábilisek antikorreláltak. Az (5.64) alakból az is egyértelmű, hogy a 0 érték minden állapotban felvehető, olyan megfelelően választott $A \otimes B$ párral, melyre igaz, hogy minden k indexre A vagy B merőleges a megfelelő k-adik szinguláris vektorra. Másként, ha A bizonyos k indexekre az X_k-k által kifeszített altérbe esik, míg B a többi k indexre az Y_k-k által kifeszített altérbe. A lényeg, hogy γ korrelációs tenzor szinguláris vektorai a részrendszereken megadják pontosan azokat az irányokat, amelyek *csak egymással korreláltak az ortogonális készleteken belül.* Továbbá azt is fontos látni, hogy ha ezekből az irányokból kimozdulunk, a kovariancia nemtriviálisan fog változni, és bizonyos esetekben el is tűnhet, nemeltűnő korreláció esetén is. Általános esetben, nem csak normált obszervábilisekre, a kovariancia korlátai

$$0 \leq \big|\,\mathrm{Cov}_\rho(A,B)\big| \leq \eta_{\max} \|A\|_2 \|A\|_2. \tag{5.67}$$

Az (5.64) képlet szemléltetésére vegyünk egy két-qubit rendszert, ahol a kovariancia (5.56) képlete tovább írva γ szinguláris érték felbontásával

$$\mathrm{Cov}_\rho(A,B) = (\gamma|A\otimes B) = \frac{1}{4}\sum_{\mu\nu}(t_{\mu\nu} - r_\mu s_\nu)(\sigma_\mu|A)(\sigma_\nu|B) = \sum_k \eta_k (X_k|A)(Y_k|B). \tag{5.68}$$

Nézük meg az úgynevezett Pauli-diagonális két-qubit állapot példáját,

$$\rho = \frac{1}{4}\Big(I\otimes I + \sum_{\mu=1}^{3} t_\mu \sigma_\mu \otimes \sigma_\mu\Big), \tag{5.69}$$

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{2} I. \tag{5.70}$$

A t_μ paraméterek megengedett tartományát egy kicsit később határozzuk meg. A korrelációs tenzor ekkor

$$\gamma = \rho - \rho_1 \otimes \rho_2 = \frac{1}{4}\sum_{\mu=1}^{3} t_\mu \sigma_\mu \otimes \sigma_\mu = \sum_{\mu=1}^{3} \frac{t_\mu}{2}\frac{\sigma_\mu}{\sqrt{2}} \otimes \frac{\sigma_\mu}{\sqrt{2}}, \tag{5.71}$$

ami már γ szinguláris érték felbontása $t_\mu/2$ szinguláris értékekkel (előjel erejéig írva, ahogyan a klasszikus esetben is tettük (5.26)). Ekkor az (5.64) képlet a kovarianciára

$$\mathrm{Cov}_\rho(A,B) = (\gamma|A\otimes B) = \sum_{\mu=1}^{3} \frac{t_\mu}{2}\Big(\frac{\sigma_\mu}{\sqrt{2}}\Big|A\Big)\Big(\frac{\sigma_\mu}{\sqrt{2}}\Big|B\Big). \tag{5.72}$$

Tehát egy Pauli-diagonális állapotban a megfelelő Pauli mátrixok a szinguláris vektorok, így az azonos indexű Pauli irányok azok, amik korreláltak egymással (x-x: $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_1$, stb.), és ennek a korrelációnak nagyságát a t_μ együttható adja meg.

Másrészt vegyük a (teljesen összefont) Bell-állapotok általános konvex kombinációját, a Bell-diagonális állapotot,

$$\rho = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} p_k |B_k\rangle\langle B_k|, \tag{5.73}$$

ahol $\sum_{k=0}^{3} p_k = 1$ és a Bell-állapotok,

$$|B_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle + |11\rangle\big), \tag{5.74}$$

$$|B_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|01\rangle + |10\rangle\big), \tag{5.75}$$

$$|B_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|01\rangle - |10\rangle\big), \tag{5.76}$$

$$|B_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle - |11\rangle\big). \tag{5.77}$$

