Jetszerkezetek vizsgálata Monte Carlo szimulációk alapján

SZAKDOLGOZAT Fizika BSC.

Készítette: Kovács Miklós

Témavezető: Dr. Vértesi Róbert

MTA Wigner Fizikai Kutatóközpont Részecske- és Magfizikai Intézete Tanszéki konzulens: Dr. Pokol Gergő

Egyetemi docens BME Fizika Intézet, Atomfizika Tanszék



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Természettudományi Kar Nukleáris Technika Tanszék

2018. június 3.

Önállósági nyilakozat

Alulírott Kovács Miklós a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem fizika BSc szakos hallgatója kijelentem, hogy ezt a szakdolgozatot meg nem engedett segédeszközök nélkül, önállóan, a témavezető irányításával készítettem, és csak a megadott forrásokat használtam fel.

Minden olyan részt, melyet szó szerint, vagy azonos értelemben, de átfogalmazva más forrásból vettem, a forrás megadásával jelöltem.

Budapest, 2018. június 3.

aláírás

Tartalomjegyzék

Kivonat

1.	Bev	Bevezetés				
1.1. A fiatal univerzum és a Standard Modell			al univerzum és a Standard Modell	1		
		1.1.1.	Ősrobbanás	1		
		1.1.2.	A Részecskefizika Standard Modellje	3		
	1.2.	Az erő	s kölcsönhatás	4		
1.3. Tapasztalatok a RHIC-nél		ztalatok a RHIC-nél	6			
		1.3.1.	A kvark-gluon plazma mint tökéletes folyadék	6		
		1.3.2.	Jet-elnyomás	8		
	1.4.	Váratl	an jelenségek pp ütközéseknél	8		
		1.4.1.	Sokparton-kölcsönhatások	9		
2. Módszerek				11		
	2.1.	Jetszer	rezetek multiplicitásfüggésének vizsgálata	11		
		2.1.1.	Fázistér és szög szerinti korrelációk	11		
		2.1.2.	Jet-rekonstrukció	12		
		2.1.3.	Kétrészecske-korreláció	13		
		2.1.4.	Akceptanciakorrekció	13		
	2.2.	2. Szimulációk				
		2.2.1.	A PYTHIA eseménygenerátor	14		
		2.2.2.	MPI és színrekonnekció a PYTHIA-ban	15		
2.3. Kétrészecske-korrelációk		Kétrés	zecske-korrelációk	16		
		2.3.1.	Részecskék kiválogatása	16		
		2.3.2.	Korrelációk csúcsok vizsgálata	16		
	2.4.	Multip	olicitás- és impulzusosztályok megválasztása	17		
	2.5.	A korr	elációs csúcsok szélességének meghatározása	19		
		2.5.1.	Gauss csúcs konstans háttérrel	19		
		2.5.2.	Gauss csúcs másodfokú háttérrel	20		
		2.5.3.	Szimmetrikus Lévy-eloszlás	22		

iii

		2.5.4.	Illesztés Cauchy-függvénnyel	22
3.	Eree	dmény	ek	24
	3.1.	MPI é	s CR hatása a korrelációs csúcsra	24
		3.1.1.	A fragmentációs csúcs: Gauss illesztés	25
		3.1.2.	A teljes korrelációs folyamat szélessége: Cauchy-eloszlás $\ .\ .$	25
		3.1.3.	Az eredmények diszkussziója	25
4.	Össz	zefogla	lás	29
Kċ	öszön	etnyil	vánítás	i
Irc	odalo	mjegy	zék	iv
Fü	iggel	ék		v
	F.1.	Akcept	tanciakorrekció	v

Kivonat

Jelen szakdolgozat célja az erős kölcsönhatás kutatása nagyenergiás proton-proton ütközések szimulációja alapján az adott eseményből származó jetek szerekezetének multiplicitásfüggő korrelációs vizsgálatával.

Az LHC első kísérleti eredményei számos olyan jelenség létét (kollektivitás, hosszútávú korrelációk) mutatták ki proton-proton ütközésekben, amiket korábban a nehézionütközésekben létrejövő kvark-gluon plazma jelének gondoltunk. Ennek okáról nincs szakmai konszenzus, de egy népszerű feltételezés szerint a reakció korai állapotokban jelen levő kvantumszíndinamikai folyamatok, pl. sokparton-kölcsönhatások okozzák a kis rendszerekben is megfigyelhető kollektív viselkedést.

A bevezetőben röviden összefoglalom az erős kölcsönhatás alapfogalmait és bemutatom a QGP kísérleti bizonyítékait. Ezután leírom az elvégzett a transzverzimpulzusés multiplicitásfüggő adatanalízis lépéseit. A dolgozat harmadik részében az eredményeimet mutatom be. Megmutatom, hogy a kétrészecske-korrelációs csúcsok vizsgálata segítségével elkülöníthető a sokparton-kölcsönhatásnak a jetfragmentációra való hatása a kezdeti folyamatokra gyakorolt hatástól.

1. fejezet

Bevezetés

Az univerzum az ősrobbanás utáni mikromásodpercekben az anyag egy különleges állapotában létezett, melyet kvark-gluon plazmának (a továbbiakban QGP) nevezünk. Szemügyre vesszük, hogy az anyag ezen állapota miben tér el a szokásos – földi körülmények között is tapasztalható – állapottól.

Először röviden felvázolom az ősrobbanás felfedezését. Ezt követően egy leírást adok az elemi részecskékről, és alapvető kölcsönhatásaikról, ezen belül kiemelve az erős kölcsönhatást. Ezt követően tárgyaljuk a QGP bizonyítékait, és hogy a napjainkban is folyó számtalan kísérlet, melynek célja a QGP természetének feltárása hogyan segít minket az erős kölcsönhatás megértéséhez. Végezetül a jetek és azok szerkeztének vizsgálatához használt alapvető fogalmakat és módszereket nézem át.

1.1. A fiatal univerzum és a Standard Modell

1.1.1. Õsrobbanás

1929-ben Edwin Hubble publikált egy tanulmányt, melyben azt állította, hogy az univerzum tágul. Hubble megmérte Cepheida változó csillagok periodikus fényintenzitását használva az egyes csillagokat tartalmazó galaxisok Földhöz viszonyított sebességét, és felfedezte, hogy a galaxisok a köztük lévő távolsággal arányos sebességgel távolodnak egymástól. [1]. Hubble ezen sebességek segítségével visszaforgatta az univerzum evolúciós fejlődésének kerekét egy olyan elméleti pontig, mikor a galaxisok mind "egymás tetején" helyezkedtek el. Ez volt az első tudományos felfedezés, mellyel meghatározták az univerzum életkorát, így ma már tudjuk, hogy az univerzum megközelítőleg 13,8 milliárd éve keletkezett.

Később, 1964-ben Arno Penzias és Robert Wilson a Bell Laboratórium rádióteleszkópját használva közel 1 mm hullámhosszú rádióhullámokat figyeltek meg az égen minden irányból. A jelenséget azzal magyarázták, hogy a fiatal univerzum plazma halmazállapotban létezett, majd miután a hőmérséklete kellően lecsökkent (nagyjából 3000°C-ra), semleges H és He atomok jöttek létre, így azóta az ősrobbanásból származó fény akadálytalanul halad. Kezdetben ez a sugárzás gamma/röntgen energiatartományba esett, ám az univerzum tágulása közben a fény hullámhossza megnőtt, így ma mikrohullámokat figyelhetünk meg. Penzias és Wilson elnevezték ezt a sugárzást *kozmikus háttérsugárzásnak* (CMBR). Ez a sugárzás egy újabb bizonyítéka volt Hubble elméletének, egyszersmind alátámasztotta az ősrobbanás elméletét.

A tudomány jelen állása szerint az ősrobbanást követően az alapvető erők egy kölcsönhatásban egyesültek. Ez az erő spontán szimmetriatöréseket szenvedett, ahogy az univerzum hőmérséklete lecsökkent, így testet öltött a gravitációs erő, és a nagy egyesített erő. Ezt követően a nagy egyesített erő széthasadt az erős és az elektrogyenge kölcsönhatásra, és végül az elektrogyenge kölcsönhatás is felbomlott elektromágneses és gyenge kölcsönhatásokra. Az alapkölcsönhatások egyesítséből származó erők közül eddig csak az elektrogyenge kölcsönhatást sikerült megfigyelni laboratóriumi kísérletben. Az erős és a gravitációs kölcsönhatások egyesítése és ennek megfigyelése olyan magas energiát igényelne, ami jelenleg kísérletileg nem érhető el.



1.1. ábra. Az univerzum időfejlődése [2].

Az elmélet szerint néhány mikromásodperccel az ősrobbanás után létrejött az anyag egy formája, amelyben a maganyag nem rendeződött nukleonokba. Az anyag ezen formáját kvark-gluon plazmának hívjuk. Miután az univerzum lehűlt $2 \cdot 10^{12}$ K alá, az anyag ezen formájából hadronizáció során létrejöttek az atomok építőkövei (protonok, neutronok, elektronok) egyéb részecskék mellett. Végül további tágulás és hűlés során ezen részecskék nukleonokká, majd stabil atomokká rendeződtek, míg végül hosszas fejlődés után kialakultak a világunkat alkotó elemek. Erről az időfejlődésről láthatunk egy ábrát az 1.1 ábrán.

