

SZAKDOLGOZAT

Klasszikus, kvantumos valószínűségek és Bell-nemlokalitás

László Levente

Témavezető:
Szalay Szilárd, PhD
Wigner Fizikai Kutatóközpont
Szilárdtestfizikai és Optikai Intézet
Elméleti Szilárdtestfizika Osztály

Belső konzulens:
Dr Lévay Péter, DSc
BME TTK Fizikai Intézet
Elméleti Fizika Tanszék

BME

2026

Önállósági nyilatkozat

Alulírott *László Levente* a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem fizika BSc szakos hallgatója kijelentem, hogy ezt a szakdolgozatot meg nem engedett segédeszközök nélkül, önállóan, a témavezető irányításával készítettem, és csak a megadott forrásokat használtam fel.
Minden olyan részt, melyet szó szerint, vagy azonos értelemben, de átfogalmazva más forrásból vettem, a forrás megadásával jelöltem.

Budapest, 2026. május 29.

Aláírás

Nyilatkozat

Alulírott *László Levente* a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem fizika BSc szakos hallgatója kijelentem, hogy a dolgozat digitális és kinyomtatott példánya mindenben megegyezik.

Budapest, 2026. május 29.

Aláírás

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés 1
2. Matematikai bevezető 1
2.1. Vektorterek 1
2.2. Hilbert-terek 4
3. Klasszikus és kvantumos valószínűségi leírás 8
3.1. Klasszikus valószínűségi elmélet 8
3.2. Klasszikus kétrész-rendszerek 11
3.3. Klasszikus korreláció 14
3.4. Kvantumos valószínűségi elmélet 15
3.5. A kvantum bit 17
3.6. Kvantumos kétrész-rendszerek 19
3.7. Kvantum korreláció 24
3.8. Kvantum összefonódás 25
4. Bell-nemlokalitás 26
4.1. Az elrendezés 26
4.2. Bell-féle lokalitási feltétel 27
4.3. CHSH-egyenlőtlenség 30
4.4. Tsirelson-korlát 32
4.5. A CHSH-kísérlet 33
5. Watrous-féle játékelméleti tárgyalás 34
5.1. Nemlokális játékok 35
5.2. A CHSH-kísérlet mint játék 35
6. Összefoglalás 37
7. Köszönetnyilvánítás 37
Hivatkozások 37

1. Bevezetés

A kvantumelmélet egy valószínűségi elmélet, vagyis a mérések lehetséges kimeneteleiről csak valószínűségi előrejelzést ad. A valószínűségek viszont a valószínűségi amplitúdók abszolutérték négyzetei, ezek a valószínűségi amplitúdók viszont lineáris szuperpozícióra képesek, aminek számos nemklasszikus megnyilvánulása van ilyenek például a határozatlansági relációk, vagy az összetett rendszerek nemklasszikus korrelációi. Ezek nagyon fontos és érdekes kérdések, melyek próbára teszik a klasszikus fizika szerinti gondolkodásunkat.

A dolgozatban áttekintjük a nemklasszikus viselkedés legfontosabb megnyilvánulását a Bell-nemlokalitást. Ehhez először áttekintjük a szükséges matematikai eszközöket, a véges dimenziós vektortereket, Hilbert tereket, ezek operátorait és tenzorszorzatait. Ezek után áttekintjük a diszkrét véges elemi és összetett klasszikus és kvantumos rendszerek leírását, valamint a korrelációt és az összefonódást. Az összefonódás egy kvantum rendszerekben megjelenő klasszikusnál erősebb korreláció. Ezek után rátérünk a Bell-nemlokalitásra mely egy összefonódásnál is erősebb korreláció. Csak a legegyszerűbb esetet nézzük, mely a CHSH-egyenlőtlenségekre vezető szituáció. Itt bemutatjuk a klasszikus lokális rejtett változós modellel való leírásból adódó CHSH-egyenlőtlenséget, ennek kvantumos sértését, és a kvantumos leírásra vonatkozó Tsirelson-korlátot. Röviden áttekintjük a szituáció játékelméleti megfogalmazását is.

2. Matematikai bevezető

Ebben a fejezetben áttekintünk néhány fontos matematikai eszközt, amit a klasszikus és kvantum rendszerek leírására használunk [1, 5, 8, 9]. Ebben a dolgozatban úgynevezett diszkrét véges rendszereket fogunk tárgyalni, az ilyen fizikai rendszerekben a megfigyelhető mennyiségek véges számú különböző értéket vehetnek fel a mérésben. Ezeknek a leírására véges dimenziós vektortereket használunk.

2.1. Vektorterek Egy $\mathcal{V}$ halmaz *vektortér* a $\mathbb{C}$ komplex számtest felett, ha értelmezett a halmaz elemeinek összeadása amelyre nézve $\mathcal{V}$ Abel-csoportot alkot, és értelmezett a komplex számokkal való szorzás, amely két művelet együttesen teljesíti a disztributivitási szabályokat. Vagyis egy vektortér zárt a lineáris kombinációra nézve, azaz $\sum_{i=1}^{n} c_i v_i \in \mathcal{V}$ ahol $c_i \in \mathbb{C}$, $v_i \in \mathcal{V}$. Vektorok egy halmaza

lineárisan független, ha lineáris kombinációjuk akkor és csak akkor lesz a nullvektor ha minden együttható nulla, azaz $\sum_{i=1}^{n} c_i v_i = 0$ pontosan akkor ha $c_i = 0$. Ha $\mathcal{V}$ vektortérben a lineárisan független vektorok maximális száma d, akkor azt mondjuk, hogy a vektortér $\dim(\mathcal{V}) = d$ dimenziós. Ebben a dolgozatban minden esetben $\dim(\mathcal{V}) < \infty$ véges dimenziós vektorterekre lesz szükségünk.

A leggyakrabban előforduló vektortér a komplex szám d-sek tere, azaz a $\mathbb{C}^d$, tehát a vektortér egy eleme $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_d)$.

Lineáris operátor az olyan $A : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ vektorterek közötti leképzés, amely megőrzi a tér lineáris struktúráját, azaz $A\big(\sum_i c_i v_i\big) = \sum_i c_i A(v_i)$. A lineáris operátorok halmazát ebben az esetben $\mathrm{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ módon jelöljük, és a lineáris operátorok esetén a zárójeleket elhagyjuk, $Av \coloneqq A(v)$. A lineáris operátorok vektorteret alkotnak, a $\big(\sum_i c_i A_i\big)v \coloneqq \sum_i c_i A_i(v)$ definícióval. Ha $\mathcal{W} = \mathcal{V}$, akkor a $\mathrm{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{V}) =: \mathrm{Lin}(\mathcal{V})$ jelölést használjuk, illetve $I \in \mathrm{Lin}(\mathcal{V})$ az identitás operátor. A $\mathrm{Lin}(\mathcal{V})$ lineáris operátorok algebrát alkotnak a kompozíció művelettel.

Lineáris funkcionál az olyan lineáris operátor, mely egy $\mathcal{V}$ vektortérből a $\mathbb{C}$ alapszámtestbe képez. Ezeknek a $\mathcal{V}^* \coloneqq \mathrm{Lin}(\mathcal{V}, \mathbb{C})$ terét a $\mathcal{V}$ duális terének hívjuk. Megmutatható, hogy $\dim(\mathcal{V}^*) = \dim(\mathcal{V})$.

A $\mathrm{Lin}(\mathbb{C}^d, \mathbb{C}^{d'})$ lineáris operátorok a $d' \times d$ alakú mátrixok a szokásos mátrixműveletekkel. Tehát ennek egy eleme

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,d} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \ldots & A_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d',1} & A_{d',2} & \ldots & A_{d',d} \end{pmatrix}.$$

Ebben az esetben a $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^d$ elemeket oszlopvektornak tekintjük,

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix},$$

mert ekkor a $\boldsymbol{Av}$ hatást a megfelelő mátrixművelet adja. A $(\mathbb{C}^d)^* = \mathrm{Lin}(\mathbb{C}^d, \mathbb{C})$ lineáris funkcionálok pedig a $d' = 1$ sorvektorok lesznek, $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_d)$.

A $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ vektorterek *tenzorszorzata* a $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \coloneqq \mathrm{Span}\{v \otimes w \mid v \in \mathcal{V},\, w \in \mathcal{W}\}$ vektortér, mely a $v \otimes w$ *elemi tenzorok* formális lineáris kombinációinak tere, ahol

a $\otimes$ tenzorszorzás bilineáris,

$$\Big(\sum_i a_i v_i\Big) \otimes \Big(\sum_j b_j w_j\Big) \;=\; \sum_i \sum_j a_i b_j (v_i \otimes w_j). \tag{1}$$

Legyen $f \in \mathcal{V}^*$ és $w \in \mathcal{W}$, ekkor a $w \otimes f$ alakú elemi tenzorokat tekinthetjük lineáris operátoroknak, melyek a következő módon hatnak egy tetszőleges $v \in \mathcal{V}$ vektoron,

$$(w \otimes f)(v) \coloneqq f(v) w. \tag{2}$$

A linearitás miatt ekkor élhetünk a $\mathcal{W} \otimes \mathcal{V}^* \cong \mathrm{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ azonosítással. Azaz bármely $A \in \mathrm{Lin}(\mathcal{W}, \mathcal{V}^*)$ lineáris operátor felírható elemi tenzorok lineáris kombinációjaként,

$$A \;=\; \sum_i c_i w_i \otimes f_i, \tag{3}$$

ahol $c_i \in \mathbb{C}$, $f_i \in \mathcal{V}^*$, $w_i \in \mathcal{W}$. Ezt az A operátor egy diadikus felbontásának nevezzük, ez a felbontás általában nem egyértelmű. A diadikus felbontásban szereplő tagok minimális számát az operátor rangjának hívjuk és $\mathrm{rk}(A)$-val jelöljük. Az $A \in \mathrm{Lin}(\mathcal{V})$ operátorokon létezik a *nyom (trace)* $\mathrm{Tr} : \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ lineáris leképzés, melyre

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}\Big(\sum_i c_i v_i \otimes f_i\Big) = \sum_i c_i \,\mathrm{Tr}(v_i \otimes f_i) \coloneqq \sum_i c_i f_i(v_i). \tag{4}$$

A $d \times d$ alakú komplex mátrixok esetén $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{d} A_{i,i}$.

A vektorterek tenzorszorzatán ható lineáris operátorokat természetes módon megkaphatjuk a rajtuk ható lineáris operátorokból, elemi tenzorokon megadva a következő módon,

$$(A \otimes B)(v \otimes w) \coloneqq (Av) \otimes (Bw), \tag{5}$$

ahol $A \in \mathrm{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$, $B \in \mathrm{Lin}(\mathcal{W}, \mathcal{W}')$ és $v \in \mathcal{V}$, $w \in \mathcal{W}$. Hasonlóan definiálhatjuk a lineáris operátorokon ható lineáris operátorok tenzorszorzatát, legyen $\mathcal{A} \coloneqq \mathrm{Lin}(\mathcal{V}), \mathcal{B} \coloneqq \mathrm{Lin}(\mathcal{W})$ és $\Phi \in \mathrm{Lin}(\mathcal{A}, \mathcal{A}'), \Gamma \in \mathrm{Lin}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, ekkor

$$(\Phi \otimes \Gamma)(A \otimes B) \coloneqq \Phi(A) \otimes \Gamma(B), \tag{6}$$

ahol $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$. Erre példa a *részleges nyom (partial trace)* leképzés $\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ és $\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}} \coloneqq \mathrm{Tr} \otimes \mathcal{I}$, ahol $\mathrm{Tr} \in \mathrm{Lin}(\mathcal{A}, \mathbb{C})$ a fentebb említett nyom leképzés, $\mathcal{I} \in \mathrm{Lin}(\mathcal{B})$ pedig a lineáris operátorokon értelmezett identitás. Ekkor a

részleges nyom alakja operátorok elemi tenzorán

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}}(A \otimes B) \;=\; \mathrm{Tr}(A)B, \tag{7}$$

ahol $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$.

Egy $\|\cdot\| : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_0^+$ leképzés a vektortéren értelmezett *norma*, ha nem degenerált, abszolút homogén és teljesíti a háromszög egyenlőtlenséget (szubadditivitás),

$$\|v\| = 0 \iff v = 0, \tag{8a}$$

$$\|cv\| = |c|\|v\|, \forall c \in \mathbb{C}, \tag{8b}$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|. \tag{8c}$$

A $\mathbb{C}^d$ téren megadható egy egyparaméteres normacsalád, a p-norma, egy $1 \leq p \leq \infty$ paraméterre $\|\boldsymbol{v}\|_p \coloneqq \left(\sum_i |v_i|^p\right)^{1/p}$ ha $p \neq \infty$ és $\|\boldsymbol{v}\|_\infty \coloneqq \max\{|v_i|\}_i$.

Minden $\|\cdot\| : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_0^+$ és $\|\cdot\| : \mathcal{W} \to \mathbb{R}_0^+$ vektornorma pár megad egy $\|\cdot\| : \mathrm{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \to \mathbb{R}_0^+$ *operátornormát*,

$$\|A\| \coloneqq \sup\left\{ \frac{\|Av\|}{\|v\|} \;\middle|\; v \in \mathcal{V}, v \neq 0 \right\}, \tag{9}$$

ezzel fennáll minden $v \in \mathcal{V}$-re

$$\|Av\| \leq \|A\|\|v\|. \tag{10}$$

Az operátornorma teljesíti a normára érvényes (8) tulajdonságokat, illetve *szubmultiplikatív*,

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|, \tag{11}$$

ahol $A \in \mathrm{Lin}(\mathcal{V}', \mathcal{V}'')$, $B \in \mathrm{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$, valamint (5) miatt tenzor-multiplikatív,

$$\|A \otimes B\| = \|A\|\|B\|, \tag{12}$$

ahol $A \in \mathrm{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$, $B \in \mathrm{Lin}(\mathcal{W}, \mathcal{W}')$.

2.2. Hilbert-terek A $\mathcal{H}$ *Hilbert-tér* egy vektortér a $\mathbb{C}$ komplex számok felett, ha van rajta egy $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ kétváltozós művelet, a *belső szorzat*. A belső szorzat definíció szerint nemnegatív, nem degenerált, konjugált szimmetrikus és a

második argumentumában lineáris, azaz

$$\langle \psi, \psi \rangle \geq 0, \tag{13a}$$

$$\langle \psi, \psi \rangle = 0 \iff \psi = 0, \tag{13b}$$

$$\langle \psi, \phi \rangle = \langle \phi, \psi \rangle^*, \tag{13c}$$

$$\left\langle \psi, \sum_i c_i \phi_i \right\rangle = \sum_i c_i \langle \psi, \phi_i \rangle. \tag{13d}$$

Ezekből adódik, hogy a belső szorzat az első argumentumában konjugált-lineáris. A belső szorzat segítségével definiáljuk az ortogonalitást. A $\psi, \phi \in \mathcal{H}$ vektorok *ortogonálisak* ha belső szorzatuk nulla, $\langle \psi, \phi \rangle = 0$.

A komplex szám d-sek $\mathbb{C}^d$ terén a szokásos belső szorzat a következő, $(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w}) = \sum_i^d v_i^* w_i$. A komplex $d' \times d$ alakú mátrixok terén is megadható belső szorzat, $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = \sum_{i=1}^{d'} \sum_{j=1}^{d} A_{i,j}^* B_{i,j}$.