Számítsuk ki a ρ állapotot a Pauli-bázisban, ehhez határozzuk meg a Bell-projektorok Pauli-bázisbeli kifejtését,

$$|B_0\rangle\langle B_0| = \frac{1}{4}\big(I\otimes I + \sigma_1\otimes\sigma_1 - \sigma_2\otimes\sigma_2 + \sigma_3\otimes\sigma_3\big), \tag{5.78}$$

$$|B_1\rangle\langle B_1| = \frac{1}{4}\big(I\otimes I + \sigma_1\otimes\sigma_1 + \sigma_2\otimes\sigma_2 - \sigma_3\otimes\sigma_3\big), \tag{5.79}$$

$$|B_2\rangle\langle B_2| = \frac{1}{4}\big(I\otimes I - \sigma_1\otimes\sigma_1 - \sigma_2\otimes\sigma_2 - \sigma_3\otimes\sigma_3\big), \tag{5.80}$$

$$|B_3\rangle\langle B_3| = \frac{1}{4}\big(I\otimes I - \sigma_1\otimes\sigma_1 + \sigma_2\otimes\sigma_2 + \sigma_3\otimes\sigma_3\big). \tag{5.81}$$

Ezt felhasználva már fel tudjuk írni az állapotot Pauli együtthatókkal,

$$\begin{aligned}\rho =& \frac{1}{4}\Big((p_0+p_1+p_2+p_3)I\otimes I + (p_0+p_1-p_2-p_3)\sigma_1\otimes\sigma_1 \\ &+ (-p_0+p_1-p_2+p_3)\sigma_2\otimes\sigma_2 + (p_0-p_1-p_2+p_3)\sigma_3\otimes\sigma_3\Big).\end{aligned} \tag{5.82}$$

Látható, hogy ez az állapot megegyezik az (5.69) Pauli diagonális állapottal, ha

$$t_1 = p_0 + p_1 - p_2 - p_3 \tag{5.83}$$

$$t_2 = -p_0 + p_1 - p_2 + p_3 \tag{5.84}$$

$$t_3 = p_0 - p_1 - p_2 + p_3. \tag{5.85}$$

Ennek első következménye, hogy a t_μ Pauli-diagonális paraméterek a $\boldsymbol{p} = (1,0,0,0)$ stb. extremális Bell-diagonális állapotok által meghatározott szimplexben kell, hogy legyenek ahhoz, hogy az (5.69) képlettel megadott Pauli-diagonális állapotok tényleg állapotok legyenek, vagyis pozitív szemidefinitek. Másrészt a Bell-diagonális állapotokkal kapott kovariancia képlete megegyezik a Pauli-diagonális állapotokkal kapott (5.72) képlettel, csak most a Pauli-diagonális állapotokat jellemző t_μ paramétereket a Bell-diagonális állapotokat megadó konvex kombinációs együtthatókkal fejezhetjük ki benne. Tehát a Pauli irányok korrelációjának nagyságát a Bell-állapotok p_μ konvex kombinációs együtthatói adják meg.

Megjegyezzük, hogy az egyik alrendszer unitér elforgatásával megtehető az, hogy ne x-x, y-y, z-z Pauli korreláció legyen a teljes állapotban, hanem például x-y, y-z, z-x, vagy a Pauli mátrixok bizonyos konvex kombinációi legyenek korreláltak egymással, ahogy a speciális esetben az (5.60) egyenletben is előfordult.

5.7. Azonos obszervábilisek mérése a kvantum részrendszereken Vizsgáljuk kvantum rendszereken is azt a tipikus esetet amikor a két részrendszeren megegyező obszervábiliseket mérünk. Ehhez vegyük az $A \otimes A$ alakú általános nemtriviális obszervábiliseket és vizsgáljuk meg milyen korrelált ρ állapotú rendszer esetén állhat fenn, hogy a kovariancia eltűnik,

$$\mathrm{Cov}_\rho(A,A) = 0. \tag{5.86}$$

Tekintsük a két qubit esetet ($d_1 = d_2 = 2$), ekkor az (5.56) képletbe behelyettesítve az $A \otimes A$ obszervábillist a kovariancia,

$$\mathrm{Cov}_\rho(A,A) = (\gamma|A\otimes A) = \frac{1}{4}\sum_{\mu,\nu=1}^{3}(t_{\mu\nu} - r_\mu s_\nu)(\sigma_\mu|A)(\sigma_\nu|A). \tag{5.87}$$

A kovariancia értéke minden $A \otimes A$ esetén eltűnik, ha a γ korrelációs tenzor (5.55) antiszimmetrikus,

$$\gamma = \frac{1}{4}\big(x(\sigma_2\otimes\sigma_3 - \sigma_3\otimes\sigma_2) + y(\sigma_3\otimes\sigma_1 - \sigma_1\otimes\sigma_3) + z(\sigma_1\otimes\sigma_2 - \sigma_2\otimes\sigma_1)\big). \tag{5.88}$$