1.1.2. A Részecskefizika Standard Modellje

Az elmúlt nagyjából fél évszázad során a részecskegyorsítókban folyó egyre nagyobb energiájú kísérletek számos olyan részecskét találtak, amelyek alacsonyabb energiákon nem voltak megyfigyelhetőek. Ezeket rendszerezve Murray Gell-Mann és George Zweig arra jutott, hogy az atommagokat alkotó protonok és neutronok nem elemi részecskék, hanem további, az elemi töltés törtrészét hordozó alkotórészekből épülnek fel, amiket kvarknak nevezett el. Későbbi kísérletek során a nukleonokban több szórócentrumot találtak, ezzel bebizonyították a kvarkmodell helyességét. A protonok két $\frac{2}{3}e$ töltésű úgynevezett up kvarkot tartalmaznak és egy $-\frac{1}{3}e$ töltésű down kvarkot, a neutronok 2 down kvarkot és 1 up kvarkot, melyek erős kölcsönhatás révén kapcsolódnak egymáshoz.

A ma ismert elemi részecskék a legutóbb felfedezett Higgs-bozonnal együtt teljes modellt alkotnak, amelynek azonban nem része a gravitáció. Ezt a rendszert nevezzük a részecskefizika Standard Modelljének.



STANDARD MODEL OF ELEMENTARY PARTICLES

1.2. ábra. Elemi részecskék táblázata [3].

Az univerzum elemi alkotórészei a fermionok és bozonok. Míg a Pauli-féle kizárási elvet követő fermionok az anyag elemi alkotórészei, addig a bozonok a kölcsönhatások közvetítőrészecskéi.

A fermionokat tömegük szerint 3 db 4 fős családba csoportosítják, melyek 2 kvarkot és 2 leptont tartalmaznak [4, 5]. Ez a 3 családos rendszer nem vezethető le a Standard Modellből. Annak ellenére, hogy számos elmélet kecsegtet magyarázattal (ilyen például a szuperhúrelmélet), eddig ismeretlen, hogy létezik-e egyfajta mélyebb törvényszerűség, ami megmagyarázza ezt a fajta hierarchiát, netalán léteznek-e további családok magasabb energiákon.

Jelenleg 4 különböző bozonról és az általuk közvetített 3 kölcsönhatásról, vala-

mint a gravitációs kölcsönhatásról van tudomásunk, melyek meghatározzák az egész ismert fizikát. Az erős kölcsönhatás, mely összeköti a kvarkokat, ennek közvetítői a gluonok, az elektromágneses kölcsönhatás, melynek közvetítői a fotonok; a gyenge kölcsönhatás, melynek közvetítői a W és Z bozonok. Feltételezhető, hogy a gravitációs kölcsönhatás terének is megfeleltethető egy részecske, az ún. gravitron [6].

1.2. Az erős kölcsönhatás

A mindennapi anyagot az első csoport részecskéi, pontosabban az up- és down kvarkok, elektronok valamint ezek anti-részecskéi alkotják. Az elektronokat elemi állapotukban figyelhetjük meg, míg az up- és down kvarkok neutronokat, protonokat és mezonokat alkotva fordulnak elő. Az erős kölcsönhatással kapcsolatos egyik kísérleti tapasztalat, hogy nem figyelhetünk meg szabad kvarkokat. Ezt a jelenséget nevezzük kvarkbezárásnak. Jelenleg nincs egyértelmű elméleti magyarázata, hogy a kvarkbezárás miért szükségszerű terméke az erős kölcsönhatásnak.

A kvarkok egy jellemző kvantumszáma az ún. *szín*, amely az elektromágneses töltéssel analóg tulajdonság az erős kölcsönhatásban. A kvarkok lehetsége szín állapotai a piros, a zöld, a kék valamint ezek antiszín párjai. A kvarkokhoz hasonlóan a gluonok is rendelkeznek színtöltéssel, ami színek és antiszínek keveréke. A kvarkbezárás a színek nyelvén úgy fogalmazható meg, hogy a kvarkok csak színek szerinti neutrális csoportokban, ún. *fehér állapotban* létezhetnek. A kvarkok több módon rendeződhetnek kötött állapotba:

- 1. Az első, hogy a kvarkok szín-antiszín párokat hoznak létre, melyeket mezonoknak nevezünk.
- 2. A másik, hogy a kvarkok kvark-hármasokat alkotnak, melyek vagy mind a 3 színt tartalmazzák, vagy mind a három antiszínt, ezeket barionoknak nevezzük (pl protonok és neutronok).
- 3. Nagy energiás ütközések folytán létrejöhetnek a fent említett eseteken felül több kvarkot tartalmazó állapotok (pl. tetra- és pentakvarkok).

A mezonokat és barionokat összefoglalóan hadronoknak nevezzük. A hadronok közötti köcsönhatásokat az erős kölcsönhatás térelméleti modellje, az ún. *kvantumszíndinamika* (QCD) írja le.Az erős kölcsönhatás lehetőséget nyújt a Standard Modell részecskéinek kollektív vizsgálatára laboratóriumi körülmények között (pl. fázisátalakulások vizsgálata) [8]. A QCD-anyag tulajdonságai nagyon fontosak, hiszen a Világegyetemben található hadronanyag tömegének több mint 98%-a magából az erős kölcsönhatásból, és nem a valencia-kvarkok tömegéből származik [9].



1.3. ábra. Hadronok szemléltetése, és osztályozása [7].

Futó csatolási állandó és aszimptotikus szabadság

Egy adott kölcsönhatás erősségét jellemző paraméter az ún. csatolási állandó. Kvantumtérelméletekben a csatolási állandó értéke az energiaskálától függ. Az ilyen csatolást nevezzük futó csatolásnak, $\alpha = \alpha(Q^2)$, ahol Q a kölcsönhatásban átadott impulzus.

A kezdeti nagy energiasűrűségű állapotokban a töltött részecskék egymással való interakcióját érdemben az erős és az elektromágneses kölcsönhatás határozza meg. Ezen két kölcsönhatás elméleti leírását adja elemi részecskék szintjén a kvantumelektrodinamika (QED) és a kvantum-színdinamika (QCD). A két elmélet hasonló, ám egy fontos alapvető különbség, hogy míg az elektromágneses kölcsönhatás végtelen hatótávolságú, addig erős kölcsönhatást csak kis méretskálákon figyelhetünk meg, illetve, hogy a QED-ben szereplő fotonokkal szemben a QCD elméletében megjelennek a közvetítő bozonok közötti kölcsönhatások.

A fent említett különbségek eredményeképp a színkölcsönhatáshoz tartozó mezőt leíró tenzorban az elektromágneses térerősségtenzorhoz képest megjelenik egy extra tag, mely a gluonok közti kölcsönhatásért felelős [10].

QED:
$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$$
,
QCD: $G_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu}^{a} - \partial_{\nu}A_{\mu}^{a} + \alpha_{s}f_{abc}A_{\mu}^{b}A_{\nu}^{c}$, (1.1)

ahol α_s az erős kölcsönhatás csatolási állandója. [11] és A^a_{μ} a különböző színtöltésekkel rendelkező gluonokhoz rendelt vektorpotenciál, az f_{abc} pedig az ezek ún. QCD struktúrafaktora [10].

A QCD esetében szereplő extra tag azt jelenti, hogy a fotonokkal ellentétben a gluonok kölcsönhatnak egymással is. Ennek következménye lesz egy nagyon erősen változó csatolási állandó. Az energia növelésével a csatolás mértéke csökken, aszimptotikusan nagy energiákon meg is szűnik, azaz a részecskék szabad részecskeként viselkednek. Ezt a tulajdonságot aszimptotikus szabadságnak nevezik. Ennek a tulajdonságnak a következménye, hogy extrém magas energiákon a kvarkok közti erős kölcsönhatás csatolása kicsi, így az ilyen – pl. a RHIC-nél és az LHC-nál is megfigyelhető – ütközésekben az erős kölcsönhatást elég perturbációszámítással figyelembevenni. Az erős kölcsönhatásnak ebben a kisenergiás tartományában a perturbatív térelméleti számításokat nem tudjuk alkalmazni, ezért effektív modellekre, illetve numerikus (rácstérelméleti) számításokra kell hagyatkoznunk. Ezzel szemben kis energiákon a kölcsönhatás mértéke jelentős, olyannyira, hogy hétköznapi anyagokban elsősorban ez határozza meg az anyag szerkezetét [9].

A csatolási állandókat ábrázolva megjelenik az ún. Landau-pólus, melyet az 1.4 ábra szemléltet. Az, hogy a csatolási állandók divergálnak, arra enged következtetni, hogy a QCD és QED elméletek önmagukban nem teljesek, és ezek egyesítése az ún. Nagy Egyesített Elmélet lenne alkalmas a kölcsönhatások teljeskörű leírására. Feltételezések szerint ezen elméletben jóval a Landau-pólus alatt levágna a csatolási állandó.



1.4. ábra. QCD és QED csatolási állandója a köcsönhatási energia négyzetének függvényében [12].

1.3. Tapasztalatok a RHIC-nél

1.3.1. A kvark-gluon plazma mint tökéletes folyadék

Mint azt eddig tárgyaltuk, hétköznapi anyagokban a kvarkok színbezárás következtében hadronokat kénytelenek kialakítani, ám extrém magas hőmérsékleten és nyomáson hadronanyag nem létezhet. Ezt a megállapítást a német fizikus, Rolf Hagedorn tette, miután felfedezte, hogy a tömegspektrum rezonáns állapotokon keresztül exponenciálisan növekvő tendenciát mutat. Hagedorn levezette, hogy a hadronos anyag állapotösszege divergálni fog egy kritikus T_H hőmérsékleten (formálisan: $\lim_{T \to T_H^-} \sum_{\mu} e^{-\beta(T)\langle H \rangle_{\mu}}$). Az ellentmondás úgy oldható fel, ha feltételezzük, hogy a hadronanyag egy fázisátalakuláson megy keresztül, amely – Hagedorn számításai alapján – közelítőleg 158 MeV hőmérsékleten játszódik le [13].