Belátható, hogy a belső szorzat indukál egy normát a Hilbert-téren a $\|\psi\| := \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}$ módon. A $\psi \in \mathcal{H}$ vektor normált, ha $\|\psi\| = 1$. A belső szorzatra teljesül a *Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij* egyenlőtlenség,

$$|\langle \psi, \phi \rangle|^2 \leq \langle \psi, \psi \rangle \langle \phi, \phi \rangle, \tag{14}$$

vagy a normával írva

$$|\langle \psi, \phi \rangle| \leq \|\psi\| \|\phi\|. \tag{15}$$

Vegyük a lineáris operátorok $\mathrm{Lin}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ terét. Egy $A \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ operátorhoz definiáljuk az $A^\dagger \in \mathrm{Lin}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ *adjungált* operátorát a következő módon,

$$\langle A^\dagger \psi, \phi \rangle := \langle \psi, A\phi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{K},\ \phi \in \mathcal{H}. \tag{16}$$

Vegyük most a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér $\mathcal{H}^*$ duális terét. A belső szorzat segítségével az eredeti tér minden $\psi \in \mathcal{H}$ eleméhez rendelhetünk egy $\psi^\dagger \in \mathcal{H}^*$ elemet a duális térből, amelynek hatása tetszőleges $\phi \in \mathcal{H}$ vektoron $\psi^\dagger(\phi) := \langle \psi, \phi \rangle$. Így bevezethetjük a Dirac-féle braket jelölést. A Dirac-jelölésben a Hilbert-tér elemeit a $|\psi\rangle := \psi \in \mathcal{H}$ „ket" vektorok jelölik, a duális tér funkcionáljait pedig a $\langle \psi| := \psi^\dagger \in \mathcal{H}^*$ „bra" vektorok. Ekkor egy $\langle \psi| \in \mathcal{H}^*$ duális vektor hatását egy $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ vektoron a $\langle \psi|(|\phi\rangle) =: \langle \psi|\phi\rangle = \langle \psi, \phi \rangle$ „braket" jelöli.

A (2) megfeleltetés miatt a Dirac-jelölést a $\mathcal{K} \otimes \mathcal{H}^*$ tér elemeire is használhatjuk, ekkor általában elhagyjuk a „$\otimes$" szimbólumot, $|\phi\rangle\langle\psi| := |\phi\rangle \otimes \langle\psi|$. Használva a (3)

egyenletet, minden $A \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ operátort felírhatunk az

$$A = \sum_i c_i |\alpha_i\rangle\langle\beta_i| \tag{17}$$

alakban. A nyom leképzés (4) a $\mathrm{Tr}(|\psi\rangle\langle\phi|) = \langle\phi|\psi\rangle$ módon hat a $|\psi\rangle\langle\phi| \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H})$ elemi operátorokon, valamint $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}\left(\sum_i c_i|\alpha_i\rangle\langle\beta_i|\right) = \sum_i c_i\langle\beta_i|\alpha_i\rangle$ módon általános $A \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H})$ operátorokon. Az adjungált leképezés (16) a $(|\psi\rangle\langle\phi|)^\dagger = |\phi\rangle\langle\psi|$ módon írható a $|\psi\rangle\langle\phi| \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ elemi operátorra, és $A^\dagger = \left(\sum_i c_i|\alpha_i\rangle\langle\beta_i|\right)^\dagger = \sum_i c_i^*|\beta_i\rangle\langle\alpha_i|$ módon általános $A \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ operátorra.

A Hilbert-terek esetén megadható minden $A \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}, \mathcal{K}) \cong \mathcal{K} \otimes \mathcal{H}^*$ operátor *szinguláris érték felbontása*

$$A = \sum_{i=1}^{d_{\min}} s_i |\alpha_i\rangle\langle\beta_i|, \tag{18}$$

ahol $d_{\min} := \min\{\dim(\mathcal{H}), \dim(\mathcal{K})\}$, az $s_i \geq 0$ számok a *szinguláris értékek*, az $\{|\alpha_i\rangle \in \mathcal{K}\}_i$, $\{|\beta_j\rangle \in \mathcal{H}\}_j$ vektorok pedig a bal és jobboldali *szinguláris vektorok*, melyek ortonormált bázisokat alkotnak a $\mathcal{K}$ és $\mathcal{H}$ terekben. Ez a felírás az operátor képterén sorrendtől, degenerációtól és a bázisvektorok komplex fázisától eltekintve egyértelmű. Egy $A \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H})$ operátor $\mathrm{rk}(A)$ rangja a nemnulla szinguláris értékeinek száma. A szinguláris érték felbontás segítségével megérthetjük az operátor hatását, az operátor ugyanis minden vektor $|\beta_i\rangle$ irányú komponensét $|\alpha_i\rangle$ irányba transzformálja és s_i-szeresére nyújtja. Könnyen látható, hogy az operátor (9) normája a legnagyobb szinguláris értéke, $\|A\| = \max\{s_i\}_i$.

Egy $A \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H})$ operátor normális, ha $A^\dagger A = AA^\dagger$, ami pontosan akkor teljesül, ha az

$$A = \sum_i a_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| \tag{19}$$

alakban irható, azaz létezik a *sajátérték (spektrális) felbontása*, ahol az $a_i \in \mathbb{C}$ *sajátértékek* és az $|\alpha_i\rangle \in \mathcal{H}$ vektorok a *sajátvektorok*, melyek ortonormált bázist alkotnak a $\mathcal{H}$ Hilbert-térben. Így a nyom a sajátértékek összege, $\mathrm{Tr}(A) = \sum_i a_i$. Az $A \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H})$ operátor *unitér*, ha $A^\dagger = A^{-1}$, ami pontosan akkor teljesül, ha a (19) sajátérték felbontásban szereplő sajátértékei egység nagyságúak, azaz $a_i \in \mathbb{C}$ és $|a_i| = 1$. Az $A \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H})$ operátor *önadjungált*, ha $A^\dagger = A$, ami pontosan akkor teljesül, ha a (19) sajátérték felbontásban szereplő sajátértékei valósak, azaz $a_i \in \mathbb{R}$. Az $A \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H})$ operátor *pozitív szemidefinit* ($A \geq 0$), ha minden $\psi \in \mathcal{H}$ vektorra

$\langle\psi|A|\psi\rangle \geq 0$, ami pontosan akkor teljesül, ha a (19) sajátérték felbontásban szereplő sajátértékei nem negatívak, azaz $a_i \geq 0$. Az $A \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H})$ operátor *projekció*, ha $A^2 = A = A^\dagger$, ami pontosan akkor teljesül, ha a (19) sajátérték felbontásban szereplő sajátértékeire fennáll, hogy $a_i \in \{0, 1\}$.

A $\mathrm{Lin}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ lineáris operátorok tere is Hilbert-térnek tekinthető, melyen a belső szorzatot a *Hilbert-Schmidt-belső szorzat* adja,

$$(A, B) \coloneqq \mathrm{Tr}(A^\dagger B), \tag{20}$$

ahol $A, B \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Ebben az esetben is teljesül, hogy a $\mathrm{Lin}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ *Hilbert-Schmidt-téren* értelmezett lineáris funkcionálok megadhatóak a Hilbert-Schmidt-belső szorzat segítségével.

A $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ Hilbert-terek $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ tenzorszorzata is Hilbert-tér, amin a belső szorzatot az egyes terek belső szorzatainak segítségével adjuk meg,

$$\langle\psi_1 \otimes \psi_2|\phi_1 \otimes \phi_2\rangle \coloneqq \langle\psi_1|\phi_1\rangle\langle\psi_2|\phi_2\rangle. \tag{21}$$

Az operátorokhoz hasonlóan megadható egy általános $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ vektor szinguláris érték felbontása,

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{d_{\min}} \sqrt{\eta_i}|\xi_i\rangle \otimes |\zeta_i\rangle, \tag{22}$$

ahol $d_{\min} \coloneqq \min\{\dim(\mathcal{H}_1), \dim(\mathcal{H}_2)\}$. Erre a *Schmidt-felbontás* elnevezés is használatos, a *Schmidt-együtthatók* a $\sqrt{\eta_i} \geq 0$ szinguláris értékek, a *Schmidt-vektorok* pedig az $|\xi_i\rangle \in \mathcal{H}_1, |\zeta_i\rangle \in \mathcal{H}_2$ bal- és jobboldali szinguláris vektorok. Könnyen látható hogy a vektor normanégyzete a Schmidt-együtthatók négyzetösszege, $\|\psi\|^2 = \sum_i \eta_i$.

Például a két dimenziós $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ terek esetén, $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ tenzorszorzat tér elemei a

$$|0, 0\rangle \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle), \tag{23a}$$

$$|1, 0\rangle \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \tag{23b}$$

$$|1, +1\rangle \coloneqq |00\rangle, \tag{23c}$$

$$|1, -1\rangle \coloneqq |11\rangle \tag{23d}$$

szinglett és triplett vektorok, ahol a $|ij\rangle \coloneqq |i\rangle \otimes |j\rangle$ bevett jelölést használjuk a $\{|0\rangle, |1\rangle \in \mathcal{H}_1\}$, $\{|0\rangle, |1\rangle \in \mathcal{H}_2\}$ bázisokból képzett tenzorszorzat bázis elemeire.

Könnyen látható, hogy a (23a) szinglet vektor Schmidt-együtthatói $\frac{1}{\sqrt{2}}$ és $\frac{1}{\sqrt{2}}$. A triplet vektorok esetén (23b) mindkét együtthatója $\frac{1}{\sqrt{2}}$, (23c) és (23d) esetén pedig egy-egy nemnulla együttható van, ami mindkét esetben 1. Így a szinglet és triplet vektorok 1-re normáltak. További fontos példák a tenzorszorzat tér elemeire a

$$|\mathrm{B}_0\rangle \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle + |11\rangle\big), \tag{24a}$$

$$|\mathrm{B}_1\rangle \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|01\rangle + |10\rangle\big), \tag{24b}$$

$$|\mathrm{B}_2\rangle \coloneqq \frac{-i}{\sqrt{2}}\big(|01\rangle - |10\rangle\big), \tag{24c}$$

$$|\mathrm{B}_3\rangle \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle - |11\rangle\big) \tag{24d}$$

Bell-vektorok. Ezen vektorok Schmidt-együtthatói minden esetben $\frac{1}{\sqrt{2}}$ és $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Az egyes együtthatók négyzetösszegei itt is 1-nek adódnak.

3. Klasszikus és kvantumos valószínűségi leírás

Ebben a fejezetben rátérünk a klasszikus és kvantumos rendszerek valószínűségi leírására [1, 5, 8, 9]. A fizikai rendszerek valószínűségi leírásánál a klasszikus és kvantumos esetben is az *obszervábilis* (megfigyelhető/mérhető mennyiség) és *állapot* fogalmait használjuk, ezek a valószínűségi változók és valószínűség sűrűségek általánosításai. A dolgozatban végig diszkrét véges rendszereket tekintünk, ez azt jelenti, hogy az obszervábilisek véges számú különböző értéket vehetnek fel a mérésekben. Az ilyen rendszerek leírására véges dimenziós vektorterek elegendőek, de a kvantumelmélet nemklasszikus viselkedése már itt is megmutatkozik. Állapotnak hívjuk azt a lineáris funkcionált, mely megadja az obszervábilisek várható értékeit. Mérési statisztikának szokás nevezni az obszervábilisek egyes kimeneteinek valószínűségeit, melyeket az adott módon preparált rendszerek példányain végzett mérések során az egyes kimenetek bekövetkezésének relatív gyakoriságaiként értelmezünk.

3.1. Klasszikus valószínűségi elmélet A klasszikus esetben az *obszervábilisek* leírhatóak az $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_d) \in \mathbb{A} \coloneqq \mathbb{C}^d$ komplex szám d-sekkel. Az elemenkénti szorzás művelettel $\mathbb{A}$-t egy algebrának tekintjük, vagyis bármely $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{A}$ esetén $(\boldsymbol{ab}) \coloneqq (a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_db_d) \in \mathbb{A}$, ekkor $\mathbb{A}$-t *obszervábilis algebrának* nevezzük. Vegyük észre, hogy az obszervábilis algebra ebben az esetben kommutatív,

$\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$. Az $\boldsymbol{a} \in \mathbb{A}$ obszervábilisek felírhatóak a

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{d} a_i \boldsymbol{\chi}_i \tag{25}$$

alakban, ahol $\boldsymbol{\chi}_i$ az i-edik kimenet *elemi karakterisztikus obszervábilise*, $(\boldsymbol{\chi}_i)_j = \delta_{ij}$ (ezek a $\mathbb{C}^d$-beli standard bázis elemei). Vagyis $\boldsymbol{\chi}_i$ egy olyan obszervábilis, amely 1 értéket vesz fel ha az i-edik kimenet következik be és 0-t egyébként. Tartsuk szem előtt, hogy az i egy absztrakt index, értékei itt most sorszámok, de ez nem kell feltétlenül, hogy így legyen, tetszőleges indexhalmazon futhat. Másrészt az adott szituációban több különböző értékű obszervábilist is megadhatunk.

Az *állapotok* azok a lineáris funkcionálok az obszervábilisek algebráján, melyek megadják az obszervábilisek várható értékét, $\mathbb{E}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{d} p_i a_i$, ahol p_i az i-edik kimenet bekövetkezésének valószínűsége. Ezek a $\mathbb{E}_{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{A}^* = \mathrm{Lin}(\mathbb{A}, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^d$ funkcionálok megadhatók a $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_d) \in \mathbb{A}$ szám d-sekkel való belső szorzatként, melyeket szintén állapotnak hívunk. Vagyis az $\boldsymbol{a} \in \mathbb{A}$ obszervábilis *várható értéke*

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a}) \coloneqq (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{d} p_i a_i. \tag{26}$$

Az i-edik kimenet bekövetkezési valószínűsége a $\boldsymbol{\chi}_i$ elemi karakterisztikus obszervábilis várható értéke,

$$p_{\boldsymbol{p}}(i) \coloneqq \mathbb{E}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\chi}_i) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{\chi}_i) = p_i. \tag{27}$$

Vagyis a $\boldsymbol{p} \in \mathbb{A}$ állapot i-edik komponense pontosan az i-edik kimenet bekövetkezési valószínűsége lesz. A $\boldsymbol{p}$ állapot felírható a

$$\boldsymbol{p} = \sum_{j=1}^{d} p_j \boldsymbol{\delta}_j \tag{28}$$

alakban, ahol a $\boldsymbol{\delta}_j$ a j-edik kimenethez tartozó *tiszta állapot*, $(\boldsymbol{\delta}_j)_i = \delta_{ij}$ (ezek szintén a $\mathbb{C}^d$-beli standard bázis elemei csak ezúttal más szerepet játszanak). Vagyis $\boldsymbol{\delta}_j$ egy olyan állapot melyben mindig a j-ik kimenet következik be (1 valószínűséggel). Az eddigiek alapján látható, hogy $\mathbb{E}_{\boldsymbol{\delta}_j}(\boldsymbol{\chi}_i) = (\boldsymbol{\delta}_j | \boldsymbol{\chi}_i) = \delta_{ij}$.

Például egy pénzérme esetén itt $i \in \{1, 2\}$ indexszel indexeljük az egyes oldalak bekövetkezését, ez a helyzet matematikai kezeléséhez szükséges, de fizikai jelentősége nincs, lehetne például $i \in \{$„fej”, „írás”$\}$. A pénzérme oldalain lehetnek ugyan számok, ezek az obszervábilisek a_i mért értékei, például $\boldsymbol{a} = (1, 2)$, vagy

$\boldsymbol{a} = (0, 1)$, de tetszőleges más számok is lehetnek. Egy dobókocka esetén természetesebb, hogy $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ indexszel indexeljük az egyes oldalak bekövetkezését, de ez itt sem fontos. A kocka oldalain lehetnek számok, ezek az obszervábilisek a_i mért értékei, a szokásos esetben $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$, de tetszőleges más számok is lehetnek. Lehet például egy obszervábilis a $\boldsymbol{b} = (10, -10, 10, -10, 10, -10)$, melyet értelmezhetünk úgy, hogy 10 forinttal fogadunk a páratlan kimenetre. A szabályos kocka állapotát a $\boldsymbol{p} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ vektor jellemzi. Így a kockadobás várható értéke $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}) = \frac{21}{6} = 3.5$, a páratlanra való fogadás várható nyereménye pedig $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{b}) = 0$ forint, ahogy azt vártuk. Egy 6-osra cinkelt kocka állapotát például a $\boldsymbol{q} = \left(\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{2}{12}, \frac{2}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}\right)$ vektor jellemezheti, ezzel a kockadobás várható értéke $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{a}) = \frac{47}{12}$, nagyobb mint a szabályos kockával, a páratlanra való fogadás várható nyereménye pedig $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{b}) = -\frac{10}{6}$ forint, ami kisebb mint a szabályos kockával.