A γ korrelációs tenzor kifejtési együtthatói a Pauli bázisban

$$t_{\mu\nu} - r_\mu s_\nu = \begin{bmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.89}$$

(Itt a „mátrix” forma csak kényelmi jelölés, tehát a „mátrixra”-ra mint 9 komponensű vektorra kell gondolni, mely tartalmazza a Pauli-bázisban vett együtthatókat.) Ez nem teljesen meglepő, hiszen az $A \otimes A$ obszervábilis szimmetrikus tenzor, kontrakciója egy antiszimmetrikus tenzorral eltűnik. Tehát egy ilyen $\rho = \rho_1\otimes\rho_2+\gamma$ állapot esetén $(\gamma|A\otimes A) = 0$ akármilyen ρ_1, ρ_2 redukáltakra és A obszervábilisekre. Az állapot kiírva a Pauli bázisban

$$\rho = \frac{1}{4}\Big(I\otimes I + \boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma}\otimes I + I\otimes\boldsymbol{s}\boldsymbol{\sigma} + x(\sigma_2\otimes\sigma_3 - \sigma_3\otimes\sigma_2) + y(\sigma_3\otimes\sigma_1 - \sigma_1\otimes\sigma_3) + z(\sigma_1\otimes\sigma_2 - \sigma_2\otimes\sigma_1)\Big), \tag{5.90}$$

illetve kifejtési együtthatói

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & s_1 & s_2 & s_3 \\ r_1 & r_1s_1 & r_1s_2 + z & r_1s_3 - y \\ r_2 & r_2s_1 - z & r_2s_2 & r_2s_3 + x \\ r_3 & r_3s_1 + y & r_3s_2 - x & r_3s_3 \end{bmatrix}, \tag{5.91}$$

(a mátrix a Pauli bázisban értendő, és csak kényelmi jelölés) ahol a $\mu = 0$ sor és $\nu = 0$ oszlop az I operátort tartalmazó tagok együtthatóit tartalmazzák. (Ilyenek nem voltak a korrelációs

tenzornál.) Az (5.90) képlet nem akármilyen x, y, z értékek esetén tényleges állapot. A paraméterekre az állapot $\rho \geq 0$ pozitív szemidefinitisége ad feltételt, ám ez általánosan nem olyan könnyen elvégezhető, mint a klasszikus trit-trit esetben a redukálásból adódó feltétel.

Vegyük azt a speciális esetet amikor $\boldsymbol{r} = (0,0,r)$, $\boldsymbol{s} = (0,0,s)$ és $x = y = 0$, ekkor

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{4}\Big(I\otimes I + r\sigma_3\otimes I + I\otimes s\sigma_3 + z(\sigma_1\otimes\sigma_2 - \sigma_2\otimes\sigma_1)\Big)\\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1+r+s+rs & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1+r-s-rs & 2iz & 0\\ 0 & -2iz & 1-r+s-rs & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1-r-s+rs\end{bmatrix},\end{aligned} \tag{5.92}$$

ahol a mátrix a számítási bázisban értendő. Ennek pozitív szemidefinitsége könnyen meghatározható, ugyanis sajátértékei egyrészt $(1\pm r\pm s+rs)/4 = (1\pm r)(1\pm s)/4 \geq 0$, mivel a redukált állapotok $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$ Bloch vektorai a Bloch gömbben vannak, $\|\boldsymbol{r}\| = |r| \leq 1$ $\|\boldsymbol{s}\| = |s| \leq 1$, másrészt $(1 \pm \sqrt{(r-s)^2 + 4z^2} - rs)/4 \geq 0$, ami akkor teljesül, ha

$$4z^2 \leq (1-r^2)(1-s^2). \tag{5.93}$$

Ekkor a $z = \sqrt{(1-r^2)(1-s^2)}/2$ választás maximalizálja a korrelációt adott redukáltak esetén, míg minden a két részrendszeren azonos mérés kovarianciája nulla.

6. Összefoglalás

Áttekintettük a diszkrét véges rendszerek klasszikus és kvantum valószínűségelméletének leírására szolgáló eszközöket, valamint a különböző korrelációk számszerűsítésére alkalmas mennyiségeket. Ezen eszközök segítségével mind a klasszikus, mind a kvantumos esetben megvizsgáltuk az obszervábilis-párok kovarianciájának, valamint az állapotok korreláltságának kapcsolatát. Egy állapot korrelálatlan, ha minden obszervábilis-pár kovarianciája nulla, ez ekvivalens azzal, hogy az állapot szorzat. (A klasszikus valószínűségszámításban ezt függetlenségnek nevezzük.) A lényeg az, hogy előfordulhat, hogy bizonyos konkrét obszervábilis-párra a kovariancia eltűnik, miközben az állapot maga nem korrelálatlan, vagy a kovariancia kis értéket vesz fel, miközben az állapot erősen korrelált. (Lásd a (4.49) és (4.59) egyenlőtlenségeket.) Ilyen esetben az adott obszervábilis-pár nem alkalmas a korreláció kimutatására.