Az aszimptotikus szabadság jelensége tükrében az elméleti várakozás az volt, hogy a QGP ideális gázhoz hasonlóan gyengén csatolt kvarkokból álló közeg lesz [14]. Egy hűlő közeg esetében miután az energiasűrűség, illetve a kétrészecske-folyamatokban végbemenő energiacserék mértéke lecsökken, akkor növekszik a kölcsönhatás erőssége. Végül elérve egy kritikus értéket, a kvarkok és gluonok között már olyan erőssé válik a kölcsönhatás, hogy nem képesek szabad transzlációra, ehelyett bezárulnak egy-egy hadron (mezon, barion, antibarion) belsejébe.

A QGP rövid életidejének köszönhető, hogy magát a QGP-t nem lehet direkt módon kimutatni, így az ütközés során kis térfogatban létrejövő tágulása során hűlő majd hadronizálódó anyagból távozó részecskék detektálásából, valamint ezek pályájának visszakövetéséből következtethetünk a QGP-re.

Brookhavenben, a Relativistic Heavy Ion Collider-nél (RHIC) 2000-től folyó kísérletek szolgálnak a QGP első meggyőző bizonyítékának, bár kvark-anyagra (QM) utaló jeteket már a CERN szuper protonszinkrotron (SPS) gyorsítójának működése során is megfigyeltek. Egy a RHIC eredményeiből kapott szórási mintát, illetve ezen részecskék életútjának visszakövetésével számolt pályákat láthatunk az 1.5 ábrán. Az 1.5-ös ábrán egy képet láthatunk az RHIC-ből, mely Au-Au ütközések során



1.5. ábra. Au-Au ütközés során létrejött QGP a STAR kísérletei során [15].

létrejövő QGP szórási képét mutatja be. A RHIC-nél végzett kísérletekben a nagyszámú események részecsketermelésének tanulmányozása az elméleti várakozásokkal szembenálló, nem várt kollektív jelenségeket mutatott ki.

A QGP viselkedését leíró nagy mértékű kollektivitás megérthető a késői, lágy folyamatok eredményeként. Az ilyen folyamatokra sok kis impulzusú részecske a jellemző, és leginkább hidrodinamikai modellekkel, pontosabban egy tökéletes (viszkozitásmentes) folyadék modelljével írhatók le, melyben a szabadsági fokok az egyes kvarkok [16].

1.3.2. Jet-elnyomás

Az előző alfejezetben taglalt kollektív viselkedéssel szemben a ütközések korai stádiumában a kemény folyamatok dominálnak,melyekre kevés nagy energiájú parton a jellemző; ezek során a részecskék többnyire jól ismert folyamatok során lépnek interakcióba. Ezen korai lefolyású folyamatok jellemzően nagy áthatolóképességgel rendelkeznek, emiatt használhatjuk őket a plazma átvilágtás útján a közegbeli módosulás vizsgálatára.

Ezek a jetek többnyire párokban keletkeznek, és impulzusmegmaradás következtében közel ellentétes impulzussal távolodnak egymástól. A RHIC eredményei alapján nagy transzverzális impulzussal¹ ($p_T \gtrsim 2 \text{ GeV/c}$) rendelkező részecskék ütközését vizsgálva azt tapasztaljuk, hogy a centrális Au-Au ütközéseknél nem lesz megfigyelhető a karakterisztikus 2-jet séma. ² Az ilyen ütközésnél magas p_T mellett az egyik



1.6. ábra. Jet párok proton-proton és arany-arany ütközéseknél (jet quenching) [17].

jetet jelentősen elnyomják. Ez a "jet quenching", vagy jet elnyomás jelensége, ezt szemlélteti az 1.6 ábra is. Az, hogy csak Au-Au ütközéseknél volt megfigyelhető ez a jelenség, arra enged következtetni, hogy a jetek nagyon rövid távon elnyelődnek a hadronanyagban.

1.4. Váratlan jelenségek pp ütközéseknél

A nagyenergiás magfizikában a proton-proton ütközések megértése nagyon fontos, mert ezek referenciául szolgálnak a nehézion-ütközésben észlelt maganyag-módosulás

 $^{^1\}mathrm{Egy}$ részecske transzverzális impulzusán a detektort
engelyre merőleges impulzus komponenst értjük, jele: p_T

 $^{^2\}mathrm{A}$ centrális ütközések olyan ütközések, melyekben a részecskék közel frontálisan találják el egymást.

megértéséhez. Kutatások bebizonyították, hogy a proton-proton ütközések során, nagy multiplicitású eseményekben létrejövő részecskék kollektivitást mutatnak. Ez a kollektivitás kellően nagy multiplicitás esetén elér egy olyan jelentős mértéket, hogy a keletkezett hadronokra makroszkópikus leírás (termo- és hidrodinamikai számítások) alkalmazhatóak [18]. Azaz a nagy multiplicitású proton-proton ütközésekben keletkező részecskék QGP-szerű viselkedést mutatnak.

A közelmúltban folyó kutatások megállapították, hogy a nehéz kvarkok keltésének multiplicitás-függése erősen nem lineáris magas multiplicitású eseményekben. Modellszámítások ezt a nagy multiplicású eseményekben jelentős sokpartonkölcsönhatásokkal és a megnövekvő gluonsugárzással magyarázzák [19]. A sokpartonkölcsönhatások jelenléte viszont felveti, hogy proton-proton ütközésekben a jetek szerkezete is módosul [20]. Ez a jelenség párhuzamot von a pp ütközések és nehézion ütközések között. Így azon túlmenően, hogy a pp ütközések alapvető partonparton kölcsönhatások vizsgáltát teszik lehetővé, magas multiplicitáson az azonos multiplicitású nehézionok-ütközésekhez hasonló viselkedést mutatnak.

Érdekes kérdés, és jelenleg is folynak a kutatások annak megértésére, hogy ezek a viselkedések azzal magyarázhatóak-e, hogy létezik QGP, vagy esetleg amit korábban erre utaló szignatúrának hittünk, az nem implikálja a QGP létezését.

1.4.1. Sokparton-kölcsönhatások

A kemény folyamatokat általában egyszerű kvark-kvark vagy gluon-gluon ütközések (2-2 folyamatok) jellemzik, mely során erős kölcsönhatáson keresztül (gluonok közvetítésével) impulzusátadás történik a két kvark között. A reakció későbbi lépéseiben fokozatosan megjelennek a lágyabb folyamatok, melyeket effektív modellek segítségével írhatunk le. A kemény és lágy folyamatok határánál olyan kölcsönhatások zajlanak le, melyeket bonyolultabb, összefüggő gráfokkal lehet szemléltetni. Ezekben a több lépéses folyamatokban nem csak egy kölcsönhatás zajlik le egy-egy parton között, ehelyett több parton hat kölcsön egymással úgy, hogy a köztük lévő impulzuscsere viszonylag alacsony. Ezen kölcsönhatásokat nevezzük sokparton kölcsönhatásnak (multi-parton interactions,továbbiakban MPI). Egy ilyen folyamatra láthatunk példát az 1.7 ábrán.

A sokparton-kölcsönhatások szerepe különösen jelentős a nagymultiplicású eseményekben, ahol párhuzamosan zajló kemény folyamatok között teremt kapcsolatot, valamint az MPI jelensége magyarázatot ad részben a kollektív viselkedés megjelenésére [22]. Továbbá megmagyarázza azt a kísérleti tapasztalatot, hogy a nehéz kvarkok számaránya a lineárisnál erősebben függ a multiplicitástól [19].



1.7. ábra. MPI szemléltetése ún. *Feynman-gráffal* egy példafolyamatban [21].

2. fejezet

Módszerek

2.1. Jetszerezetek multiplicitásfüggésének vizsgálata

Egy esemény multiplicitásán az adott eseményben keltett másodlagos részecskék számát értjük. Ezek proton-proton ütközéseknél leginkább pion, kaon és proton részecskéket, illetve ezek antirészecskéit jelentik. Különböző multiplicitás-osztályokra bontva az eseményeket azt láthatjuk, hogy nagy multiplicitású eseményeknél a protonproton ütközések sok hasonlóságot mutatnak a nehézion ütközésekkel.

2.1.1. Fázistér és szög szerinti korrelációk

Annak érdekében, hogy megértsük a nagy energián végbemenő ütközésekben a részecske kölcsönhatásokat, vissza kell tudnunk követni a részecskék mozgását a térben. Napjaink nagyenergiás fizikai méréseiben általában hengeres detektorokat alkalmaznak, melyek több alegységből állnak; ezen alegységekben különböző detektorok segítségével követjük nyomon, illetve határozzuk meg detektor felületébe csapódó részecskék helyzetét, energiáját és impulzusát. Ezzel szemben szimulált eseményeknél a különböző szimulációs szoftverek (például PYTHIA) Monte Carlo módszerrel modellezik a részecskék útját, így egy adott részecskére pontosan megkapjuk a hozzá tartozó fizikai mennyiségeket.