Láttuk tehát, hogy az állapotok valószínűségi eloszlások (pontosabban diszkrét eloszlássűrűségek), melyek megadják minden $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ kimenet bekövetkezésének valószínűségét, tehát $p_j \geq 0$ és $\sum_j p_j = 1$. Az összes lehetséges $\boldsymbol{p} \in \mathbb{A}$ állapotok tere az *állapottér*,

$$\Delta \coloneqq \left\{ \boldsymbol{p} \in \mathbb{C}^{\boldsymbol{d}} \;\middle|\; \boldsymbol{p} = \overline{\boldsymbol{p}},\, \boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{0},\, \sum_j p_j = 1 \right\}, \tag{29}$$

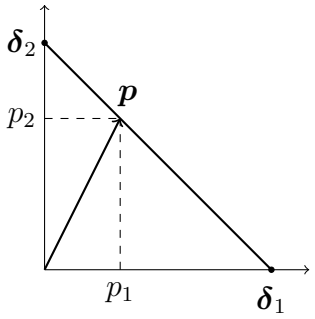
amely az $\mathbb{R}^d$-beli pozitív kúpnak a $d-1$ dimenziós normált hipersíkkal való metszete, $\dim_{\mathbb{R}}(\Delta) = d - 1$. Az állapottér zárt a konvex kombinációra, azaz

$$\sum_{j=1}^{m} w_j \boldsymbol{p}_j \in \Delta, \quad \text{ha} \quad w_j \geq 0, \sum_{j=1}^{m} w_j = 1. \tag{30}$$

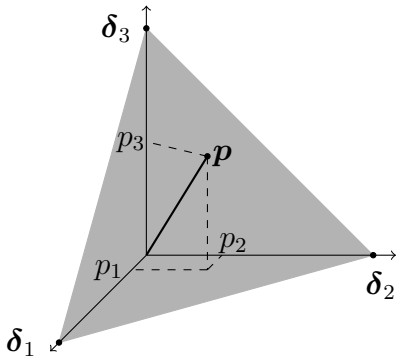
A konvex kombináció jelentése, hogy valamilyen w_j súllyal véletlenszerűen választunk a különböző $\boldsymbol{p}_j$ állapotú rendszerek közül, és ezeken végezzük a méréseket. Az így kapott rendszert a w_j súlyú $\boldsymbol{p}_j$ állapotokkal leírt rendszerek statisztikus sokaságának hívjuk, és ezt a $\sum_{j=1}^{m} w_j \boldsymbol{p}_j$ állapot írja le. Legyen a tiszta állapotok tere

$$\Pi \coloneqq \{\boldsymbol{\delta}_j \mid j = 1, \ldots, d\}. \tag{31}$$

A (28) egyenlet alapján az állapottér d darab tiszta állapot konvex burka, vagyis egy konvex politóp, $\Delta = \mathrm{Conv}(\Pi)$. Az állapottér egy *szimplex*, vagyis minden állapot tiszta állapotokra való felbontása egyértelmű. Fehér zajnak nevezzük azt az állapotot, ahol minden kimenet bekövetkezésének valószínűsége egyenlő, azaz $\boldsymbol{p} = (\frac{1}{d}, \frac{1}{d}, \ldots, \frac{1}{d})$, ez az állapot található az állapottér „középpontjában”.



1. ábra. A klasszikus bit állapottere



2. ábra. A klasszikus trit állapottere

A legegyszerűbb klasszikus állapottereket könnyen el is tudjuk képzelni. Például a $d = 2$ esetben, vagyis két lehetséges kimenettel rendelkező rendszer, a *klasszikus bit* esetén az állapottér $d - 1 = 1$ dimenziós, azaz egy szakasz (lásd az 1 ábrán). A trit esetében pedig $d = 3$, így az állapottér egy két dimenziós konvex halmaz lesz a három dimenziós térben (lásd a 2. ábrán).

3.2. Klasszikus kétrész-rendszerek A két részrendszert az $\mathbb{A}_1 := \mathbb{C}^{d_1}$ illetve $\mathbb{A}_2 := \mathbb{C}^{d_2}$ obszervábilis algebrákkal írjuk le. Ekkor az obszervábilisek az egyes rendszereken

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{d_1} a_i \boldsymbol{\chi}_{1,i} \in \mathbb{A}_1, \quad \boldsymbol{b} = \sum_{j=1}^{d_2} b_j \boldsymbol{\chi}_{2,j} \in \mathbb{A}_2 \tag{32}$$

alakúak, ahol $\boldsymbol{\chi}_{1,i}$ és $\boldsymbol{\chi}_{2,j}$ az elemi karakterisztikus obszervábilisek az $\mathbb{A}_1$ illetve $\mathbb{A}_2$ részrendszereken. Tehát $(\boldsymbol{\chi}_{1,i})_k = \delta_{ik}$ és $(\boldsymbol{\chi}_{2,j})_k = \delta_{jk}$. A részrendszerek állapotai

pedig a

$$\boldsymbol{p}_1 = \sum_i^{d_1} p_{1,i}\boldsymbol{\delta}_{1,i} \in \Delta_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \sum_j^{d_2} p_{2,j}\boldsymbol{\delta}_{2,j} \in \Delta_2 \subset \mathbb{R}^{d_2} \tag{33}$$

alakokban íratók, ahol $\boldsymbol{\delta}_{1,i}$ és $\boldsymbol{\delta}_{2,j}$ a Δ_1 és Δ_2 állapotterek tiszta állapotai. Így az $\boldsymbol{a} \in \mathbb{A}_1$ és $\boldsymbol{b} \in \mathbb{A}_2$ obszervábilisek várható értékei a $\boldsymbol{p}_1 \in \Delta_1$ és $\boldsymbol{p}_2 \in \Delta_2$ állapotokban

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{p}_1}(\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{d_1} p_{1,i}a_i, \quad \mathbb{E}_{\boldsymbol{p}_2}(\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^{d_2} p_{2,j}b_j. \tag{34}$$

Az eddigiekben az egyes részrendszereket külön-külön tárgyaltuk, tekintsük most a teljes rendszert, legyen $\mathbb{A} \coloneqq \mathbb{A}_1 \otimes \mathbb{A}_2$. Az obszervábilisek szorzatát az

$$\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} = \sum_i \sum_j a_i b_j \boldsymbol{\chi}_{1,i} \otimes \boldsymbol{\chi}_{2,j} \in \mathbb{A} \tag{35}$$

szorzat obszervábilis adja meg. Ekkor $\boldsymbol{\chi}_{ij} \coloneqq \boldsymbol{\chi}_{1,i} \otimes \boldsymbol{\chi}_{2,j}$ a karakterisztikus obszervábilis, melynek értéke 1 ha az $\boldsymbol{a}$ obszervábilis az i-edik kimenetet veszi fel, a $\boldsymbol{b}$ pedig a j-ediket, és 0 egyébként. Látható, hogy a szorzat obszervábilis értékei az egyes obszervábilisek értékeinek szorzatai. Azonban nem csak szorzat obszervábilisek léteznek, ezeknek tetszőleges lineáris kombinációja is obszervábilis, ami már nem feltétlenül bontható szorzattá. Egyik legfontosabb példa az összeg-obszervábilis

$$\boldsymbol{a} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \boldsymbol{b} = \sum_i \sum_j (a_i + b_j) \boldsymbol{\chi}_{1,i} \otimes \boldsymbol{\chi}_{2,j} \in \mathbb{A}, \tag{36}$$

ahol $\boldsymbol{a} \in \mathbb{A}_1$ és $\boldsymbol{b} \in \mathbb{A}_2$ és $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$. Látható, hogy az összeg obszervábilis értékei az egyes obszervábilisek értékeinek összegei. Egy általános obszervábilis az összetett rendszeren

$$\boldsymbol{c} = \sum_i \sum_j c_{ij} \boldsymbol{\chi}_{ij} \in \mathbb{A}. \tag{37}$$

A teljes rendszer állapotát a

$$\boldsymbol{p} = \sum_i \sum_j p_{ij} \boldsymbol{\delta}_{1,i} \otimes \boldsymbol{\delta}_{2,j} \in \Delta \subset \mathbb{R}^{d_1} \otimes \mathbb{R}^{d_2} \tag{38}$$

írja le, ahol p_{ij} az együttes valószínűsége annak, hogy $\boldsymbol{a}$ az i-edik kimenetet veszi fel $\boldsymbol{b}$ pedig a j-ediket. Vegyük észre, hogy az egyes rendszerek tiszta állapotainak $\boldsymbol{\delta}_{ij} = \boldsymbol{\delta}_{1,i} \otimes \boldsymbol{\delta}_{2,j}$ tenzorszorzatai a teljes rendszer tiszta állapotai, azaz egy $\boldsymbol{\delta}_{ij}$ állapotban az ij kimenetpár bekövetkezési valószínűsége 1 minden másnak pedig

0. Ezek alapján a szorzat obszervábilis várható értékét a

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{p},\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})=\sum_{i=1}^{d_1}\sum_{j=1}^{d_2}p_{ij}a_ib_j \tag{39}$$

módon kapjuk, az együttes valószínűségeket pedig a karakterisztikus obszervábilisek várható értékeként,

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\chi}_{ij})=\sum_{i=1}^{d_1}\sum_{j=1}^{d_2}p_{ij}\boldsymbol{\chi}_{ij}=p_{ij}. \tag{40}$$

Az összeg obszervábilisek várható értékei a szokásos

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a}\otimes\mathbf{1}+\mathbf{1}\otimes\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{p},\boldsymbol{a}\otimes\mathbf{1}+\mathbf{1}\otimes\boldsymbol{b})=\sum_{ij}p_{ij}(a_i+b_j) \tag{41}$$

módon kapható, általános obszervábilisek várható értékei pedig

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{p},\boldsymbol{c})=\sum_{ij}p_{ij}c_{ij}. \tag{42}$$

A teljes rendszer egyik részrendszerén értelmezett obszervábilisek leírásához elegendő a részrendszer állapota. Ezt a teljes rendszer állapotából a $\mathrm{Red}_2:\Delta\to\Delta_1$ illetve $\mathrm{Red}_1:\Delta\to\Delta_2$ redukció műveletekkel kaphatjuk meg. Ezek definíciói

$$\mathbb{E}_{\mathrm{Red}_2(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{a})=\mathbb{E}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a}\otimes\mathbf{1})=\sum_{ij}p_{ij}a_i=\sum_i\Big(\sum_j p_{ij}\Big)a_i, \tag{43a}$$

$$\mathbb{E}_{\mathrm{Red}_1(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{b})=\mathbb{E}_{\boldsymbol{p}}(\mathbf{1}\otimes\boldsymbol{b})=\sum_{ij}p_{ij}b_j=\sum_j\Big(\sum_i p_{ij}\Big)b_j, \tag{43b}$$

mivel $\boldsymbol{a}\otimes\mathbf{1},\mathbf{1}\otimes\boldsymbol{b}\in\mathbb{A}$ az $\boldsymbol{a}\in\mathbb{A}_1$ és $\boldsymbol{b}\in\mathbb{A}_2$ részrendszeren értelmezett obszervábilisek teljes téren értelmezett alakjai. Így a redukált állapotokat azonosíthatjuk a

$$\mathrm{Red}_2(\boldsymbol{p})=\Big(\sum_j p_{ij}\Big)\boldsymbol{\delta}_{1,i}\in\Delta_1, \tag{44a}$$

$$\mathrm{Red}_1(\boldsymbol{p})=\Big(\sum_i p_{ij}\Big)\boldsymbol{\delta}_{2,j}\in\Delta_2, \tag{44b}$$

alakokkal (ezeket marginális eloszlásoknak is nevezik). Az egyes részrendszereken értelmezett redukció műveleteket a $\mathrm{Red} : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ művelet segítségével is értelmezhetjük, melyre

$$\mathrm{Red}(\boldsymbol{v}) \coloneqq (\mathbf{1}, \boldsymbol{v}) = \sum_i v_i. \tag{45}$$

Ezzel $\mathrm{Red}_2 = I \otimes \mathrm{Red}$, illetve $\mathrm{Red}_1 = \mathrm{Red} \otimes I$, ahol I az identitás.

Könnyen látható, hogy a (36) összeg obszervábilis (41) várható értéke a várható értékek összege, $\mathbb{E}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \boldsymbol{b}) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{p}_1}(\boldsymbol{a}) + \mathbb{E}_{\boldsymbol{p}_2}(\boldsymbol{b})$, a $\boldsymbol{p}_1 \coloneqq \mathrm{Red}_2(\boldsymbol{p})$, $\boldsymbol{p}_2 \coloneqq \mathrm{Red}_1(\boldsymbol{p})$ jelöléssel. A (35) szorzat obszervábilis (39) várható értéke viszont nem lesz a várható értékek szorzata általában, ez a korreláció, mellyel a következő fejezetben foglalkozunk.

3.3. Klasszikus korreláció Az $\boldsymbol{a} \in \mathbb{A}_1$ és $\boldsymbol{b} \in \mathbb{A}_2$ obszervábilisek korrelálatlanok a $\boldsymbol{p} \in \Delta$ állapotú rendszerben, ha a szorzatuk várható értéke a várható értékeik szorzata,

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{p}_1}(\boldsymbol{a})\mathbb{E}_{\boldsymbol{p}_2}(\boldsymbol{b}), \tag{46}$$

vagy a belső szorzattal kifejezve $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{a})(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{b})$, ahol $\boldsymbol{p}_1 = \mathrm{Red}_2(\boldsymbol{p})$ és $\boldsymbol{p}_2 = \mathrm{Red}_1(\boldsymbol{p})$. Ha két részrendszer bármely $\boldsymbol{a} \in \mathbb{A}_1, \boldsymbol{b} \in \mathbb{A}_2$ obszervábilis párja korrelálatlan, akkor maga a két részrendszer korrelálatlan. Ez pontosan azt jelenti, hogy az összetett rendszer állapota szorzat,

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 \otimes \boldsymbol{p}_2, \tag{47}$$

ami komponensekben $p_{ij} = (\boldsymbol{p}_1)_i(\boldsymbol{p}_2)_j$, vagyis bármely eseménypár együttes bekövetkezésének valószínűsége a külön-külön való bekövetkezésük valószínűségeinek szorzata. (Ezt a valószínűségszámításban függetlenségnek nevezik, de a valószínűségi változók tulajdonságainak tekintik, mi viszont szeretnénk elvonatkoztatni az obszervábilisektől.) Valóban, (46) bal oldala $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})$, jobb oldala pedig $(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{a})(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{p}_1 \otimes \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})$, vagyis a (46) egyenlet a $(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1 \otimes \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) = 0$ alakra rendezhető a belső szorzat linearitása miatt a valós esetben. A két részrendszer korrelálatlanságához ennek bármely $\boldsymbol{a} \in \mathbb{A}_1, \boldsymbol{b} \in \mathbb{A}_2$ esetén teljesülnie kell. Mivel $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \otimes \mathbb{A}_2$, ezért az $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$ elemi tenzorok lineáris kombinációjával bármely $\boldsymbol{c} \in \mathbb{A}$ megkapható, így a két részrendszer korrelálatlansága $(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1 \otimes \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{c}) = 0$ bármely $\boldsymbol{c} \in \mathbb{A}$-ra. Ez a belső szorzat nemdegeneráltsága miatt pontosan akkor

teljesül, ha $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1 \otimes \boldsymbol{p}_2 = 0$. A korrelálatlan $\boldsymbol{p}$ állapotok terét a

$$\Delta_{\text{unc}} \coloneqq \left\{ \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 \otimes \boldsymbol{p}_2 \;\middle|\; \boldsymbol{p}_1 \in \Delta_1, \boldsymbol{p}_2 \in \Delta_2 \right\} \tag{48}$$

módon jelöljük.