Eredményeink szerint ilyen helyzet nem fordulhat elő klasszikus kétbites rendszerekben, ott elegendő, ha a kovariancia egy rögzített, nemtriviális obszervábilis-párra eltűnik, és ez már önmagában garantálja, hogy az állapot korrelálatlan (lásd (5.6)). Ez a tulajdonság azonban kizárólag a kétbites esetben érvényes, bármely nagyobb klasszikus rendszerben (lásd (5.19)), illetve minden kvantum rendszerben (lásd (5.62)) léteznek olyan obszervábilis-párok, amelyek kovarianciája nulla adott korrelált állapotban. Ezt konkrét példák segítségével mutattuk meg. A bit/qubit rendszerekre kapott eredmény tehát különbséget világít meg a klasszikus és kvantumos korrelációk között: míg a két-bit rendszerek „túl kicsik" ahhoz, hogy a kovariancia eltűnése ne implikálja az állapot szorzatságát, addig a két-qubit rendszerek már „elég nagyok" ahhoz, hogy a kovariancia eltűnése ne legyen elegendő feltétel az állapot korrelálatlanságára.

A helyzet általánosabb megértéséhez vizsgáltuk a korrelációkat leíró $\boldsymbol{g}$ és γ tenzorok szinguláris érték felbontását. Ez adja a megfelelő nézőpontot az obszervábilis-párok kovarianciájának viselkedésének megértéséhez, mert a szinguláris vektorok megadnak olyan obszervábilis-párokat, melyek közülük csak egymással korreláltak. Így a kovariancia eltűnése általánosan is érthetővé vált.

Ez a nézőpont nagyon gyümölcsöző, és sok további vizsgálatra tervezzük felhasználni az MSc tanulmányok során, melyekre ennek a dolgozatnak a leadásáig már nem jutott idő. Fontos lenne

további érdekes partikuláris állapotokat vizsgálni, kapcsolatba hozni a korrelációs és összefonódási mértékeket a kvantum esetben egymással és a korrelációs tulajdonságokkal: illetve kétrészrendszerekben egyszerű, de fizikailag releváns, konkrét kölcsönható Hamilton operátor paramétereinek függvényében vizsgálni az alap vagy termikus (Gibbs) állapot korrelációs tulajdonságait, illetve kapcsolatba hozni az összefonódással a kvantum esetben.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Szalay Szilárdnak rengeteg tanácsát és hatalmas segítségét, melyek nélkül ez a dolgozat nem jöhetett volna létre. Továbbá szeretném megköszönni a Wigner Fizikai Kutatóközpontnak, a Wigner Gyakornoki Program keretein belül nyújtott támogatását 2025 tavaszi és őszi féléve során.

Hivatkozások

[1] Ingemar Bengtsson and Karol Życzkowski, *Geometry of quantum states: An introduction to quantum entanglement*, 2nd ed., Cambridge University Press, 2017.
[2] Kavan Modi, Tomasz Paterek, Wonmin Son, Vlatko Vedral, and Mark Williamson, *Unified view of quantum and classical correlations*, Physical Review Letters **104** (2010Feb), 080501.
[3] Masanori Ohya and Dénes Petz, *Quantum entropy and its use*, 1st ed., Springer Berlin Heidelberg, 1993.
[4] Dénes Petz, *Quantum information theory and quantum statistics*, Springer Berlin Heidelberg, 2008.
[5] Vlatko Vedral and Martin B. Plenio, *Entanglement measures and purification procedures*, Phys. Rev. A **57** (1998Mar), 1619–1633.
[6] Reinhard F. Werner, *Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model*, Physical Review A **40** (1989Oct), no. 8, 4277–4281.
[7] Mark M. Wilde, *Quantum information theory*, Cambridge University Press, 2013.
[8] Michael M. Wolf, Frank Verstraete, Matthew B. Hastings, and J. Ignacio Cirac, *Area laws in quantum systems: Mutual information and correlations*, Phys. Rev. Lett. **100** (2008Feb), 070502.