Ahhoz, hogy a részecskék becsapódási helyét precízen meg tudjuk adni egy hengeres detektorban, célszerű bevezetnünk két koordinátát. Ez a két koordináta az azimutszög (Φ) és a pszeudorapiditás (η). Ahogy a 2.1 ábrán is látszik a z-tengely a hengeres detektor tengelye, és az azimutszög a szokásos hengerkoordináta. A polárszög (θ) helyett azonban a pszeudorapiditást szokás használni a következő okból: a gyorsítóban a részecskéink ultra-relativisztikus sebeséggel mozognak a z-tengely irányába, így a detektor koordinátarendszere és az adott részecskéhez rendelt koordinátarendszer közötti Lorentz-transzformáció jelentősen megváltoztatja az impulzus z-komponensének nagyságát, míg a transzverzális impulzuskomponens ettől



2.1. ábra. Szögkoordináták szemléletes jelentése.

viszonylag függetlenül jellemzi a részecskét keltő folyamat impulzuscseréjét. Emiatt érdemes a polárszög koordináta helyett inkább *rapiditást* használni, ami a Lorentztranszformációra nézve additív mennyiség, és az alábbi módon definiáljuk:

$$\varphi = \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_z}{E - p_z} , \qquad (2.1)$$

ahol E az adott részecske energiája. Mivel $E = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$, ezért a teljes energia meghatározása csak a részecskék tömegének ismeretében kivitelezhető, ami sokszor nehézségekbe ütközik, így ultrarelativisztikus esetben $(p \gg m)$ egy jó közelítése a rapiditásnak az ún. pszeudorapiditás, melyet az alábbi módon definiálunk.

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{|\mathbf{p}| + \mathbf{p}_{\mathbf{z}}}{|\mathbf{p}| - \mathbf{p}_{\mathbf{z}}} = -\ln \tanh \frac{\theta}{2} , \qquad (2.2)$$

a gyakorlatban ezen felül, a detektorok kiterjedése véges, így csak bizonyos $|\eta| < A$ határokon belül tudjuk detektálni a részecskéket. Hengeres detektornál ez az A érték jellemzi a detektor akceptanciáját.

2.1.2. Jet-rekonstrukció

A jet egy pragmatikusan definiált fogalom, amely egyezményes definíció alapján megfelelteti a QCD partont a detektorban észlelt hadronzápornak. A jelenleg is folyó kutatásoknál is többféle jet-rekonstrukciós algoritmust használnak a kiértékeléshez.

Az egyik legalapvetőbb a kúp-rekonstrukció, mely során egy nagy energiás részecske által meghatározott tengely körüli, *R* sugarú kúpba tartozó részecskéket definiáluk jetnek, ahol *R*-et önkényesen választjuk meg. Ezen algoritmus használatánál néhány komolyabb elméleti probléma is fennáll, névlegesen az, hogy nem tesz eleget két kritériumnak, melyeket összefoglalóan infravörös és kollineáris stabilitásnak nevezünk [23]. A két megszorítás azt jelenti, hogy a jet-rekonstrukciós algoritmusnak nem szabad érzékenynek lennie a spontán módon (pl. gluonsugárzással) keletkező lágy részecskékre, illetve a nagy energiás részecskék kollineáris hasadására. Éppen ezért újabban ún. szekvenciális kluszterező algoritmusokat használnak, melyek eleget tesznek ezen két stabilitási feltételnek. Ilyen algoritmusok pl. a k_t , az anti- k_t és a Cambridge algoritmusok [23].

2.1.3. Kétrészecske-korreláció

A teljes jet rekonstrukciójával szemben a kétrészecske-korreláció egy jóval egyszerűbb módszer, mely szintén igen hatékony eszköz a fragmentáció során lezajló részecske-termelő folyamatok mechanizmusainak megértéséhez [24].

Ezen korrelációk vizsgálata során egy eseményen belüli részecskék szög-szerinti eloszlását vizsgáljuk a fázistéren. Az eljárás egyik nagy előnye, hogy kis p_T -nél érzékenyebb, mint a jet-rekonstrukciós eljárások [25]. Ehhez az eljáráshoz olyan részecskéket választunk, melyek közül az egyik részecske egy nagy energiás (általában magas p_T -vel rendelkező) trigger-részecske, majd az ehhez a trigger-részecskéhez társított (asszociált) töltött részecskehozamot vizsgáljuk. A feltételezésünk, melyre az egész vizsgálat épül, hogy az egy jetből származó trigger- és asszociált részecskék korrelációja statisztikusan jellemző lesz a kialakuló korrelációs képre.

A kezdeti ütközéseket követő termalizáció és a rendszer transzverzális kiterjedése erős keletkezési pozíció – impulzus korrelációkat eredményez, ami karakterisztikus rapiditás-, transzverzális impulzus – és azimutális szög-szerinti korrelációkhoz vezet a fragmentáció során termelődött töltött részecskék között [26].

A diplomamunkám elkészítése során szög-szerinti korrelációval, ezen belül is az egydimenziós marginális eloszlásokkal foglalkoztam behatóbban, mivel ebben az esetben stabilabb eredményeket kaptunk, mint két dimenzióban, ahol a $\left(\frac{1}{N}\frac{d^2N}{d(\Delta\eta)\cdot d(\Delta\phi)}\right)$ spetkrumot vizsgáltam $\Delta\eta, \Delta\phi$ sík felett).

2.1.4. Akceptanciakorrekció

A detektor véges akceptanciája a mérési eredményt torzítja. Ez úgy érthető meg a legegyszerűbben, ha feltételezzük, hogy a részecskék detektorfelületen történő eloszlása egyenletes ($\Phi \sim UNI[0, 2\pi]$ és $\eta \sim UNI[-A, A]$). A tényleges akceptancia spektrumot megfigyelve láthatjuk, hogy ez nem teljesen igaz, viszont az általunk vizsgált tartomány jelentős részén jó és elméletileg egyszerűen leírható közelítést ad az η eloszlásáról. Ezen közelítés eredménye, hogy a trigger-részecskéhez viszonyított $\Delta \Phi$ és $\Delta \eta$ paraméterek eloszlása két egyenletes eloszlás különbsége. Az azimutszög paraméterében ez nem okoz semmiféle statisztikus hibát, hiszen ez a paraméter 2π -ben periodikus. Ezzel szemben az η esetén $\Delta \eta$ eloszlása nem egyenletes.

A fenti gondolatmenet alapján a korrekció a $\Delta \eta - \Delta \Phi$ sík felett egy $z(\Delta \eta) = \frac{1}{2A} - \frac{1}{2A}$

 $\frac{1}{4A^2} \cdot |\Delta \eta|$ egyenletű sátortetővel való leosztása az eredeti spektrumnak (a számítás részleteit az F.1 függelékben mutatom be). Ez persze az akceptanciához közeli $\Delta \eta$ helyeken jelentősen megnöveli az adott binbe eső részecskék számát és egyúttal a hibáját is. A korrekció eredményét a 2.2 grafikonon ábrázoltam.



2.2. ábra. Akceptanciára korrigált azonos oldali korrelációs csúcs kétdimenziós képe.

2.2. Szimulációk

2.2.1. A PYTHIA eseménygenerátor

A munkám során nagy energiás, PYTHIA 8.1 szoftverrel szimulált proton-proton ütközéseket vizsgáltam. A PYTHIA egy eredetileg Fortran nyelven íródott program, melyet egy nagyszabású későbbi frissités során C++ nyelven megújítottak. A PY-THIA célja a nagyenergiás részecskeütközések során keletkező részecskék életútjának szimulálása Monte Carlo módszerek segítségével. A program az ütközések fizikáját a következő alapvető lépésekben számolja [27]:

- Az alapvető (kemény QCD) fizikai folyamatot vezető rendű perturbációszámítással modellezi.
- Az ezt követő lépésekben partonszinten kezeli többek közt a kezdeti- és végállapoti sugárzásokat és a sokparton-kölcsönhatást (MPI), részben perturbatív, részben fenomenológia modellek segítségével. Ennek a lépésnek a végére kialakul partonszinten a kölcsönhatás végső képe.
- Legvégül a hadronizációs folyamatokat modellezi. Ennek alapját a Lund húrfragmentációs modell képezi. Így alakul ki az ütközés végállapoti képe.

En magam ezek közül a -már a bevezetésben is részletesebben taglalt- sokpartonkölcsönhatással foglalkoztam, illetve az ehhez kapcsolódó szín-rekonekcióval. Különböző szimulációkat futtattunk azonos bemeneti paraméterekkel, melyekben a kizárólagos különbséget az MPI és CR folyamatok figyelembevétele, illetve ezek elhanyagolása jelentette. Ezen felül az összes mérés kezdeti paramétere megegyezett az alább felsoroltakkal.

- Proton-proton ütközések szimulációját végeztük
- A szimuláció során kemény QCD folyamatokat szimuláltunk.
- Az ütközési energia: $\sqrt{s} = 7 \text{ TeV}$
- Akceptancia: |A| < 1.0
- $\hat{p}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{min}} = 5 \ \mathrm{GeV}/c$

Amennyiben a $\hat{p}_{\rm T}^{\rm min}$ paramétert 0-nál nagyobb értékűnek választjuk, úgy azon eseményeket, melyben nincs legalább egy darab $\hat{p}_{\rm T}^{\rm min} = 5 \text{ GeV}/c$ -nél nagyobb impulzuscserével járó kemény folyamat, elvetjük. Erre a beállításra a nagyobb statisztika érdekében van szükség. Ilyen eseményekből összesen 10⁶ db-ot szimuláltunk le egy fájlhoz.