Például tekintsünk két egyformán felmágnesezett pénzérmét, az ilyenek egymáshoz közel feldobva gyakrabban adnak ellentétes eredményt (írás-fej, fej-írás) mint azonosat (fej-fej, írás-írás). Az állapot legyen például $\boldsymbol{p} = (\frac{1}{10}, \frac{4}{10}, \frac{4}{10}, \frac{1}{10})$. Az egyes érmék redukált állapotai $\boldsymbol{p}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ és $\boldsymbol{p}_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Ekkor a $\boldsymbol{p}_1 \otimes \boldsymbol{p}_2 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \neq \boldsymbol{p}$, vagyis a két érme tényleg korrelált.

Fontos látni, hogy ha a rendszer korrelálatlan (47), akkor minden obszervábilis pár korrelálatlan (46), de ez visszafelé nem igaz, tehát korrelált rendszernek lehet korrelálatlan obszervábilis párja. Erre a legkisebb példa [6] a trit-bit rendszer, $d_1 = 3$ és $d_2 = 2$, ekkor ellenőrizhető, hogy az $\boldsymbol{a} = (1, 0, -1) \in \mathbb{A}_1$ és $\boldsymbol{b} = (1, -1) \in \mathbb{A}_2$ obszervábilisek a $\boldsymbol{p} = (0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3})$ állapotban korrelálatlanok, $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) = 0 = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{a})(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{b})$, mivel a redukált állapotok $\boldsymbol{p}_1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ és $\boldsymbol{p}_2 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, viszont $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{p}_1 \otimes \boldsymbol{p}_2$. (Ha az állapot szorzat lenne, akkor a redukáltjainak szorzata lenne.)

3.4. Kvantumos valószínűségi elmélet A kvantumos esetben az *obszervábilisek* leírhatóak a

$$A = \sum_i a_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| \in \mathcal{A} \coloneqq \mathrm{Lin}(\mathcal{H}) \tag{49}$$

normális operátorokkal, ahol az a_i sajátérték az i-edik kimenethez tartozó mért érték, $|\alpha_i\rangle$ pedig egy ortonormált bázis $\mathcal{H}$-ban. Így az i-edik sajátaltérbe vetítő projekció $P_i \coloneqq |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$. A P_i projekciók azonosíthatók elemi karakterisztikus obszervábilisekként is, mivel az i-edik kimenet bekövetkezése esetén értéke 1 és 0 egyébként. Fontos látni, hogy különböző obszervábilisekhez különböző elemi karakterisztikus obszervábilisek tartozhatnak, melyek általában nem kommutálnak.

Az *állapotok* a kvantumos esetben is azok a lineáris funkcionálok az obszervábilisek algebráján, melyek megadják az obszervábilisek várható értékét. Ezek az $\mathbb{E}_\rho \in \mathcal{A}^*$ funkcionálok megadhatók a $\rho \in \mathcal{A}$ *sűrűségoperátorokkal* való (20) Hilbert-Schmidt-belső szorzatként, melyeket szintén állapotoknak hívunk. Vagyis az $A \in \mathcal{A}$ obszervábilis várható értéke

$$\mathbb{E}_\rho(A) = (\rho, A) = \mathrm{Tr}(\rho A). \tag{50}$$

Az i-edik kimenet bekövetkezési valószínűségét ismét az elemi karakterisztikus obszervábilis várható értéke adja,

$$p_i = \mathbb{E}_\rho(P_i) = \mathrm{Tr}(\rho P_i), \tag{51}$$

ezt nevezzük *Born szabálynak*. Belátható, hogy a bekövetkezési valószínűségek valósak pontosan akkor, ha az állapot önadjungált ($\rho^\dagger = \rho$), ezen belül nemnegatívak pontosan akkor, ha az állapot pozitív szemidefinit ($\rho \geq 0$), valamint egyre összegződnek ($\sum_i p_i = 1$) pontosan akkor, ha az állapot egy-nyomú ($\mathrm{Tr}(\rho) = 1$). A $\pi = |\psi\rangle\langle\psi| \in \mathcal{A}$ alakú állapotot *tiszta állapotnak* nevezzük, a $|\psi\rangle$ vektort pedig állapotvektornak, ekkor $\|\psi\| = 1$. Egy ρ állapot pontosan akkor tiszta, ha a négyzete önmaga, azaz ha egy 1-rangú projektor. A tiszta állapotok nemtriviális konvex kombinációit nevezzük *kevert állapotoknak*, vagyis kevert az az állapot, ami nem tiszta. A $\pi = |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| = P_i$ tiszta állapotra az $A = \sum_j |\alpha_j\rangle\langle\alpha_j|$ obszervábilis mérési statisztikája $p_j = \mathrm{Tr}(|\alpha_i\rangle\langle\alpha_i||\alpha_j\rangle\langle\alpha_j|) = \delta_{ij}$, vagyis ebben a tiszta állapotban az i kimenet bekövetkezésének valószínűsége 1, és a többié 0. A klasszikus esettel ellentétben bármely $|\psi\rangle\langle\psi|$ tiszta állapothoz létezik olyan obszervábilis, melyre a mérési statisztika nem lesz tiszta. Ez pontosan olyan obszervábilisek esetén lehet, ahol $\langle\alpha_i|\psi\rangle \neq 0$ egynél több i-re. Kevert állapot esetén nem létezik olyan obszervábilis, melyre a mérési statisztika tiszta lenne, a klasszikus esettel összhangban.

Az állapottér a pozitív szemidefinit és normált operátorok (sűrűségoperátorok, állapotok) tere,

$$\mathcal{D} \coloneqq \big\{\rho \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}) \;\big|\; \rho^\dagger = \rho, \rho \geq 0, \mathrm{Tr}(\rho) = 1\big\}. \tag{52}$$

Az állapottér a klasszikus esethez hasonlóan konvex kombinációra zárt,

$$\sum_j^m w_j \rho_j \in \mathcal{D}, \quad \text{ahol} \quad w_j \geq 0, \sum_j^m w_j = 1. \tag{53}$$

A tiszta állapotok tere a

$$\mathcal{P} \coloneqq \big\{\pi = |\psi\rangle\langle\psi| \;\big|\; |\psi\rangle \in \mathcal{H},\, \|\psi\| = 1\big\}. \tag{54}$$

Bármely $\rho \in \mathcal{D}$ állapot felbontható tiszta állapotok $\rho = \sum_i w_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ konvex kombinációjára, de a klasszikus esettől eltérően ez a felbontás nem egyértelmű. A spektrális felbontás sajátértékekkel és sajátprojekciókkal csak az egyik lehetséges felbontás. Az állapot felbontásához szükséges tiszta állapotok minimális száma az állapot rangja.

3.5. A kvantum bit Például a legegyszerűbb kvantumos rendszer a $d = 2$ eset, azaz a *qubit*. Ekkor az állapottér egy $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{D}) = d^2 - 1 = 3$ dimenziós konvex test. Vegyük most a Hilbert-Schmidt-ortonormált *Pauli-bázist* $\mathrm{Lin}(\mathcal{H})$-ban, $\left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{2}}, \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}}, \frac{\sigma_3}{\sqrt{2}}, \frac{\sigma_3}{\sqrt{2}}\right)$, ahol σ_μ a szokásos *Pauli-operátorok*, melyek mátrixai,

$$\sigma_0 = I : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 : \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{55}$$

A Pauli mátrixok önadjungáltak, illetve σ_0 kivételével nyomtalanok, $\mathrm{Tr}(\sigma_a) = 0$, $a \in \{1, 2, 3\}$. Továbbá a szorzási szabályuk

$$\sigma_a \sigma_b = \delta_{ab} I + i \sum_{c=1}^{3} \epsilon_{abc} \sigma_c, \tag{56a}$$

ebből a kommutációs relációk

$$[\sigma_a, \sigma_b] = 2i \sum_{c=1}^{3} \epsilon_{abc} \sigma_c, \tag{56b}$$

és az antikommutációs relációk

$$\{\sigma_a, \sigma_b\} = 2\delta_{ab} I, \tag{56c}$$

ahol $a, b \in \{1, 2, 3\}$. Egy $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorra, használva a $\boldsymbol{v}\boldsymbol{\sigma} \coloneqq v_1\sigma_1 + v_2\sigma_2 + v_3\sigma_3$ jelölést, a szorzási szabály

$$(\boldsymbol{v}\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{u}\boldsymbol{\sigma}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) I + i(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u})\boldsymbol{\sigma}, \tag{57a}$$

ezzel a kommutációs relációk

$$[\boldsymbol{v}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u}\boldsymbol{\sigma}] = 2i(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u})\boldsymbol{\sigma}, \tag{57b}$$

és az antikommutációs relációk

$$\{\boldsymbol{v}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u}\boldsymbol{\sigma}\} = 2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) I. \tag{57c}$$

Mivel bármely állapotra teljesülnie kell a $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$ feltételnek, az állapotokat a

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}(I + \boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma}) \tag{58}$$

módon paraméterezhetjük, ahol $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3$ a *Bloch-vektor*. Az $\boldsymbol{r} \mapsto \rho(\boldsymbol{r})$ affin leképzés őrzi a konvex kombinációt, azaz $\rho\big(\sum_i w_i \boldsymbol{r}_i\big) = \sum_i w_i \rho(\boldsymbol{r}_i)$, ahol $\sum_i w_i = 1$ és $w_i \geq 0$, így a Bloch vektorok terének geometriája meg fog egyezni az állapottér

geometriájával. Tekintsük most a tiszta állapotokat, ekkor $\rho^2 = \rho$, így

$$\frac{1}{4}(I + \boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma})(I + \boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}(I + \boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma}). \tag{59}$$

A baloldalt átalakítva és használva az (57a) azonosságot

$$\frac{1}{4}\big(I + \|\boldsymbol{r}\|^2 I\big) + \frac{1}{2}\boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}(I + \boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma}), \tag{60}$$

ami pontosan akkor teljesül, ha $\|\boldsymbol{r}\|^2 = 1$, vagyis a tiszta állapotokat jellemző $\boldsymbol{r}$ Bloch-vektorok egy három dimenziós gömbfelület pontjaiba mutatnak, azaz

$$\rho \in \mathcal{P} \iff \boldsymbol{r} \in \mathcal{S}^2 = \big\{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; \|\boldsymbol{r}\|^2 = 1\big\}. \tag{61}$$

Mivel az állapotok a tiszta állapotok konvex kombinációi, $\mathcal{D} = \mathrm{Conv}(\mathcal{P})$, így a teljes állapottér Bloch-vektoraira

$$\rho \in \mathcal{D} \iff \boldsymbol{r} \in \mathrm{Conv}(\mathcal{S}^2) = \mathcal{B}^3 = \big\{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; \|\boldsymbol{r}^2\| \leq 1\big\}, \tag{62}$$

ezt nevezzük Bloch-gömbnek. Határozzuk meg most $\rho \in \mathcal{D}$ állapot sajátértékeit. Tudjuk, hogy (57a) miatt $(\boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma})^2 = \|\boldsymbol{r}\|^2 I$, így a sajátértékek négyzete $\|\boldsymbol{r}\|^2$, illetve $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma}) = 0$, tehát a sajátértékek összege nulla. Ezek alapján a $\boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma}$ operátor spektrális felbontása,

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma} = \|\boldsymbol{r}\||\phi_+\rangle\langle\phi_+| - \|\boldsymbol{r}\||\phi_-\rangle\langle\phi_-|, \tag{63}$$

ahol $|\phi_\pm\rangle$ a sajátvektorok. Így az eredeti $\rho = \frac{1}{2}(I + \boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma})$ állapot spektrális felbontása

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \|\boldsymbol{r}\|)|\phi_+\rangle\langle\phi_+| + \frac{1}{2}(1 - \|\boldsymbol{r}\|)|\phi_-\rangle\langle\phi_-|, \tag{64}$$

ahol kihasználtuk, hogy $I = |\phi_+\rangle\langle\phi_+| + |\phi_-\rangle\langle\phi_-|$. Ez utóbbiból és a (63) egyenletből belátható, hogy a spektrális projektorok Bloch-vektorral felírt alakja $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$ esetén

$$|\phi_\pm\rangle\langle\phi_\pm| = \frac{1}{2}\Big(I \pm \frac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|}\boldsymbol{\sigma}\Big). \tag{65}$$

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ esetén ezek tetszőleges egy-rangú ortogonális projektorok. A (64) spektrális felbontás egy speciális esete a sűrűségoperátor konvex felbontásának. Ha az állapot nem tiszta akkor további tiszta állapotokra való dekompozíció is megadható, ez a 3 ábrán is jól látható.

Az obszervábiliseket is kifejthetjük a Pauli operátorokkal,

$$A = \sum_\mu A_\mu \sigma_\mu = A_0 I + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\sigma}, \tag{66}$$

ahol $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, A_3) \in \mathbb{C}^3$. Az A operátor önadjungált pontosan akkor, ha az A_μ komponensek valósak, ekkor sajátértékei $A_0 \pm \|\boldsymbol{A}\|$ lesznek, a korábbiak alapján. Legyen most A egy $\hat{\boldsymbol{v}}$ irányú ($\|\hat{\boldsymbol{v}}\| = 1$) spinvetület mérés operátora,

$$A = S_{\hat{\boldsymbol{v}}} \coloneqq \frac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{\sigma}. \tag{67}$$

Speciálisan a koordinátairányokban $S_a \coloneqq \frac{\hbar}{2}\sigma_a$. Ekkor a spektrális felbontás a

$$S_{\hat{\boldsymbol{v}}} = \frac{\hbar}{2}|\alpha_+\rangle\langle\alpha_+| - \frac{\hbar}{2}|\alpha_-\rangle\langle\alpha_-| \tag{68}$$

alakban írható, ahol $|\alpha_\pm\rangle\langle\alpha_\pm| = \frac{1}{2}\big(I \pm \hat{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{\sigma}\big)$, megint csak a korábbiak alapján. Ha ezt az operátort a $\rho = \frac{1}{2}\big(I + \boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma}\big)$ állapotban mérjük, a két spin állás méréseihez tartozó mérési statisztikák a

$$\begin{aligned} p_\pm &= \mathbb{E}_\rho(|\alpha_\pm\rangle\langle\alpha_\pm|) = \big(\rho, |\alpha_\pm\rangle\langle\alpha_\pm|\big) = \operatorname{Tr}\Big(\frac{1}{2}\big(I + \boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma}\big)\frac{1}{2}\big(I \pm \hat{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{\sigma}\big)\Big) \\ &= \frac{1}{4}\operatorname{Tr}\big(I \pm (\boldsymbol{r}, \hat{\boldsymbol{v}})I\big) = \frac{1}{2}(1 \pm (\boldsymbol{r}, \hat{\boldsymbol{v}})) \end{aligned} \tag{69}$$

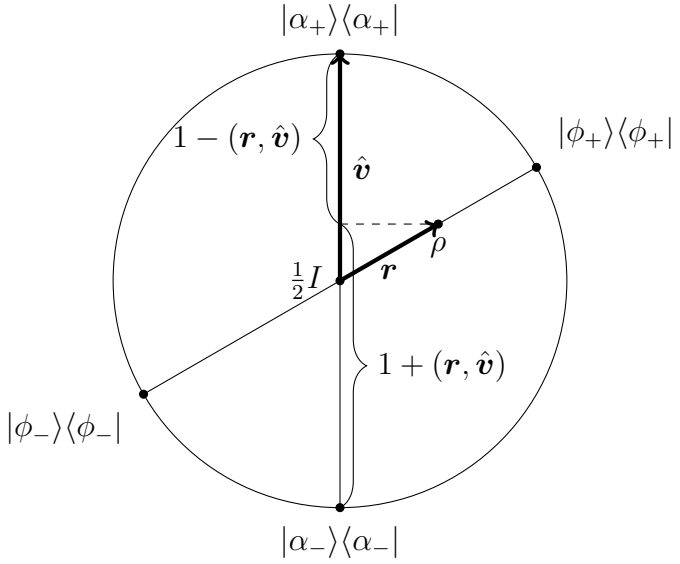
módon kaphatók, ahol felhasználtuk az (57a) azonosságot, a σ_a operátorok nyom mentességét és a nyom linearitását. Tehát a $\pm\frac{\hbar}{2}$ értékek méréseinek valószínűségei $p_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \boldsymbol{r}\hat{\boldsymbol{v}})$, azaz egy tiszta állapot esetén sincs feltétlenül biztosan bekövetkező kimenet, csak hogyha $\hat{\boldsymbol{v}}$ és $\boldsymbol{r}$ párhuzamos. A spinmérés várható értéke

$$\mathbb{E}_\rho(S_{\hat{\boldsymbol{v}}}) = \big(\rho, S_{\hat{\boldsymbol{v}}}\big) = \Big(\frac{1}{2}\big(I + \boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma}\big), \frac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{\sigma}\Big) = \frac{\hbar}{4}\operatorname{Tr}((\boldsymbol{r}, \hat{\boldsymbol{v}})I) = \frac{\hbar}{2}(\boldsymbol{r}, \hat{\boldsymbol{v}}), \tag{70}$$

ami pont az $\boldsymbol{r}$ Bloch vektor $\hat{\boldsymbol{v}}$ mérési irányra vett vetületének $\frac{\hbar}{2}$ szerese. Vegyük észre, hogy ha $\hat{\boldsymbol{v}} = (0, 0, 1)$ és $\boldsymbol{r} = (0, 0, r)$, és nem is tekintünk más obszervábilist, akkor a kvantumos leírás klasszikusra redukálódik, a qubit pedig klasszikus bitre. Ekkor az A és ρ operátorok mátrixai diagonálisak és ρ elemei a $p_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm r)$, ahol $0 \le r \le 1$. Tehát visszakaptuk a klasszikus bit állapotterét, egy másik paraméterezésben.

3.6. Kvantumos kétrész-rendszerek A kvantumos esetben az egyes részrendszereket az $\mathcal{A}_1 \coloneqq \operatorname{Lin}(\mathcal{H}_1)$ illetve $\mathcal{A}_2 \coloneqq \operatorname{Lin}(\mathcal{H}_2)$ obszervábilis algebrákkal írjuk le. Ekkor az obszervábilisek az egyes rendszereken

$$A = \sum_{i=1}^{d_1} a_i|\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| \in \mathcal{A}_1, \quad B = \sum_{j=1}^{d_2} b_j|\beta_j\rangle\langle\beta_j| \in \mathcal{A}_2 \tag{71}$$



3. ábra. A Bloch-gömb $\hat{\boldsymbol{v}}$ mérési irány és $\boldsymbol{r}$ állapotot jellemző Bloch-vektor által kifeszített síkkal vett metszete

alakúak, ahol $|\alpha_i\rangle \in \mathcal{H}_1$, $|\beta_j\rangle \in \mathcal{H}_2$ ortonormált bázisok. Tehát az elemi karakterisztikus obszervábilisek az egyes rendszereken a $P_{1i} \coloneqq |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$, $P_{2j} \coloneqq |\beta_j\rangle\langle\beta_j|$ ortogonális projekciókkal azonosíthatóak. Az egyes rendszerek állapotai pedig a

$$\rho_1 = \sum_{i=1}^{m_1} w_{1i}|\xi_i\rangle\langle\xi_i| \in \mathcal{D}_1, \quad \rho_2 = \sum_{j=1}^{m_2} w_{2j}|\zeta_j\rangle\langle\zeta_j| \in \mathcal{D}_2, \tag{72}$$

ahol $|\xi_i\rangle\langle\xi_i| \in \mathcal{P}_1$ és $|\zeta_j\rangle\langle\zeta_j| \in \mathcal{P}_2$ tiszta állapotok a $\mathcal{D}_1$ és $\mathcal{D}_2$ állapotterekben. Így az $A \in \mathcal{A}_1$ és $B \in \mathcal{A}_2$ obszervábilisek várható értékei a $\rho_1 \in \mathcal{D}_1$ és $\rho_2 \in \mathcal{D}_2$ állapotokban

$$\mathbb{E}_{\rho_1}(A) = (\rho_1, A) = \mathrm{Tr}(\rho_1 A), \quad \mathbb{E}_{\rho_2}(B) = (\rho_2, B) = \mathrm{Tr}(\rho_2 B). \tag{73}$$

Az eddigiekben az egyes részrendszereket külön-külön tárgyaltuk, tekintsük most a teljes rendszert, ekkor az obszervábilisek szorzatát az

$$A \otimes B = \sum_{i=1}^{d_1}\sum_{i=1}^{d_2} a_i b_j P_{1,i} \otimes P_{2,j} \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_2) \coloneqq \mathrm{Lin}(\mathcal{H}) \tag{74}$$

szorzat obszervábilis adja meg. Ekkor $P_{ij} \coloneqq P_{1,i} \otimes P_{2,j}$ a karakterisztikus obszervábilis, melynek értéke 1 ha az A obszervábilis az i-edik kimenetet veszi fel a B pedig

a j-ediket, és 0 egyébként. Látható, hogy a szorzat obszervábilis értékei az egyes obszervábilisek értékeinek szorzatai. Azonban nem csak szorzat obszervábilisek léteznek, ezeknek tetszőleges lineáris kombinációja is obszervábilis, ami már nem feltétlenül bontható szorzattá. Egyik legfontosabb példa az összeg-obszervábilis

$$A \otimes I + I \otimes B = \sum_{i=1}^{d_1} \sum_{i=1}^{d_2} (a_i + b_j) P_{1,i} \otimes P_{2,j} \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}), \tag{75}$$

ahol $A \in \mathcal{A}_1$ és $B \in \mathcal{A}_2$. Látható, hogy az összeg obszervábilis értékei az egyes obszervábilisek értékeinek összegei. Egy általános obszervábilis az összetett rendszeren

$$C = \sum_{k=1}^{d} c_k |\gamma_k\rangle\langle\gamma_k| \tag{76}$$

alakú, ahol $Q_k \coloneqq |\gamma_k\rangle\langle\gamma_k|$ együttes karakterisztikus obszervábilis, ami nem feltétlenül szorzat, azaz $Q_k \neq P_{1,i} \otimes P_{2,j}$.

A teljes rendszer állapotát a

$$\rho = \sum_{k=1}^{m} w_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k| \in \mathcal{D} \coloneqq \mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}_2 \tag{77}$$

sűrűségoperátor írja le, ahol $|\psi_k\rangle\langle\psi_k| \in \mathcal{P}$. Fontos megjegyeznünk, hogy a kvantumos esetben a teljes rendszer egy tiszta állapota nem feltétlenül szorzat állapot. Ezek alapján a szorzat obszervábilis várható értékét a

$$\mathbb{E}_\rho(A \otimes B) = \big(\rho, A \otimes B\big) = \sum_{k,i,j} w_k a_i b_j \big|\langle\psi_k|\alpha_i \otimes \beta_j\rangle\big|^2 \tag{78}$$

módon kapjuk, a P_{ij} együttes karakterisztikus obszervábilis várható értéke pedig megadja az együttes ij kimenetpár valószínűségét, az A és B együttes mérési statisztikáját,

$$\mathbb{E}_\rho(P_{ij}) = \sum_{k} w_k |\langle\psi_k|\alpha_i \otimes \beta_j\rangle|^2. \tag{79}$$

Az összeg obszervábilis várható értéke a szokásos

$$\mathbb{E}_\rho(A \otimes I + I \otimes B) = (\rho, A \otimes I + I \otimes B) = \sum_{k,i,j} w_k (a_i + b_j) |\langle\psi_k|\alpha_i \otimes \beta_j\rangle|^2 \tag{80}$$

módon kapható, általános obszervábilis várható értéke pedig

$$\mathbb{E}_\rho(C) = (\rho, C) = \sum_{k,i} w_k c_i |\langle\psi_k|\gamma_i\rangle|^2. \tag{81}$$

A (75) összeg obszervábilisre példa a spinösszeadás operátor,

$$S_{\hat{\boldsymbol{v}}} \otimes I + I \otimes S_{\hat{\boldsymbol{v}}}. \tag{82}$$

A (76) általános obszervábilisre pedig a spinnégyzet operátor,

$$\sum_{a=1}^{3} S_a \otimes S_a. \tag{83}$$

Ezeknek sajátvektorai a (23) szinglet és triplet vektorok.

A teljes rendszer egyik részrendszerén értelmezett obszervábilisek leírásához elegendő a részrendszer állapota. Ezt a teljes rendszer állapotából a $\mathrm{Red}_2 : \mathcal{D} \to \mathcal{D}_1$ illetve $\mathrm{Red}_1 : \mathcal{D} \to \mathcal{D}_2$ redukció műveletekkel kaphatjuk meg. Ezeket a

$$\mathbb{E}_{\mathrm{Red}_2(\rho)}(A) = \mathbb{E}_\rho(A \otimes I), \tag{84a}$$

$$\mathbb{E}_{\mathrm{Red}_1(\rho)}(B) = \mathbb{E}_\rho(I \otimes B) \tag{84b}$$

módon definiáljuk. A redukció kiszámításához használjuk fel, hogy az állapot az $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ tenzorszorzat tér eleme, vagyis elemi tenzorok $\rho = \sum_k R_k \otimes S_k$ lineáris kombinációjaként írható. Eszerint a (84a) egyenlet jobb oldalát átírhatjuk a $\mathrm{Tr}(\rho A \otimes I) = \mathrm{Tr}\left(\sum_k (R_k \otimes S_k)(A \otimes I)\right)$ alakba. Innen a nyom leképzés linearitását felhasználva a jobb oldal $\sum_k \mathrm{Tr}\left(R_k A \otimes S_k\right)$, és tudjuk, hogy elemi tenzorokon a nyom az egyes részrendszereken vett nyomok szorzata, így ez $\sum_k \mathrm{Tr}\left(R_k A\right) \mathrm{Tr}\left(S_k\right)$. Ezután ismét használjuk a nyom linearitását az első tagban, így

$$\mathrm{Tr}\left(\left(\sum_k R_k \,\mathrm{Tr}(S_k)\right) A\right) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Red}_2(\rho) A). \tag{85}$$

Tehát a Red_2 műveletet azonosíthatjuk a $\mathrm{Tr}_2 = \mathcal{I} \otimes \mathrm{Tr}$ részleges nyom (7) művelettel. Hasonlóan a másik részrendszerre $\mathrm{Red}_1 = \mathrm{Tr}_1 = \mathrm{Tr} \otimes \mathcal{I}$. Könnyen látható, hogy tiszta állapotok esetén a (22) Schmidt-kanonikus alakban megjelenő Schmidt-együtthatók négyzetei és Schmidt-vektorok a redukált állapotok sajátértékei és sajátvektorai lesznek,

$$\mathrm{Tr}_2\left(|\psi\rangle\langle\psi|\right) = \sum_{i=1}^{d_{\min}} \eta_i |\xi_i\rangle\langle\xi_i|, \tag{86a}$$

$$\mathrm{Tr}_1\left(|\psi\rangle\langle\psi|\right) = \sum_{i=1}^{d_{\min}} \eta_i |\zeta_i\rangle\langle\zeta_i|, \tag{86b}$$

az állapotvektor Schmidt-rangja pedig a redukált állapotok rangja lesz. (Pontosabban a nagyobbik dimenziós téren a sajátértékek a Schmidt együtthatók mellett az $i > \min\{d_1, d_2\}$ indexekre definíció szerint $\eta_i := 0$ lesznek.)

Könnyen látható, hogy a (75) összeg obszervábilis (80) várható értéke a várható értékek összege, $\mathbb{E}_\rho(A \otimes I + I \otimes B) = \mathbb{E}_{\rho_1}(A) + \mathbb{E}_{\rho_2}(B)$, a $\rho_1 := \mathrm{Tr}_2(\rho)$, $\rho_2 := \mathrm{Tr}_1(\rho)$ jelöléssel. A (74) szorzat obszervábilis (78) várható értéke viszont nem lesz a várható értékek szorzata általában, ez a korreláció, mellyel a következő fejezetben foglalkozunk.

Például két qubit esetén a teljes rendszer állapota a Pauli-bázisban

$$\rho = \frac{1}{4}\big(I \otimes I + \boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma} \otimes I + I \otimes \boldsymbol{s}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{t}(\boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma})\big), \tag{87}$$

ahol $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^3$ és $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$, és használjuk a $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma}) = \sum_{i,j=1}^3 t_{ij}\sigma_i \otimes \sigma_j$ jelölést. Ekkor az egyes rendszerek ρ_1, ρ_2 állapotai

$$\rho_1 = \mathrm{Tr}_2(\rho) = \frac{1}{2}\big(I + \boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma}\big), \tag{88a}$$

$$\rho_2 = \mathrm{Tr}_1(\rho) = \frac{1}{2}\big(I + \boldsymbol{s}\boldsymbol{\sigma}\big), \tag{88b}$$

vagyis $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}$ a lokális Bloch-vektorok. A teljes ρ állapotban $\boldsymbol{t}$ a kvantumállapot nem lokális paramétereit tartalmazza, ez egyik részrendszer állapotában sem szerepel, nem elérhető az $A \otimes I$, $I \otimes B$ lokális obszervábilisekkel. Sajnos már ebben a nagyon kicsi rendszerben sem tudjuk a ρ sűrűségoperátor pozitivitását az $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}$ paraméterek tartományával megfogalmazni. Tekinthetünk $|\psi\rangle$ állapotvektorokkal megadott $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ tiszta állapotokat is, például a (24) vektorokkal megadott Bell-állapotokat. Ezeket a σ_i mátrixokkal írva

$$|\mathrm{B}_0\rangle\langle\mathrm{B}_0| = \frac{1}{4}\big(I \otimes I + \sigma_1 \otimes \sigma_1 - \sigma_2 \otimes \sigma_2 + \sigma_3 \otimes \sigma_3\big), \tag{89a}$$

$$|\mathrm{B}_1\rangle\langle\mathrm{B}_1| = \frac{1}{4}\big(I \otimes I + \sigma_1 \otimes \sigma_1 + \sigma_2 \otimes \sigma_2 - \sigma_3 \otimes \sigma_3\big), \tag{89b}$$

$$|\mathrm{B}_2\rangle\langle\mathrm{B}_2| = \frac{1}{4}\big(I \otimes I - \sigma_1 \otimes \sigma_1 - \sigma_2 \otimes \sigma_2 - \sigma_3 \otimes \sigma_3\big), \tag{89c}$$

$$|\mathrm{B}_3\rangle\langle\mathrm{B}_3| = \frac{1}{4}\big(I \otimes I - \sigma_1 \otimes \sigma_1 + \sigma_2 \otimes \sigma_2 + \sigma_3 \otimes \sigma_3\big), \tag{89d}$$

azaz $\boldsymbol{r} = 0$ és $\boldsymbol{s} = 0$ minden Bell-állapotra, és $\boldsymbol{t}$ diagonális,

$$\boldsymbol{t}_0 = \mathrm{diag}(+1, -1, +1), \tag{90a}$$

$$\boldsymbol{t}_1 = \mathrm{diag}(+1, +1, -1), \tag{90b}$$

$$\boldsymbol{t}_2 = \mathrm{diag}(-1, -1, -1), \tag{90c}$$

$$\boldsymbol{t}_3 = \mathrm{diag}(-1, +1, +1). \tag{90d}$$

A (22) Schmidt-kanonikus alakban megadott

$$|\psi\rangle = \sqrt{\eta_0}|00\rangle + \sqrt{\eta_1}|11\rangle \tag{91}$$

állapotvektor esetén

$$\begin{aligned} |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{4}\big(I \otimes I + \sigma_3 \otimes \sigma_3 + (\eta_0 - \eta_1)(I \otimes \sigma_3 + \sigma_3 \otimes I) \\ +2\sqrt{\eta_0\eta_1}(\sigma_1 \otimes \sigma_1) - 2\sqrt{\eta_0\eta_1}(\sigma_2 \otimes \sigma_2)\big), \end{aligned} \tag{92}$$

azaz $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{s} = (0, 0, \eta_0 - \eta_1)$ és $\boldsymbol{t} = \mathrm{diag}(2\sqrt{\eta_0\eta_1}, -2\sqrt{\eta_0\eta_1}, 1)$.