Az így kapott adatokat *root* programcsomag segítségével értékeltük ki, mely egy C++ alapú, kifejezetten a nagyenergiás fizikai kísérleteknél szimulációra, adattárolásra, adatkiértékelésre és az eredmények vizuális megjelenítésére használt programcsomag.

2.2.2. MPI és színrekonnekció a PYTHIA-ban

Hogy helyes eredményre vezető szimulációkat legyünk képesek futtatni, mindenképpen figyelembe kell vennünk az MPI jelenségét, ám ezen túlmenően is egy extra korrekciót kell alkalmaznunk a kölcsönhatásoknál, ezt nevezzük color reconnectionnek (továbbiakan CR). Az MPI numerikus megvalósítása során ugyanis egymással átfedő szín-erővonalak jöhetnek létre. A CR ezeket egyszerűsíti a színtöltések újrarendezésével [28]. Ezen korrekció megvalósítására többféle heurisztikus modell van.

Monte Carlo szimulációknál az MPI és a CR kulcsfontosságú jelenségek, melyek alapjaiban határozzák meg a szimulált eseményekből származó szórásképet. Szimulációk során ezen folyamatok ki-/bekapcsolásával vizsgálhatjuk a szimulált szórási kép változását, mely így az éppen aktuális folyamatok hatását fogja reprezentálni, így mélyebben, egymástól szeparáltan is megérthetjük ezen effektusok hatását.

2.3. Kétrészecske-korrelációk

2.3.1. Részecskék kiválogatása

A fentebb taglalt szimulációkon több szelekciót is végeztem az alábbi főbb paraméterek szerint:

- Részecske azonosítás
- Akceptancia
- Transzverzális impulzuskomponens

Részecske azonsítás alapján vett szelekció

A részecskék PDG azonosítóját használva az analízis elvgézéséhez kiválogattam a pionokat. Ez azért ésszerű választás, mert a pionok képviselik a keletkező részecskék közel 90%-át, míg a többi gyakori (pl. kaonok) mezon nyugalmi tömege már összemérhető lehet a transzverzális impulzusukal, ami torzítja a keletkező korrelációs képet [9].

Akceptancia

Az elméleti bevezetőben is taglalt akceptancia szerinti szelektálás szükségszerű feltétele a szimuláció kiértékelhetőségének gyakorlati szempontból. Ezzel együtt behoz egy statisztikus hibafaktort, amit a későbbi részekben részletesebben kifejtek. A programban természetesen az akceptancia egy állítható paraméter, melyet én minden esetben A = 1.0-nak vettem.

Transzverzális impulzuskomponens

A transzverzális impulzuskomponens meghatározza a részecske energiáját illetve a keletkezéstől a detektálásig eltelt várható időt (Time Of Flight). Értelemszerűen rövid idő alatt a nagy energiás részecskék eltérülése kisebb, így az ilyen magas p_T -vel rendelkező részecskéket használhatjuk triggerként, mely feltételezéseink szerint jó közelítéssel meghatározza a jet tengelyét.

Itt különböző trigger és asszociált részecskék kiválasztásánál figyelni kell arra is, hogy a trigger részecskék impulzusa – definíció szerint – mindig nagyobb legyen az asszociált részecske impulzusánál.

2.3.2. Korrelációk csúcsok vizsgálata

A korrelációk vizsgálatához először a megfelelő szelekciós lépésekkel trigger részecskét kell találnunk. Itt – mivel általában nem igaz, hogy pontosan egy részecske felelne meg a trigger kritériumainak – az összes megfelelő részecskével elvégezzük az analízist, ami persze azt eredményezi, hogy el kell végeznünk egy normálást is. Ezt a normálást úgy valósítottam meg, hogy nem az egyes eseményeket normáltam az adott eseménybe tartozó trigger részecskék számával, ehelyett globálisan az összes trigger részecske számával osztottam le a kész hisztogrammot. Ez azt eredményezi, hogy a nagy energiájú, magas centralitású ütközések során létrejövő magas p_T -vel rendelkező részecskéket nagyobb súllyal (az adott események triggereivel arányosan) veszem figyelembe.

A fent taglalt korrelációs eljárással kapott adatokból meghatároztam az $\Delta \eta$, $\Delta \Phi$ és $\Delta r = \sqrt{\Delta \eta^2 + \Delta \Phi^2}$ értékek eloszlását illetve a fázistéren értelmezett $\frac{d^2 N}{d\Delta \Phi \cdot d\Delta \eta}$ spektrumot. Előbbieket egy 1 dimenziós grafikonon ábrázoltam, ezt szemlélteti a 2.3 ábra.



2.3. ábra. Szögkoordináták szemléletes jelentése.

A vártaknak megfelelően a trigger részecskékhez képest kis szögben eltérülő részecskék egy határozott, közel Gauss-os csúcsot mutatnak. Ezt a $\Delta \Phi = 0$ körüli csúcsot hívjuk azonos oldali csúcsnak.

A színtöltésmegmaradás következménye, hogy a jetek többnyire párokban keletkeznek (lehet gluonsugárzás is), melyek közel-ellentétes irányba haladnak. Ebből a jetből származó $\Delta \Phi = \pi$ körüli csúcsot nevezzük átellenes oldali csúcsnak. Az átellenes oldali csúcs viszont a fent leírt korrelációs eljárással nem figyelhető meg $\Delta \eta$ -irányban, mivel ebben az irányban a jet "szétkenődik"

2.4. Multiplicitás- és impulzusosztályok megválasztása

A részecskéket 5 db különböző impulzus-osztályba soroltam, melyek közül a legmagasabb p_T^{assoc} -vel rendelkező részecskék osztályát választottam a trigger-részecskék osztályának is. Ezekre az osztályokra vonatkoztatva végeztem minden további vizsgálatot. A p_T^{assoc} osztályok megválasztását az ALICE mérésekhez hasonlóan választottuk meg a jobb össszehasonlíthatóság érdekében [19, 29]. A kapott négy osztály intervallumait az alábbi táblázat foglalja össze; itt a 4. p_T^{assoc} osztályba esnek a használt trigger részecskék is.

	1. osztály	2. osztály	3. osztály	4. osztály
p_T^{assoc} intervallumok [GeV/c]:	1 - 2	2 - 3	3 - 4	4 - 8

2.1. táblázat. p_T^{assoc} osztályok

Az osztályhatárok kiválasztásánál ügyelnünk kellett arra, hogy az analízist részecskepárokra normáltan készítjük. Az adott esemény multiplicitása és az eseménybe tartozó részecskék átlagos transzverzális impulzusa között egy szigorúan monoton növekvő függvény teremt kapcsolatot, így a multiplicitás-osztályok meghatározáshoz a p_T^{assoc} osztályok közül a legalacsonyabbra és a legmagasabbra készítettünk egy spektrumot, amelyből igyekeztünk a részecskepárok egyenletes eloszlását figyelembevéve, optimálisan meghatározni a multiplicitás-osztályokat. Egy ilyen spektrumot ábrázoltam a 2.4 grafikonon.



2.4. ábra. Trigger és asszociált részecske párok normált gyakorisága $p_T \in [5 \text{ GeV}/c, 8 \text{ GeV}/c]$ intervallumba eső trigger esetén. A piros görbe $p_T^{assoc} \in [1 \text{ GeV}/c, 2 \text{ GeV}/c]$ míg a kék görbe $p_T^{assoc} \in [5 \text{ GeV}/c, 8 \text{ GeV}/c]$ transzverzális impulzusú asszociált részecskékre nézve.

Az általunk ideálisnak talált multiplicitás- osztályokat ez alapján a 2.2 táblázat tartalmazza.

	1. osztály	2. osztály	3. osztály	4. osztály	5. osztály
multiplicitás intervallumok:	0-25	26-30	34-41	42-50	51-

2.2. táblázat. multiplicitás osztályok

2.5. A korrelációs csúcsok szélességének meghatározása

Ebben az alfejezetben az analízis során kapott osztályozott részecskék eloszlását értékeltük ki olyan módon, hogy adekvát (fizikai tartalommal bíró) függvények illesztésével meghatároztuk a korrelációs csúcsok szélességét, majd a szimuláció különböző bemeneti paramétereit változtatva vizsgálom ezen szélességek változását. A korrelációs csúcsok szélességére jellemző paraméter feltételezéseink szerint erős p_T^{assoc} - és multiplicitás-függést mutat.

2.5.1. Gauss csúcs konstans háttérrel

Egy egyszerű közelítés, hogy feltételezzük, hogy a részecskekorrelációt kialakító mechanizmusra érvényes a centrális határelosztlás tétele. Ez alapján az egyes részeckék becsapódási helyei normális eloszlású valószínűségi változók.

Továbbá feltehetjük, hogy a részecskék eloszlásai azonos eloszlású, a transzverzális impulzustól független normális valószínűségi változók; ekkor a részecskék a meghatározott jet-tengely mentén is normális eloszlás szerint fognak szóródni. A taglalt feltételezésekkel élve a csúcsra egy egyszerű haranggörbét illesztettünk ($\rho(x; \mathbf{p}) = p_0 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-p_1}{p_2}\right)^2} + p_3$), ahol a félértékszélesség: $FWHM = \sqrt{8ln(2)} \cdot p_2$. Itt a hátteret egyenletes eloszlásúnak tekintettük, ami egy egyszerű közelítés, így a háttér illeztését a p_3 konstans taggal végezzük el. Az eredményekben feltüntetett statisztikus bizonytalanság a root által használt MINUIT algoritmus illesztési bizonytalansága. Az illesztésekből néhány eredményt a 2.5 ábrán mutatunk be.

Az illesztéseket vizsgálva (MPI:on, CR:on beállítások mellett) tendenciaként megfigyeltük, hogy $\Delta \eta$ estén magasabb energiájú asszociált részecskék vizsgálatánál feltűnően jobb illesztéseketkaptunk (a χ^2/ndf érték lecsökkent), azaz ezen részecskék korrelációját kialakító folyamatok jó közelítéssel eleget tesznek a centrális határeloszlás tételének. $\Delta \phi$ -irányban nagyjából multiplicitás és p_T^{assoc} függetlenül hasonlóan jól illeszkedő illesztéseket kapunk, melyek szinte minden esetben pontosabban írják le az eloszlást, mint $\Delta \eta$ esetben. Ugyanígy az illesztések nagy multiplicitású eseményekben létrejött alacsony transzverzális impulzussal rendelkező asszociált részecskék esetén adja a leggyengébb eredményt. Ebben az esetben feltételezéseink szerint ekkor erősen sérülnek a Gauss-eloszlás feltételei, azaz ezen részecskék becsapódási helyei korrelálnak vagy nem azonos eloszlásúak. Erre a kérdésre később adunk magyarázatot a 2.5.3 alpontban.

A kapott diagrammokon is látható, hogy az egyszerű Gauss-illesztés pontatlanul írja le a kapott csúcsot, mivel a spektrumban a Gauss görbéhez képest megjelenik egy "váll", ami torzítja az illesztés eredményét. Bár a Gauss-illesztés nem tökéletes, de az eredmény szempontjából fontos, mert jól lokalizált csúcsokat kapunk, így a jel



2.5. ábra. Azonos oldali korrelációs csúcs $\Delta \phi$ - és $\Delta \eta$ -irányú kiterjedése különböző p_T^{assoc} és $N_c h$ osztályokban. Az ábrán a Gauss illesztést mutatjuk be konstans hátteret feltételezve.

a hátértől jól elkülöníthető.

2.5.2. Gauss csúcs másodfokú háttérrel

Folytatva a korábbi gondolatmenetet a kapott eloszlásokon megjelenő "vállat" kezelhetjük együtt a háttérrel, így pontosabb illesztési eredményt kaphatunk a csúcsok kiterjedésére. Ezzel a feltételezéssel élve a hátteret egy másodfokú polinómmal közelítettük. Az illesztett függvény alakja így: $\rho_2(x; \mathbf{p}) = p_0 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-p_1}{p_2}\right)^2} + p_3 + p_4 x + p_5 x^2$.

Magát a görbék illesztését több lépésben tettük meg, mivel így minden esetben pontosabb eredményeket kaptunk, mint az egy lépéses illesztésel. Először a kezdeti paramétereket határoztuk meg egy kifejezetten a csúcsra illesztett, konstans tag nélküli Gauss-görbe illesztésével. Itt, hogy a hátteret kiszűrjük - és ezáltal minél pontosabb kezdeti paramétereket kapjunk az illesztésből - az alapesetben vizsgált $\Delta \eta \in [-1, 1]$ és $\Delta \Phi \in [-\pi/2, \pi/2]$ intervallumok helyett egy szűkebb, kifejezetten



2.6. ábra. Azonos oldali korrelációs csúcs $\Delta \phi$ - és $\Delta \eta$ -irányú kiterjedése különböző p_T^{assoc} és $N_c h$ osztályokban. Az ábrán a Gauss illesztést mutatjuk be másodfokú polinomiális háttérrel.

a csúcsok kiterjedéséhez választott $\Delta \eta, \Delta \Phi \in [-0.3, 0.3]$ intervallumot használtunk. Két ilyen illesztéspárt szemléltet a 2.6 ábra.

A parabolát a háttér határozza meg, paraméterei szabadságot hagynak a szűk értelemben vett korrelációs csúcs pontosabb megtalálásának, ami már nem tartalmazza a hosszú távú komponenseket.

Bár az illesztések szemre elég jónak tűnnek, a χ^2/ndf értékek itt is 10-es érték köré esnek. Ennek az egyik oka, hogy a csúcstól távol bizonyos binekben a beütésszám nagyon alacsony, és a Poisson-eloszlásra alapuló regresszió feltételei nem teljesülnek. Jellemzően ez nem szokott gondot okozni, azonban az akceptanciakorrekció ezeknek a beütéseknek a relatív súlyát jellentősen megnöveli. Ezzel együtt láthatóan a másodfokú polinomiális háttér feltételezésével jobb illesztési eredményeket kapunk, mint kontans háttér esetén. Számokkal kifejezve ez azt jelenti, hogy a χ^2/ndf értéke 10-60%-kal csökkent az új illesztés hatására, így ezt a fajta illesztést egyelőre elfogadjuk, mint a spektrumokat általánosan leíró görbe.

2.5.3. Szimmetrikus Lévy-eloszlás

Mint korábban említettük a, Gauss-illesztések nem pontosak, mivel az ehhez szükséges feltételek sérülnek. A feltételek sérülésének legfőbb oka, hogy részecskék korrelációja számos időben és térben elkülönülő folyamatból származik: kezdeti állapotok korrelációja, parton fragmentációja, valamint a hadronok másodlagos szóródásai.

A kialakult spektrum valójában nem egy, hanem több Gauss-függvény egymásra rétegződéséből, konvolúciójából származik. Korábbi kutatások arra az eredményre jutottak, hogy általánosan növekvő méretű forrás szórásképét egy szimmetrikus eloszlás/függvény halmaz segítségével írhatjuk le[30, 31]. Ezt az eloszláshalmazt nevezik *szimmetrikus Lévy-eloszlásnak*. Az eloszlásfüggvényeket az alábbi Fourierintegrállal definiáljuk [30]:

$$\mathcal{L}(x;\alpha,R) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{iqx} e^{-\frac{1}{2}|qR|^{\alpha}} , \qquad (2.3)$$

ahol az R paramétert skálaparaméternek nevezzük, míg az α paramétert stabilitási paraméternek. $\alpha = 2$ esetén belátható, hogy a szimmetrikus Lévy-eloszlás átmegy normális eloszlásba, $\alpha = 1$ esetén Cauchy-eloszlásba. Megmutatható az is, hogy $\alpha < 2$ esetén különböző hatványfüggvény szerinti viselkedést produkálnak.

Számunkra az említett két eset lesz fontosabb, vagyis az $\alpha = 1$ és $\alpha = 2$ esetek. Korábban a gauss-illesztések kapcsán megemlítettük, hogy megjelenik egy "váll" a Gauss-görbéhez képest, amely a növekedő forrás következménye, és Gausseloszláshoz képest kisebb stabilitású Lévy-eloszlást sejtet. Általánosan szimmetrikus Lévy-eloszlást nehéz illeszteni, mivel ezt a függvényhalmazt egy Fourier-integrál segítségével definiáljuk, így csak az egyszerűbb $\alpha = 1$ kisebb stabilitású szimmetrikus Lévy-eloszlást feltételezve vizsgáljuk meg a kapott spektrumot. Ez az eloszlás, amit tárgyalunk a Cauchy eloszlás (Lorentz-görbe).

2.5.4. Illesztés Cauchy-függvénnyel

A Cauchy-eloszlás az $\alpha = 1$ paraméterű szimmetrikus Lévy eloszlás. Így az illesztett függvény alakja: $\rho_3(x; \mathbf{p}) = \frac{p_0}{1 + \left(\frac{x-p_1}{p_2}\right)^2} + p_3$, ahol a félértékszélesség: $FWHM = 2p_2$.

A Cauchy-eloszlás a Gauss-hoz képest egy "elnyújtottabb" sűrűség-fügvénnyel rendelkezik, így optimális lehet az általunk vizsgált spektrumok leírására. Ilyen illesztésekre láthatunk néhány példát a 2.7 ábrán.



2.7. ábra. Azonos oldali korrelációs csúc
s $\Delta \phi$ - és $\Delta \eta$ -irányú kiterjedése különböző
 p_T^{assoc} és N_ch osztályokban. Az ábrán a Cauchy illesztést mutat
juk be konstans hátteret feltételezve.

Míg a Gauss a másodfokú háttérrel a szűk értelemben vett csúcsot illeszti, a Cauchy a teljes folyamatra ad egy jellemző meghatározó szélességet (éppen ezért a fizikai interpretációja is nehezebb).

3. fejezet

Eredmények

3.1. MPI és CR hatása a korrelációs csúcsra

A szimulációs adatanalízisem célja, hogy a jetszerkezetnek a sokparton-kölcsönhatások miatti módosulását vizsgáljam, illetve megnézzem, hogy ez a módosulás érzékenye a szimulációban alkalmazott színrekonnekciós mechanizmusra. Ehhez az alábbi három beállítással vizsgáltam a szimulációs mintákat:

1	MPI:on	CR:on
2	MPI:on	CR:off
3	MPI:off	CR:off

Ismerve a CR és MPI jelenségét következtethetünk a statiszitkára és a csúcsok szélességének változtatására. Az MPI folyamatok jellemzően nagyobb multiplicitású eseményekhez vezetnek, hiszen a kemény folyamatok között kapcsolatot teremtve lágyabb részecskéket keltenek. Ugyanakkor az MPI kikapcsolásakor a szimulált részecskék transzverzális impulzusa jellemzően nagyobb lesz a bekapcsolt esetben keletkezőkhöz képest.