3.7. Kvantum korreláció Az $A \in \mathcal{A}_1$ és $B \in \mathcal{A}_2$ obszervábilisek korrelálatlanok a $\rho \in \mathcal{D}$ állapotú rendszerben, ha a szorzatuk várható értéke a várható értékeik szorzata,

$$\mathbb{E}_\rho(A \otimes B) = \mathbb{E}_{\rho_1}(A)\mathbb{E}_{\rho_2}(B), \tag{93}$$

vagy a belső szorzattal kifejezve $(\rho, A \otimes B) = (\rho_1, A)(\rho_2, B)$, ahol $\rho_1 = \mathrm{Tr}_2(\rho)$ és $\rho_2 = \mathrm{Tr}_1(\rho)$. Ha két részrendszer bármely $A \in \mathcal{A}_1$, $B \in \mathcal{A}_2$ obszervábilis párja korrelálatlan, akkor maga a két részrendszer korrelálatlan. Ez pontosan azt jelenti, hogy az összetett rendszer állapota szorzat,

$$\rho = \rho_1 \otimes \rho_2, \tag{94}$$

ilyenkor minden obszervábilis pár bármely eseménypárjának együttes bekövetkezésének valószínűsége a külön-külön való bekövetkezésük valószínűségeinek szorzata. Valóban, (93) bal oldala $(\rho, A \otimes B)$, jobb oldala pedig $(\rho_1, A)(\rho_2, B) = (\rho_1 \otimes \rho_2, A \otimes B)$, vagyis a (93) egyenlet a $(\rho - \rho_1 \otimes \rho_2, A \otimes B) = 0$ alakra rendezhető a (20) Hilbert-Schmidt-belső szorzat linearitása miatt az önadjungált esetben. A két részrendszer korrelálatlanságához ennek bármely normális $A \in \mathcal{A}_1, B \in \mathcal{A}_2$ esetén teljesülnie kell. Mivel normális operátorok lineáris kombinációjaként bármely operátor megkapható, valamint $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, ezért az A, B normális operátorokból

képzett $A \otimes B$ elemi tenzorok lineáris kombinációjával bármely $C \in \mathcal{A}$ megkapható, így a két részrendszer korrelálatlansága $(\rho - \rho_1 \otimes \rho_2, C) = 0$ bármely $C \in \mathcal{A}$-ra. Ez a (20) Hilbert-Schmidt-belső szorzat nemdegeneráltsága miatt pontosan akkor teljesül, ha $\rho - \rho_1 \otimes \rho_2 = 0$. A korrelálatlan ρ állapotok terét a

$$\mathcal{D}_{\text{unc}} = \left\{ \rho \in \mathcal{D} \;\middle|\; \rho = \rho_1 \otimes \rho_2, \rho_1 \in \mathcal{D}_1, \rho_2 \in \mathcal{D}_2 \right\} \subset \mathcal{D} \tag{95}$$

módon jelöljük. Mivel a kvantum esetben a tiszta állapotok nem feltétlenül korrelálatlanok, ezért jelöljük a korrelálatlan tiszta állapotok terét is,

$$\mathcal{P}_{\text{unc}} = \left\{ \pi \in \mathcal{P} \;\middle|\; \pi = \pi_1 \otimes \pi_2, \pi_1 \in \mathcal{P}_1, \pi_2 \in \mathcal{P}_2 \right\} = \mathcal{D}_{\text{unc}} \cap \mathcal{P}. \tag{96}$$

3.8. Kvantum összefonódás Mivel a kvantum esetben léteznek korrelált tiszta állapotok, ezért nem igaz, hogy minden állapotot korrelálatlan állapotok konvex kombinációjaként (statisztikus keverékeként) megkaphatunk. Vagyis

$$\mathcal{D} = \text{Conv}(\mathcal{P}) \supsetneq \text{Conv}(\mathcal{D}_{\text{unc}}), \tag{97}$$

azaz léteznek olyan korrelált állapotok, melyek nem állíthatóak elő korrelálatlan állapotok konvex kombinációjaként (statisztikus keverékeként), ez az *összefont állapot* definíciója. Azokat az állapotokat amelyek felírhatóak korrelálatlan állapotok konvex kombinációjaként, *szeparálható állapotoknak* nevezzük,

$$\mathcal{D}_{\text{sep}} = \text{Conv}(\mathcal{D}_{\text{unc}}) = \text{Conv}(\mathcal{P}_{\text{unc}}), \tag{98}$$

azaz a ρ állapot összefont, ha $\rho \in \mathcal{D} \backslash \mathcal{D}_{\text{sep}}$. Fontos, hogy

$$\mathcal{P}_{\text{sep}} = \mathcal{P}_{\text{unc}}, \tag{99}$$

vagyis a szeparálható tiszta állapotok megegyeznek a korrelálatlan tiszta állapotokkal, vagy ezzel ekvivalensen, az összefont tiszta állapotok megegyeznek a korrelált tiszta állapotokkal. Általában viszont a korrelált állapotok nem biztos, hogy összefontak. Ez az összefonódás matematikai definíciója.

Az összefonódás fizikai (operációs) definíciója az LOCC paradigma alapján jön. Az LOCC a lokális műveletek és klasszikus korreláció rövidítése (local operations and classical correlations). Vegyük észre, hogy a klasszikus esetben lokális műveletek és kommunikáció segítségével bármely korrelált állapotot létrehozhatunk, vagyis bármilyen korrelációt megvalósíthatunk. A kvantum esetben viszont ez nem teljesül, lokális műveletekkel és klasszikus kommunikációval csak szorzat állapotok klasszikus keverékét tudjuk megvalósítani, ezek a szeparálható állapotok. Az

összefont állapotú rendszerek megvalósításához nem elég a klasszikus kommunikáció (klasszikus bitek átvitele), kvantumos kommunikációra van szükség (kvantum bitek átvitele). Ebben a valószínűség-elméleti tárgyalásban a kommunikáció a kölcsönhatást modellezi, tehát az iménti állítást úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az összefonódás az a fajta korreláció, amelynek létrehozásához valódi kvantumos kölcsönhatás szükséges, klasszikus nem elég.

Láttuk, hogy a $|\psi\rangle$ állapotvektorokkal megadott $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ tiszta állapotok esetén a korreláció és az összefonódás egybeesik (99). A (22) Schmidt-dekompozíció segítségével könnyű látni, hogy egy tiszta állapot pontosan akkor összefont, vagyis nem szorzat alakú, ha az állapotvektor Schmidt-rangja nagyobb mint 1. Mivel ebben az esetben a redukált állapotok sajátértékei és sajátvektorai a Schmidt-együtthatók és Schmidt-vektorok (86), ezért a tiszta állapot pontosan akkor lesz szeparálható, ha a redukált állapotai projektorok. Egy nem tiszta állapot esetén a szeparálhatóság eldöntése nehéz feladat.

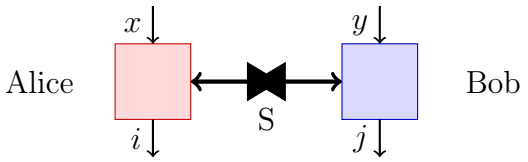
Például két qubit esetén a (23) triplet altér $+\hbar$ és $-\hbar$ vetületű vektorai szeparálhatók, a (24) Bell-állapotok pedig összefontak. A (22) Schmidt kanonikus alakban felírt vektorral megadott tiszta állapot pedig pontosan akkor lesz szeparálható, ha $\eta_i = 1$ valamelyik fix i-re, a többire pedig 0.

4. Bell-nemlokalitás

A kvantumrendszerek nemklasszikus viselkedésének legerősebb megnyilvánulása a Bell-nemlokalitás [2–4, 7].

4.1. Az elrendezés Tekintsünk egy preparáló berendezésből és két mérőműszerből álló elrendezést. A mérőműszereket úgynevezett „black box”-ként kezeljük. Ezek működéséről elegendő annyit kikötnünk, hogy valamely $x, y \in \{1, \dots, m\}$ *bemenetekre* adnak egy-egy $i, j \in \{1, \dots, n\}$ *kimenetet*, ha úgy tetszik mérési eredményt. Fontos megjegyeznünk, hogy valójában akárhányféle bemenetünk és kimenetünk lehet, és ezeket tekinthetjük valamilyen mérőműszerek beállításainak és mért értékeinek, vagy feltett kérdéseknek és ezekre adott válaszoknak. Az elrendezés sematikus ábrája a 4. ábrán látható. Itt S jelöli a preparáló berendezést, mely az egyes helyeken mért fizikai rendszerek közös forrása.

Fontos definiálnunk még a $p(i, j|x, y)$ feltételes valószínűséget, ehhez a valószínűség relatív gyakoriságból származtatott fogalmát fogjuk felhasználni. Képzeljük el, hogy ugyanazt a kísérletet nagyon sokszor végezzük el egymás után, és vezetünk



4. ábra. Bell-nemlokális mérési szituáció vázlatos rajza

egy *mérési jegyzőkönyvet* arról, hogy egyes x, y bemenetekre milyen i, j kimeneteket kapunk. Ekkor kellően nagy számú kísérlet után mondhatjuk, hogy annak a valószínűsége hogy i, j kimeneteket kapunk tudva hogy a bemenetek x, y voltak úgy kapható meg, hogy azoknak a kísérleteknek a számát, ahol ezek a bemenet kimenetpárok adódtak a két részrendszeren elosztjuk azoknak a számával ahol a bemenetek ugyanezek, de a kimenet bármi lehetett. Ez a *mérési statisztika*,

$$p(i,j|x,y) \coloneqq \frac{N\big(\text{“Alice } i\text{-t kap”} \wedge \text{“Alice } x\text{-t mér”} \wedge \text{“Bob } j\text{-t kap”} \wedge \text{“Bob } y\text{-t mér”}\big)}{N\big(\text{“Alice } x\text{-t mér”} \wedge \text{“Bob } y\text{-t mér”}\big)}, \tag{100}$$

ahol $\wedge$ jelöli a logikai „és”-t, és N pedig az események bekövetkezésének száma elegendően nagy mintára.

4.2. Bell-féle lokalitási feltétel A (100) mérési statisztika általában lehet korrelált. Másrészt megtehető az, hogy Alice minden egyes mérés választása és mérése térszerűen szeparált legyen Bob megfelelő mérés választásától és mérésétől, és viszont. Ez alatt azt értjük, hogy az egyikből kiinduló fény (vagy bármilyen jel) sem tudja elérni a másikat, ezáltal befolyásolni a másik mérés kimenetelét. Mivel az általunk ismert fizika (Einstein-) lokális, vagyis nem terjedhet hatás vákuumbeli fénysebességnél gyorsabban, ezért szeretnénk a mérési statisztikában lévő korrelációt valamilyen lokális modellel leírni. Egy ilyen modellben a mérések kimenetelét valamilyen lokális rejtett változó kell hogy kódolja, mely a közös forrásból a mérőműszerekbe eljutott részecskék sajátja, ez jelenti a korreláció magyarázatát. Ezeket szeretnénk megfogalmazni valószínűségi nyelven.

Jelöljük a lokális rejtett változót λ-val, a lehetséges értékeinek halmazát pedig Λ-val. Λ-tól általánosan azt követeljük meg, hogy mérhető tér legyen, de ebben a dolgozatban csak diszkrét véges halmazokra korlátozódunk. λ értékeit nem tudjuk

mérni, ezért hívják rejtett változónak, viszont feltesszük, hogy a fizikai rendszer minden konkrét példányánál amelyekre a méréseket végezzük felvesz valamilyen λ értéket $p(\lambda)$ valószínűséggel. Tehát a különböző esetek *elvben* leszámlálhatóak, vagyis feltesszük, hogy létezik a

$$p(i,j|x,y,\lambda) \coloneqq \frac{N\big(\text{“Alice } i\text{-t kap”} \wedge \text{“Alice } x\text{-t mér”} \wedge \text{“Bob } j\text{-t kap”} \wedge \text{“Bob } y\text{-t mér”} \wedge \text{“r.v. } \lambda\text{”}\big)}{N\big(\text{“Alice } x\text{-t mér”} \wedge \text{“Bob } y\text{-t mér”} \wedge \text{“r.v. } \lambda\text{”}\big)}, \tag{101}$$

rejtett statisztika, mely leírja a valós szituációt. Erre a rejtett statisztikára három fontos feltételt rovunk ki ahhoz, hogy egy fizikailag értelmes rejtett változós modellt írjon le.

Árnyékolás (screening off): A rejtett statisztika legyen korrelálatlan,

$$p(i,j|x,y,\lambda) = p(i|x,y,\lambda)p(j|x,y,\lambda). \tag{102}$$

Ez írja le matematikailag azt, hogy a λ rejtett változó „megmagyarázza” az eredeti, (100) mérési statisztikában tapasztalt korrelációt, vagyis λ minden fix értékére a korreláció eltűnik.

Ezt egy példával szemléltethetjük. Tekintsünk két embert, Alice-t és Bobot akik vonattal járnak dolgozni. Azt vesszük észre, hogy a munkanapok q-ad részében késnek el, viszont mindig ugyanazokon a napokon késnek és nem késnek mindketten. Így azt mondhatjuk egy tetszőleges munkanapon annak a valószínűsége, hogy elkésnek $p(A_\mathrm{k}, B_\mathrm{k}) = q$, illetve ha csak egyiküket tekintjük akkor is, $p(A_\mathrm{k}) = q$. Tehát ekkor $p(A_\mathrm{k}, B_\mathrm{k}) = q \neq q^2 = p(A_\mathrm{k})p(B_\mathrm{k})$, azaz a két személy késésének eseményei korreláltak. Viszont a vonat amivel járnak a napok q-ad részében késik legalább annyit, hogy a vasútállomásról ne érjenek be időben a munkahelyre az ott dolgozók. Azaz ha λ_0-al jelöljük az eseményt, hogy nem késik a vonat és λ_1-el hogy késik, akkor $p(\lambda_0) = 1 - q$ és $p(\lambda_1) = q$. Így ha megfigyeljük a vonatok késéseinek és Alice és Bob késéseinek napjait, akkor megkapjuk a „rejtett statisztikát”: $p(A_\mathrm{k}, B_\mathrm{k}, \lambda_1) = q$, $p(\overline{A_\mathrm{k}}, \overline{B_\mathrm{k}}, \lambda_0) = 1-q$, és az összes többi lehetőségre $p(A_\mathrm{k}, \overline{B_\mathrm{k}}, \lambda_0) = p(A_\mathrm{k}, \overline{B_\mathrm{k}}, \lambda_1) = \cdots = 0$. Ebből $p(A_\mathrm{k}|\lambda_1) = p(A_\mathrm{k}, \lambda_1)/p(\lambda_1) = 1$ és $p(B_\mathrm{k}|\lambda_1) = p(B_\mathrm{k}|\lambda_1)/p(\lambda_1) = 1$, illetve $p(A_\mathrm{k}, B_\mathrm{k}|\lambda_1) = p(A_\mathrm{k}, B_\mathrm{k}, \lambda_1)/p(\lambda_1) = 1$. Másrészt $p(A_\mathrm{k}|\lambda_0) = p(A_\mathrm{k}, \lambda_0)/p(\lambda_0) = 0$ és $p(B_\mathrm{k}|\lambda_0) = p(B_\mathrm{k}|\lambda_1)/p(\lambda_1) = 0$, illetve $p(A_\mathrm{k}, B_\mathrm{k}|\lambda_0) = p(A_\mathrm{k}, B_\mathrm{k}, \lambda_0)/p(\lambda_0) = 0$. Így a vonatok pontossága egy

olyan rejtett változó, amely függetleníti Alice és Bob késéseinek eseményét, mivel $p(A_\mathrm{k}, B_\mathrm{k}|\lambda_1) = 1 = p(A_\mathrm{k}|\lambda_1)p(B_\mathrm{k}|\lambda_1)$, $p(A_\mathrm{k}, B_\mathrm{k}|\lambda_0) = 0 = p(A_\mathrm{k}|\lambda_0)p(B_\mathrm{k}|\lambda_0)$.

Nem-jelzés (no-signaling): Az adott mérőműszerrel kapott eredmény csak a saját mérési beállításától függjön, a másikétól ne,

$$p(i|x, y, \lambda) = p(i|x, y', \lambda) \qquad \forall i, x, y, y', \tag{103a}$$

$$p(j|x, y, \lambda) = p(j|x', y, \lambda) \qquad \forall j, x, x', y, \tag{103b}$$

ez pontosan akkor teljesül, ha

$$p(i|x, y, \lambda) = p(i|x, \lambda) \qquad \forall i, x, y, \tag{104a}$$

$$p(j|x, y, \lambda) = p(j|y, \lambda) \qquad \forall j, x, y. \tag{104b}$$

Ez írja le matematikailag azt, hogy minden körben a mérésválasztás és mérés az egyik laborban térszerűen szeparált a másik laborbeliektől. Ha ez nem teljesülne, akkor az egyik rendszer mérési beállításaival befolyásolhatnánk a másik rendszeren kapott mérési statisztikát, ami a térszerű szeparáltság miatt nem lehetséges.

Konspiráció-mentesség (no-conspiracy): A mérési beállítások legyenek függetlenek a rejtett változótól,

$$p(x, y|\lambda) = p(x, y). \tag{105}$$

ami pontosan akkor teljesül, ha

$$p(x, y, \lambda) = p(x, y)p(\lambda), \tag{106}$$

Ez írja le matematikailag azt, hogy a mérésválasztások eseményei lehetnek akár kívül a mért rendszer teljes létének előre fénykúpján.

Ezeknek a rejtett statisztikára kirótt feltételeknek a következménye a mérési statisztikára vonatkozó *Bell-féle lokalitási feltétel*,

$$p(i, j|x, y) = \sum_{\lambda\in\Lambda} p(i|x, \lambda)p(j|y, \lambda)p(\lambda). \tag{107}$$

Ez azt jelenti, hogy a mérési statisztikát valamely rejtett változótól függő lokális válaszfüggvények adják meg, ahol lokális jelzőt úgy értjük, hogy csak a λ lokális

rejtett változótól és az adott mérésre vonatkozó mérésválasztástól függ. Valóban,

$$p(i,j|x,y) = \frac{p(i,j,x,y)}{p(x,y)} = \frac{\sum_{\lambda\in\Lambda} p(i,j,x,y,\lambda)}{p(x,y)}$$
$$= \frac{\sum_{\lambda\in\Lambda} p(i,j|x,y,\lambda)p(x,y,\lambda)}{p(x,y)} \overset{(106)}{=} \sum_{\lambda\in\Lambda} p(i,j|x,y,\lambda)p(\lambda)$$
$$\overset{(102)}{=} \sum_{\lambda\in\Lambda} p(i|x,y,\lambda)p(j|x,y,\lambda)p(\lambda) \overset{(104)}{=} \sum_{\lambda\in\Lambda} p(i|x,\lambda)p(j|y,\lambda)p(\lambda),$$

ahol felhasználtuk a feltételes valószínűség definícióját, majd a teljes valószínűség tétele alapján írtuk fel a λ szerinti összegzést, majd újra a feltételes valószínűséget. Ezután használtuk először a (106) konspirációmentesség, majd a (102) árnyékolás, és végül a (104) nem-jelzés feltételeit.

Ha fennáll a (107) Bell-féle lokalitási feltétel, akkor azt mondjuk, hogy a rendszer leírására megadható *lokális rejtett változós modell* (a továbbiakban LHVM, local hidden variable modell). Az LHVM lehet determinisztikus, ha $p(i|x,\lambda), p(j|y,\lambda) \in \{0,1\}$, ez azt jelenti, hogy a rejtett változó egyértelműen meghatározza a mérés kimenetét. Ha az LHVM nem determinisztikus, akkor sztochasztikusnak hívjuk, ekkor a rejtett változó nem határozza meg egyértelműen a mérés kimenetelét, csak valamilyen valószínűséggel. Ez lehet akár mérési hiba hatása is.

Ha a (107) Bell-féle lokalitási feltétel sérül, akkor a rendszer nem írható le LHVM segítségével. Ezt már egy elég egyszerű kvantumos rendszerről is elmondhatjuk, ezt tárgyaljuk is majd a 4.5. fejezetben. Ezt hívják Bell-nemlokalitásnak.

4.3. CHSH-egyenlőtlenség A (107) Bell-féle lokalitási feltétel a mérési statisztikára vonatkozott. A konkrét mérésekben gyakran egyszerűbb obszervábilisek várható értékeivel dolgozni. A Bell-féle lokalitási feltétel az obszervábilisek várható értékeire vonatkozó feltételekre vezethet, ezeket hívjuk Bell-egyenlőtlenségeknek.

Vegyünk egy olyan rendszert ahol két mérési helyünk van két-két lehetséges mérési beállítással és ezekhez tartozik két-két mérési eredmény, azaz: $x,y \in \{0,1\}$ és $i,j \in \{-1,1\}$. A két mérési helyen mért értékeket az $\boldsymbol{a}_x, \boldsymbol{b}_y \in \mathbb{C}^2$ klasszikus valószínűségi változók tartalmazzák a következő módon: $a_{\pm|x} = \pm 1$ és $b_{\pm|y} = \pm 1$, ahol

$$\boldsymbol{a}_x = \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}_y = \begin{pmatrix} b_+ \\ b_- \end{pmatrix}. \tag{108}$$

Ekkor a mérési kimenetek szorzatának mérésekben kapott várható értéke

$$\langle a_x b_y\rangle = \sum_{i,j=\pm 1} a_{i|x} b_{j|y} p(i,j|x,y) \overset{(107)}{=} \sum_{i,j=\pm 1} a_{i|x} b_{j|y} \sum_{\lambda\in\Lambda} p(i|x,\lambda)p(j|y,\lambda)p(\lambda)$$
$$= \sum_{\lambda\in\Lambda} p(\lambda)\left(\sum_{i=\pm 1} a_{i|x} p(i|x,\lambda)\right)\left(\sum_{j=\pm 1} b_{j|y} p(j|y,\lambda)\right) = \sum_{\lambda\in\Lambda} p(\lambda)\langle a_x\rangle_\lambda \langle b_y\rangle_\lambda.$$

Itt $\langle a_x\rangle_\lambda$ és $\langle b_y\rangle_\lambda$ a zárójelekben szereplő, első és második mérési helyen vett feltételes várható értékek a rejtett változó fix λ értékére, így $\langle a_x\rangle_\lambda, \langle b_y\rangle_\lambda \in [-1,1]$. Vegyük az

$$S_{\mathrm{cl}} = \langle a_0 b_0\rangle + \langle a_0 b_1\rangle + \langle a_1 b_0\rangle - \langle a_1 b_1\rangle \tag{109}$$

mennyiséget, melyet a mérésben közvetlenül megkaphatunk. Ez a feltételes várható értékekkel írva

$$S_{\mathrm{cl}} = \sum_{\lambda\in\Lambda} p(\lambda)\big(\langle a_0\rangle_\lambda\langle b_0\rangle_\lambda + \langle a_0\rangle_\lambda\langle b_1\rangle_\lambda + \langle a_1\rangle_\lambda\langle b_0\rangle_\lambda - \langle a_1\rangle_\lambda\langle b_1\rangle_\lambda\big) = \sum_{\lambda\in\Lambda} p(\lambda) S_\lambda. \tag{110}$$

Itt S_λ a zárójelben szereplő kifejezés, az S_{cl} értéke a rejtett változó fix λ értékére. Erre felírható a következő egyenlőtlenség lánc,

$$\begin{aligned} S_\lambda &= \langle a_0\rangle_\lambda\left(\langle b_0\rangle_\lambda + \langle b_1\rangle_\lambda\right) + \langle a_1\rangle_\lambda\left(\langle b_0\rangle_\lambda - \langle b_1\rangle_\lambda\right) \\ &\le \left|\langle a_0\rangle_\lambda\left(\langle b_0\rangle_\lambda + \langle b_1\rangle_\lambda\right) + \langle a_1\rangle_\lambda\left(\langle b_0\rangle_\lambda - \langle b_1\rangle_\lambda\right)\right| \\ &\le \left|\langle a_0\rangle_\lambda\left(\langle b_0\rangle_\lambda + \langle b_1\rangle_\lambda\right)\right| + \left|\langle a_1\rangle_\lambda\left(\langle b_0\rangle_\lambda - \langle b_1\rangle_\lambda\right)\right| \\ &= \left|\langle a_0\rangle_\lambda\right|\left|\langle b_0\rangle_\lambda + \langle b_1\rangle_\lambda\right| + \left|\langle a_1\rangle_\lambda\right|\left|\langle b_0\rangle_\lambda - \langle b_1\rangle_\lambda\right| \\ &\le \left|\langle b_0\rangle_\lambda + \langle b_1\rangle_\lambda\right| + \left|\langle b_0\rangle_\lambda - \langle b_1\rangle_\lambda\right|, \end{aligned}$$

ahol az első egyenlőtlenség nyilvánvaló, a második egyenlőtlenség az abszolútértékre vonatkozó háromszög egyenlőtlenség, a harmadik pedig a korábban látott $\langle a_x\rangle_\lambda \in [-1,1]$ korlátokból következik. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $0 \le \langle b_1\rangle_\lambda \le \langle b_0\rangle_\lambda$, mivel ha különböző előjelűek lennének (vagy mindkettő negatív), akkor az utolsó sor változatlan marad. Ekkor viszont az utolsó sor $2\langle b_0\rangle_\lambda$, vagyis összességében $S_\lambda \le 2$, ami miatt

$$S_{\mathrm{cl}} \le 2. \tag{111}$$

Ezt Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) egyenlőtlenségnek nevezik, mely a Bell-egyenlőtlenségek tárgyalt mérési szituációra vonatkozó esete.

Tehát azt kaptuk, hogy amennyiben a (107) Bell-féle lokalitási feltétellel megadott lokális rejtett változós modellel írható le a tárgyalt mérési szituáció, akkor a CHSH-egyenlőtlenség teljesül rá.

4.4. Tsirelson-korlát Számítsuk ki az előző mérési szituációban a mérési várható értékeket a kvantumelméletből. Legyenek a két részrendszer obszervábilisei

$$A_0, A_1 \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_1), \quad B_0, B_1 \in \mathrm{Lin}(\mathcal{H}_2),$$

melyek sajátértékei a $[-1, 1]$ intervallum elemei, vagyis $\|A_i\|, \|B_i\| \leq 1$, ahol $\|\cdot\|$ a szokásos (9) operátornorma. Erre felírható a következő egyenlőtlenség lánc,

$$\begin{aligned}
\langle S\rangle &= \langle\psi|(A_0\otimes B_0 + A_0\otimes B_1 + A_1\otimes B_0 - A_1\otimes B_1)|\psi\rangle \\
&\leq \|\psi\|\big\|(A_0\otimes B_0 + A_0\otimes B_1 + A_1\otimes B_0 - A_1\otimes B_1)|\psi\rangle\big\| \\
&\leq \big\|A_0\otimes(B_0+B_1)|\psi\rangle\big\| + \big\|A_1\otimes(B_0-B_1))|\psi\rangle\big\| \\
&\leq \|A_0\|\cdot\big\|I\otimes(B_0+B_1)|\psi\rangle\big\| + \|A_1\|\cdot\big\|I\otimes(B_0-B_1)|\psi\rangle\big\| \\
&\leq \big\||\psi_0\rangle + |\psi_1\rangle\big\| + \big\||\psi_0\rangle - |\psi_1\rangle\big\| \\
&= \sqrt{\||\psi_0\rangle\|^2 + \||\psi_1\rangle\|^2 + 2\mathfrak{R}\langle\psi_0|\psi_1\rangle} + \sqrt{\||\psi_0\rangle\|^2 + \||\psi_1\rangle\|^2 - 2\mathfrak{R}\langle\psi_0|\psi_1\rangle} \\
&\leq \sqrt{2+2x} + \sqrt{2-2x} \leq 2\sqrt{2},
\end{aligned}$$

ahol az első egyenlőtlenség a (15) Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség, a második egyenlőtlenség a normára vonatkozó (8c) háromszög egyenlőtlenség, a harmadik egyenlőtlenség az operátornormára vonatkozó (10) tulajdonság és (12), a negyedik egyenlőtlenségben használtuk, hogy $\|A_i\| \leq 1$, és bevezettük a $(I\otimes B_i)|\psi\rangle =: |\psi_i\rangle$ jelöléseket, az ötödik egyenlőtlenségben használtuk, hogy $\|B_i\| \leq 1$ ami miatt $\||\psi_i\rangle\|^2 \leq 1$, az utolsó egyenlőtlenség pedig szélsőérték keresésből következik. Vagyis összességében

$$\langle S\rangle \leq 2\sqrt{2}. \tag{112}$$

Ezt Tsirelson-korlátnak hívjuk.

Tehát azt kaptuk, hogy amennyiben kvantumelmélettel írható le a tárgyalt mérési szituáció, akkor is adódik egy korlát, ez viszont a (111) CHSH-egyenlőtlenségnél gyengébb, tehát a kvantumelmélettel leírt rendszer sértheti a lokális rejtett változós leírásból adódó korlátot. Az a kérdés, hogy ténylegesen találhatóak-e olyan A_i, B_i

obszervábilis párok és hozzájuk tartozó kvantumállapot, amivel a (111) egyenlőtlenség sérthető. Ezt fogjuk megnézni a következő fejezetben.