Továbbá azt várjuk, hogy a fizikailag helyes eredményre vezető MPI:on és CR:on beállítások mellett futtatott szimulációnál egy adott p_T^{assoc} osztályban a multiplicitás függvényében a csúcsok kiterjedése növekszik, mivel nagyobb multiplicitású eseményekben lezajló magasabb számú MPI folyamat során a jet fragmentációjának kezdeti lépéseiben sok szóródás megy végbe, melyek következményeképp a jet szélessége a jet-tengely mentén megnövekszik. Ugyanígy az MPI kikapcsolásával azt feltételezzük, hogy megszűnik a csatolás a különböző jetek között, azaz ezen beállításból kapott eredmények nem lesznek megkülönböztethetőek attól az esettől, mintha több kis multiplicitású esemény képének összegét vizsgálnánk.

Mivel a Gauss-eloszlás egyszerű konstans háttérrel $\Delta \phi$ irányban írta csak le megfelelően az analízis során kapott korrelációs csúcs-szélességeket, a további két illesztett függvényalak alapján tárgyaljuk a kapott eredményeket. Ezek a Cauchy-eloszlás kostans háttérrel és a Gauss-eloszlás másodfokú polinumiális háttérrel. Az illesztéseket minden p_T^{assoc} osztály és multiplicitás osztály beállítás mellett (összesen 20 beállítás) lefuttattuk, majd az adott p_T^{assoc} osztályokra ábrázoltuk a korrelációs csúcsok szélességét a multiplicitás függvényében. A továbbiakban a két illesztést külön tárgyaljuk, majd összevetjük a különböző illesztésekből kapott eredményeket.

3.1.1. A fragmentációs csúcs: Gauss illesztés

A Gauss-illesztés során másodfokú polinomiális hátteret feltételeztünk, így a Gaussgörbe a feltételezett fragmentációs csúcsot írja le hosszútávú komponensek mellőzésével. Az eredményeket a 3.1 ábra szemlélteti. Az elvárásainknak megefelelően a csúcsszélességek p_T^{assoc} -függését vizssgálva megfigyelhető, hogy a csúcsszélesség az asszociált részecskék transzverzális impulzusai szerint jól szeparált osztályokat alkotnak, ami megerősíti a hipotézisünket, miszerint a nagyobb impulzusú részecskék kevésbé térülnek el a feltételezett jet-tengely mentén.

A multiplicitásfüggést vizsgálva az eredményeken kis mértékben ugyan, de észrevehető egy növekedési tendencia az MPI bekapcsolásának hatására. Ez a tendencia szignifikánsabb magasabb p_T^{assoc} osztályokba tartozó asszociált részecskék esetén, és egyáltalán nem jelentkezik MPI:off beállítás mellett, ekkor jó közelítéssel konstans értékeket kapunk.

3.1.2. A teljes korrelációs folyamat szélessége: Cauchy-eloszlás

A Cauchy-eloszlás szélessége a teljes korrelációs folyamatra jellemző. Az illesztések eredményén (3.2 ábra) megfigyelhető még, hogy mindkét irányban MPI: on beállítás mellett a CR: on beállítással nagyobb korrelációs csúcsszélességet kapunk, mint CR: off beállítás mellett. Érdekes továbbá, hogy mindhárom beállítás mellett, mind $\Delta \eta$ -, mind $\Delta \phi$ -irányban a legnagyobb relatív növekményt a legmagasabb p_T^{assoc} osztálynál figyelhetjük meg

Multiplicitás szerint nézve a $\Delta \eta$ -irányban a korrelációs csúcsok szélessége nagyon szépen mutatja a várt eredményeket. MPI:on esetén a görbék egyértelmű növekedést mutatnak, míg MPI:off beállítás mellett a korábbi növekedési tendenciához képest csekély növekedést figyelhetünk csak meg. Ezzel együtt $\Delta \phi$ -irányban egy gyengébb tendenciát kapunk, mely egy $\Delta \eta$ -irányban megjelenő hosszú távú komponenssel magyarázható, ami ebben az iránybn nem jelenik meg.

3.1.3. Az eredmények diszkussziója

Az összes görbealak illesztésénél jól megfigyelhető, hogy minél magasabb p_T^{assoc} tal rendelkező asszociált részecskéket vizsgálunk, a korrelációs csúcsok annál keske-

nyebbek. Ez a partonzápor kialakulásának szög szerinti rendezettségére vezethető vissza [32, 33].

A pontok szórásából valószínűsíthető, hogy az illesztési eljárás a statisztikus hibát valamelyest alulbecsli. Ennek pontos meghatározásához szükség lenne a szisztematikus hibák megbecslésére is, ami túlmutat ezen dolgozat keretein. Azonban a bizonytalanságok nagyságrendileg reprezentatívnak tekinthetőek. Így az eredményekből a főbb tendenciákat meg tudjuk határozni.

Érdekes módon az átfedő színhúzok rövidrezárásának hatása a korrelációra közel sem olyan jelentős, mint a sokparton-kölcsönhatás. Megfigyelhető, hogy CR:off beállításhoz képest CR:on beállítás mellett az azonos oldali korrelációs csúcs p_T^{assoc} függése valamelyest mérséklődik, így p_T^{assoc} osztályok során kapott korrelációs csúcsszélességek között kisebb különbséget kapunk, mint CR:off esetben. Ugyanígy MPI:off esetben is azonos tendenciát figyelhetünk meg.

A hasonlóságok mellett a két illesztés mutat néhány jelentős eltérést. A legkönnyebb ezt a 4 GeV/ $c < p_T < 8$ GeV/c osztályhoz tartozó görbén észrevenni, ugyanis -ahogy korábban is kifejtettük- a négy p_T^{assoc} osztály közül ez az osztály mutatja a legnagyobb relatív változást, így feltételezésünk szerint érzékenyebb az MPI és CR beállításokra, mint a kisebb p_T^{assoc} osztályok.

Jól látható, hogy ezen osztály MPI: on beállítás mellett erős növekedést mutat mind Cauchy, mind pedig Gauss+parabola illesztések esetén, ám míg Cauchy-illesztésnél tapasztalunk növekedést MPI: off beállítás mellett $\Delta \eta$ -irányban, addig Gauss esetén nem. Ez annak a következménye, hogy míg a Gauss illesztés esetén a Parabola háttér gyakorlatilag egy hosszútávú (long-range) komponens, melyet levonva kapjuk az ettől elkülönített csúcs kiterjedését leíró p_2 paramétert, addig Cauchy-illesztésnél az eloszlásokat egyetlen függvény írja le, melynek a p_2 paramétere a kapott korrelációs csúcs szélességével arányos, így tartalmazza ezt a fajta hosszútávú komponenst.

Az a tény, hogy ezt a növekvő tendenciát Cauchy-illesztés esetén is csak $\Delta \eta$ irányban figyelhető meg, arra enged következtetni, hogy csak ebben az irányban van egyfajta hosszabb távú komponens, melyet mi egyszerű közelítésben egy parabolával írtunk le. Továbbá a vizsgált iránytól függetlenül a Cauchy-illesztéssel az MPI erőteljesebben megnöveli a csúcsok szélességét, mint a Gauss-illesztés esetén, azaz szignifikánsabban módosul a teljes, hosszútávú komponenseket tartalmazó háttérel együtt kezelt korrelációs csúcs, mint a szűkebb értelemben vett fragmentációs csúcs. Ebből az következik, hogy az MPI erőteljesebben figyelhető meg a reakció korai fázisaiban, azonban a fragmentációt is kismértékben módosítja. Tehát valóban van egy gyenge jetszerkezet-módosító effektus. Kérdés, hogy az LHC energiákon jósolt jetszerkezeti módosulások valóban a fragmentációs módosulást mutatják-e ki [20].



3.1. ábra. Korrelációs csúcsok $\Delta \phi$ - és $\Delta \eta$ -irányú kiterjedésének multiplicitásfüggése - Gauss+parabola-illesztéssel meghatározott értékek.



3.2. ábra. Korrelációs csúcsok $\Delta \phi$ - és $\Delta \eta$ -irányú kiterjedésének multiplicitásfüggése - Cauchy-illesztéssel meghatározott értékek.

4. fejezet

Összefoglalás

Szakdolgozatomban PYTHIA 8 eseménygenerátorral szimulált $\sqrt{s} = 7 \text{ TeV}$, $|\Delta \eta| < 1.0$, $\hat{p}_T^{min} = 5 \text{ Gev}/c$ paraméterű pp eseményekben vizsgáltam pionok kétrészecskekorrelációját $p_T \in [5 \text{ GeV}/c, 8 \text{ GeV}/c]$ transzverzális impulzustartományba eső trigger részecskékkel. Akceptanciára való korrigálás után p_T^{assoc} osztályokba soroltam az asszociált részecskéket, és multiplicitás osztályokba az egyes eseményeket. Ezután Monte Carlo szimulációknál használt sokparton kölcsönhatás (multiparton interraction) és szín rekonnekció (color reconnection) effektusok hatását vizsgáltam a különböző osztály-beállításokkal kapott azonos oldali (near-side) korrelációs csúcsok szélességére, amiből következtetéseket vontam le az adott effektus hatására végbemenő módosulásokra a jetszerkezetben.