4.5. A CHSH-kísérlet Tekintsük most a CHSH-kíserletet, mely során A és B helyeken spinvetület méréseket végzünk. Ezek operátorai legyenek $A_x = \hat{\boldsymbol{v}}_x\boldsymbol{\sigma}$ és $B_x = \hat{\boldsymbol{u}}_x\boldsymbol{\sigma}$ ahol $x \in \{0,1\}$. A rendszer állapota pedig legyen a $|\mathrm{B}_2\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}\big(|01\rangle - |10\rangle\big)$ állapotvektorral leírt tiszta (24) Bell-állapot. Meg szeretnénk határozni az

$$S = A_0 \otimes B_0 + A_0 \otimes B_1 + A_1 \otimes B_0 - A_1 \otimes B_1 \tag{113}$$

obszervábilis várható értékét. Belátható, hogy a (24) Bell-állapotokra

$$(\sigma_\mu \otimes I)|\mathrm{B}_0\rangle = |\mathrm{B}_\mu\rangle, \tag{114}$$

illetve

$$(\sigma_\mu \otimes I)|\mathrm{B}_0\rangle = (I \otimes \sigma_\mu^T)|\mathrm{B}_0\rangle, \tag{115}$$

ahol $\mu \in \{0,1,2,3\}$.

Ezeket felhasználva számítsuk most ki az $\mathbb{E}_\rho(\sigma_k \otimes \sigma_l)$ várható értéket, ahol $\rho = |\mathrm{B}_2\rangle\langle\mathrm{B}_2|$ illetve $k,l \in \{1,2,3\}$. Beírva a kifejezéseket a várható érték (50) definíciójába,

$$\mathbb{E}_\rho(\sigma_k \otimes \sigma_l) = \mathrm{Tr}\big(|\mathrm{B}_2\rangle\langle\mathrm{B}_2|(\sigma_k \otimes \sigma_l)\big) = \langle\mathrm{B}_2|(\sigma_k \otimes \sigma_l)|\mathrm{B}_2\rangle = \langle\mathrm{B}_0|(\sigma_2\sigma_k\sigma_2 \otimes \sigma_l)|\mathrm{B}_0\rangle, \tag{116}$$

ahol felhasználtuk a (114) azonosságot. A $\sigma_2\sigma_k\sigma_2$ szorzatot kiírhatjuk a (56a) összefüggés segítségével,

$$\begin{aligned}\sigma_2\sigma_k\sigma_2 &= \delta_{2k}I\sigma_2 + i\sum_l \epsilon_{2kl}\sigma_l\sigma_2 = \delta_{2k}\sigma_2 + i\sum_l \epsilon_{2kl}(\delta_{2l}I + i\sum_m \epsilon_{l2m}\sigma_m)\\ &= \delta_{2k}\sigma_2 - \sum_{l,m}\epsilon_{l2k}\epsilon_{l2m}\sigma_m = \delta_{2k}\sigma_2 - \sum_m(\delta_{22}\delta_{km} - \delta_{2m}\delta_{k2})\sigma_m\\ &= 2\delta_{2k}\sigma_2 - \sigma_k = (2\delta_{2k}-1)\sigma_k.\end{aligned}$$

Ezt behelyettesítve a (116) egyenletbe,

$$\begin{aligned}\langle\mathrm{B}_0|\sigma_2\sigma_k\sigma_2 \otimes \sigma_l|\mathrm{B}_0\rangle &= \langle\mathrm{B}_0|(2\delta_{2k}-1)\sigma_k \otimes \sigma_l|\mathrm{B}_0\rangle\\ &= (2\delta_{2k}-1)\langle\mathrm{B}_0|\sigma_k\sigma_l^T \otimes I|\mathrm{B}_0\rangle,\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a (115) azonosságot. Vegyük észre, hogy $\sigma_l^T = -(2\delta_{2l}-1)\sigma_l$, ezzel

$$-\langle\mathrm{B}_0|\sigma_k\sigma_l \otimes I|\mathrm{B}_0\rangle = -\langle\mathrm{B}_k|\mathrm{B}_l\rangle = -\delta_{kl}. \tag{117}$$

Most vegyük az eredeti spinoperátorok várható értékét, ezt könnyen kiszámíthatjuk a (117) felhasználásával,

$$\mathbb{E}_\rho(A_x \otimes B_y) = \sum_{k,l} \langle \mathrm{B}_0 | v_{xk}\sigma_k \otimes u_{yl}\sigma_l | \mathrm{B}_0 \rangle = -\sum_{k,l} v_{xk}u_{yl}\delta_{kl} = -(\hat{\boldsymbol{v}}_x, \hat{\boldsymbol{u}}_y). \tag{118}$$

Így a keresett várható érték a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\rho(S) &= -(\hat{\boldsymbol{v}}_0, \hat{\boldsymbol{u}}_0) - (\hat{\boldsymbol{v}}_0, \hat{\boldsymbol{u}}_1) - (\hat{\boldsymbol{v}}_1, \hat{\boldsymbol{u}}_0) + (\hat{\boldsymbol{v}}_1, \hat{\boldsymbol{u}}_1) \\ &= -\cos(\varphi_{00}) - \cos(\varphi_{01}) - \cos(\varphi_{10}) + \cos(\varphi_{11}) \end{aligned} \tag{119}$$

alakban írható, ahol φ_{xy} jelöli a $\hat{\boldsymbol{v}}_x$ és $\hat{\boldsymbol{u}}_y$ vektorok által bezárt szöget. Ha $\varphi_{00} = \varphi_{01} = \varphi_{10} = \frac{3\pi}{4}, \varphi_{11} = \frac{\pi}{4}$, akkor a várható érték

$$\mathbb{E}_\rho(S) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \not\leq 2, \tag{120}$$

vagyis a (111) CHSH-egyenlőtlenség sérül. Ezeket a φ_{xy} szögeket megvalósíthatják például az

$$A_0 = \sigma_3, \qquad A_1 = \sigma_1, \tag{121a}$$

$$B_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sigma_1 - \sigma_3), \qquad B_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(+\sigma_1 - \sigma_3), \tag{121b}$$

obszervábilisek. Tehát a kísérlet nem írható le lokális rejtett változós modell segítségével. Másfelől a (112) Tsirelson-egyenlőtlenség által meghatározott felső korláttal éppen megegyezik a kapott érték, vagyis a (111) CHSH-egyenlőtlenség *maximálisan sérül* ebben az esetben.

Fontos megjegyezni, hogy a kvantumelmélet lokális abban az értelemben, hogy még a kvantumtérelméletben is az egymástól térszerűen szeparált téridőtartományokon lokalizált obszervábilisek egymással kommutálnak, emiatt az így lokalizált események nem lehetnek hatással egymásra. Amikor a kvantumelmélet nemlokalitását emlegetik, az alatt Bell-nemlokalitást értenek, vagyis a CHSH-egyenlőtlenség sérülését, vagy általánosabban azt, hogy bizonyos szituációkban keletkező mérési statisztikákat nem lehet lokális rejtett változós modellel felírni.

5. Watrous-féle játékelméleti tárgyalás

A CHSH-kísérletbeli szituációt a nemlokális játékok keretei között is lehet tárgyalni [10].

5.1. Nemlokális játékok Legyenek most Alice és Bob játékosok, akik a játék során rendre $x \in \{1, 2, \ldots, m_1\}$ és $y \in \{1, 2, \ldots, m_2\}$ kérdéseket kapnak egy játékvezetőtől, aki valamilyen $p(x, y)$ eloszlás szerint választja ki ezeket. Egy így kapott kérdésre Alice ad valamilyen $i \in \{1, 2, \ldots, d_1\}$ választ. Hasonlóan Bob is ad az ő kérdésére valamilyen $j \in \{1, 2, \ldots, d_2\}$ választ. A válaszok leadása után a játékvezető egy rögzített szabály alapján eldönti, hogy ezek a válaszok helyesek-e. A szabály egy predikátummal adott, ami egy $V : \{1, 2, \ldots, d_1\} \times \{1, 2, \ldots, d_2\} \times \{1, 2, \ldots, m_1\} \times \{1, 2, \ldots, m_2\} \to \{0, 1\}$ leképezés, melyre $V(i, j, x, y) = 1$ pontosan akkor, ha Alice és Bob rendre a helyes i és j válaszokat adják az x és y kérdésekre. A résztvevők a szabálynak teljes mértékben tudatában állnak, azaz ismerik a V predikátumot, és ismerik a kérdések $p(x, y)$ eloszlását. A játék előtt megbeszélhetnek egy stratégiát, de a játék közben nem kommunikálhatnak, azaz nem oszthatják meg egymással a kapott kérdéseket. Így a nyerési valószínűséget a

$$\omega = \sum_{i,j,x,y} V(i, j, x, y)p(i, j, x, y) = \sum_{i,j,x,y} V(i, j, x, y)p(i, j|x, y)p(x, y) \tag{122}$$

alakban írhatjuk, ahol $p(i, j|x, y)$ annak a valószínűsége, hogy a játékosok i és j válaszokat adnak, feltéve hogy az x és y kérdéseket kapják. Ez a közös stratégiából számítható. A stratégia determinisztikus, ha a válaszok a kérdések matematikai értelemben vett függvényei, vagyis $i = i(x)$ és $j = j(y)$, ekkor a $p(i(x), j(y)|x, y) \in \{0, 1\}$. A stratégia lehet sztochasztikus is.

Megkülönböztetünk klasszikus és kvantumos stratégiákat, a klasszikus esetben a $p(i, j|x, y)$ valószínűségeket klasszikus valószínűségek adják meg, míg a kvantumos esetben kvantumos valószínűségek. Ezt értelmezhetjük úgy, hogy a résztvevők a két esetben valamilyen klasszikus vagy kvantum összetett rendszert osztanak meg, és az ezen végzett lokális mérésektől tehetik függővé válaszaikat.

5.2. A CHSH-kísérlet mint játék A CHSH-kísérlet értelmezhető egy játékként, ahol a predikátumot a $i \oplus j = x \wedge y$ kifejezés adja meg, azaz

xy	$i \oplus j$
00	0
01	0
10	0
11	1

ahol $a, b \in \{0, 1\}$ és $\oplus$ a moduló kettő összeadás. Vagyis a válaszok összegének paritásának meg kell egyezni a kérdések „konjunkciójával". Emellet $p(x, y) = \frac{1}{4}$ minden x, y-ra, azaz a kérdéseket egyenletes eloszlás szerint kapják a résztvevők. Tekintsünk egy determinisztikus stratégiát, jelöljük az Alice által az $x \in \{0, 1\}$ kérdésre adott választ $i(x)$-el, hasonlóan Bob válaszát $j(y)$-nal. Ezekkel a jelölésekkel a nyerés feltételei,

$$i(0) \oplus j(0) = 0, \tag{123a}$$

$$i(0) \oplus j(1) = 0, \tag{123b}$$

$$i(1) \oplus j(0) = 0, \tag{123c}$$

$$i(1) \oplus j(1) = 1. \tag{123d}$$

Ezeket moduló kettő összeadva a $0 = 1$ ellentmondásra jutunk, azaz nem létezik olyan determinisztikus stratégia, amellyel a játékot 1 valószínűséggel megnyerhetnék a résztvevők. Ha azonban a (123d) egyenletet nem vesszük figyelembe, már tudunk olyan stratégiát, ami a másik három egyenletet kielégíti, például ha mindketten a kérdéstől függetlenül 0-t válaszolnak, azaz $i(0) = j(0) = j(1) = i(1) = 0$, ekkor a nyerési valószínűség $\omega_{\text{cl}} = 3/4$. Megmutatható, hogy a sztochasztikus (nem determinisztikus) stratégiák valójában determinisztikus stratégiák konvex kombinációi, így ezekkel sem lehetséges a $\omega_{\text{cl}} = 3/4$ érték meghaladása.

Vegyük most a kvantumos esetet, legyen a résztvevők által megosztott kvantumállapot a $|\mathrm{B}_2\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}\big(|01\rangle - |10\rangle\big)$ Bell-állapot. A 0 és 1 kérdések esetén mért obszervábilisek Alice és Bob esetén a CHSH-kísérletnél is használt (121) obszervábilisek, vagyis Alice az x kérdést kapva az A_x obszervábilist méri, és válasza a mérés i kimenete lesz, Bob pedig az y kérdést kapva a B_y obszervábilist méri, és válasza a mérés j kimenete lesz. Alice és Bob ± 1 méréskimeneteinek szorzatának várható értéke $\langle \mathrm{B}_2 | A_x \otimes B_y | \mathrm{B}_2 \rangle = \sum_{i,j} p(i, j|x, y)(-1)^{i+j}$, emiatt $\langle \mathrm{B}_2 | S | \mathrm{B}_2 \rangle / 4 = 1/\sqrt{2} = \omega - (1 - \omega)$, éppen a stratégiából adódó nyerési és vesztési valószínűségek különbsége, amivel

$$\omega = \frac{\sqrt{2} + 2}{4} > \omega_{\text{cl}} = \frac{3}{4}, \tag{124}$$

vagyis a CHSH játék kvantumos stratégiával jobban játszható, mint klasszikussal.

6. Összefoglalás

A dolgozatban áttekintettük a klasszikus és kvantumos rendszerekben előforduló legfontosabb korreláció fogalmakat, a korrelációt, az összefonódást és a Bell-nemlokalitást Láttuk, hogy a kvantum esetben az összefonódás erősebb, mint a korreláció, vagyis vannak olyan korrelált állapotok amik még nem összefontak. Az is tudható, hogy vannak olyan összefont állapotok, melyekre felírható lokális rejtett változós modell, vagyis a Bell-nemlokalitás erősebb, mint az összefonódás. Fontos tudni viszont, hogy tiszta állapotok esetén ezek a fogalmak egybeesnek, vagyis korreláltak pontosan akkor ha összefontak, pontosan akkor ha Bell-nemlokálisak.

A Bell-nemlokalitás a nemklasszikus viselkedés legfontosabb megnyilvánulása. Azért is fontos, mert kísérletben közvetlenül ellenőrizhető feltételt ad, mellyel a lokális rejtett változós leírás kizárható. Ez meg is történt, a közelmúlt fontos, egyre pontosabb és erősebb kísérleti eredményei minden ponton a kvantumos viselkedést igazolták, melyért 2022-ben Alain Aspect, John Clauser és Anton Zeilinger Nobeldíjat kapott.

7. Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni a témavezetőmnek, Szalay Szilárdnak, rengeteg tanácsát és hatalmas segítségét, melyek nélkül ez a dolgozat nem jöhetett volna létre. Továbbá szeretném megköszönni a Wigner Fizikai Kutatóközpontnak, a Wigner Gyakornoki Program keretein belül nyújtott támogatását 2026 tavaszi féléve során.

Hivatkozások

[1] Ingemar Bengtsson and Karol Życzkowski, *Geometry of quantum states: An introduction to quantum entanglement*, 2nd ed., Cambridge University Press, 2017.

[2] Nicolas Brunner, Daniel Cavalcanti, Stefano Pironio, Valerio Scarani, and Stephanie Wehner, *Bell nonlocality*, Reviews of Modern Physics **86** (2014), 419–478.

[3] N. David Mermin, *Bringing home the atomic world: Quantum mysteries for anybody*, American Journal of Physics **49** (198110), no. 10, 940–943, available at https://pubs.aip.org/aapt/ajp/article-pdf/49/10/940/11864850/940_1_online.pdf.

[4] Hraskó Péter, *A Bell-egyenlőtlenség*, Fizikai Szemle **34** (1984), 257.

[5] Dénes Petz, *Bevezetés a lineáris analízisbe és alkalmazásaiba*, A szerző weblapjáról, 2012.

[6] Földes Szabolcs, *Kovariancia, korreláció és összefonódás klasszikus és kvantumrendszerekben*, 2025. TDK dolgozat, ELTE TTK, Fizikus szak.

[7] Szalay Szilárd, *Kvantumkorrelációk és rejtett változók*, Fizikai Szemle **73** (2023), 4.
[8] Szalay Szilárd, *Kvantumösszefonódás speciális előadás*, 2026 tavasz. BME TTK.
[9] Tasnádi Tamás, *Kvantumösszefonódás speciális előadás*, 2025 tavasz. BME TTK.
[10] John Watrous, *Quantum computation, lecture notes, University of Calgary*, 2006.