A csúcsok kiterjedését fügvényillesztésekkel határoztam meg, mely során az alábbi illesztett két függvényalakot használtam: $\rho_2(x; \mathbf{p}) = p_0 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-p_1}{p_2}\right)^2} + p_4 + p_5 x + p_6 x^2$ alakú Gauss+parabola-illesztést, valamint $\rho_3(x; \mathbf{p}) = \frac{p_0}{1 + \left(\frac{x-p_1}{p_2}\right)^2} + p_3$ alakú Cauchy-illesztést. A két illesztés között érdemi különbség, hogy míg a Gauss+parabola illesztés külön kezeli a -szigorú értelembe vett- csúcsot a hosszútávú (long-range) komponenst tartalmazó háttértől, addig a Cauchy-illesztés során ezek együttes változásáról kapunk információt. Így a két illesztéssel külön tudtam ezen komponens hatását is figyelembe venni.

Megállapítottam, hogy a $\Delta \phi$ -iránnyal szemben $\Delta \eta$ -irányban szignifikánsan jelentkezik egy hosszútávú komponens az eloszlásban. Továbbá, hogy az MPI folyamatok figyelembevétele nélkül a nagy multiplicitású eseményekben létrejövő részecskék korrelációs képe megegyezik kisebb multiplicitású eseményekből származó szórási képek összegével, míg az MPI figyelembevételével a korrelációs csúcsok szélessége jelentősen nagyobb. Az eredményeim alapján az MPI erőteljesebben figyelhető meg a reakciók korai fázisaiban, azonban a fragmentációt is kismértékben módosítja. Tehát van egy gyenge jetszerkezet-módosító effektus. Kérdés, hogy az LHC energiákon jósolt jetszerkezeti módosulások valóban a fragmentációs módosulást mutatják-e ki [20].

Köszönetnyilvánítás

Mindenekelőtt szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Vértesi Róbertnek, hogy tudásával, hasznos tanácsaival, türelmes segítőkészségével a nehezebb időszakok során is végtelen precizitással és lelkesedéssel segítette kutatásom és támogatta szakdolgozatom létrejöttét.

Továbbá szeretném megköszönni konzulensemnek, Pokol Gergőnek az adminisztratív téren nyújtott segítségeket.

Irodalomjegyzék

- [1] R. Gendler, "Hubble views the star that changed the universe," National Aeronautics and Space Administration, május 2011.
- [2] 1.1 ábra Az univerzum időfejlődése. Forrás: http://www.phy.uct.ac.za/ ctmp/research.
- [3] 1.2 ábra Elemi részecskék táblázata. Forrás: https://www.123rf.com.
- [4] Christine Sutton from CERN and Peter Zerwas from DESY, "The W and Z at LEP," CERN Courier International Journal of High-Energy Physics, május 2004.
- [5] Andrea Venturi from INFN Pisa and CERN, "Physics Results from ALEPH," július 2002.
- [6] R. Nave, "Coupling Constants for the Fundamental Forces," Georgia State University, Department of Physics and Astronomy, Hyperphysics, 2000.
- [7] 1.3 ábra Hadronok szemléltetése, és osztályozása. Forrás: https://www. pinterest.com/pin/391742867572762558/.
- [8] Veres I. Gábor, "Az erős kölcsönhatás kísérleti vizsgálata elemi részecskek és nehéz atommagok ütkozéseinek összehasonlításával," Eötves Lórand Tudományegyetem, Budapest Fizikai Intézet, Atomfizikai Tanszék, szeptember 2011.
- C. Patrignani *et al.*, "Review of Particle Physics," *Chin. Phys.*, vol. C40, no. 10, p. 100001, 2016.
- [10] D. J. Miller, Introductory QED and QCD. University of Glasgow, RAL Summer School, szeptember 2007.
- [11] F. Hautmann, An introduction to QED and QCD. https://www-thphys. physics.ox.ac.uk/people/FrancescoHautmann/Ralhep/ralss10_p.pdf: School, Oxford, UK, 2010.

- [12] 1.4 ábra QCD és QED csatolási állandója a köcsönhatási energia négyzetének függvényében. Forrás: https://en.wikipedia.org/wiki/Landau_pole.
- [13] R. Hagedorn, "Hadronic matter near the boiling point," Nuovo Cim., vol. A56, pp. 1027–1057, 1968.
- [14] Edward V. Shuryak (Novosibirsk, IYF), "Quark-Gluon Plasma and Hadronic Production of Leptons, Photons and Psions," *Phys.Lett.* 78B (1978) 150, Sov.J.Nucl.Phys. 28 (1978) 408, Yad.Fiz. 28 (1978) 796-808, 1978.
- [15] 1.5 ábra Jet párok proton-proton és arany-arany ütközéseknél (jet quenching). Forrás: http://www.quantumdiaries.org/tag/qcd/.
- [16] E. V. Shuryak and O. V. Zhirov, "The tale of the Hagedorn temperature," *Physics Letter B89*, 253, szeptember 1979.
- [17] 1.6 ábra Au-Au ütközés során létrejött QGP a STAR kísérletei során. Forrás: http://gravity.wikia.com/wiki/Quark%E2%80%93gluon_plasma.
- [18] Edward Shuryak, Ismail Zahed, "High Multiplicity pp and pA Collisions: Hydrodynamics at its Edge?," arXiv:1301.4470, január 2013.
- [19] J. Adam *et al.*, "Anomalous evolution of the near-side jet peak shape in Pb-Pb collisions at $\sqrt{s_{\text{NN}}} = 2.76$ TeV," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 119, no. 10, p. 102301, 2017.
- [20] Zoltán Varga, Róbert Vértesi, Gergely Gábor Barnaföldi, "Modification of jet structure in high-multiplicity pp collisions due to multiple-parton interactions and observing a multiplicity-independent characteristic jet size," ar-Xiv:1805.03101, május 2018.
- [21] 1.7 ábra MPI szemléltetése ún. Feynman-gráffal egy példafolyamatban. Forrás: http://gravity.wikia.com/wiki/Quark%E2%80%93gluon_plasma.
- [22] A. Ortiz, G. Bencédi and H. Bello, "Revealing the source of the radial flow patterns in protonproton collisions using hard probes," J. Phys. G 44, no. 6, 065001, 2017.
- [23] Matteo Cacciari, Gavin P. Salam and Gregory Soyez, "The anti- k_t jet clustering algorithm," *JHEP 0804:063, arXiv:0802.1189v2*, április 2008.
- [24] Malgorzata Janik (for the ALICE Collaboration), "Two-particle angular correlations in pp collisions recorded with the ALICE detector at the LHC," ar-Xiv:1402.3988v1, február 2014.

- [25] Thorsten Renk, "Jet correlations opportunities and pitfalls," arXiv:1404.0793, április 2014.
- [26] Sergei A.Voloshin, "Transverse radial expansion in nuclear collisions and two particle correlations," *Physics Letters B Volume 632*, *Issue 4*, pp. 490–494, január 2006.
- [27] Sjöstrand, Torbjorn and Mrenna, Stephen and Skands, Peter Z., "A Brief Introduction to PYTHIA 8.1," Comput. Phys. Commun., vol. 178, pp. 852–867, 2008.
- [28] Sjöstrand, Torbjörn, "Colour reconnection and its effects on precise measurements at the LHC," LU-TP-13-37, MCNET-13-16, 2013.
- [29] M. Varga-Kőfaragó, "Anomalous Broadening of Jet-Peak Shapes in Pb-Pb Collisions and Characterization of Monolithic Active Pixel Sensors for the ALICE Inner Tracking System Upgrade," *ISBN:978-90-393-6940-1*, február 2018.
- [30] D. Kincses, "Lévy analysis of HBT correlation functions in $\sqrt{s_{\text{NN}}} = 62$ GeV and 39 GeV Au+Au collisions at PHENIX," Universe, vol. 4, no. 1, p. 11, 2018.
- [31] V. A. Schegelsky, "Levy analysis of Bose-Einstein correlation in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV measured with the ATLAS," *arXiv:1804.07153*, 2018.
- [32] C. Nestor Armesto, Gennaro Corcella, Leticia Cunqueiro, "Angular-ordered parton showers with medium-modified splitting functions," *JHEP 0911:122,* arXiv:0909.5118, 2009.
- [33] Guido Altarelli (Ecole Normale Superieure), G. Parisi (IHES, Bures-sur-Yvette), "Asymptotic Freedom in Parton Language," Nucl. Phys. B126, pp. 298– 318, 1977.

Függelék

F.1. Akceptanciakorrekció

Akceptanciakorrekció kiszámítás
a $\Delta\eta\text{-}\mathrm{irányban}$ egyenletes valószínűségi változók modelljével.

$$X_1, X_2 \sim UNI[-A, A]$$
, ahol A az akceptancia (F.1.1)

$$f_{X_1}(x) = f_{X_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2A} & \text{ha } |x| < A\\ 0 & \text{egébként} \end{cases}$$
(F.1.2)

$$f_{X_1-X_2}(x) = \int_{-\inf}^{\inf} f_{X_1}(x+x') \cdot f_{X_2}(x') \, dx'$$
(F.1.3)

$$f_{X_1-X_2}(x) = \begin{cases} \int A (\frac{1}{2A})^2 dx' = \frac{2A-|x|}{4A^2} & \text{ha } x < 0\\ A-x \\ \int A-x \\ A-x \\$$

Összegezve:
$$f_{X_1-X_2}(x) = \frac{1}{2A} - \frac{|x|}{4A^2}$$
 (F.1.5)